

MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Sebastião Marcelo

Relações

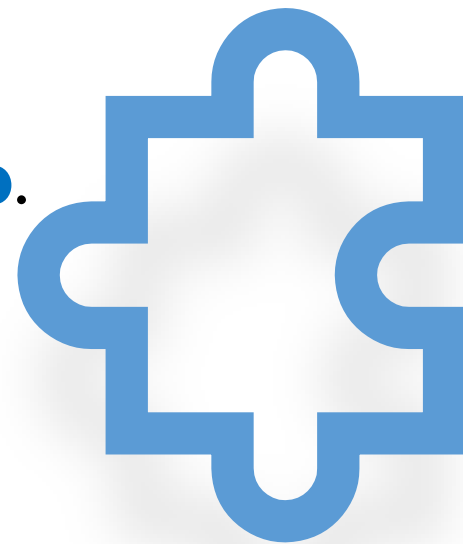


Matemática Discreta

Relação:

O conceito de **relação** está muito associado ao conceito formal de **relação**.

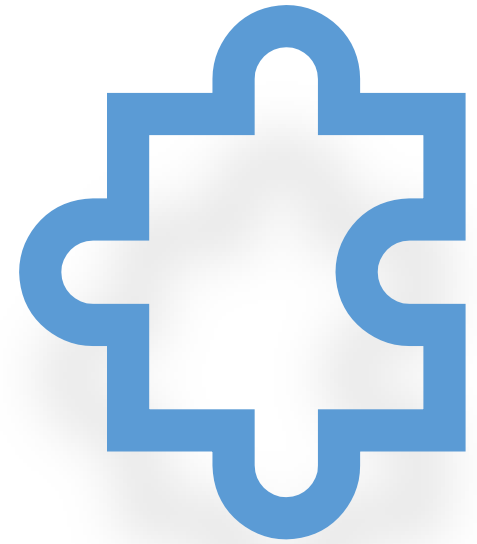
- Estatura das pessoas
- Igualdade
- Lista de contatos
- Conjunto de países



Matemática Discreta

Relações:

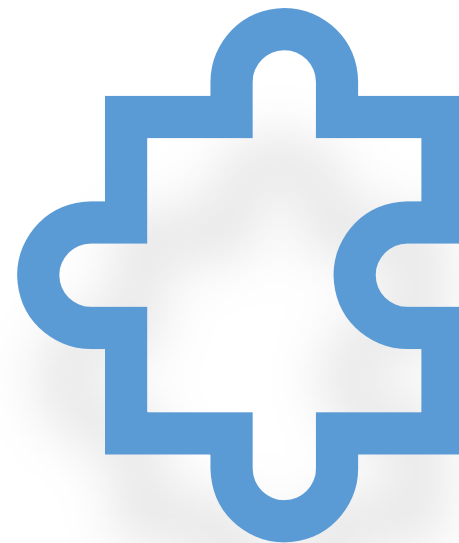
Podemos definir uma **relação** como sendo a existência de determinadas conexões entre “pares ordenados” assumindo uma determinada ordem.



Matemática Discreta

Relações:

Uma relação R do conjunto A para o conjunto B definida como: $R: A \rightarrow B$ de pares ordenados de elementos a e b , sendo definida como: (a, b) .

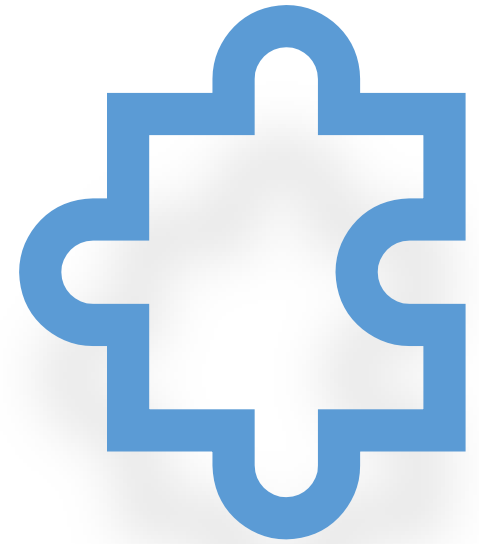


Matemática Discreta

Relações:

Pares ordenados de elementos a e b ,
sendo definida como: (a, b) .

Um par ordenado onde a é o primeiro
elemento e b o segundo elemento.



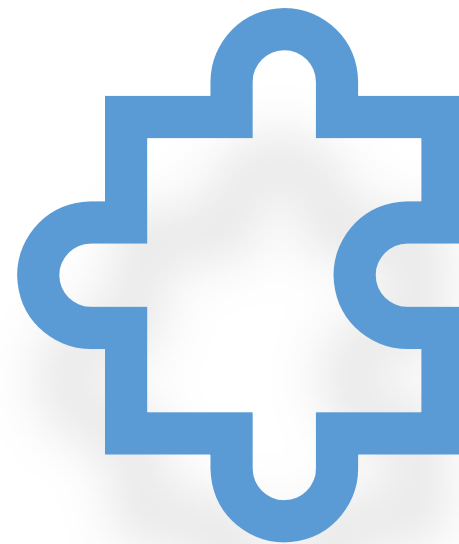
Matemática Discreta

Para os pares ordenados, onde podemos
particularizar: $(a, b) = (c, d)$

Quando:

Logo:

A menos que:



Matemática Discreta

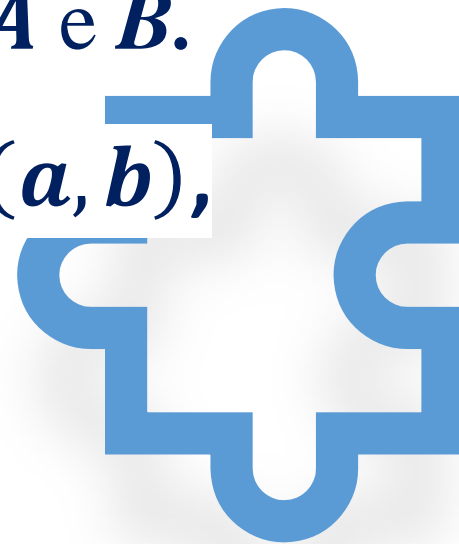
Produto de Cartesiano:

Considerando dois conjuntos quaisquer A e B .

O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) ,

onde, $a \in A$ e $b \in B$,

é chamado de produto ou **produto cartesiano** de A por B .

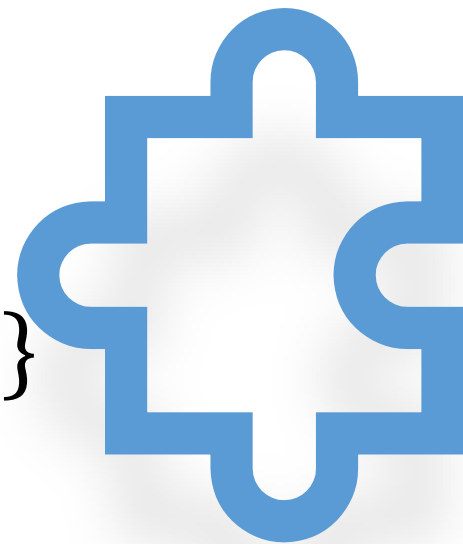


Matemática Discreta

Produto de Cartesiano:

Onde podemos escrever o **produto cartesiano** como sendo:


$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$



Matemática Discreta

Exemplo 1:


Podemos ter a representação do conjunto

 $R^2 = R \times R$, como sendo o conjunto de pares ordenados de números reais, onde teremos um ponto P , que representa um par ordenado (a, b) de números reais, sendo R^2 frequentemente chamado de **plano cartesiano**.

Matemática Discreta

Exemplo 2:

Sejam: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

 Determine: $A \times B$ e $B \times A$.



Exemplo 2:

Sejam: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

Determine: $A \times A$ e $B \times B$.



Exemplo 3: Sejam: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

Determine o número de elementos de:

$$A \times B, A \times A \text{ e } B \times B$$



Exemplo 4: Sejam: $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Representação gráfica do conjunto.



Matemática Discreta

Relações:

Se R é uma relação de A em B , $R: A \rightarrow B$
então R é um subconjunto de pares ordenados,
de tal forma que a relação R
é um subconjunto de $A \times B$.

Se R é uma relação de A em A ,
então R é um subconjunto de $A^2 = A \times A$.

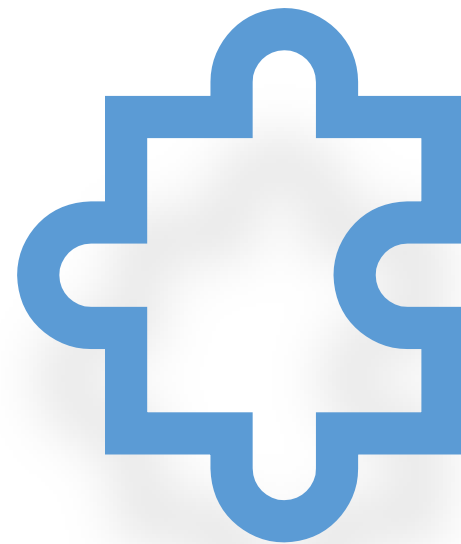


Matemática Discreta

Relações:

Para cada par $a \in A$ e $b \in B$, duas afirmações são verdadeiras:

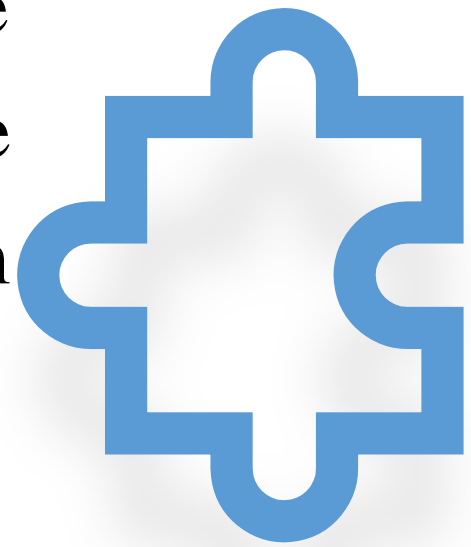
- $(a, b) \in R$; dizemos que *a é R -relacionado com b ,*
- $(a, b) \notin R$; dizemos que *a não é R -relacionado com b ,*



Matemática Discreta

Relações:

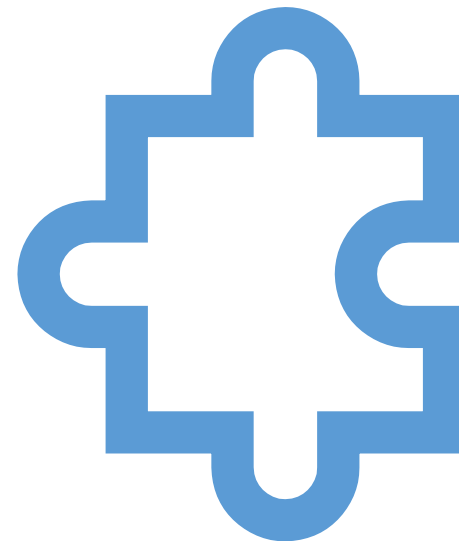
Se R é uma relação de A em B , então R é um subconjunto de pares ordenados, de tal forma que a relação R é um subconjunto de $A \times B$.



Matemática Discreta

Relações:

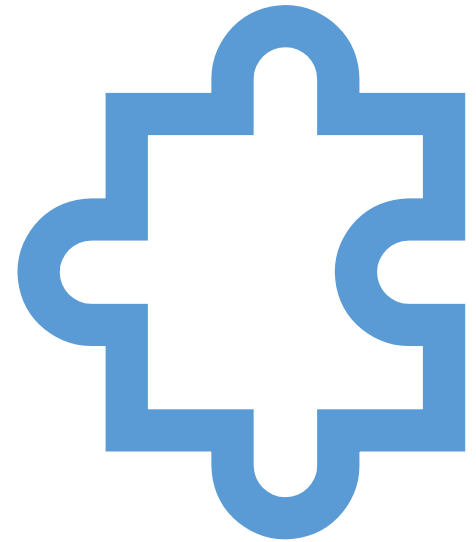
O *domínio* de uma relação R será o conjunto de todos os primeiros elementos dessa relação, ou seja, em um produto cartesiano os primeiros elementos do par ordenado.



Matemática Discreta

Relações:

A *imagem* de uma relação R será o conjunto de todos os segundos elementos dessa relação, ou seja, em um produto cartesiano os segundos elementos do par ordenado.



Exemplo 5: Sejam: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$,

E seja $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$.

Onde R é uma relação de A em B , uma vez que R é um subconjunto de $A \times B$.



Determinar o Domínio e a Imagem de R .



Exemplo 6:

Sejam: $A = \{\textit{ovos}, \textit{leite}, \textit{milho}\}$ e
 $B = \{\textit{vacas}, \textit{cabras}, \textit{galinhas}\}.$

Onde R é uma relação de A em B , por $(a, b) \in R$,
quando a for produzido por b .

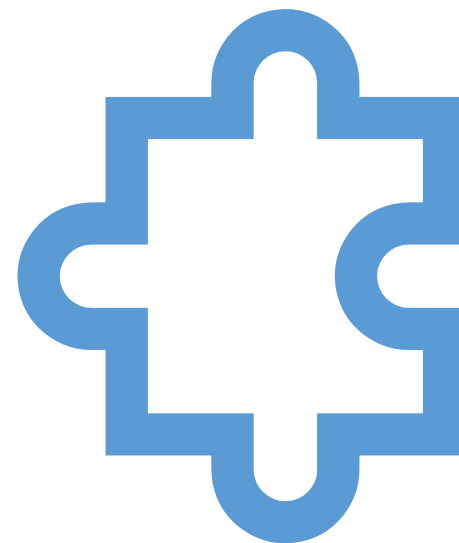


Matemática Discreta

Relação Inversa:

Seja R uma relação qualquer de um conjunto de A para um conjunto B .

A inversa de R , escrita como R^{-1} , é a relação de B em A que consiste nos pares ordenados, que tem sua ordem invertida, e pertencem a R .

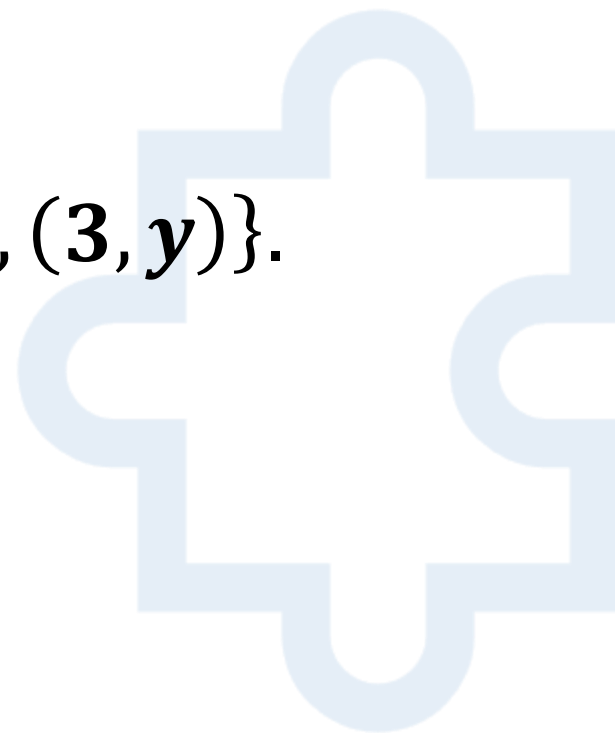


Exemplo 7:

Sejam: $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, z\}$.

A inversa de $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$.

é:



Matemática Discreta

Representação das Relações:

Considere uma relação S sobre o conjunto R dos números reais.

S é um subconjunto de $R^2 = R \times R$.

S consiste em todos os pares ordenados de números reais que satisfazem a equação



Exemplo 8:

Representar a equação: $x^2 + y^2 = 25$

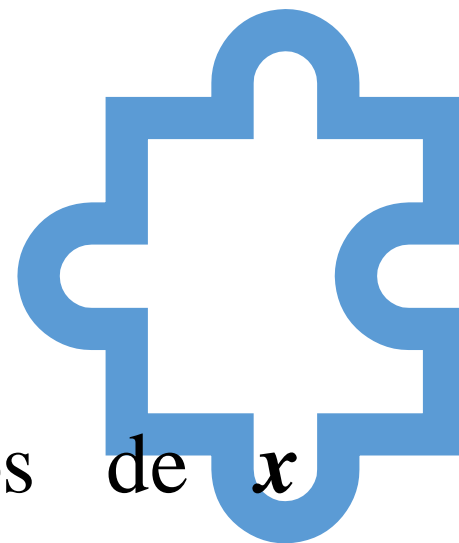


Matemática Discreta

Representação das Relações:

Grafo Orientado de Relação sobre Conjuntos

Quando temos setas dos elementos de x relacionados aos elementos de y , sempre que x estiver relacionado com y .

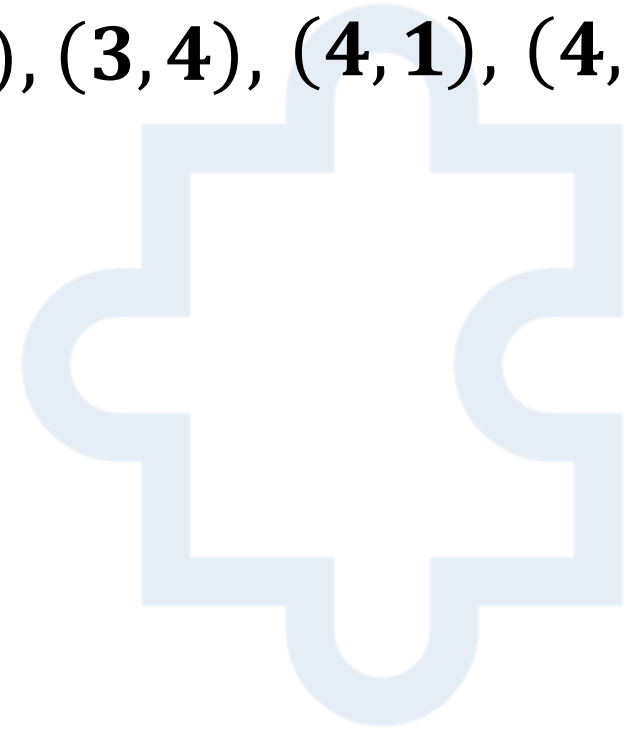


Chamamos de **Grafo orientado** da relação

Exemplo 9:

Qual o grafo orientado da relação R sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$R = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)\}$$

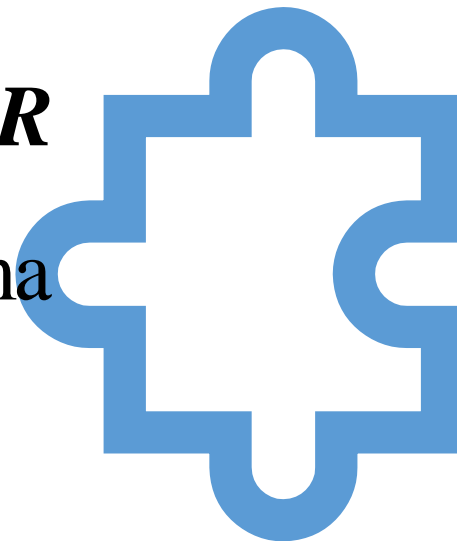


Matemática Discreta

Composição das Relações:

Sejam A , B e C conjuntos, e sejam R uma relação de A para B e S uma relação de B para C .

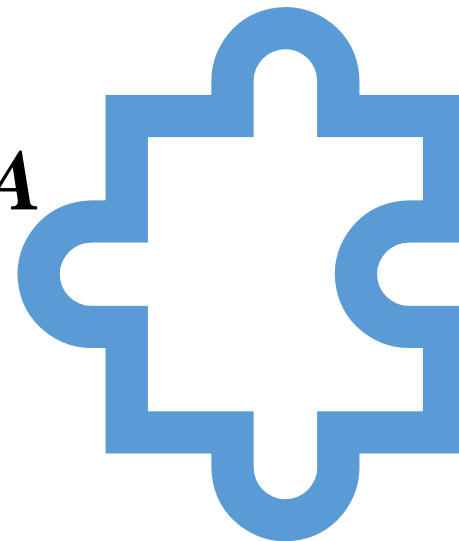
Onde, R é um subconjunto de $(A \times B)$ e S é um subconjunto de $(B \times C)$.



Matemática Discreta

Composição das Relações:

Então, R e S originam uma relação de A
para C denotada por $R \circ S$



A relação $R \circ S$ é dita composição de R e S ;
é algumas vezes escrita por RS

Exemplo 10:

Sejam: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$, e

Seja: $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$ e

$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$.



Qual a Relação composição $R \circ S$.



Exemplo 10:

Sejam: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$, e

Seja: $R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$,

$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$



Temos o seguinte diagrama de flechas de R e S .



Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

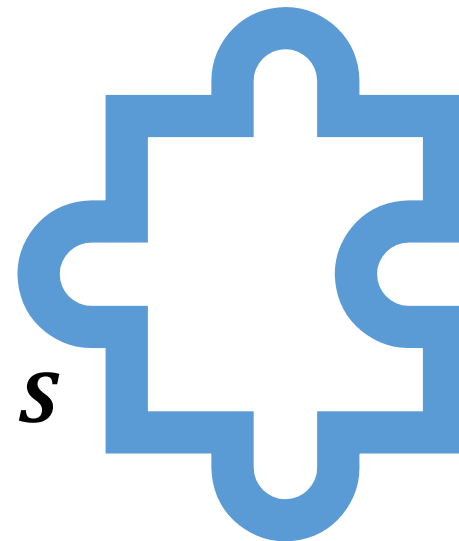
Há outra maneira de determinar $R \circ S$

Sejam M_R e M_S , respectivamente,

as representações matriciais das relações R e S

Então temos:

$$R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}$$



Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

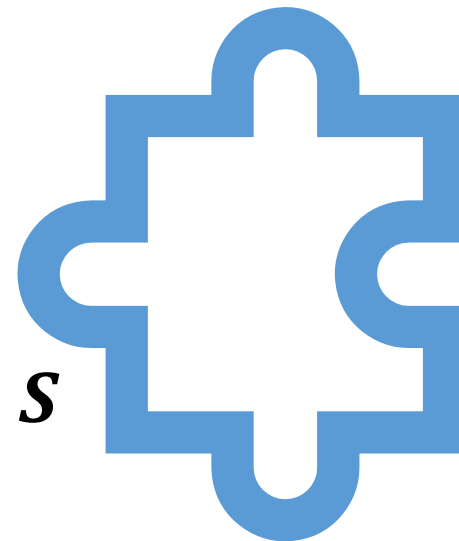
Há outra maneira de determinar $R \circ S$

Sejam M_R e M_S , respectivamente,

as representações matriciais das relações R e S

Então temos:

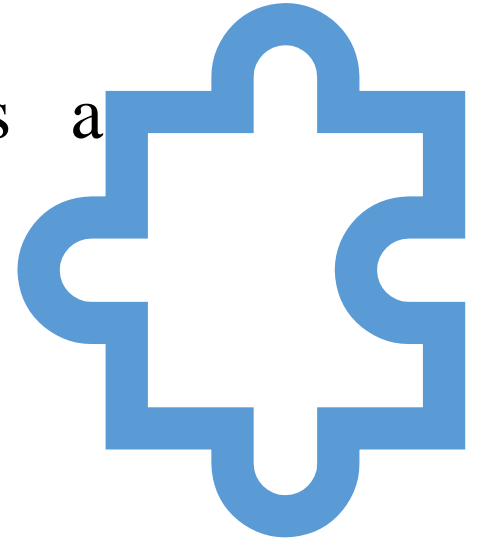
$$S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$$



Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

Se multiplicarmos M_R por M_S , obtemos a seguinte matriz:



Matemática Discreta

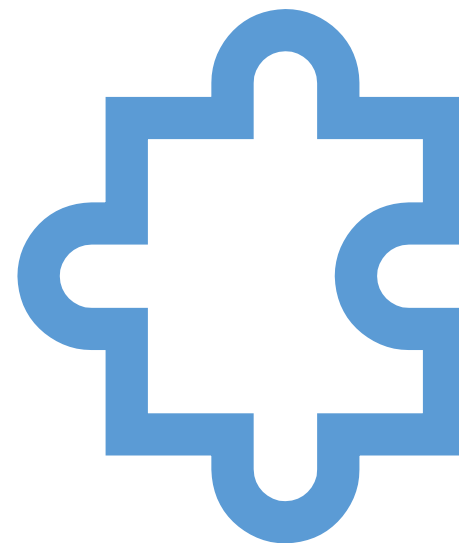
Tipos de Relações

Há alguns tipos de relações importantes:

Relações Reflexivas;

Relações Simétricas;

Relações Transitivas.

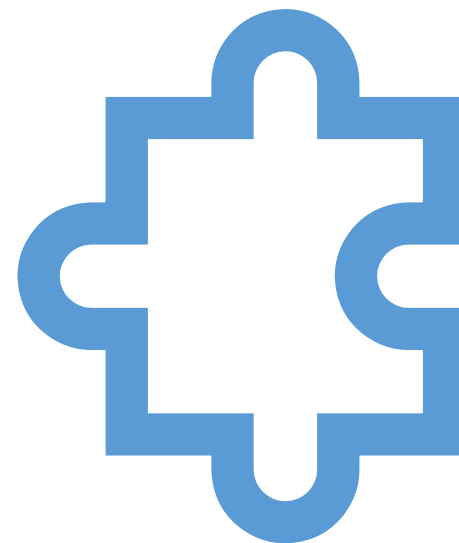


Matemática Discreta

Relações Reflexivas

Uma relação R em um conjunto A é reflexiva se aRa para todo, $a \in A$, isto é, se $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$

Portanto, R não é reflexiva se existe um $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$.



Exemplo 11:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$T = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$V = \emptyset, \text{ relação vazia}$$

$$U = A \times A, \text{ relação universal}$$

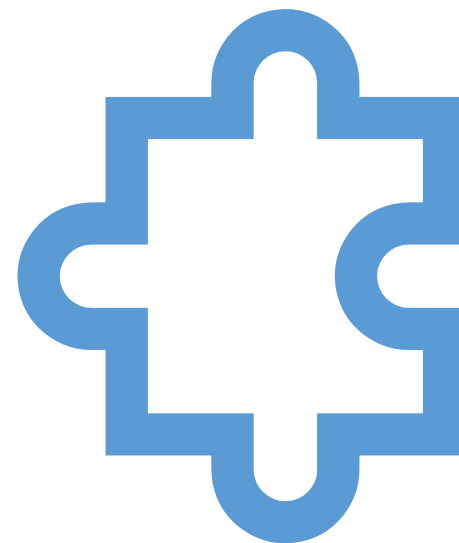
Determinar quais das relações são **reflexivas**.

Matemática Discreta

Relações Simétricas

Uma relação R em um conjunto A é simétrica se aRb implica bRa , isto é, se $(a, b) \in R$, implica $(b, a) \in R$.

Logo, R não é simétrica se existe $a, b \in A$ $(a, b) \in R$ mas $(b, a) \notin R$.



Exemplo 12:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$T = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$V = \emptyset, \text{ relação vazia}$$

$$U = A \times A, \text{ relação universal}$$

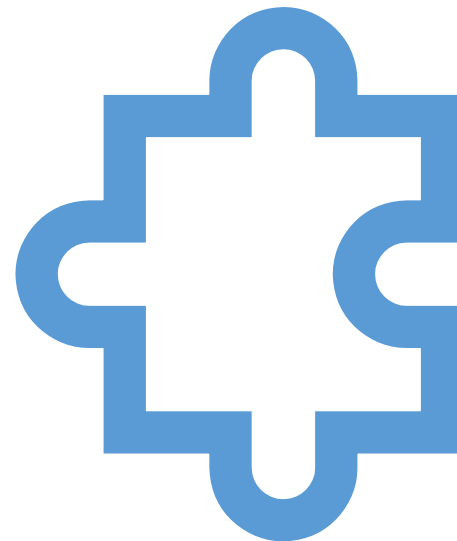
Determinar quais das relações são **simétricas**.

Matemática Discreta

Relações Transitivas

Uma relação R em um conjunto A é transitiva se aRb e bRa , implicam aRc isto é, sempre que (a, b) e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$.

Logo, R não é transitiva se existem $a, b, c \in A$ de tal forma que (a, b) e $(b, c) \in R$ mas $(a, c) \notin R$.



Exemplo 13:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$T = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$V = \emptyset, \text{ relação vazia}$$

$$U = A \times A, \text{ relação universal}$$

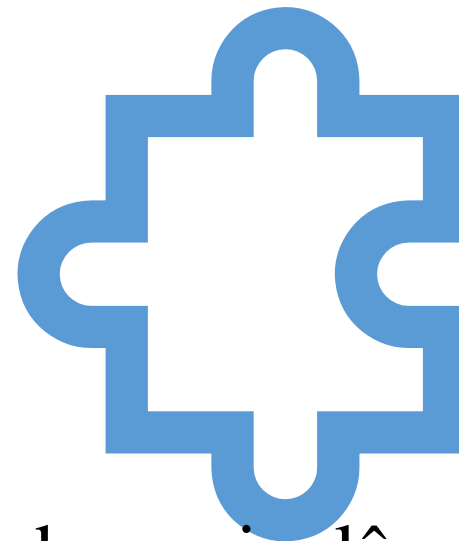
Determinar quais das relações são **transitivas**.

Matemática Discreta

Relação de Equivalência

Seja um conjunto S não vazio.

Um relação R sobre S é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva ao mesmo tempo.



Exemplo 14: Relação de Equivalência

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$U = A \times A, \text{ relação universal}$$

$$T = \{(1, 3), (2, 1)\}$$

$$V = \emptyset, \text{ relação vazia}$$

Exemplo 15:

Sejam $A = \{ 2, 3, 4, 5 \}$ e $B = \{ 3, 4, 5, 6, 10 \}$.

Para cada uma das seguintes relações determine:

- Os elementos (pares) da relação,
- Determine o conjunto domínio,
- Determine o conjunto imagem,
- Representação gráfica (plano cartesiano).

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ é } \textit{divisível por } y\}$$


$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \cdot y = 12\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y + 1\}$$

$$R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x \leq y\}$$

Exemplo 16:

Considere a relação $R = \{ (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 4) \}$ sobre $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

- 
- a) Encontre a Matriz M_R de R .
 - b) Encontre o Domínio e a imagem de R .
 - c) Encontre R^{-1} .
 - d) Esboce o grafo orientado de R .
 - e) Determine a relação composição $R \circ R$.
 - f) Encontre $R \circ R^{-1}$.
 - g) Encontre $R^{-1} \circ R$.

