1 Sistemas Lineares Determinados

Sistemas lineares podem ser representados na notação de multiplicação de matrizes:

$$[A]_{m\times n}\cdot\{X\}_{n\times 1}=\{B\}_{m\times 1}$$

No caso em que $(m=n)$, obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

$$[A]_{n\times n}\cdot\{X\}_{n\times 1}=\{B\}_{n\times 1}$$

1.1 Teorema de Gauss (escalonamento)

Para sistemas lineares com (n) variáveis e (n) equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

	$D=\det(A)\neq 0$	$(*)$

(i)	$1\cdot x+2\cdot y-2\cdot z=7$	$\Leftrightarrow$	$\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}7\\ 5\\ 2\end{Bmatrix}$
(ii)	$-3\cdot x+7\cdot y+6\cdot z=5$		
(iii)	$2\cdot x+1\cdot y+2\cdot z=2$		

Vamos verificar se este sistema tem solução única, isto é, se ele atende à condição $(*)$.

$D=\det(A)=$	$\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -3 & 7 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$	$=78$	$\neq 0$

Vamos resolver este sistema por escalonamento. Para isto, efetue combinações lineares de equações para desaparecer com uma das três variáveis. Para desaparecer com a variável (z), vamos fazer a seguinte escolha:

$3\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$3\cdot x+6\cdot y-6\cdot z=21$	
(ii)	$\Longrightarrow$	$-3\cdot x+7\cdot y+6\cdot z=5$	$(+)$
$3\cdot(i)+(ii)$	$\Longrightarrow$	$0\cdot x+13\cdot y=26$	$y=2$

1.1.1 Teorema de Cramer bidimensional

Vamos desaparecer com a variável (y).

$7\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$7\cdot 1\cdot x+7\cdot 2\cdot y-7\cdot 2\cdot z=7\cdot 7$	
$2\cdot(ii)$	$\Longrightarrow$	$-2\cdot 3\cdot x+2\cdot 7\cdot y+2\cdot 6\cdot z=2\cdot 5$	

$7\cdot(i)$	$\Longrightarrow$	$7\cdot x+14\cdot y-14\cdot z=49$	
$2\cdot(ii)$	$\Longrightarrow$	$-6\cdot x+14\cdot y+12\cdot z=10$	$(-)$
	$\Longrightarrow$	$13\cdot x-26\cdot z=39$	

1.2 Teorema de Cramer tridimensional

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 78 \neq 0$

	$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 78$	$\Longrightarrow$	$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{78}{78} = 1$
	$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 156$	$\Longrightarrow$	$y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{156}{78}$
	$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -78$	$\Longrightarrow$	$z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{-78}{78} = -1$

1.3 Demonstração do teorema de Cramer tridimensional

(i)	$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = p$	$\Leftarrow$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$
(ii)	$d \cdot x + e \cdot y + f \cdot z = q$		
(iii)	$g \cdot x + h \cdot y + i \cdot z = r$		

Vamos desaparecer com a variável (z).

$f \cdot (i)$	$\Rightarrow$	$f \cdot a \cdot x + f \cdot b \cdot y + f \cdot c \cdot z = f \cdot p$	
$c \cdot (ii)$	$\Rightarrow$	$c \cdot d \cdot x + c \cdot e \cdot y + c \cdot f \cdot z = c \cdot q$	$(-)$
	$\Rightarrow$	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot x + (f \cdot b - c \cdot e) \cdot y = f \cdot p - c \cdot q$	

Vamos desaparecer com a variável (z).

$i \cdot (ii)$	$\Rightarrow$	$i \cdot d \cdot x + i \cdot e \cdot y + i \cdot f \cdot z = i \cdot q$	
$f \cdot (iii)$	$\Rightarrow$	$f \cdot g \cdot x + f \cdot h \cdot y + f \cdot i \cdot z = f \cdot r$	$(-)$
	$\Rightarrow$	$(i \cdot d - f \cdot g) \cdot x + (i \cdot e - f \cdot h) \cdot y = i \cdot q - f \cdot r$	

Obtivemos um sistema bidimensional

(iv)	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot x + (f \cdot b - c \cdot e) \cdot y = f \cdot p - c \cdot q$
(v)	$(i \cdot d - f \cdot g) \cdot x + (i \cdot e - f \cdot h) \cdot y = i \cdot q - f \cdot r$

Em notação matricial:

(iv) (v)	$\begin{bmatrix} f \cdot a - c \cdot d & f \cdot b - c \cdot e \\ i \cdot d - f \cdot g & i \cdot e - f \cdot h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \cdot p - c \cdot q \\ i \cdot q - f \cdot r \end{Bmatrix}$

E que pode ser resolvido usando o teorema de Cramer.

Vamos calcular o denominador das frações que aparecem no teorema:

$E =$	$\begin{vmatrix} f \cdot a - c \cdot d & f \cdot b - c \cdot e \\ i \cdot d - f \cdot g & i \cdot e - f \cdot h \end{vmatrix}$
$E =$	$(f \cdot a - c \cdot d) \cdot (i \cdot e - f \cdot h) - (i \cdot d - f \cdot g) \cdot (f \cdot b - c \cdot e)$
$f \cdot a \cdot i \cdot e - f \cdot a \cdot f \cdot h - c \cdot d \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot f \cdot h - i \cdot d \cdot f \cdot b + i \cdot d \cdot c \cdot e + f \cdot g \cdot f \cdot b - f \cdot g \cdot c \cdot e$	
$E =$	$f \cdot a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot f \cdot h + f \cdot g \cdot f \cdot b - [f \cdot a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot f \cdot b + f \cdot g \cdot c \cdot e]$
$E =$	$f \cdot \{a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot h + g \cdot f \cdot b - [a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot b + g \cdot c \cdot e]\}$

(iv) (v)	$\begin{bmatrix} f\cdot a-c\cdot d & f\cdot b-c\cdot e \\ i\cdot d-f\cdot g & i\cdot e-f\cdot h \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f\cdot p-c\cdot q \\ i\cdot q-f\cdot r \end{Bmatrix}$

Vamos calcular os numeradores.

$E_x =$	$\begin{vmatrix} f\cdot p-c\cdot q & f\cdot b-c\cdot e \\ i\cdot q-f\cdot r & i\cdot e-f\cdot h \end{vmatrix}$	
$E_y =$	$\begin{vmatrix} f\cdot a-c\cdot d & f\cdot p-c\cdot q \\ i\cdot d-f\cdot g & i\cdot q-f\cdot r \end{vmatrix}$	

$E_x =$	$(f\cdot p-c\cdot q)\cdot(i\cdot e-f\cdot h)-(i\cdot q-f\cdot r)\cdot(f\cdot b-c\cdot e)$
$f\cdot p\cdot i\cdot e-f\cdot p\cdot f\cdot h-c\cdot q\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot f\cdot h-i\cdot q\cdot f\cdot b+i\cdot q\cdot c\cdot e+f\cdot r\cdot f\cdot b-f\cdot r\cdot c\cdot e$	
	$f\cdot p\cdot i\cdot e-f\cdot p\cdot f\cdot h+c\cdot q\cdot f\cdot h-i\cdot q\cdot f\cdot b+f\cdot r\cdot f\cdot b-f\cdot r\cdot c\cdot e$
$E_x =$	$f\cdot\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}$

$E_y =$	$(f\cdot a-c\cdot d)\cdot(i\cdot q-f\cdot r)-(i\cdot d-f\cdot g)\cdot(f\cdot p-c\cdot q)$
$f\cdot a\cdot i\cdot q-f\cdot a\cdot f\cdot r-c\cdot d\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot f\cdot r-i\cdot d\cdot f\cdot p+i\cdot d\cdot c\cdot q+f\cdot g\cdot f\cdot p-f\cdot g\cdot c\cdot q$	
$E_y =$	$f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}$

$x=\dfrac{E_x}{E}$	$\dfrac{f\cdot\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$
$y=\dfrac{E_y}{E}$	$\dfrac{f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$

Conclusão: o termo (f) pode ser cancelado nas frações:

$D \stackrel{\text{def}}{=}$	$[a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b]-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]$
$x=\dfrac{D_x}{D}$	$\dfrac{\{p\cdot i\cdot e+c\cdot q\cdot h+r\cdot f\cdot b-[p\cdot f\cdot h+i\cdot q\cdot b+r\cdot c\cdot e]\}}{\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$
$y=\dfrac{D_y}{D}$	$\dfrac{f\cdot\{[a\cdot i\cdot q+c\cdot d\cdot r+g\cdot f\cdot p]-[a\cdot f\cdot r+i\cdot d\cdot p+g\cdot c\cdot q]\}}{f\cdot\{a\cdot i\cdot e+c\cdot d\cdot h+g\cdot f\cdot b-[a\cdot f\cdot h+i\cdot d\cdot b+g\cdot c\cdot e]\}}$

Assim, define-se o determinante de uma matriz (3×3).

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$	$\Longrightarrow$	$\det A \stackrel{\text{def}}{=} [a \cdot i \cdot e + c \cdot d \cdot h + g \cdot f \cdot b] - [a \cdot f \cdot h + i \cdot d \cdot b + g \cdot c \cdot e]$

Método de Sarrus

a	b	c	a	b	
d	e	f	d	e	
g	h	i	g	h	

a	b	c	a	b	
d	e	f	d	e	
g	h	i	g	h	

Com esta definição, os numeradores das frações correspondem aos seguintes determinantes:

$$D_x = [p \cdot i \cdot e + c \cdot q \cdot h + r \cdot f \cdot b] - [p \cdot f \cdot h + i \cdot q \cdot b + r \cdot c \cdot e]$$

p	b	c	p	b	
q	e	f	q	e	
r	h	i	r	h	

p	b	c	p	b	
q	e	f	q	e	
r	h	i	r	h	

$$D_y = [a \cdot i \cdot q + c \cdot d \cdot r + g \cdot f \cdot p] - [a \cdot f \cdot r + i \cdot d \cdot p + g \cdot c \cdot q]$$

a	p	c	a	p	
d	q	f	d	q	
g	r	i	g	r	

a	p	c	a	p	
d	q	f	d	q	
g	r	i	g	r	

A condição de existência de uma única solução é a de que o determinante (D) da matriz de coeficientes seja diferente de zero.

	$D = \det(A) \neq 0$	$(*)$

1.4 Inversão de matrizes

No caso em que $(m = n)$, obtém-se como coeficientes lineares uma matriz quadrada.

$$[A]_{n \times n} \cdot \{X\}_{n \times 1} = \{B\}_{n \times 1}$$

Para sistemas lineares com (n) variáveis e (n) equações independentes do ponto de vista linear, o sistema terá solução única. Isto acontece quando

	$D = \det(A) \neq 0$	$(*)$
