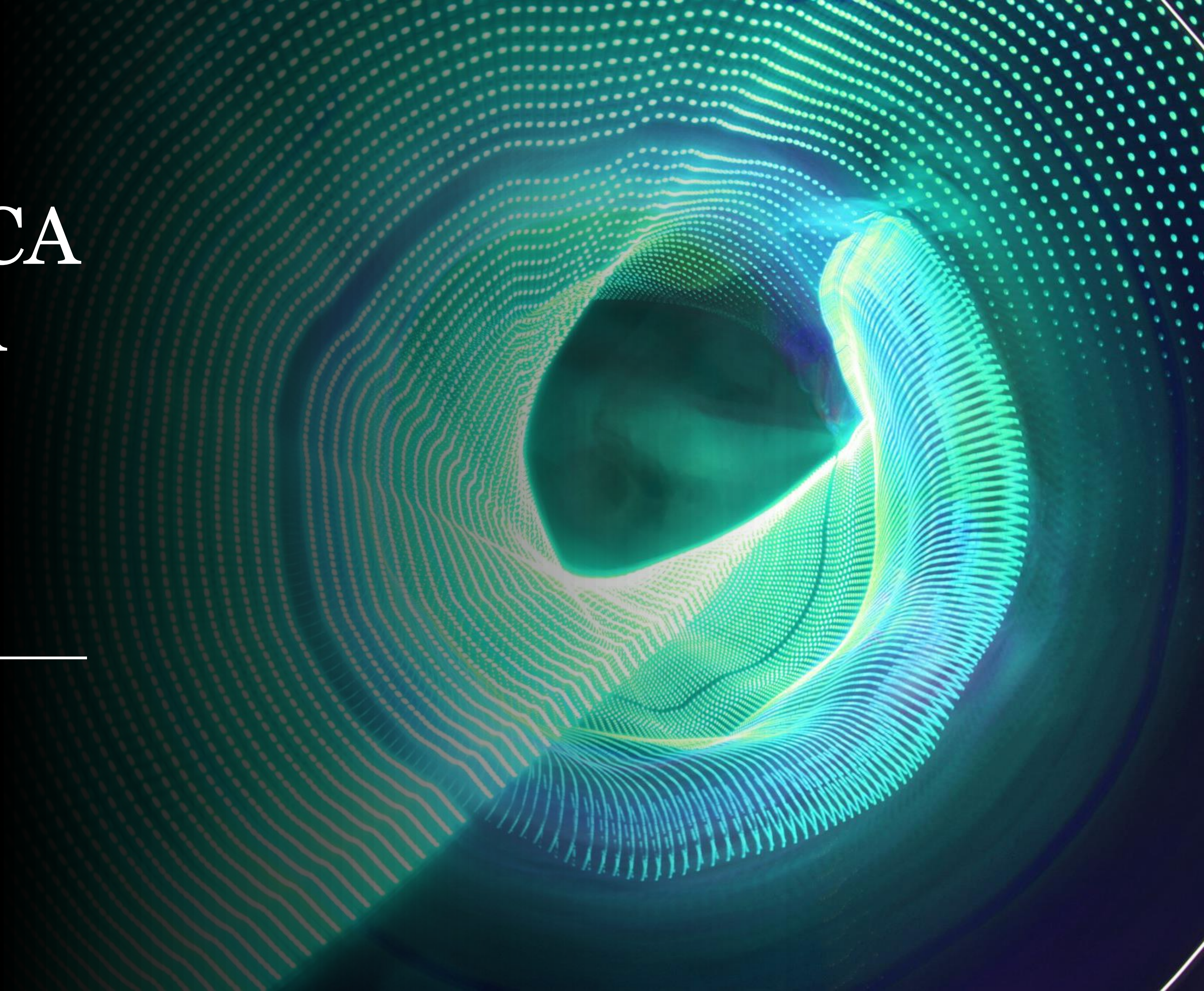
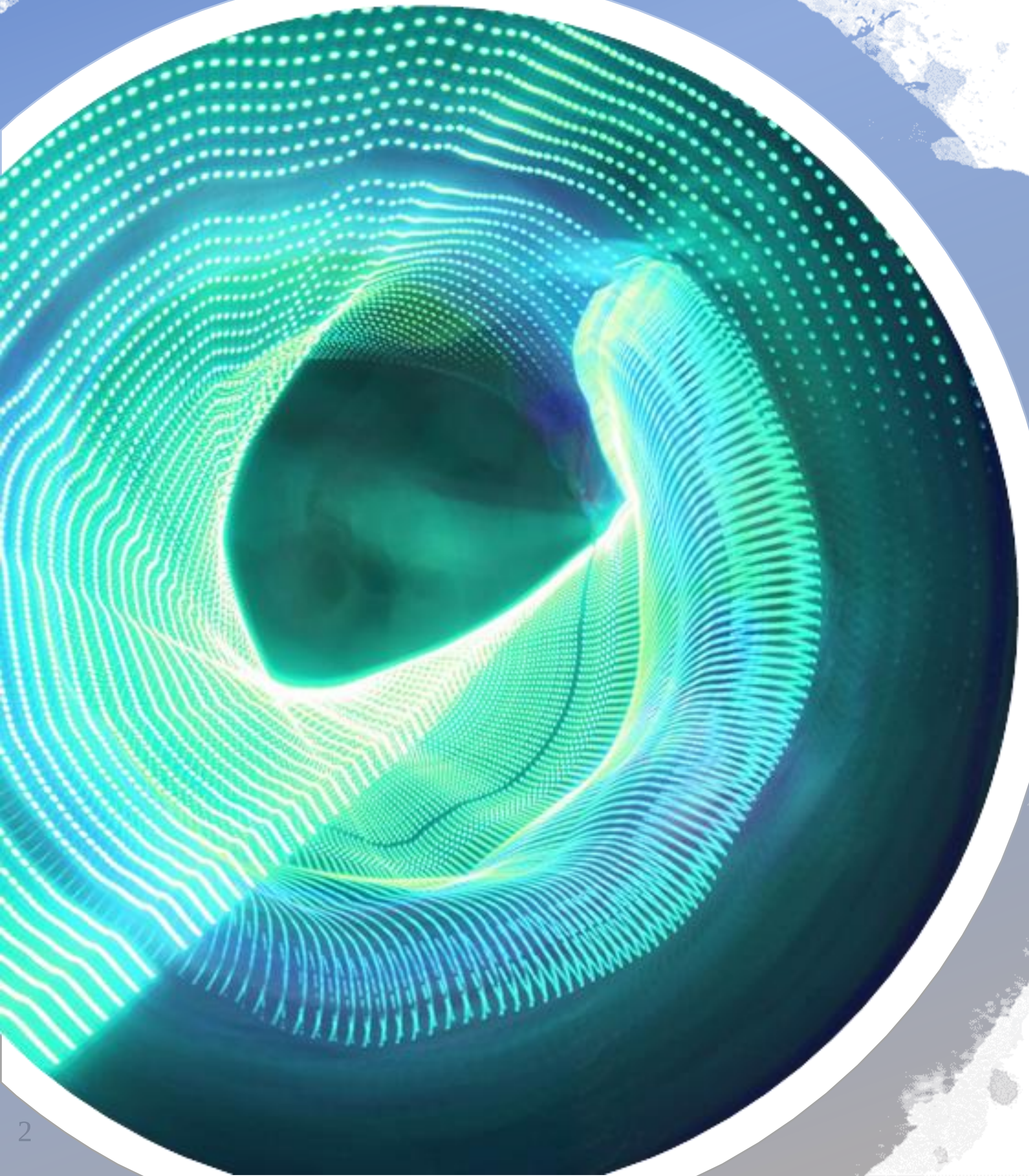
MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Sebastião Marcelo

Funções



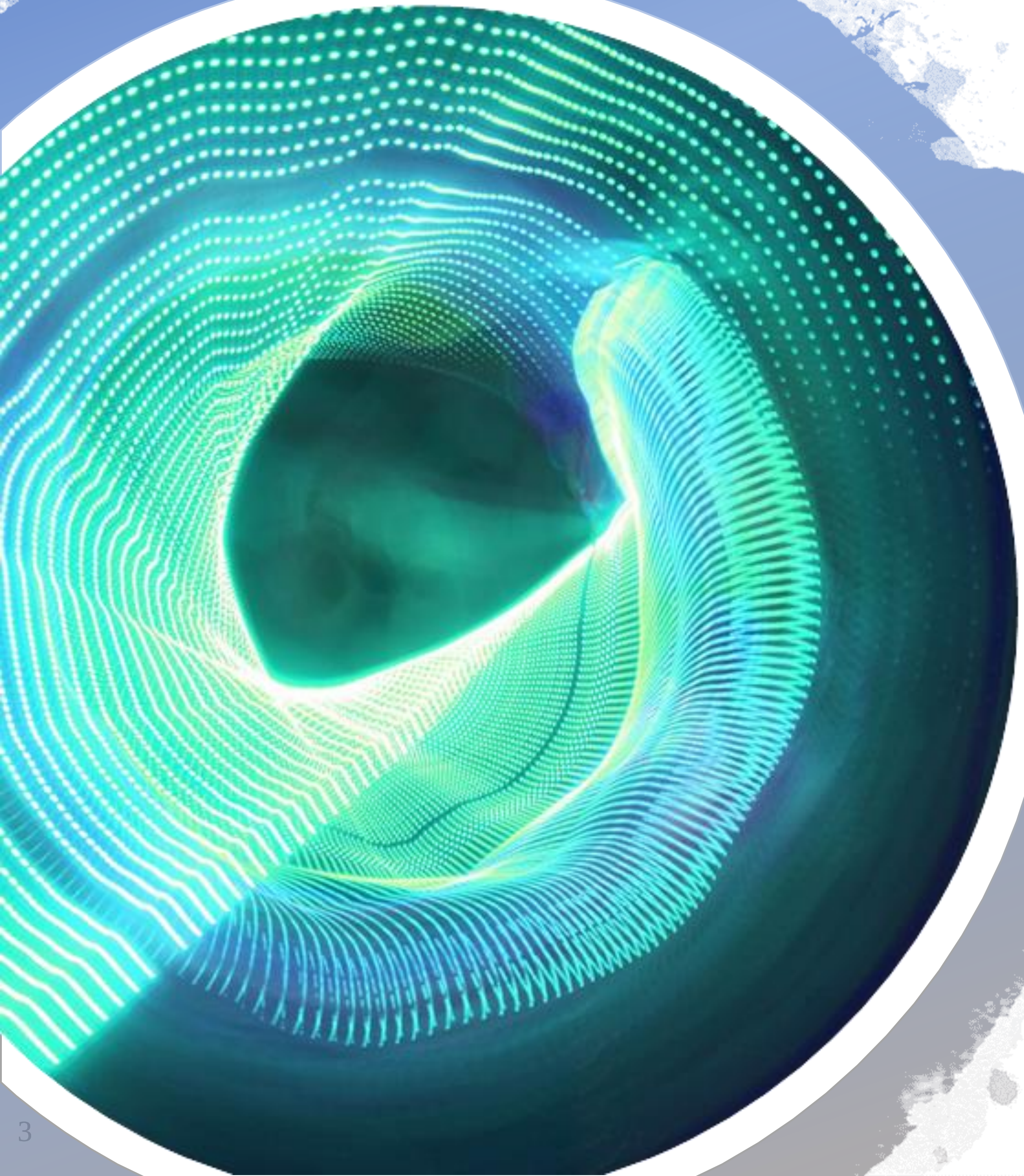
Funções



É um dos conceitos mais importantes que há na matemática.

Os temos “mapa”, “mapeamento”, “transformação”, e muitos outros e que significam a mesma coisa.

A terminologia utilizada é empregada em uma determinada situação na matemática de forma geral.



Funções

Suponha que a cada elemento de um conjunto ***A*** assinalamos um único elemento de um conjunto de ***B***;

A coleção de tais correspondências é chamada de ***<u>função</u>*** de ***A*** em ***B***.

O conjunto *A* é denominado *domínio* da função e o conjunto *B* é chamado de conjunto *alvo* ou *imagem*.

Funções

Funções são comumente denotadas por símbolos.

Por exemplo, seja $\boldsymbol{f}$ uma função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$.

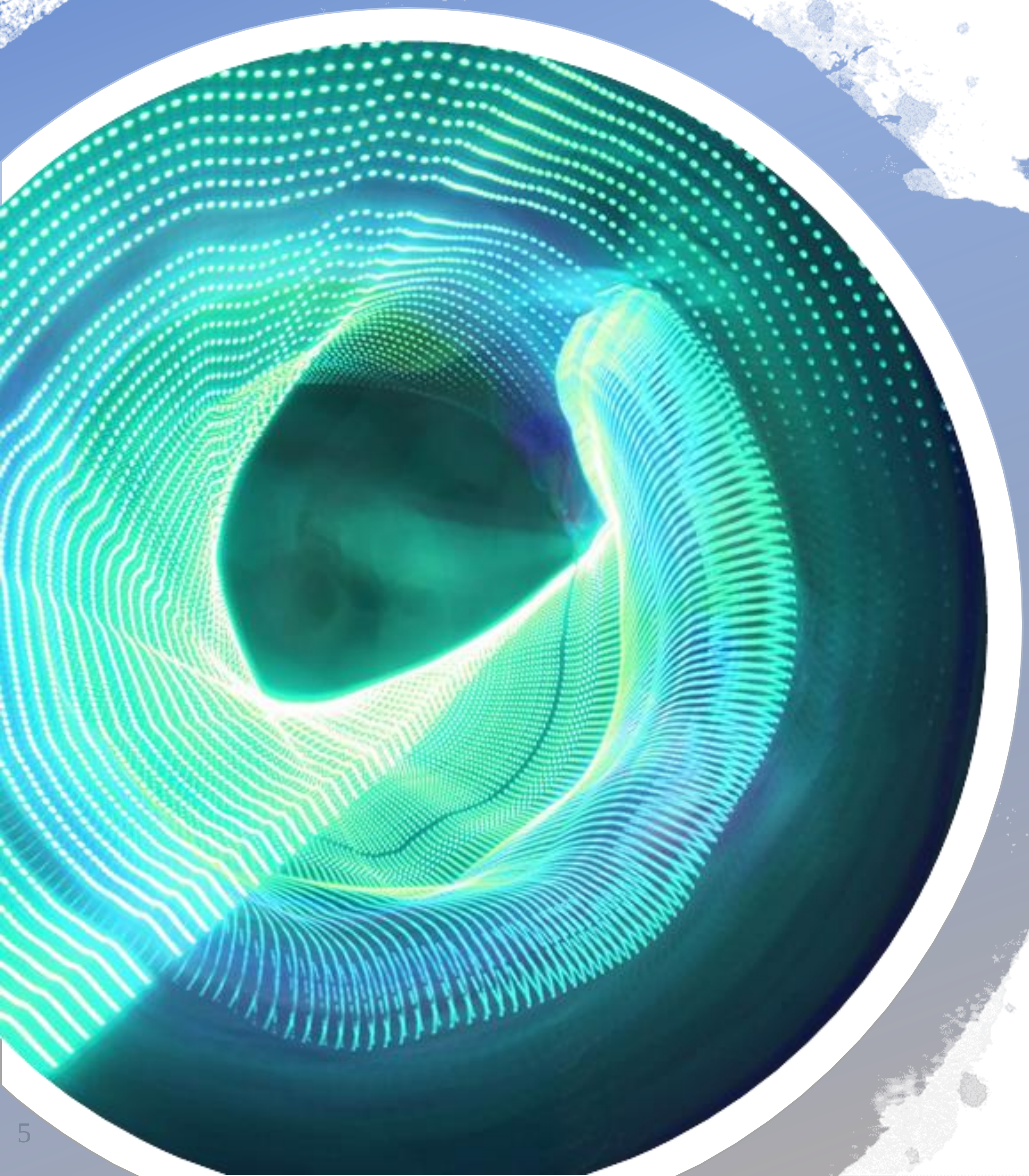
Então escrevemos: $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

Que se lê: "***f* é uma função de A em B**" ou

"***f* leva (ou mapeia) A em B**".

$$\boldsymbol{f(x) = x^2} \;\; \ldots \; \boldsymbol{ou} \; \ldots \; \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x^2} \; \ldots \; \boldsymbol{ou} \; \ldots \; \boldsymbol{y = x^2}$$

O conjunto $\boldsymbol{A}$ é o *domínio* da função e o conjunto $\boldsymbol{B}$ é chamado de conjunto *alvo ou codomínio*.



Funções

Exemplos:

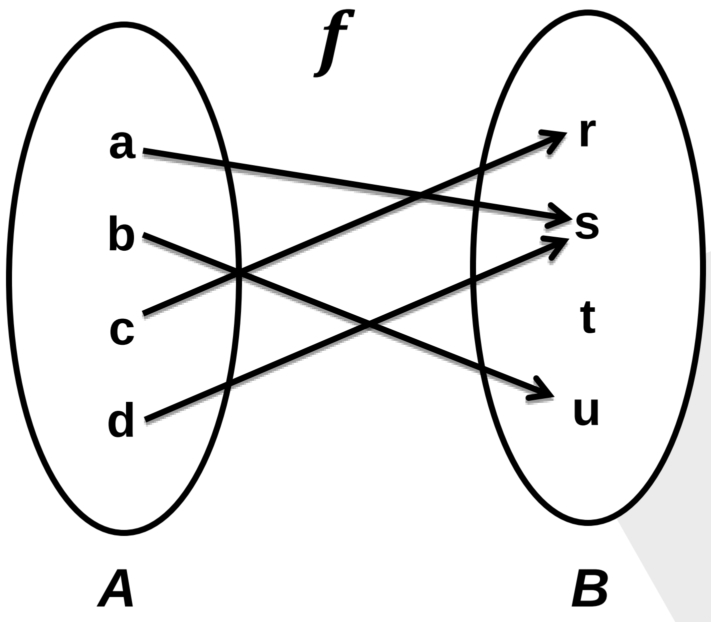
1. Considere a função, $\boldsymbol{f(x) = x^3}$, isto é, $\boldsymbol{f}$ assinala a cada número real o seu cubo.

Então a imagem de $\mathbf{2}$ é $\mathbf{8}$, e assim podemos escrever:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3}$$

Funções

2. A figura a seguir define uma função $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ em $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}\}$.

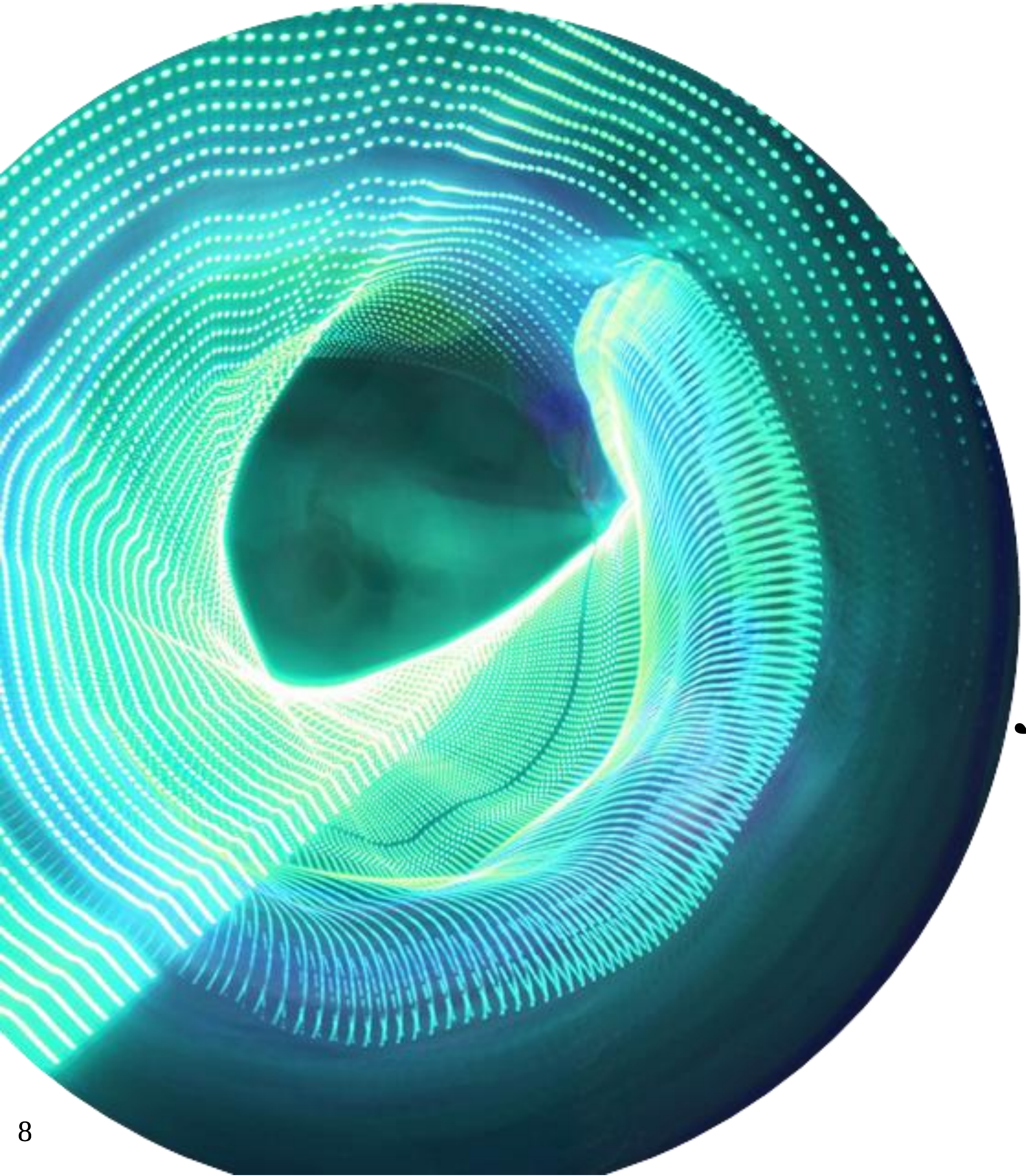


Funções

Função identidade

Chamamos de função identidade a função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{A}$ que assinala a cada elemento de $\boldsymbol{A}$ ele mesmo, denotada por $\boldsymbol{1_a}$ ou simplesmente $\boldsymbol{1}$.

Para cada $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A},\ temos$: $\mathbf{1}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}$



Funções

Funções e Relações

Há outro ponto de vista do qual as funções podem ser consideradas.

Toda função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ dá origem a uma relação de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ conhecida como *gráfico de* $\boldsymbol{f}$, definido por:

$$\boldsymbol{Graf\ de\ f} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\}$$

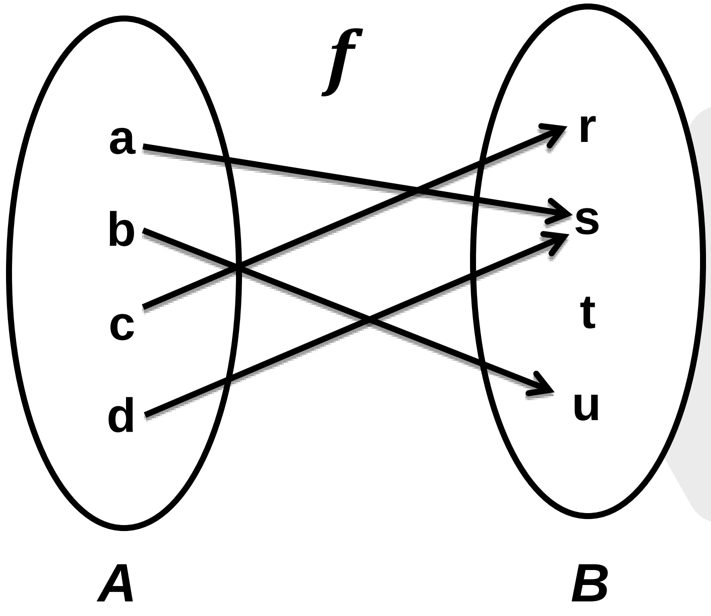
Uma função $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{B}$ é uma relação (ou seja, um subconjunto de $\boldsymbol{A}$ x $\boldsymbol{B}$).

Funções

No exemplo 2 a função $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ em $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}\}$,

É uma relação, ou seja, a seguinte relação

***R* ={(a, s),(b, u),(c, r),(d, s)}.**



$\boldsymbol{f(a) = s}$

$\boldsymbol{f(b) = u}$

$\boldsymbol{f(c) = r}$

$\boldsymbol{f(d) = s}$

Funções

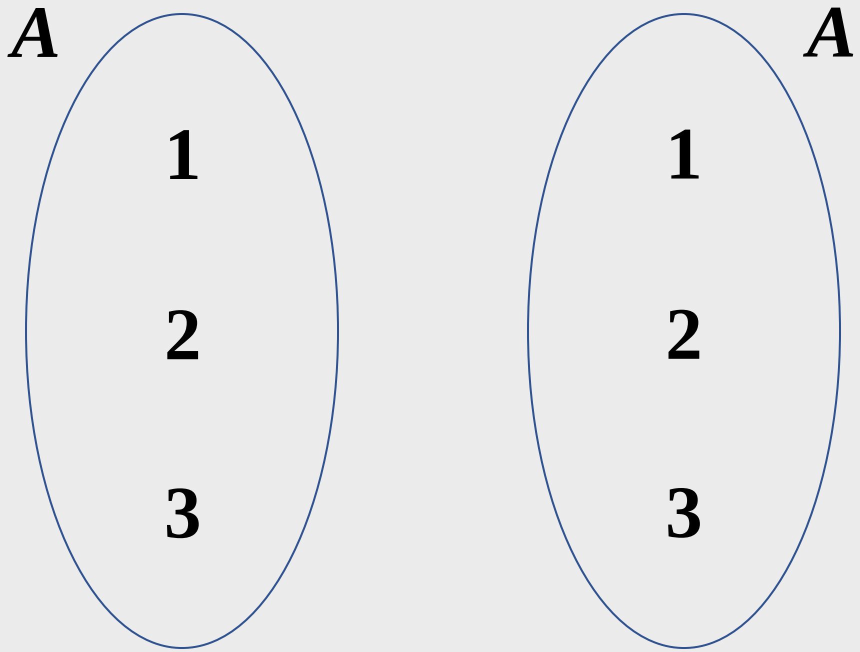
3. Considerar as três seguintes relações a seguir sobre o conjunto $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$:

$\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$,

$\boldsymbol{g} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$,

$\boldsymbol{h} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$.

Qual das relações é também uma função?



Funções

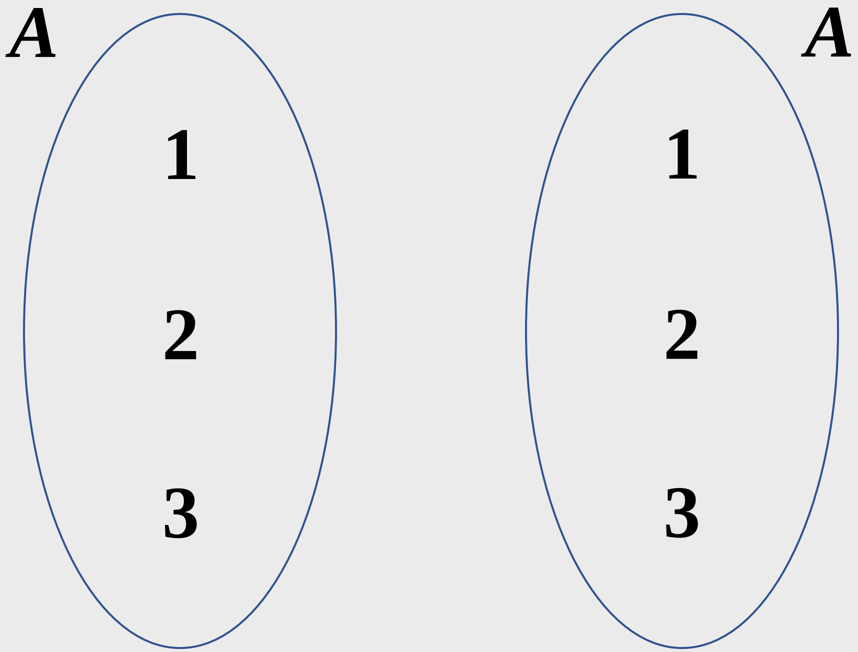
3. Considerar as três seguintes relações a seguir sobre o conjunto $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$:

$\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{1}),$

$\boldsymbol{g} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\},$

$\boldsymbol{h} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}.$

Qual das relações é também uma função?



Funções

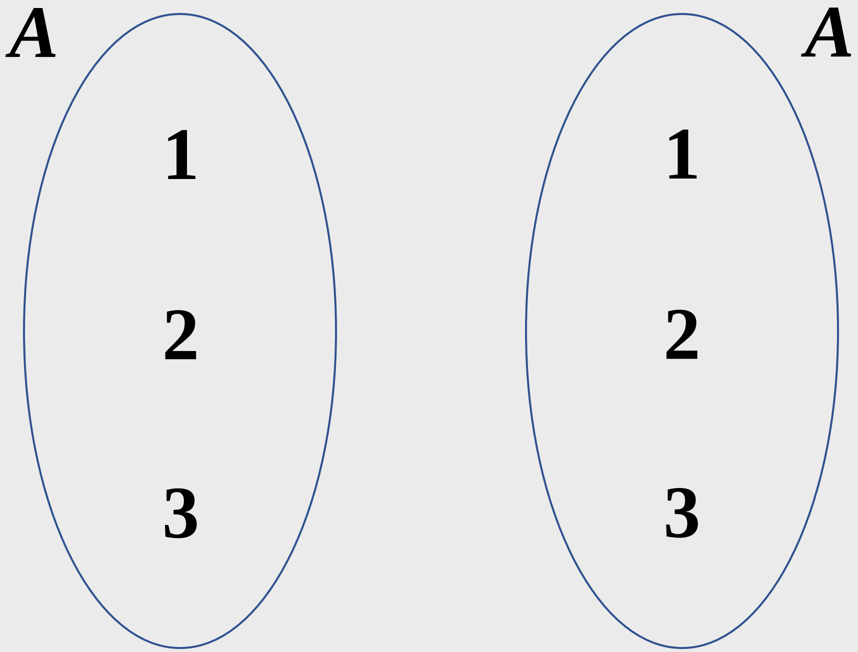
3. Considerar as três seguintes relações a seguir sobre o conjunto $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$:

$\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{1}),$

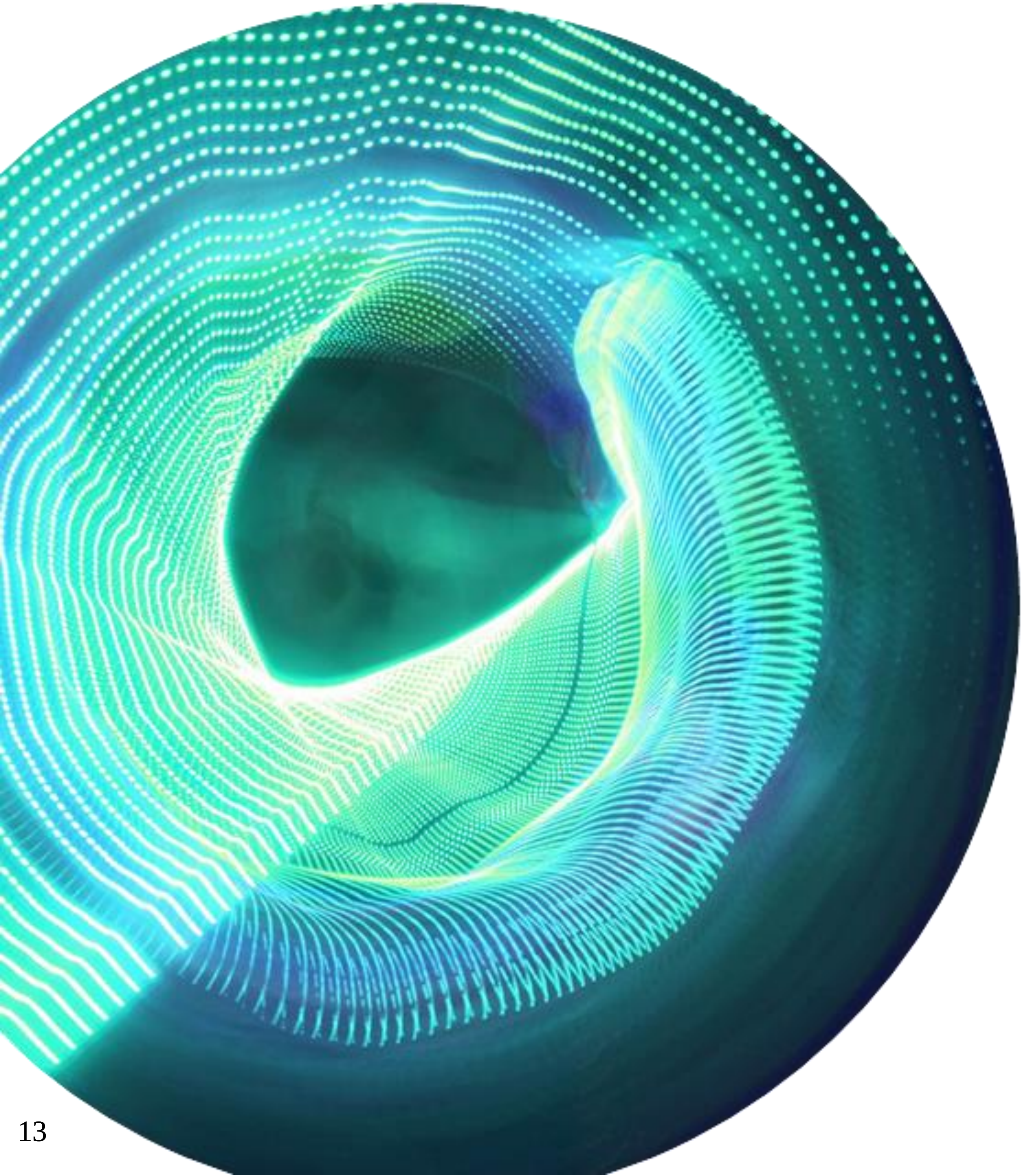
$\boldsymbol{g} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\},$

$\boldsymbol{h} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$

Qual das relações é também uma função?



Funções

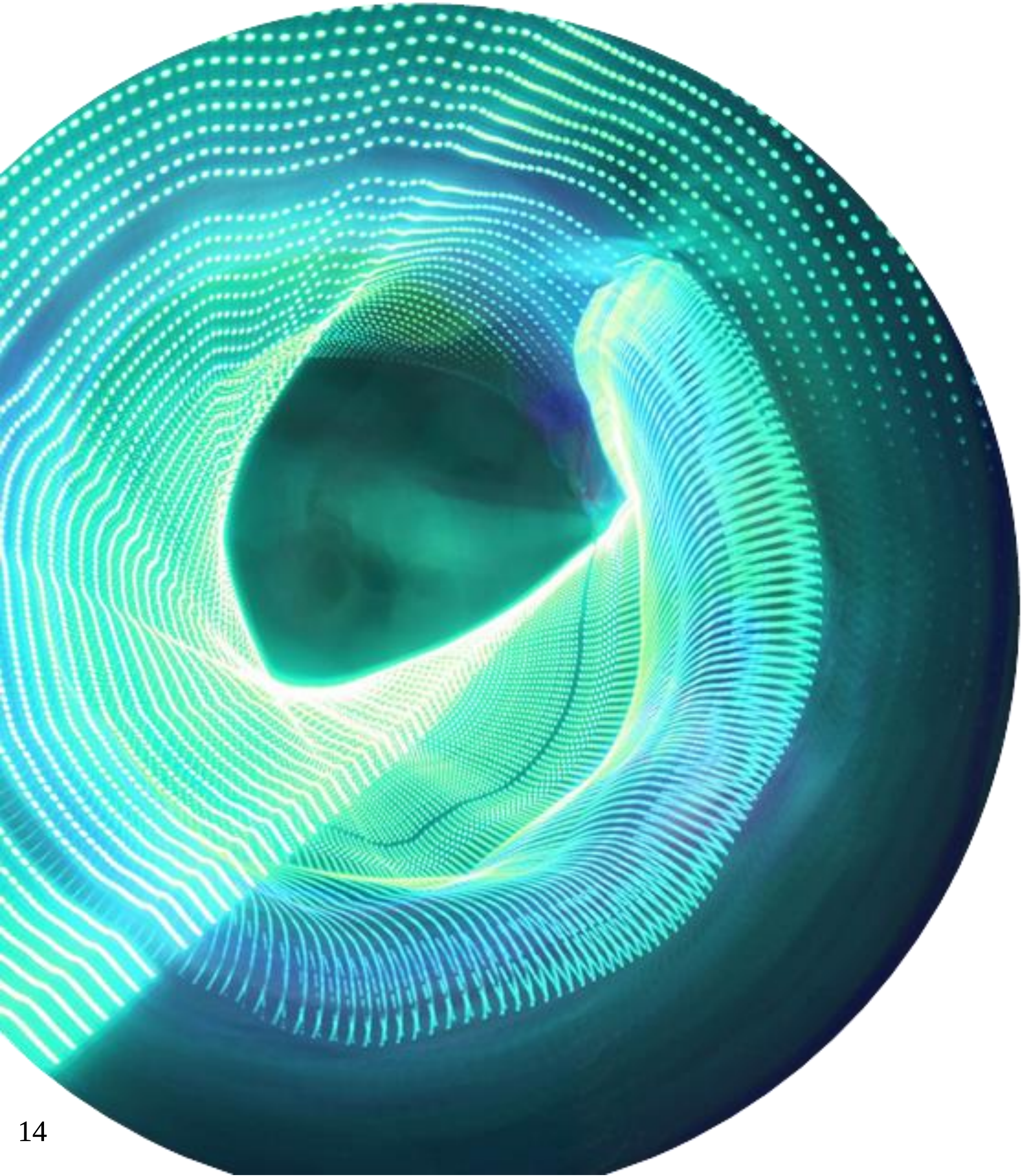


Função composição

Considere as funções, $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ isto é, tais que o codomínio de $\boldsymbol{f}$ é o domínio de $\boldsymbol{g}$ $(\boldsymbol{B})$.

Então podemos definir uma nova função de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{C}$, chamada de composição de $\boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{g}$ e denotada por $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{g}$, e denotada por $\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f}$.

Funções



Função composição

$$(\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{a}) \equiv \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\big)$$

Encontramos a imagem de a sob $\boldsymbol{f}$ e então determinamos a imagem de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ sob $\boldsymbol{g}$.

Percebemos que $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ como relações, então como função é a mesma composição, exceto que, em função, usaremos uma notação mais funcional, $\boldsymbol{g}\ \boldsymbol{o}\ \boldsymbol{f}$ para a composição das duas funções.

Funções

Funções Injetoras, Sobrejetoras e Inversíveis

Uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é dita *injetora* (ou um para um) se elementos diferentes do domínio A têm imagens distintas.

$\boldsymbol{f}$ é *injetora* se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}`)$ implica *a* = *a*´

Uma função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ é *sobrejetora* se cada elemento de $\boldsymbol{B}$ é a imagem de algum elemento de $\boldsymbol{A}$.

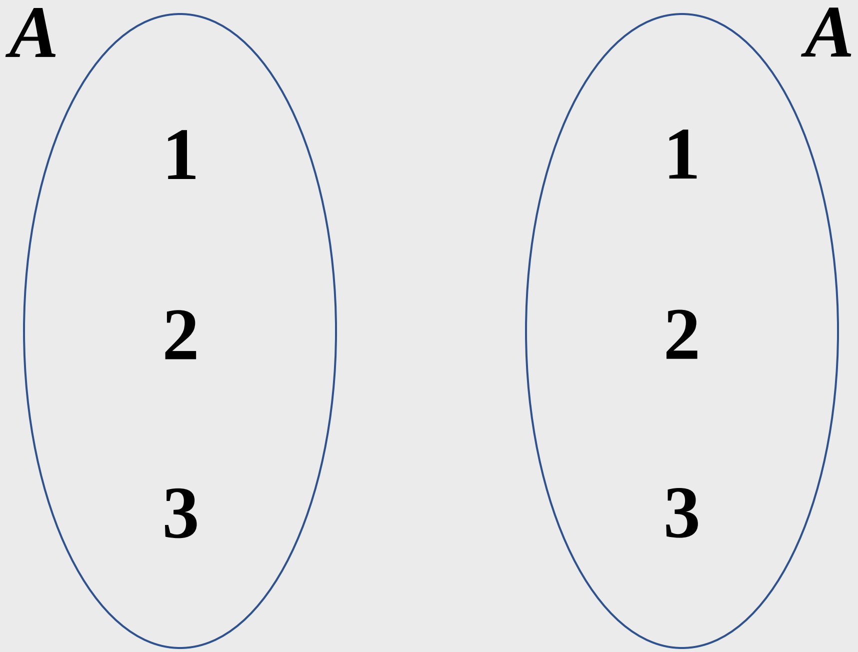
$\boldsymbol{f}$ é *sobrejetora* se a imagem de é $\boldsymbol{f}$ o domínio inteiro, isto é, se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$

Funções

4. Considerar a função $\boldsymbol{f}$ sobre o conjunto $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$:

$\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{3}, \mathbf{1})\}$,

Esta função é injetora ou sobrejetora?

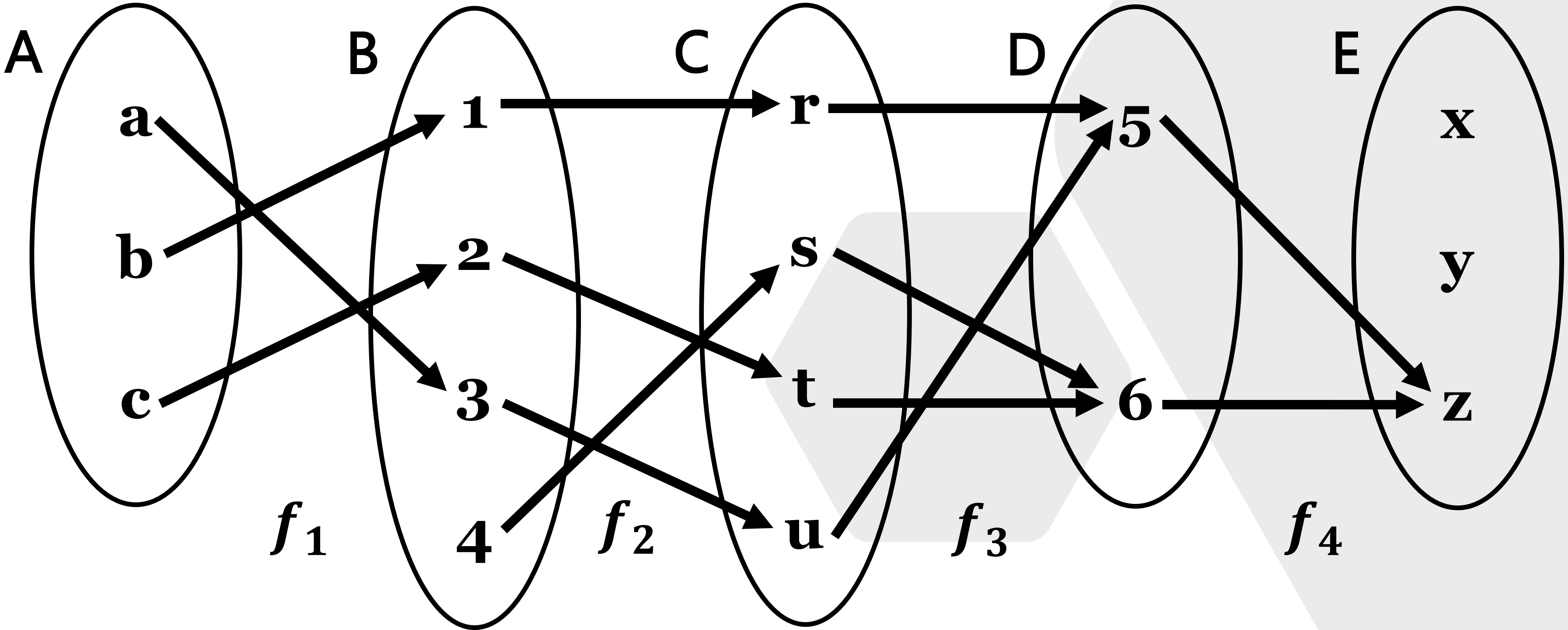


Funções

5. Considerar as seguintes funções:

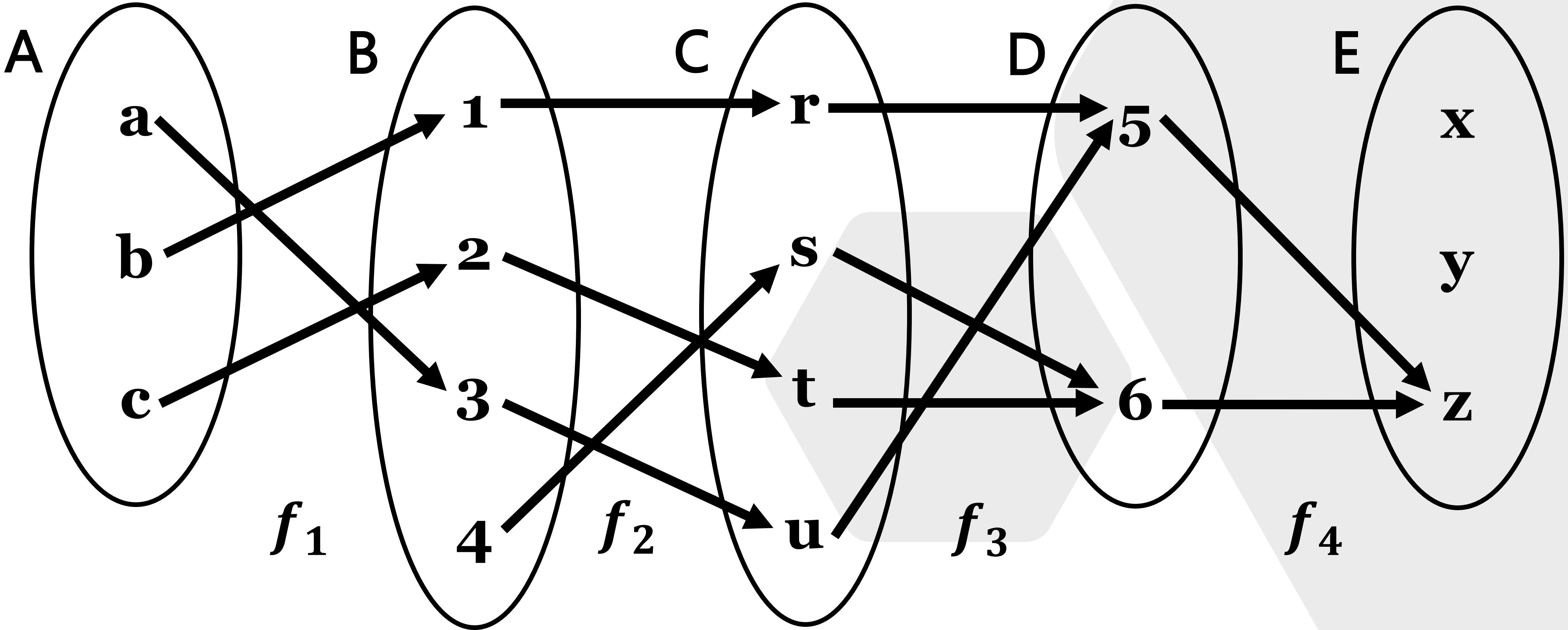
$$f_1: A \to B, \quad f_2: B \to C, \quad f_3: C \to D, \quad f_4: D \to E$$

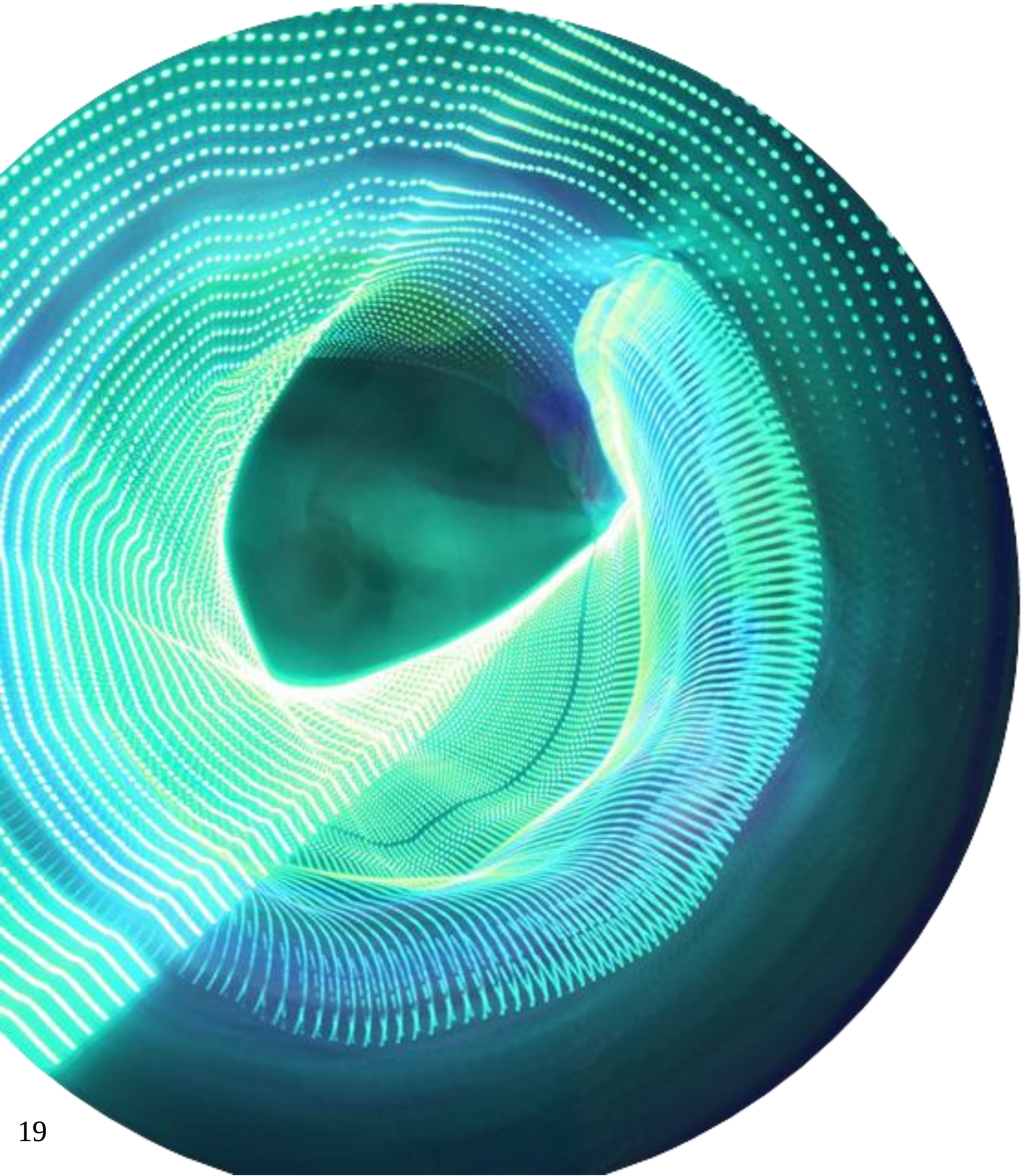
Definidas pelo diagrama a seguir. Indicar qual das funções é injetora, sobrejetora e inversível.



Funções

Uma função $f: A \to B$ é *inversível* se e somente se f é <u>injetora</u> e <u>*sobrejetora*</u>. A função f é dita uma correspondência um-a-um entre ***A*** e ***B***, onde cada elemento de ***A*** corresponde a um único elemento de ***B*** e vice-versa.





Funções

Caracterização geométrica de uma função

As funções podem ser identificadas pelos seus gráficos, e podemos associar os conceitos de injetividade e sobrejetividade.

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ é injetora se cada reta horizontal intercepta o gráfico de $\boldsymbol{f}$ em, no máximo, um ponto.

Funções

Caracterização geométrica de um função

$f: R \longrightarrow R$ é uma função injetora se cada reta horizontal intercepta o gráfico de f em, no máximo, um ponto.

$f: R \longrightarrow R$ é uma função sobrejetora se cada reta horizontal intercepta o gráfico de f em um ou mais pontos.

Consequentemente, se f é injetora e sobrejetora, logo, é inversível, então cada reta intersecta o gráfico de f em exatamente um ponto.

Funções

6. Considerar as seguintes funções de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$:

$\boldsymbol{f_1(x) = x^2}$,

$\boldsymbol{f_2(x) = 2^x}$,

$\boldsymbol{f_3(x) = x^3 - 2.x^2 - 5.x + 6}$,

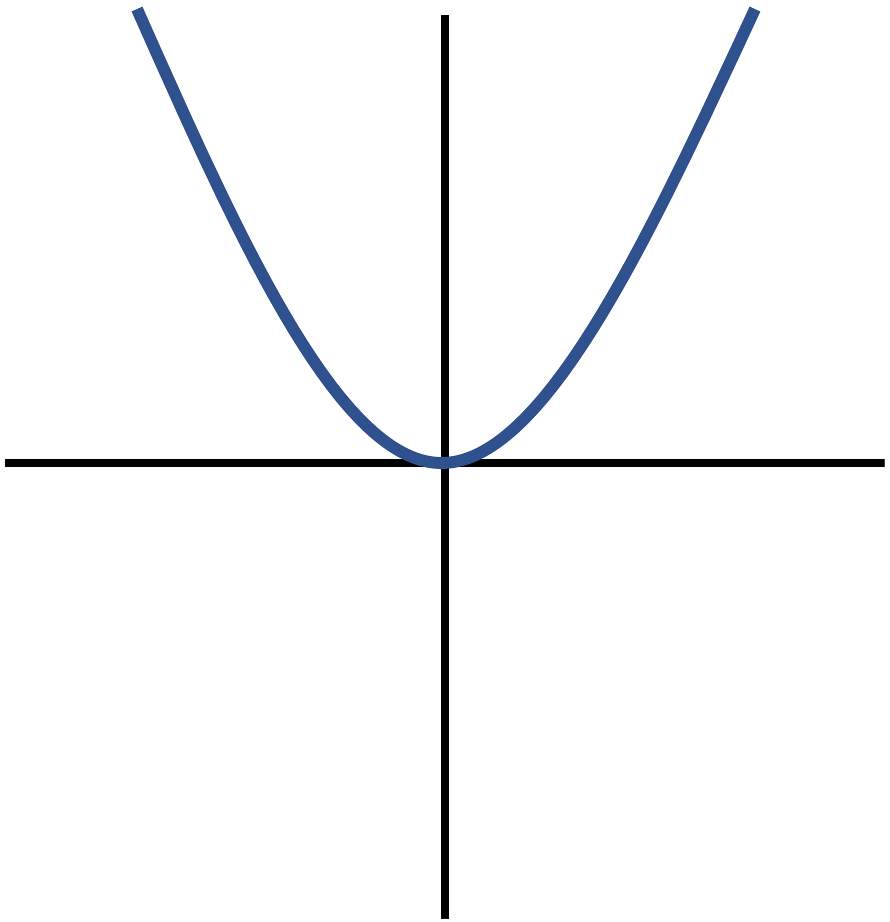
$\boldsymbol{f_4(x) = x^3}$.

Nos gráficos dessas funções indicar quais são injetoras e sobrejetoras.

Funções

6. $\boldsymbol{f_1}$ é uma função de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{f_1(x) = x^2}$$

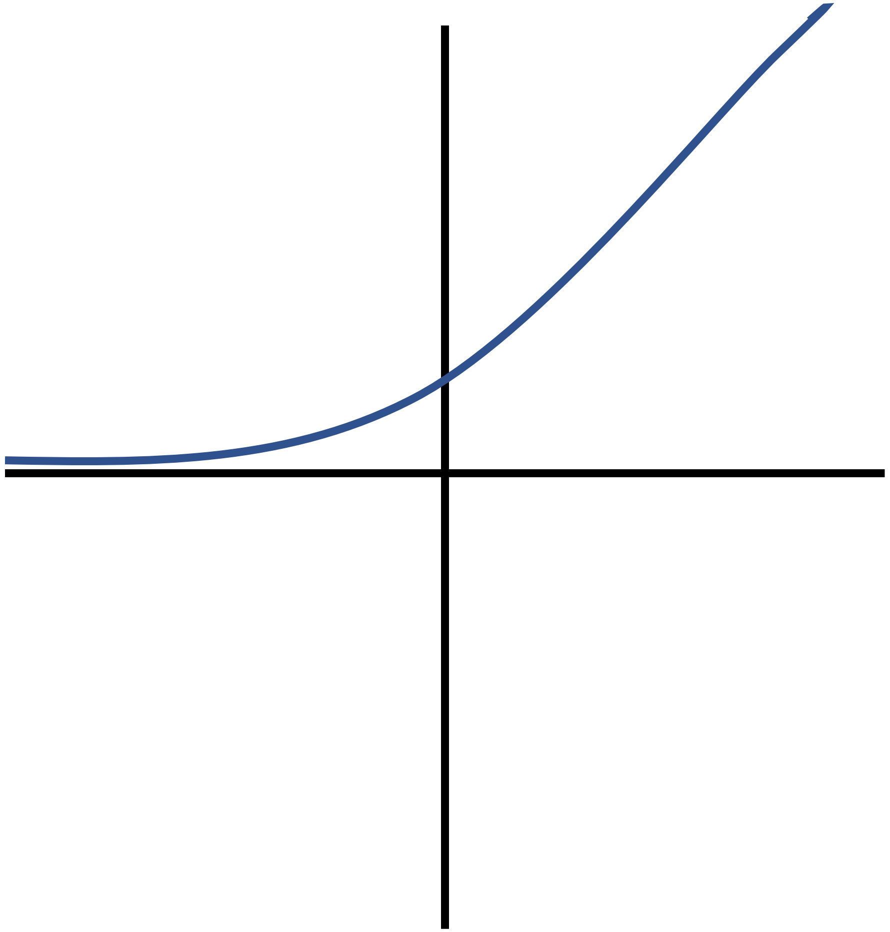


$\boldsymbol{f_1(x) = x^2}$

Funções

6. $\boldsymbol{f_2}$ é uma função de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{f_2(x) = 2^x}$$

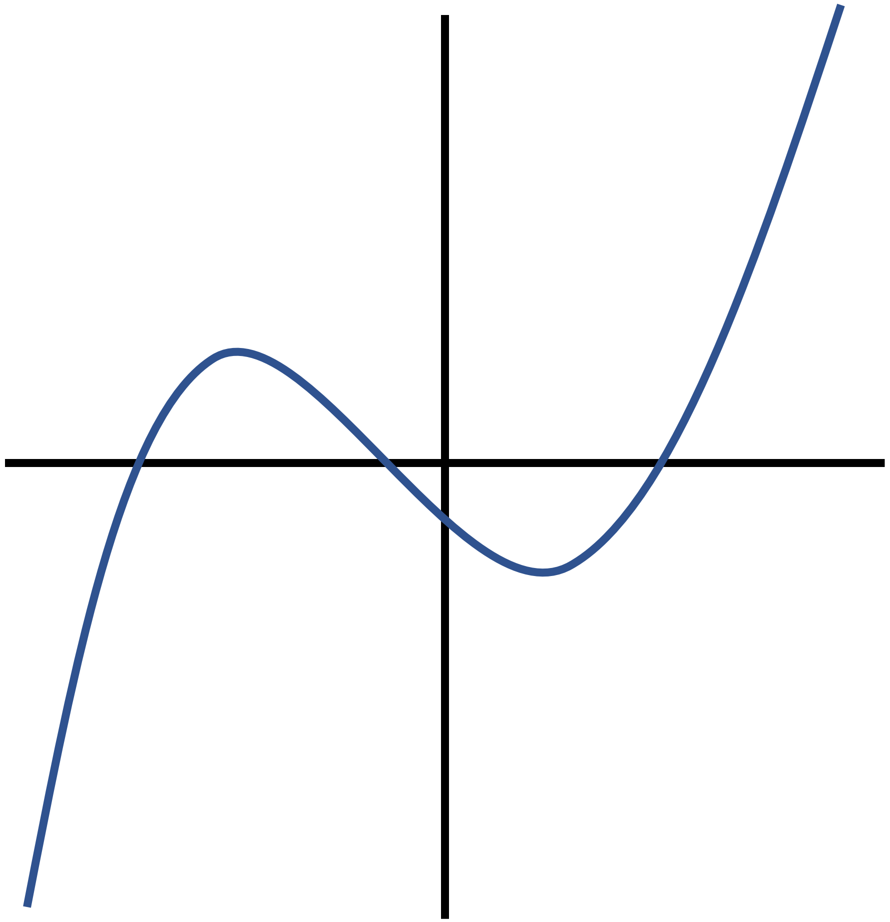


$\boldsymbol{f_2(x) = 2^x}$

Funções

6. $\boldsymbol{f_3}$ é uma função de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{f_3(x) = x^3 - 2.x^2 - 5.x + 6}$$

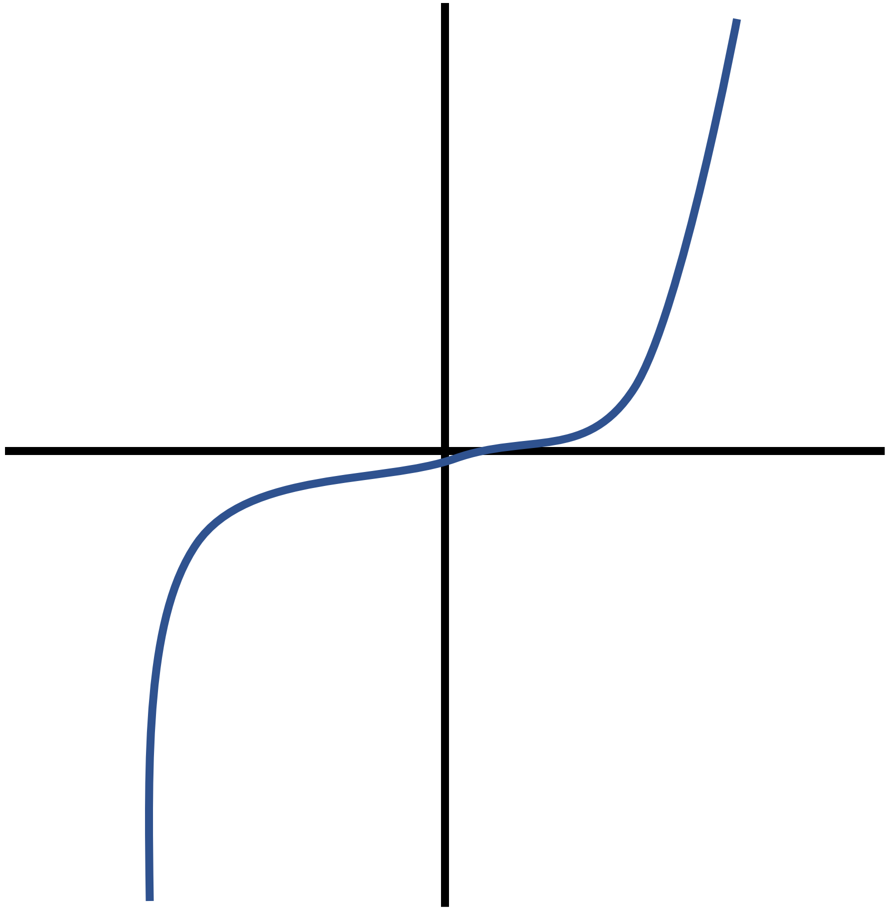


$\boldsymbol{f_3(x) = x^3 - 2.x^2 - 5.x + 6}$

Funções

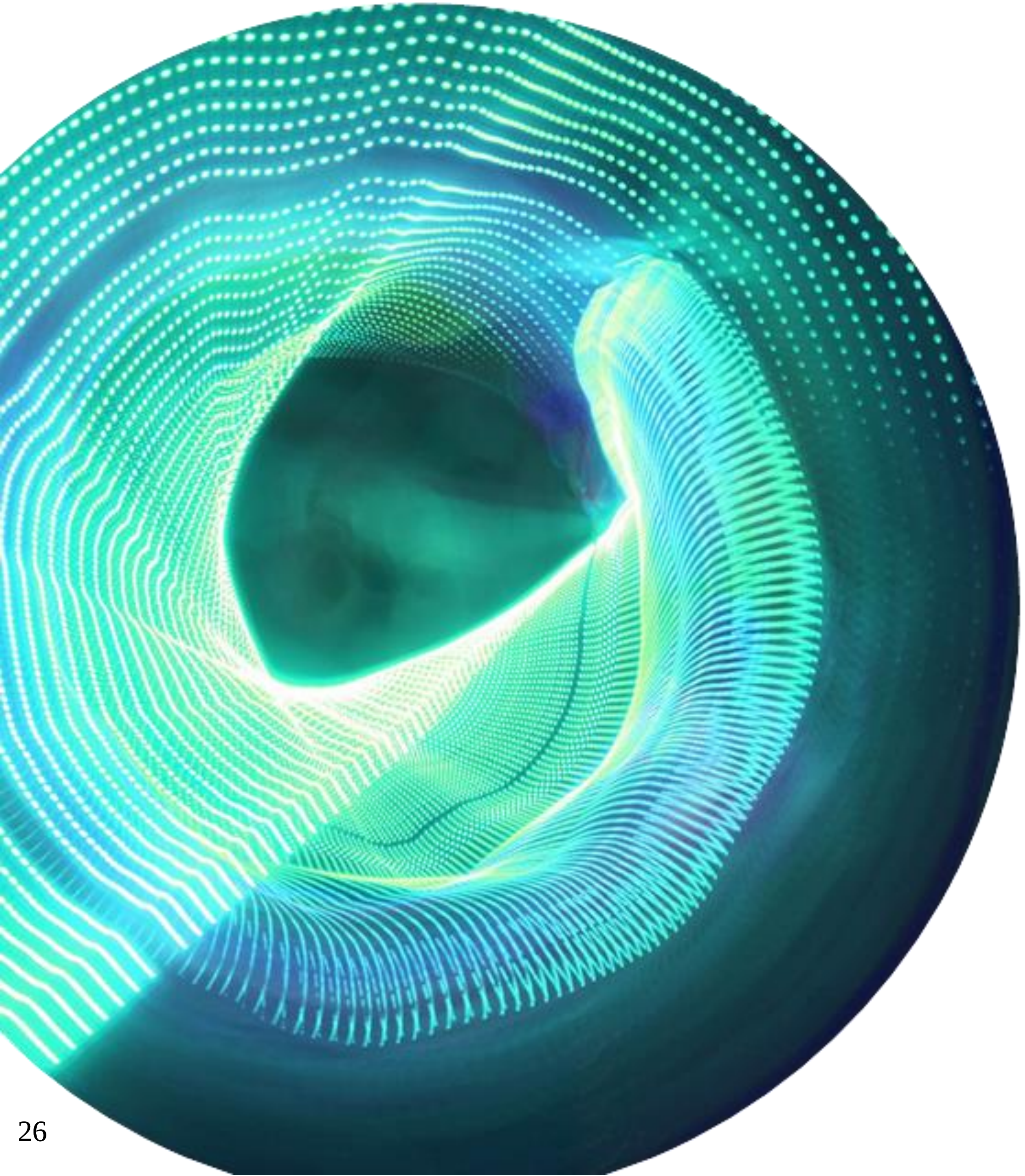
6. $\boldsymbol{f_4}$ é uma função de $\boldsymbol{R}$ em $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{f_4(x) = x^3}$$



$\boldsymbol{f_4(x) = x^3}$

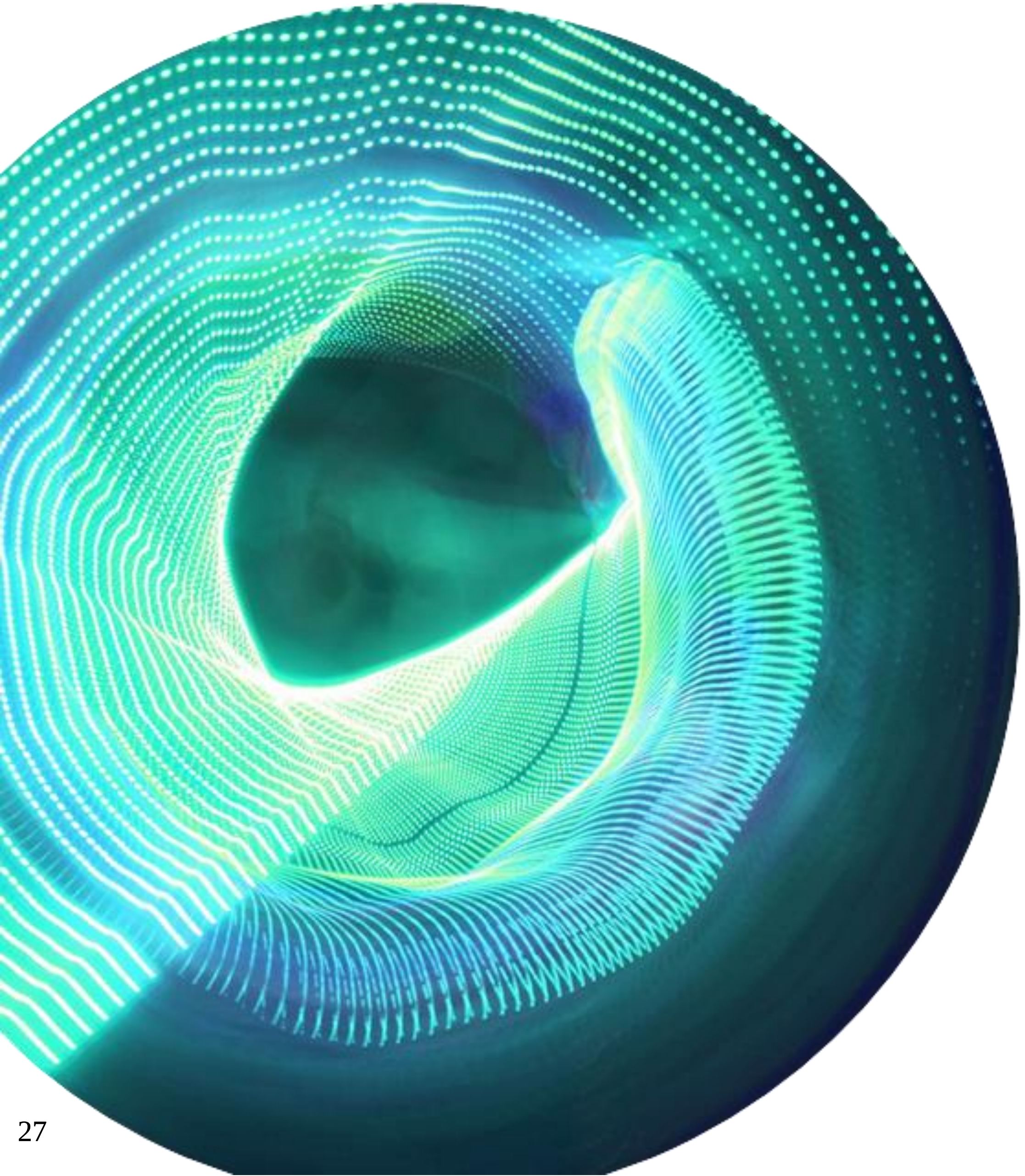
Funções



Função inteiro e valor absoluto

Seja $\boldsymbol{x}$ um número real qualquer.

O ***valor inteiro*** de $\boldsymbol{x}$, escrito $INT(\boldsymbol{x})$, converte $\boldsymbol{x}$ em um inteiro, deletando a parte fracionária do número.



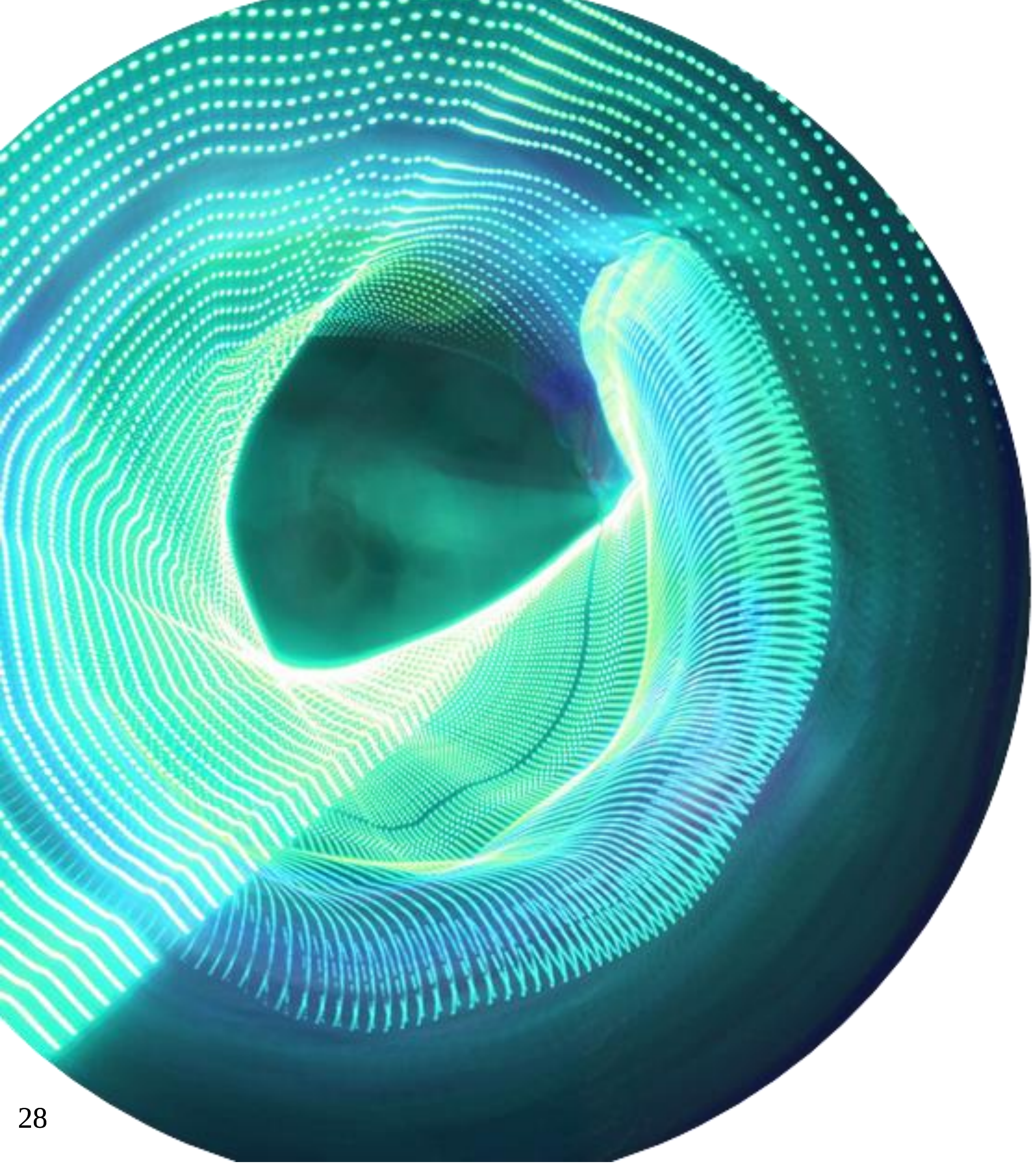
Funções

Função inteiro e valor absoluto

O ***valor absoluto*** do número real $\boldsymbol{x}$, escrito $\boldsymbol{ABS}(\boldsymbol{x})$ ou $|\boldsymbol{x}|$, é definido como o maior entre $\boldsymbol{x}$ e $-\boldsymbol{x}$.

Logo, $\boldsymbol{ABS}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e, para $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{ABS}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ ou $\boldsymbol{ABS}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

Funções

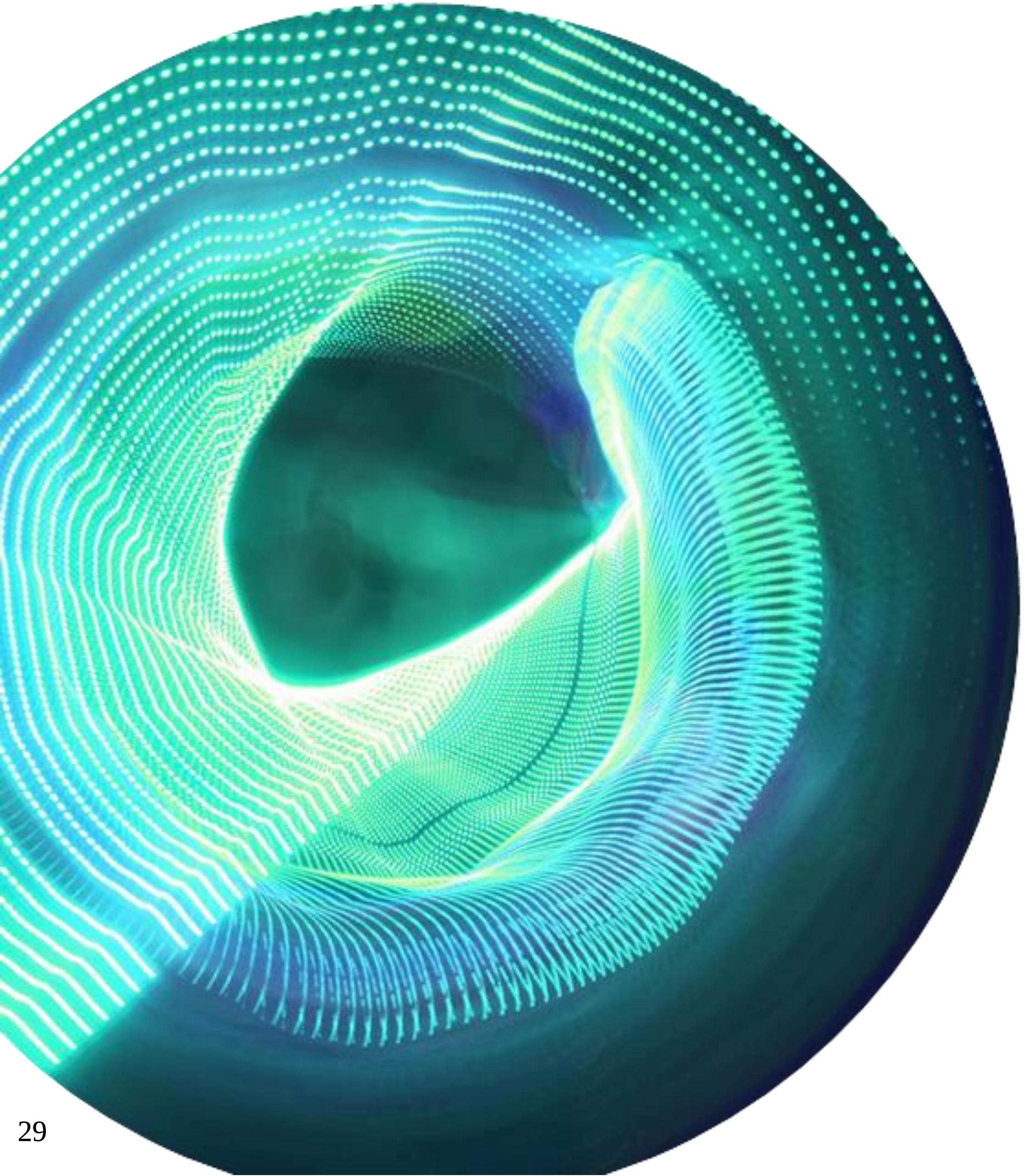


Função fatorial

O produto dos inteiros positivos de $\mathbf{1}$ a $\boldsymbol{n}$, inclusive, é chamado de $\boldsymbol{n}$ ***fatorial*** e é denotado por $\boldsymbol{n}!$.

Logo, $\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1}).(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots\mathbf{3}.\mathbf{2}.\mathbf{1}$

A função fatorial é definida para todos inteiros não negativos.



Funções

Função fatorial

Assim, temos:

$\mathbf{0}! =$

$\mathbf{1}! =$

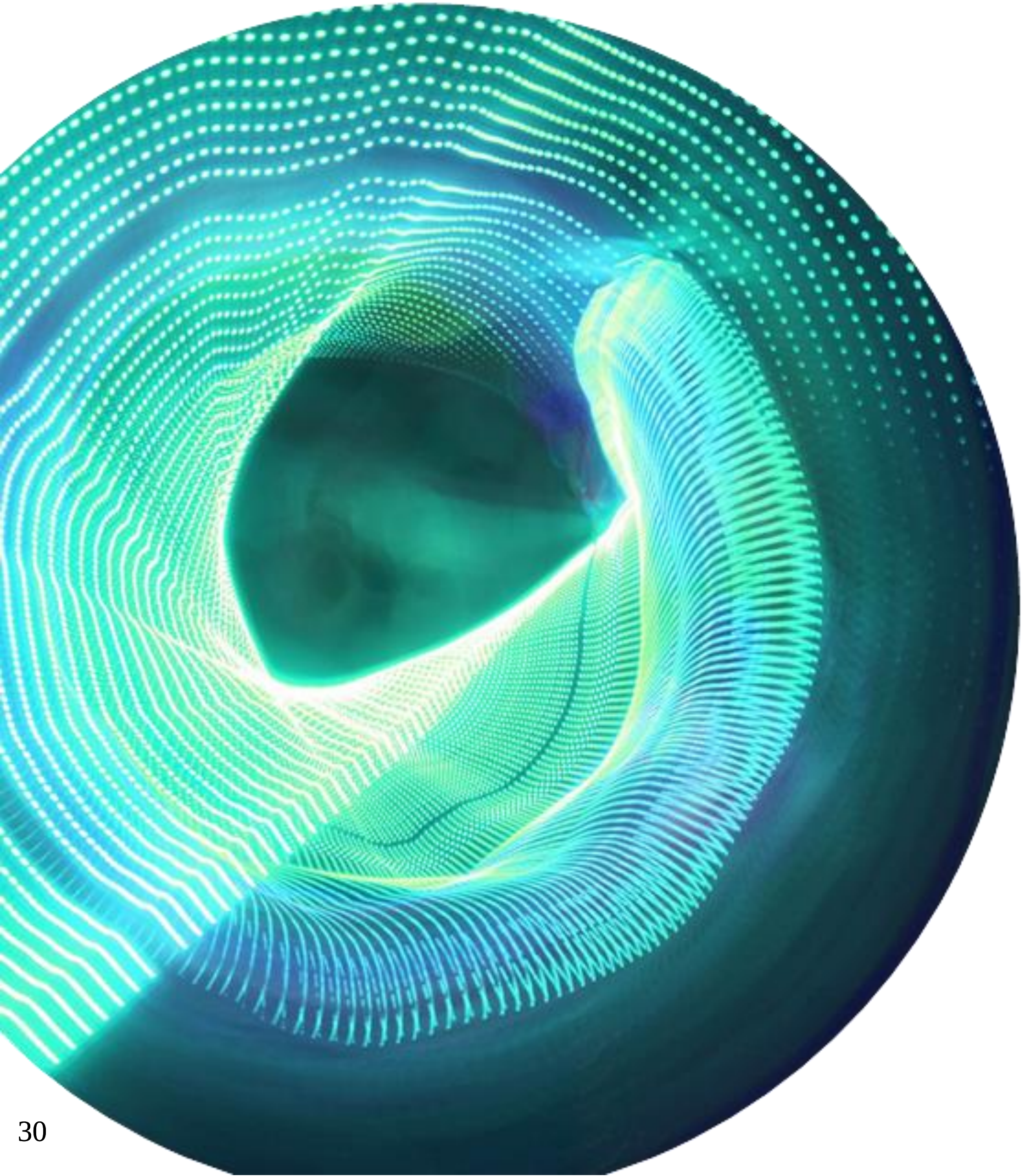
$\mathbf{2}! =$

$\mathbf{3}! =$

$\mathbf{4}! =$

$\mathbf{5}! =$

Funções



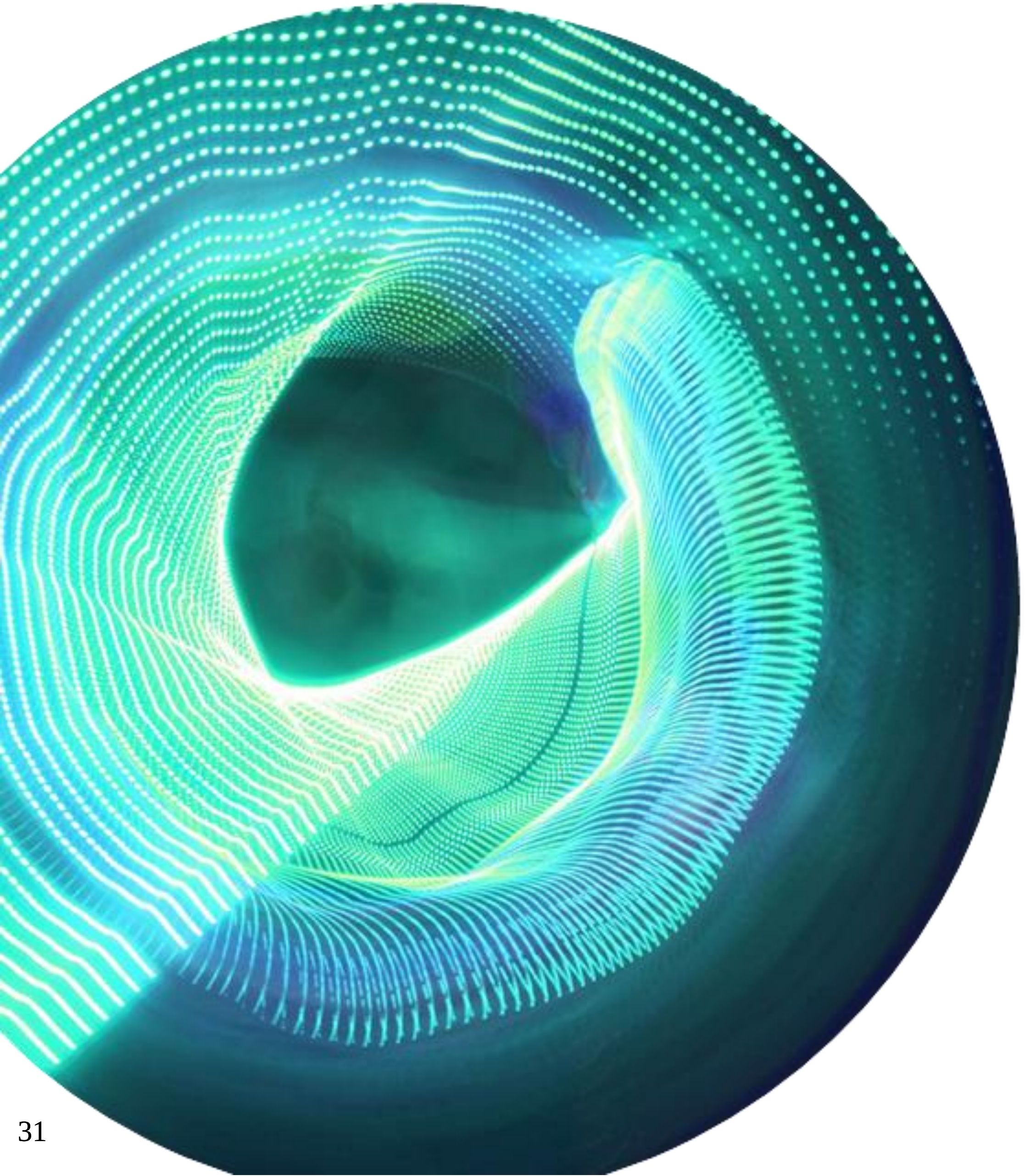
Assim, temos algumas outras funções:

Função Polinomial

$$\boldsymbol{f(x) = 2.x^3 - 7.x^2 + 4.x - 15}$$

Função exponencial

$$\boldsymbol{a^m = a.a \ldots a}$$



Funções

Assim, temos algumas outras funções:

Função logarítimica

$$\boldsymbol{log_2 8 = 3 \longrightarrow \quad 2^3 = 8}$$

$$\boldsymbol{log_{10} 0,001 = -3 \longrightarrow \quad 10^{-3} = 0,001}$$

$$\boldsymbol{log_{10} 100 = 2 \longrightarrow \quad 10^2 = 100}$$