Centro Paula Souza	CENTRO PAULA SOUZA	10/08/2022 22/08/2022
	MAG004 — ÁLGEBRA LINEAR MAT006 — MATEMÁTICA DISCRETA	HENRIQUE FURIA SILVA
Aula 01	Conjuntos Numéricos	

I — Construção axiomática dos números racionais

Definição 1: No conjunto ($\mathbb{Q}$) dos números racionais, são definidas duas operações binárias e uma relação de ordem que satisfazem as (11) propriedades que definem um corpo algébrico ordenado:

A adição é uma operação binária $+: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que, a cada par de números $\{a, b\} \subset \mathbb{Q}$, associa a soma indicada por $a + b \in \mathbb{Q}$, e que possui as seguintes propriedades ($\forall\{a, b, c\} \subset \mathbb{Q}$):

S1) associatividade da soma: $(a + b) + c = a + (b + c)$

S2) existência do neutro aditivo: $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $(a + 0 = a)$ & $(0 + a = a)$;

S3) existência do inverso aditivo (elemento oposto): $\exists(-a) \in \mathbb{Q}$ tal que $(a + (-a) = 0)$ & $((-a) + a = 0)$

S4) comutatividade da soma: $a + b = b + a$

Vale também a propriedade de **ordem** para a soma:

$$a \le b \Longrightarrow a + c \le b + c$$

A multiplicação é uma operação binária $\cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que, a cada par de números $\{a, b\} \subset \mathbb{Q}$, associa o produto indicado por $a \cdot b \in \mathbb{Q}$, e que possui as seguintes propriedades ($\forall\{a, b, c\} \subset \mathbb{Q}$):

P1) associatividade do produto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

P2) existência do neutro multiplicativo: $\exists 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $(a \cdot 1 = a)$ & $(1 \cdot a = a) \quad \forall a \in \mathbb{Q}$

P3) existência do inverso multiplicativo: $\forall a \in \mathbb{Q}^* \ \exists(a^{-1}) \in \mathbb{Q}$ tal que $(a \cdot a^{-1} = 1)$ & $(a^{-1} \cdot a = 1)$

P4) comutatividade do produto: $a \cdot b = b \cdot a$

Vale também a propriedade de ordem para o produto:

$$(a \le b) \wedge (c \ge 0) \Longrightarrow a \cdot c \le b \cdot c$$

As operações de adição e multiplicação estão relacionadas pelas propriedades distributivas:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

II — Extensão de corpos para os números reais[1]

Definição 2: No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (que é um corpo algébrico ordenado), escolho dois elementos $a < b$, que serão os extremos de um intervalo, definido por um destes conjuntos:

Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \le x \le b\}$

Intervalo semiaberto à esquerda: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \le b\}$

Intervalo semiaberto à direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}: a \le x < b\}$

Além destes, existem os intervalos que vão ao infinito:

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$$
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}: x \ge a\}$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \le b\}$$
$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$$

Definição 3: Uma família de intervalos encaixantes é uma coleção formada por uma sequência infinita de intervalos fechados $I_k = [a_k, b_k]$, construídos de forma recursiva $I_k \subseteq I_{k-1}$ de modo que:

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$$

Considerando como referência o primeiro intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, resulta que:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

4 Axioma da continuidade: Dada uma sequência infinita de intervalos encaixantes $I_k \subseteq I_{k-1}$, existe um único elemento $c \in \mathbb{R}$ que pertence a todos os intervalos I_k. Escreve-se

$$\cap \{I_k\}_{k=0}^{\infty} = \{c\}$$

[1] Adaptado de Pierluigi Benevieri. Cálculo 1. https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT111-18.pdf

II — Funções entre conjuntos

Definição 5: Uma função é uma tripla (A, f, B), que consiste de um conjunto de entrada A, chamado de domínio, um conjunto de saída B, chamado de contra-domínio e uma regra f que estabelece a relação entre os elementos de entrada $x \in A$ que são permitidos e os elementos da imagem $y \in B$ que são obtidos por

$$y = f(x)$$

O domínio da função contém todos os pontos que são admitidos pela regra determinada; pontos fora do domínio são chamados pontos singulares ou singularidades da função. A imagem da função é o subconjunto denotado por

$$Imf = f(A)$$

dos pontos do contra-domínio que são a projeção de algum $x \in A$ pela regra f. Assim:

$$f(A) \subseteq B$$

II — Funções lineares de uma variável real

Definição 6: Uma função $f: A \to B$ é dita linear se, para todos $\{x, x_1, x_2\} \subset A$ e, para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$$
$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Proposição 7: Seja $A \subseteq \mathbb{R}$; todas as funções $f: A \to \mathbb{R}$ lineares são da forma

$$f(x) = a \cdot x$$

para algum $a \in \mathbb{R}$; são de interesse as aplicações em que $a \neq 0$

Corolário 8: Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto dos reais e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função. Então:

$$f \text{ é linear} \qquad \Longrightarrow \qquad f(0) = 0$$

Se f for uma função afim:

$$f \text{ é linear} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(0) = 0$$

1) Aplicações em gestão de vendas

A receita proveniente da venda de um produto é uma função linear com relação à quantidade vendida.

a) Em um posto de combustível, o preço da gasolina é R$______ por litro de combustível, e do etanol, R$______. Escreva a função receita proveniente da venda de cada produto;

b) Um cliente possui em mãos R$ 50,00. Determine a quantidade que ele poderá adquirir de cada combustível;

c) Considere que o veículo "*flex*" possui rendimento de 14 km/L quando roda com gasolina e de 10 km/L quando roda com etanol. Decida, em função dos recursos disponíveis, como deverá ser feito o reabastecimento.

d) Desenhe os gráficos das respectivas funções.

2) Aplicações em Eletricidade básica

Um circuito elétrico simples foi construído para medir a resistência de um resistor supostamente ôhmico. O resistor apresenta como valor de referência $R = 10\Omega$. Pela lei de Ohm:

$$U = R \cdot I$$

a) Construir o gráfico da diferença de potencial e a corrente elétrica;

b) Considerando-se os valores $\{1A, 5A, 10A\}$, estabeleça as tensões de referência, admitindo-se incerteza de 10% no valor da resistência nominal.

III — Função modular

Definição 9: A função módulo é uma aplicação $|\quad|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

e que permite obter, para cada $x \in \mathbb{R}$, o seu valor absoluto, ou seja, a sua distância à origem.