SISTEMAS LINEARES E MATRIZES

Henrique Furia Silva (henrique.furia@fatec.sp.gov.br)

1 Sistemas lineares

Vamos começar com um exemplo

(i)	$3 \cdot x + 5 \cdot y = 13$		
(ii)	$7 \cdot x - 2 \cdot y = 3$		

1.1 Método da substituição

Neste método, isolamos uma das variáveis e substituímos na outra equação

(i)	$3 \cdot x + 5 \cdot y = 13$	$\Longrightarrow$	$3 \cdot x = 13 - 5 \cdot y$
(ii)	$7 \cdot x - 2 \cdot y = 3$		$x = \dfrac{13 - 5 \cdot y}{3}$

Substituindo-se na outra equação:

(ii)	$7 \cdot \left(\dfrac{13 - 5 \cdot y}{3}\right) - 2 \cdot y = 3$	$\Longrightarrow$	$\dfrac{7 \cdot 13 - 7 \cdot 5 \cdot y}{3} - 2 \cdot y = 3$

Exercício de estudo: concluir esta resolução.

1.2 Método do escalonamento

Vamos efetuar uma combinação linear das equações para eliminar uma das variáveis. Para eliminar (y) e encontrar (x), escolhemos:

$2 \cdot (i)$	$6 \cdot x + 10 \cdot y = 26$		
$5 \cdot (ii)$	$35 \cdot x - 10 \cdot y = 15$		
$(+)$	$41 \cdot x = 41$	$\Longrightarrow$	$x = 1$

Para eliminar (x) e encontrar (y) de maneira independente, escolhemos:

$7 \cdot (i)$	$21 \cdot x + 35 \cdot y = 91$		
$3 \cdot (ii)$	$21 \cdot x - 6 \cdot y = 9$		
$(-)$	$41 \cdot y = 91 - 9$	$\Longrightarrow$	$y = 2$

Vamos verificar o resultado substituindo no sistema de equações a solução obtida.

(i)	$3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 13$	$\Longrightarrow$	$3 + 10 = 13$
(ii)	$7 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3$	$\Longrightarrow$	$7 - 4 = 3$

Obtivemos sentenças verdadeiras, o que nos permite concluir que o cálculo pretérito está correto.

1.3 Resolvendo usando o computador para operar com matrizes

O sistema original pode ser escrito utilizando matrizes:

(i)	$3 \cdot x + 5 \cdot y = 13$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix}$
(ii)	$7 \cdot x - 2 \cdot y = 3$		

A matriz dos coeficientes lineares, o vetor das variáveis e o vetor dos termos independentes são representados por:

$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$	$X \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$	$B \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix}$

O sistema pode ser representado pela seguinte equação matricial:

$$[A] \cdot \{X\} = \{B\}$$

Para resolvê-la no caso em que a matriz possui inversa, basta multiplicar à esquerda

$[A^{-1}] \cdot [A] \cdot \{X\} = [A^{-1}] \cdot \{B\}$	$\Longrightarrow$	$[\mathbb{I}]_{2\times2} \cdot \{X\}_{2\times1} = [A^{-1}]_{2\times2} \cdot \{B\}_{2\times1}$
	$\Longrightarrow$	$\{X\}_{2\times1} = [A^{-1}]_{2\times2} \cdot \{B\}_{2\times1}$

Vamos usar o computador para obter a matriz inversa:

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{7}{41} & \frac{-3}{41} \end{bmatrix}$$

A solução é encontrada efetuando-se o produto de matrizes:

$\{X\} = \begin{bmatrix} \frac{2}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{7}{41} & \frac{-3}{41} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\{X\} = \frac{1}{41} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix}$
$\{X\} = \frac{1}{41} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 13 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\{X\} = \frac{1}{41} \cdot \begin{Bmatrix} 41 \\ 82 \end{Bmatrix}$
$\{X\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$x = 1$
		$y = 2$

Observamos que:

$$D = a \cdot d - b \cdot c = (3) \cdot (-2) - (5) \cdot (7) = -41 \neq 0$$

1.4 Teorema de Cramer para sistemas bidimensionais

(i)	$a \cdot x + b \cdot y = m$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$
(ii)	$c \cdot x + d \cdot y = n$		

Vamos efetuar uma combinação linear das equações para eliminar (y) e encontrar (x):

$d \cdot (i)$	$d \cdot a \cdot x + d \cdot b \cdot y = d \cdot m$		
$b \cdot (ii)$	$b \cdot c \cdot x + b \cdot d \cdot y = b \cdot n$		
$d \cdot (i) - b \cdot (ii)$	$d \cdot a \cdot x - b \cdot c \cdot x = d \cdot m - b \cdot n$		
	$(d \cdot a - b \cdot c) \cdot x = d \cdot m - b \cdot n$	$\Longrightarrow$	$x = \dfrac{d \cdot m - b \cdot n}{d \cdot a - b \cdot c}$

Este quociente só pode ser escrito se o denominador for diferente de zero:

$$d \cdot a - b \cdot c \neq 0$$

Vamos efetuar uma combinação linear das equações para eliminar (x) e encontrar (y):

$c \cdot (i)$	$c \cdot a \cdot x + c \cdot b \cdot y = c \cdot m$		
$a \cdot (ii)$	$a \cdot c \cdot x + a \cdot d \cdot y = a \cdot n$		
$a \cdot (ii) - c \cdot (i)$	$a \cdot d \cdot y - c \cdot b \cdot y = a \cdot n - c \cdot m$		
	$(a \cdot d - c \cdot b) \cdot y = a \cdot n - c \cdot m$	$\Longrightarrow$	$y = \dfrac{a \cdot n - c \cdot m}{a \cdot d - c \cdot b}$

Conclusão: quando

$$D \stackrel{\text{def}}{=} d \cdot a - b \cdot c \neq 0$$

É possível resolver o sistema:

(i)	$a \cdot x + b \cdot y = m$	$\Longrightarrow$	$x = \dfrac{d \cdot m - b \cdot n}{d \cdot a - b \cdot c}$
(ii)	$c \cdot x + d \cdot y = n$		$y = \dfrac{a \cdot n - c \cdot m}{a \cdot d - c \cdot b}$

Vamos definir o determinante de uma matriz quadrada de ordem (2) pela fórmula:

$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$a \cdot d - c \cdot b$

Com isto, a solução do sistema pode ser escrita como quocientes de determinantes:

$x = \dfrac{d \cdot m - b \cdot n}{d \cdot a - b \cdot c}$		$\Longrightarrow$	$x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$
$y = \dfrac{a \cdot n - c \cdot m}{a \cdot d - c \cdot b}$			$y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$

Quanto à permutação de equações:

(ii)	$d \cdot y + c \cdot x = n$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} y \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$
(i)	$b \cdot y + a \cdot x = m$		

A solução obtida para o sistema é a mesma.

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} n & c \\ m & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}}$	$\Longrightarrow$	$y = \dfrac{n \cdot a - m \cdot c}{d \cdot a - b \cdot c}$
$x = \dfrac{\begin{vmatrix} d & n \\ b & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}}$	$\Longrightarrow$	$x = \dfrac{d \cdot m - b \cdot n}{d \cdot a - b \cdot c}$

2 Sistemas tridimensionais

(i)	$x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 7$	
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot y + 6 \cdot z = 5$	
(iii)	$2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 2$	

2.1 Métodos de escalonamento

Vamos fazer uma combinação linear de equações:

(i)	$3 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot y - 3 \cdot 2 \cdot z = 3 \cdot 7$	
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot y + 6 \cdot z = 5$	

(i)	$3 \cdot x + 6 \cdot y - 6 \cdot z = 21$		
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot y + 6 \cdot z = 5$		
$(i) + (ii)$	$13 \cdot y = 26$	$\Longrightarrow$	$y = 2$

Vamos substituir o valor da variável encontrada nas equações do sistema:

(i)	$x + 2 \cdot 2 - 2 \cdot z = 7$	
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot 2 + 6 \cdot z = 5$	
(iii)	$2 \cdot x + 2 + 2 \cdot z = 2$	

(i)	$x + 4 - 2 \cdot z = 7$	
(ii)	$-3 \cdot x + 14 + 6 \cdot z = 5$	
(iii)	$2 \cdot x + 2 + 2 \cdot z = 2$	

São (3) equações para (2) incógnitas:

(i)	$x - 2 \cdot z = 3$	
(ii)	$-3 \cdot x + 6 \cdot z = -9$	
(iii)	$2 \cdot x + 2 \cdot z = 0$	

Isto significa que uma das equações é redundante. As equações $\{(i); (ii)\}$ são linearmente dependentes; percebemos que:

$$(ii) = (-3) \cdot (i)$$

Neste caso, qualquer uma delas pode ser descartada.

Vou descartar a equação que facilitar nas contas, ou seja, a equação (ii). Assim, o problema é reduzido a um sistema bidimensional.

(i)	$x - 2 \cdot z = 3$		
(iii)	$2 \cdot x + 2 \cdot z = 0$		
$(i) + (iii)$	$3 \cdot x = 3$	$\Rightarrow$	$x = 1$

Vamos substituir em uma das equações para obter:

(i)	$1 - 2 \cdot z = 3$		
	$-2 = 2 \cdot z$	$\Rightarrow$	$z = -1$

Do ponto de vista computacional, ajuda escrever o sistema com notação matricial:

(i)	$x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 7$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot y + 6 \cdot z = 5$		
(iii)	$2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 2$		

Para que a multiplicação de matrizes resulte no sistema linear que a gerou, é necessário que a multiplicação de matrizes seja definida de forma a executar o produto de elementos da linha da primeira matriz por elementos da coluna da segunda matriz.

2.2 Solução por inversão de matrizes

$[A]_{3\times3}\cdot\{X\}_{3\times1}=\{B\}_{3\times1}$	$\Longrightarrow$	$\{X\}_{3\times1}=[A^{-1}]_{3\times3}\cdot\{B\}_{3\times1}$

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{39} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0\\ -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$

Vamos efetuar a decomposição dos denominadores das frações em potências de números primos:

$39=2^0\cdot3^1\cdot13^1$	$6=2^1\cdot3^1\cdot13^0$	$26=2^1\cdot3^0\cdot13^1$	$78=2^1\cdot3^1\cdot13^1$

Assim, o maior múltiplo que é comum a todos permitirá desaparecer com todas as frações:

$2^1\cdot3^1\cdot13^1$	$=$	78	

$78\cdot[A^{-1}]$	$=$	$78\cdot\begin{bmatrix}\frac{4}{39} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0\\ -\frac{17}{78} & \frac{1}{26} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix}8 & -6 & 26\\ 18 & 6 & 0\\ -17 & 3 & 13\end{bmatrix}$
$[A^{-1}]$	$=$		$=$	$\frac{1}{78}\cdot\begin{bmatrix}8 & -6 & 26\\ 18 & 6 & 0\\ -17 & 3 & 13\end{bmatrix}$

A solução é encontrada efetuando-se o produto de matrizes:

$\{X\}=[A^{-1}]\cdot\{B\}$	$=$	$\frac{1}{78}\cdot\begin{bmatrix}8 & -6 & 26\\ 18 & 6 & 0\\ -17 & 3 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}7\\5\\2\end{Bmatrix}$
$\frac{1}{78}\cdot\begin{Bmatrix}78\\156\\-78\end{Bmatrix}$	$=$	$\begin{Bmatrix}1\\2\\-1\end{Bmatrix}$
	$\Longrightarrow$	$x=1$
		$y=2$
		$z=-1$

2.3 Teorema de Cramer para sistemas tridimensionais

(i)	$x + 2 \cdot y - 2 \cdot z = 7$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$
(ii)	$-3 \cdot x + 7 \cdot y + 6 \cdot z = 5$		
(iii)	$2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 2$		

Calcular o determinante da matriz de coeficientes:

D	$=$	$\det(A)$	$=$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$=$	78

Como $(D \neq 0)$, posso utilizar o teorema de Cramer:

x	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$	$=$	$\dfrac{78}{78}$	$=$	1
y	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{D}$	$=$	$\dfrac{156}{78}$	$=$	2
z	$=$	$\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$	$=$	$\dfrac{-78}{78}$	$=$	-1

3 Cálculo de Determinantes

Precisamos apresentar técnicas de cálculo de determinantes, de modo a obter uma definição por recorrência.

3.1 Matrizes quadradas bidimensionais

$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$a \cdot d - c \cdot b$

3.2 Matrizes quadradas tridimensionais

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ n \\ p \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

$\det(A)$	$\stackrel{\text{def}}{=}$	$a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - i \cdot d \cdot b$

3.2.1 Regra de Sarrus

$\det(A)$	$=$	$[a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h] - [c \cdot e \cdot g + f \cdot h \cdot a + i \cdot d \cdot b]$

3.2.2 Teorema de Laplace para matrizes tridimensionais

Posso fatorar os termos comuns:

$\det(A)$	$=$	$a \cdot (e \cdot i - f \cdot h) - b \cdot (d \cdot i - f \cdot g) + c \cdot (d \cdot h - e \cdot g)$
$\det(A)$	$=$	$a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$
$\det(A)$	$=$	$a \cdot \begin{vmatrix} & e & f \\ & h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & & f \\ g & & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e & \\ g & h & \end{vmatrix}$

3.2.3 Teorema de Laplace para determinantes definidos por recorrência

É conveniente mudar a notação, usando índices no lugar de letras sequenciais:

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} a_{(1)(1)} & a_{[1][2]} & a_{(1;3)} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$\det(A)$	$=$	$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$
$\det(A)$	$=$	$(-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ a_{21} & & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot \begin{vmatrix} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \end{vmatrix}$$

4 Operações entre matrizes

Escolhendo-se duas matrizes para diversão:

$a = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$	$b = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$

Vamos efetuar as multiplicações de matrizes:

$[a] \cdot [b] =$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 41 & 46 \\ 40 & 94 \end{bmatrix}$
$[b] \cdot [a] =$	$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 94 & 23 \\ 80 & 41 \end{bmatrix}$

Claramente o produto de matrizes quadradas não é uma operação comutativa.

$a = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$	&	$b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -3 \\ -11 & 7 & 3 \end{bmatrix}$	

$a \cdot b$	$=$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -3 \\ -11 & 7 & 3 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -92 & 64 & -21 \\ -53 & 33 & -8 \\ -58 & 34 & 17 \end{bmatrix}$
$b \cdot a$	$=$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -2 & 2 & -3 \\ -11 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -11 & 23 & -8 \\ -4 & -7 & -22 \\ 1 & -101 & -24 \end{bmatrix}$

5 Referências

5.1 Livros e artigos

Álgebra linear com aplicações | Howard Anton, Chris Rorres | download (b-ok.lat)

5.2 Ferramentas online

Symbolab Math Solver - Step by Step calculator

Matrix Calculator - Symbolab

Matrix Inverse Calculator - Symbolab

Matrix Determinant Calculator - Symbolab