1 Sistemas Lineares Determinados

Sistemas lineares podem ser representados na notação de multiplicação de matrizes:

$$[A]_{m\times n}\cdot\{X\}_{n\times 1}=\{B\}_{m\times 1}$$

No caso em que $(m=n)$, obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

$$[A]_{n\times n}\cdot\{X\}_{n\times 1}=\{B\}_{n\times 1}$$

1.1 Teorema de Gauss (escalonamento)

Para sistemas lineares com (n) variáveis e (n) equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

	$D=\det(A)\neq 0$	$(*)$

(i)	$1\cdot x+2\cdot y-2\cdot z=7$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7\\ 5\\ 2\end{Bmatrix}$
(ii)	$-3\cdot x+7\cdot y+6\cdot z=5$		
(iii)	$2\cdot x+1\cdot y+2\cdot z=2$		

Vamos verificar se este sistema tem solução única, isto é, se ele atende à condição $(*)$.

$D=\det(A)=$	$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$	$=78$	$\neq 0$

Vamos resolver este sistema por escalonamento. Para isto, efetue combinações lineares de equações para desaparecer com uma das três variáveis. Para desaparecer com a variável (z), vamos fazer a seguinte escolha:

$3\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$3\cdot x+6\cdot y-6\cdot z=21$	
(ii)	$\Longrightarrow$	$-3\cdot x+7\cdot y+6\cdot z=5$	$(+)$
$3\cdot(i)+(ii)$	$\Longrightarrow$	$0\cdot x+13\cdot y=26$	$y=2$

1.1.1 Teorema de Cramer bidimensional

Vamos desaparecer com a variável (y).

$7\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$7\cdot 1\cdot x+7\cdot 2\cdot y-7\cdot 2\cdot z=7\cdot 7$	
$2\cdot(ii)$	$\Longrightarrow$	$-2\cdot 3\cdot x+2\cdot 7\cdot y+2\cdot 6\cdot z=2\cdot 5$	

$7\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$7\cdot x+14\cdot y-14\cdot z=49$	
$2\cdot(ii)$	$\Longrightarrow$	$-6\cdot x+14\cdot y+12\cdot z=10$	$(-)$
	$\Longrightarrow$	$13\cdot x-26\cdot z=39$	

1.2 Teorema de Cramer tridimensional

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 78 \neq 0$

	$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 78$	$\Longrightarrow$	$x = \frac{D_x}{D} = \frac{78}{78} = 1$
	$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 156$	$\Longrightarrow$	$y = \frac{D_y}{D} = \frac{156}{78}$
	$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -78$	$\Longrightarrow$	$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-78}{78} = -1$

1.3 Demonstração do teorema de Cramer tridimensional

(i)	$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = p$	$\Leftarrow$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$
(ii)	$d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z = q$		
(iii)	$g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z = r$		

Vamos desaparecer com a variável (z).

$f \cdot (i)$	$\Longrightarrow$	$f \cdot a \cdot x + f \cdot b \cdot y + f \cdot c \cdot z = f \cdot p$	
$c \cdot (ii)$	$\Longrightarrow$	$c \cdot d \cdot x + c \cdot e \cdot y + c \cdot f \cdot z = c \cdot q$	$(-)$
	$\Longrightarrow$	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot x + (f \cdot b - c \cdot e) \cdot y = f \cdot p - c \cdot q$	

Vamos desaparecer com a variável (z).

$i \cdot (ii)$	$\Longrightarrow$	$i \cdot d \cdot x + i \cdot e \cdot y + i \cdot f \cdot z = i \cdot q$	
$f \cdot (iii)$	$\Longrightarrow$	$f \cdot g \cdot x + f \cdot h \cdot y + f \cdot i \cdot z = f \cdot r$	$(-)$
	$\Longrightarrow$	$(i \cdot d - f \cdot g) \cdot x + (i \cdot e - f \cdot h) \cdot y = i \cdot q - f \cdot r$	

Obtivemos um sistema bidimensional

(iv)	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot x + (f \cdot b - c \cdot e) \cdot y = f \cdot p - c \cdot q$
(v)	$(i \cdot d - f \cdot g) \cdot x + (i \cdot e - f \cdot h) \cdot y = i \cdot q - f \cdot r$

Em notação matricial:

(iv) (v)	$\begin{bmatrix} f \cdot a - c \cdot d & f \cdot b - c \cdot e \\ i \cdot d - f \cdot g & i \cdot e - f \cdot h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \cdot p - c \cdot q \\ i \cdot q - f \cdot r \end{Bmatrix}$

E que pode ser resolvido usando o teorema de Cramer.

Vamos calcular o denominador das frações que aparecem no teorema:

$E =$	$\begin{vmatrix} f \cdot a - c \cdot d & f \cdot b - c \cdot e \\ i \cdot d - f \cdot g & i \cdot e - f \cdot h \end{vmatrix}$
$E =$	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot (i \cdot e - f \cdot h) - (i \cdot d - f \cdot g) \cdot (f \cdot b - c \cdot e)$
$f \cdot a \cdot i \cdot e - f \cdot a \cdot f \cdot h - c \cdot d \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot f \cdot h - i \cdot d \cdot f \cdot b + i \cdot d \cdot c \cdot e + f \cdot g \cdot f \cdot b - f \cdot g \cdot c \cdot e$	
$E =$	$f \cdot a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot f \cdot h + f \cdot g \cdot f \cdot b - [f \cdot a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot f \cdot b + f \cdot g \cdot c \cdot e]$
$E =$	$f \cdot \{a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot h + g \cdot f \cdot b - [a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot b + g \cdot c \cdot e]\}$

(iv) (v)	$\begin{bmatrix} f\cdot a-c\cdot d & f\cdot b-c\cdot e \\ i\cdot d-f\cdot g & i\cdot e-f\cdot h \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f\cdot p-c\cdot q \\ i\cdot q-f\cdot r \end{Bmatrix}$

Vamos calcular os numeradores.

$E_x=$	$\begin{vmatrix} f\cdot p-c\cdot q & f\cdot b-c\cdot e \\ i\cdot q-f\cdot r & i\cdot e-f\cdot h \end{vmatrix}$	
$E_y=$	$\begin{vmatrix} f\cdot a-c\cdot d & f\cdot p-c\cdot q \\ i\cdot d-f\cdot g & i\cdot q-f\cdot r \end{vmatrix}$	

$E_x=$	$(f\cdot p-c\cdot q)\cdot(i\cdot e-f\cdot h)-(i\cdot q-f\cdot r)\cdot(f\cdot b-c\cdot e)$
$f\cdot p\cdot i\cdot e-f\cdot p\cdot f\cdot h-c\cdot q\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot f\cdot h-i\cdot q\cdot f\cdot b+i\cdot q\cdot c\cdot e+f\cdot r\cdot f\cdot b-f\cdot r\cdot c\cdot e$	
	$f\cdot p\cdot i\cdot e-f\cdot p\cdot f\cdot h+c\cdot q\cdot f\cdot h-i\cdot q\cdot f\cdot b+f\cdot r\cdot f\cdot b-f\cdot r\cdot c\cdot e$
$E_x=$	$f\cdot\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}$

$E_y=$	$(f\cdot a-c\cdot d)\cdot(i\cdot q-f\cdot r)-(i\cdot d-f\cdot g)\cdot(f\cdot p-c\cdot q)$
$f\cdot a\cdot i\cdot q-f\cdot a\cdot f\cdot r-c\cdot d\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot f\cdot r-i\cdot d\cdot f\cdot p+i\cdot d\cdot c\cdot q+f\cdot g\cdot f\cdot p-f\cdot g\cdot c\cdot q$	
$E_y=$	$f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}$

$x=\dfrac{E_x}{E}$	$\dfrac{f\cdot\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$
$y=\dfrac{E_y}{E}$	$\dfrac{f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$

Conclusão: o termo (f) pode ser cancelado nas frações:

$D\stackrel{\text{def}}{=}$	$[a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b]-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]$
$x=\dfrac{D_x}{D}$	$\dfrac{\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}}{\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$
$y=\dfrac{D_y}{D}$	$\dfrac{f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$

Assim, define-se o determinante de uma matriz (3×3).

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\det A \stackrel{\text{def}}{=} [a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot h + g \cdot f \cdot b] - [a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot b + g \cdot c \cdot e]$

Método de Sarrus

a	b	c	a	b	
d	e	f	d	e	
g	h	i	g	h	

a	b	c	a	b	
d	e	f	d	e	
g	h	i	g	h	

Com esta definição, os numeradores das frações correspondem aos seguintes determinantes:

$$D_x = [p \cdot i \cdot e + c \cdot q \cdot h + r \cdot f \cdot b] - [p \cdot f \cdot h + i \cdot q \cdot b + r \cdot c \cdot e]$$

p	b	c	p	b	
q	e	f	q	e	
r	h	i	r	h	

p	b	c	p	b	
q	e	f	q	e	
r	h	i	r	h	

$$D_y = [a \cdot i \cdot q + c \cdot d \cdot r + g \cdot f \cdot p] - [a \cdot f \cdot r + i \cdot d \cdot p + g \cdot c \cdot q]$$

a	p	c	a	p	
d	q	f	d	q	
g	r	i	g	r	

a	p	c	a	p	
d	q	f	d	q	
g	r	i	g	r	

A condição de existência de uma única solução é a de que o determinante (D) da matriz de coeficientes seja diferente de zero.

	$D = \det(A) \neq 0$	$(*)$

2 Sistemas tridimensionais

(i)	$3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 1$	$\Leftarrow$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$
(ii)	$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2$		
(iii)	$4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 3$		

2.1 Classificação do sistema

Vamos verificar se este sistema possui solução:

$D =$	$\det(A) =$	-8			

Como $(D \neq 0)$, então o sistema possui uma única solução.

2.2 Solução pelo teorema de Cramer

x_1	$=$	$\dfrac{D_x}{D}$	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}$	$=$	$\dfrac{24}{-8}$	$=$	-3
x_2	$=$	$\dfrac{D_y}{D}$	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}$	$=$	$\dfrac{-40}{-8}$	$=$	5
x_3	$=$	$\dfrac{D_z}{D}$	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}}$	$=$	$\dfrac{0}{-8}$	$=$	0

Verificação da solução:

$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\Rightarrow$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\Rightarrow$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

Tendo obtido uma sentença verdadeira, a solução obtida está correta.

2.3 Inversão de matrizes

No caso em que $(m = n)$, obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

$$[A]_{n\times n} \cdot \{X\}_{n\times 1} = \{B\}_{n\times 1}$$

Para sistemas lineares com (n) variáveis e (n) equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

	$D = \det(A) \neq 0$	$(*)$

Nestas condições, se a matriz de coeficientes $[A]_{n\times n}$ for inversível, então a solução da equação $(*)$ será:

$[A]_{n\times n} \cdot \{X\}_{n\times 1} = \{B\}_{n\times 1}$	$\Longrightarrow$	$[A^{-1}]_{n\times n} \cdot [A]_{n\times n} \cdot \{X\}_{n\times 1} = [A^{-1}]_{n\times n} \cdot \{B\}_{n\times 1}$
		$[id]_{n\times n} \cdot \{X\}_{n\times 1} = [A^{-1}]_{n\times n} \cdot \{B\}_{n\times 1}$
		$\{X\}_{n\times 1} = [A^{-1}]_{n\times n} \cdot \{B\}_{n\times 1}$

Nos exemplos anteriores:

	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 40 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$[A^{-1}]_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 30 \\ 40 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \end{Bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -7$$

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$D = \begin{vmatrix} \frac{4}{39} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} & \frac{1}{6} \end{vmatrix} = 78$
	$[A^{-1}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{4}{39} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$[A^{-1}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} \frac{8}{78} & -\frac{6}{78} & \frac{26}{78} \\ \frac{18}{78} & \frac{6}{78} & \frac{0}{78} \\ -\frac{17}{78} & \frac{3}{78} & \frac{13}{78} \end{bmatrix}$
$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{78} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 & 26 \\ 18 & 6 & 0 \\ -17 & 3 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$		$\Longrightarrow$	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{78} \cdot \begin{Bmatrix} 78 \\ 156 \\ -78 \end{Bmatrix}$

Percebemos que cada elemento da matriz inversa é um quociente de determinantes cujos denominadores são o determinante da matriz original:

$$[A^{-1}]_{3\times 3} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & m_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$m_{ij} = |C|$$

Vamos obter esta matriz de cofatores.

3 Operações entre Matrizes Quadradas

Uma operação é uma função de duas variáveis, em que cada variável é um elemento de um conjunto e o resultado da operação (que é a imagem da função) é um elemento do mesmo conjunto.

3.1 Adição e propriedades da soma

$+:$	$\mathcal{M}_{n\times n} \times \mathcal{M}_{n\times n}$	$\rightarrow$	$\mathcal{M}_{n\times n}$
	$(a \quad ; \quad b)$	$\mapsto$	$+(a;b) = a + b$

$(S1)$	Associatividade	$(a+b)+c = a+(b+c)$			
$(S2)$	Existência do elemento neutro	$(\mathbb{O})$	$a + \mathbb{O} = a$	&&	$\mathbb{O} + a = a$
$(S3)$	Existência do elemento oposto	$(-a)$	$a + (-a) = \mathbb{O}$	&&	$(-a) + a = \mathbb{O}$
$(S4)$	Comutatividade da soma	$a + b = b + a$			

3.2 Propriedades distributivas

$(D1)$	Distributiva à esquerda	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(D2)$	Distributiva à direita	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

3.3 Propriedades do produto

$(P1)$	Associatividade	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$			
$(P2)$	Existência do elemento neutro	$(\mathbb{I})$	$a \cdot \mathbb{I} = a$	&&	$\mathbb{I} \cdot a = a$
$(P3)$	Existência do elemento inverso	(h_a)	$a \cdot h_a = \mathbb{I}$	&&	$h_a \cdot a = \mathbb{I}$

No conjunto das matrizes quadradas, não vale a comutatividade do produto:

	Comutatividade do produto	$a \cdot b \neq b \cdot a$

Vamos demonstrar estas propriedades para as matrizes (2×2) com coeficientes inteiros. Para isto, necessitamos de três elementos:

$a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$	$b = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$	$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$

Elemento neutro da adição: trata-se do elemento:

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pois:

$a + \mathbb{O}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 + 0 & a_2 + 0 \\ a_3 + 0 & a_4 + 0 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$	$=$	a
$\mathbb{O} + a$	$=$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0 + a_1 & 0 + a_2 \\ 0 + a_3 & 0 + a_4 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$	$=$	a

A igualdade $(=)$ é devida à existência do (0), que é o elemento neutro da adição em conjuntos numéricos, aplicando-se este axioma em cada uma das (4) coordenadas.

Elemento oposto: trata-se do elemento:

$$-a = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}$$

Pois:

$a + (-a)$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) & a_2 + (-a_2) \\ a_3 + (a_3) & a_4 + (-a_4) \end{bmatrix}$	$=$
	$=$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$=$	$\mathbb{O}$	

A igualdade $(=)$ é devida à existência do elemento oposto em conjuntos numéricos, aplicando-se este axioma em cada uma das (4) coordenadas. Exercício de estudo: fazer o outro lado.

Exercício de estudo: mostrar que vale a comutatividade da soma de matrizes quadradas.

Elemento neutro da multiplicação: trata-se do elemento:

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Vamos descobrir as coordenadas da matriz identidade:

$a \cdot \mathbb{I}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 \cdot x + a_2 \cdot z & a_1 \cdot y + a_2 \cdot w \\ a_3 \cdot x + a_4 \cdot z & a_3 \cdot y + a_4 \cdot w \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

Obtivemos um sistema com (4) equações e (4) incógnitas:

	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot z = a_1$	$\Longrightarrow$	$x = 1$	$\&\&$	$z = 0$
	$a_1 \cdot y + a_2 \cdot w = a_2$	$\Longrightarrow$	$w = 1$	$\&\&$	$y = 0$
	$a_3 \cdot x + a_4 \cdot z = a_3$	$\Longrightarrow$	$x = 1$	$\&\&$	$z = 0$
	$a_3 \cdot y + a_4 \cdot w = a_4$	$\Longrightarrow$	$w = 1$	$\&\&$	$y = 0$

Obtivemos que

$$\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar a outra propriedade:

$\mathbb{I} \cdot a$	$=$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_3 & 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_4 \\ 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_3 & 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_4 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$

Elemento inverso:

$$h_a = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Vamos descobrir as coordenadas da matriz inversa:

$a \cdot h_a$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} a_1 \cdot x + a_2 \cdot z & a_1 \cdot y + a_2 \cdot w \\ a_3 \cdot x + a_4 \cdot z & a_3 \cdot y + a_4 \cdot w \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Obtivemos um sistema com (4) equações e (4) incógnitas:

(i)	$a_1 \cdot x + a_2 \cdot z = 1$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$		
(ii)	$a_1 \cdot y + a_2 \cdot w = 0$	$\Longrightarrow$			
(iii)	$a_3 \cdot x + a_4 \cdot z = 0$	$\Longrightarrow$			
(iv)	$a_3 \cdot y + a_4 \cdot w = 1$	$\Longrightarrow$			

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Exercício: resolver o sistema para obter que:

$$h_a = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_4}{a_1 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_2} & \dfrac{-a_2}{a_1 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_2} \\ \dfrac{a_3}{a_1 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_2} & \dfrac{a_1}{a_1 \cdot a_4 - a_3 \cdot a_2} \end{bmatrix}$$

https://cn.ect.ufrn.br/index.php?r=conteudo%2Fsislin-gauss