$r_k \in \langle \mathbf{R}_k, \leq_{\mathbf{R}_k} \rangle$