Matemática Discreta

Conjuntos

Prof. Sebastião Marcelo

Matemática Discreta

- **Conjuntos**
- **Elementos**
- **Subconjuntos**

Conjuntos

Um conjunto pode ser entendido como qualquer coleção, ou agrupamento, ou classe, ou sistema bem definido de objetos, conhecidos como elementos ou membros do conjunto.

Geralmente é indicado por letras maiúsculas.

Matemática Discreta

- **Conjuntos**
- **Elementos**
- **Subconjuntos**

- Um elemento de um conjunto pode ser uma letra, um número, um nome, onde os conjuntos pode ser expressos por letras minúsculas.
- A relação entre os elementos e os conjuntos é de pertinência.

Matemática Discreta

- **Conjuntos**
- **Elementos**
- **Subconjuntos**

Há duas maneiras para se especificar um conjunto, listando os seus elementos ou enunciar a sua propriedade.

Matemática Discreta

- Há vários conjuntos que podemos listar:
  - Números Naturais:

    $$\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

  - Números Inteiros

    $$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

  - Números Reais

    $$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$$

Matemática Discreta

➢ Subconjuntos

Um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo e elemento de A é também elemento de B.

$\in$ *pertence*
$\notin$ *não pertence*
$\subset$ *está contido*
$\supset$ *contém*
$\subseteq$ *subconjunto*
$\exists$ *existe*
$\nexists$ *não existe*

$$a, b \in B, \quad e \quad a \in A$$

$$B = \{a, b\}, \quad e \quad A = \{a\}$$

$$A \subseteq B, \quad ou \quad B \supseteq A$$

Exemplo

Considere os conjuntos :

$A = \{1, 3, 4, 7, 8, 9\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$C = \{1, 3\}$.

O que se pode dizer das relações entre esses conjuntos?

7

Matemática Discreta

- **Conjuntos**
- **Elementos**
- **Subconjuntos**

Todos os conjuntos são subconjuntos de um grande conjunto chamado de conjunto ***Universo***.

Um conjunto que não possua elementos é chamado de conjunto ***Vazio***.

Matemática Discreta

- Conjuntos
- Elementos
- Subconjuntos

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então:

$$\boldsymbol{A \subseteq A}$$

Matemática Discreta

Operações com conjuntos:

Operações básicas como:

- **União,** $\cup$
- **Intersecção,** $\cap$
- **Complementar.** A^C

Matemática Discreta

- ✓ **Complementar**
- ✓ **Diferença**
- ✓ **Diferença Simétrica**

Complementar

O complementar de um conjunto A, escrito por

É o conjunto de elementos que pertencem ao conjunto *Universo* e que não pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A}$.

Matemática Discreta

- ✓ **Complementar**
- ✓ **Diferença**
- ✓ **Diferença Simétrica**

A **diferença** entre dois conjuntos, escrito por $\boldsymbol{A \setminus B}$.

E que se lê, “A menos B”, é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A}$ mas não pertencem ao conjunto $\boldsymbol{B}$.

Matemática Discreta

- ✓ **Complementar**
- ✓ **Diferença**
- ✓ **Diferença Simétrica**

A **diferença simétrica** entre dois conjuntos, escrito por

É o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto $\boldsymbol{A}$ e ao conjunto $\boldsymbol{B}$, mas não pertencem a ambos.

Exercício 1

Considere os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B = \{4, 5, 6, 7\}$,

$C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$E = \{2, 4, 6, 8\}$,

$F = \{1, 5, 9\}$,

Determinar:

a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$;

b) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$;

c) $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{E}$;

d) $\boldsymbol{E} \cup \boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{E} \cap \boldsymbol{E}$;

e) $\boldsymbol{D} \cup \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{F}$;

f) $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{C}}$; $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}}$; $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{C}}$; $\boldsymbol{D}^{\boldsymbol{C}}$;

g) $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{D} \setminus \boldsymbol{E}$; $\boldsymbol{F} \setminus \boldsymbol{D}$;

h) $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{D}$; $\boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{F}$.

Propriedades

União e Interseção

$$Todo\ elemento\ \boldsymbol{x}\ em\ \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, pertence\ a\ ambos,\ \boldsymbol{A}\ e\ \boldsymbol{B}.$$

$$Assim, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, \text{é}\ um\ subconjuto\ de\ \boldsymbol{A}\ e\ de\ \boldsymbol{B}.$$

$$\mathbf{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B}$$

$$Um\ elemento\ \boldsymbol{x}\ pertence\ \text{à}\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B},$$
$$se\ \boldsymbol{x}\ pertence\ a\ \boldsymbol{A}\ ou\ se\ \boldsymbol{x}\ pertence\ a\ \boldsymbol{B}.$$

$$Logo, todo\ elemento\ de\ \boldsymbol{A}\ pertence\ a\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B},$$
$$e\ todo\ elementode\ \boldsymbol{B}\ pertence\ a\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Matemática Discreta

Conjuntos Disjuntos

Os conjuntos A e B são disjuntos, se eles não possuem elementos em comum.

$\boldsymbol{A = \{1, 2\}}, \quad \boldsymbol{B = \{4, 5, 6\}},$

e $\boldsymbol{C = \{5, 6, 7, 8\}},$

Matemática Discreta

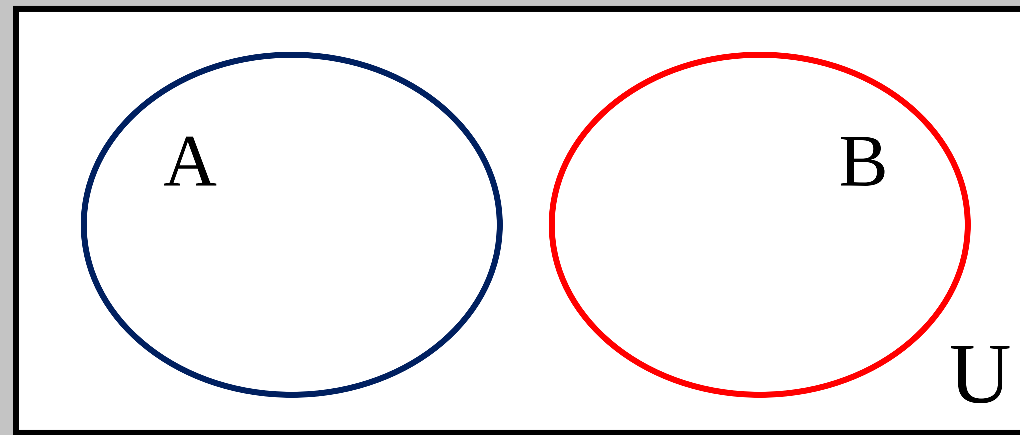
Diagrama de Venn

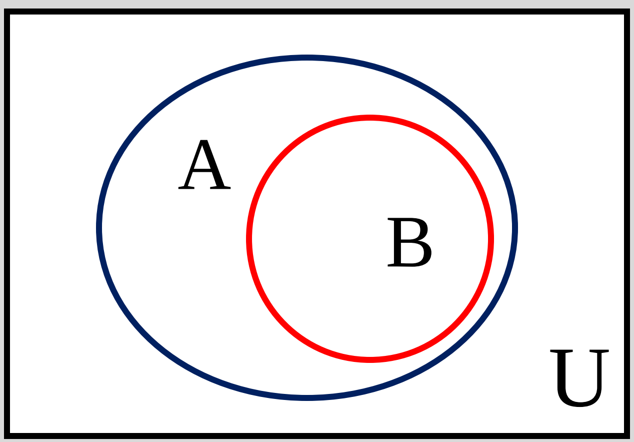
É uma representação pictórica de conjuntos em uma área delimitada no plano.

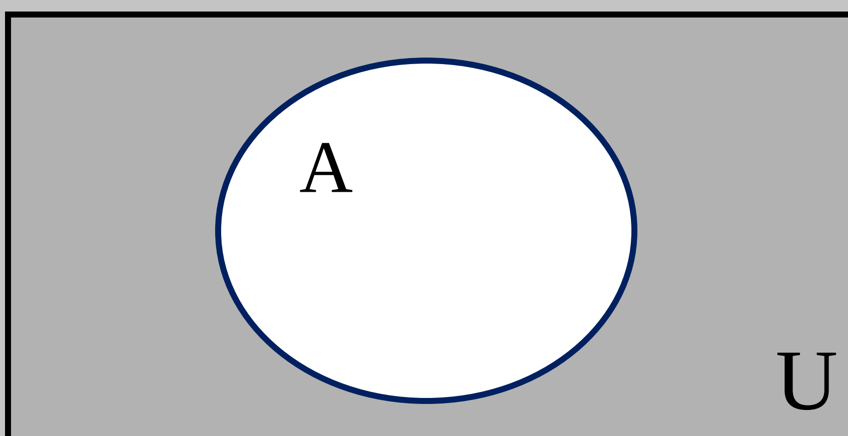
O conjunto *Universo* (*U*) é representado pelo interior de um retângulo, e os outros conjuntos, por círculos contidos dentro desse retângulo.

Matemática Discreta

Diagrama de Venn

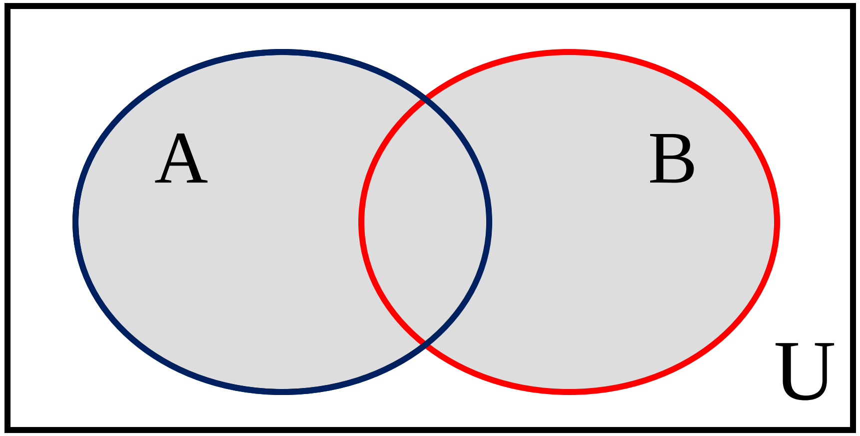


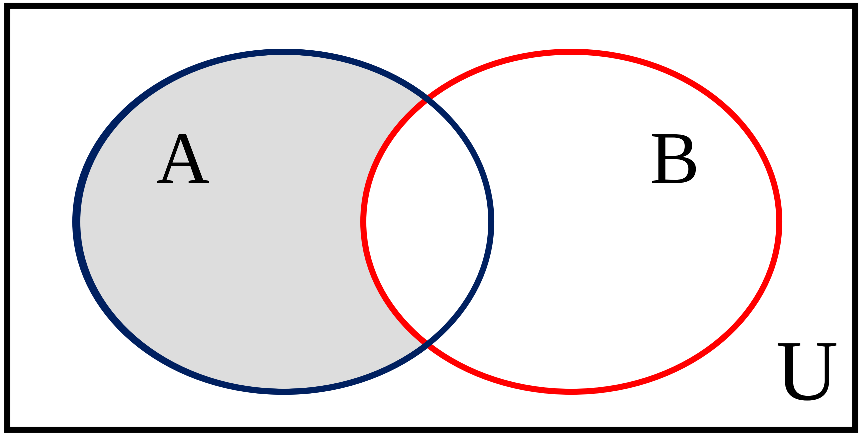


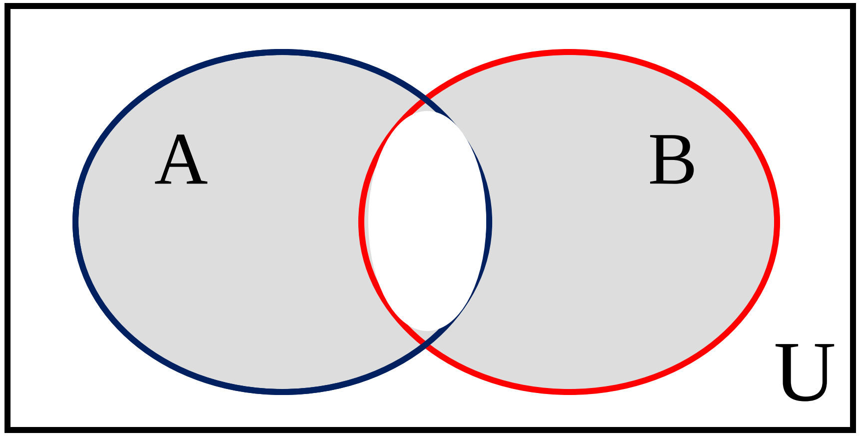


Exemplos

Diagramas de Venn







Matemática Discreta

Diagrama de Venn e Argumentos

Algumas afirmações verbais são declarações sobre conjuntos e, podem ser descritas por Diagramas de Venn.

Os Diagramas de Venn podem ser usados para determinar se um argumento é valido ou não.

Mostre que o seguinte argumento é valido:

S1: Todos os meus objetos de lata são frascos de molho.

S2: Considero todos os meus presentes muito úteis.

S3: Nenhum dos meus frascos de molho é útil.

S: Seus presentes dados a mim não são feitos de lata.

Exemplo

Argumentos e Diagramas de Venn

21

Matemática Discreta

Produtos Fundamentais

Um produto fundamental dos conjuntos é um conjunto da forma desses conjuntos.

$$\boldsymbol{A_1 \cap A_2 \cap \; \dots \; A_n}$$

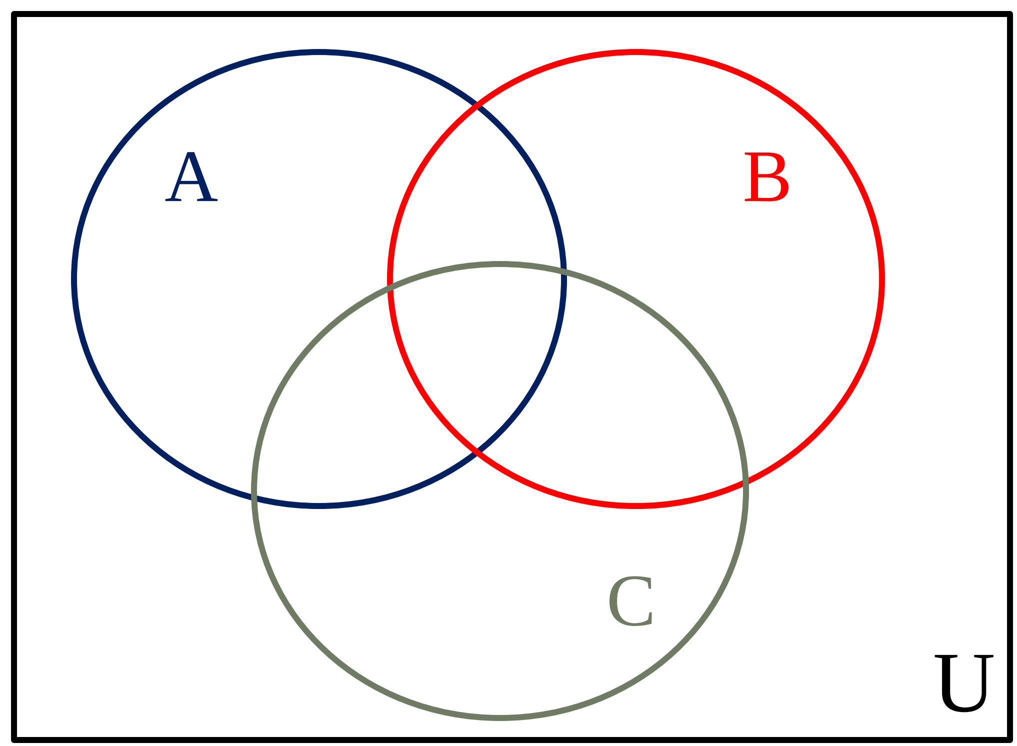
- Existem $\boldsymbol{m = 2^n}$ produtos fundamentais.
- O conjunto *Universo* é a união de todos os produtos fundamentais.
- $\boldsymbol{n}$ é o número de conjuntos.

Matemática Discreta

Produtos Fundamentais

Exemplo

Em um diagrama de Venn de três conjuntos ***A*, *B* e *C***.



Matemática Discreta

Leis da álgebra de conjuntos

Leis da idempotência	$\boldsymbol{A \cup A =}$	$\boldsymbol{A \cap A =}$
Leis associativas	$\boldsymbol{(A \cup B) \cup C}$	$\boldsymbol{(A \cap B) \cap C}$
Leis comutativas	$\boldsymbol{A \cup B =}$	$\boldsymbol{A \cap B =}$
Leis distributivas	$\boldsymbol{A \cup (B \cap C)}$	$\boldsymbol{A \cap (B \cup C)}$

Matemática Discreta

Leis de identidade	$A \cup \emptyset =$	$A \cap U =$
	$A \cup U =$	$A \cap \emptyset =$
Leis de involução	$\left(A^C\right)^C =$	
Leis de complementos	$A \cup A^C =$	$A \cap A^C =$
	$U^C =$	$\emptyset^C =$
Leis de DeMorgan	$(A \cup B)^C =$	$(A \cap B)^C =$

Matemática Discreta

Leis da álgebra de conjuntos

Exemplos

Mostre as seguintes equivalências no diagrama de Venn: $\boldsymbol{a)}\ (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{C}}$,

$\mathbf{b)}\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{C}} \cap \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}}$.

Conjuntos finitos e Princípio da contagem

Um conjunto é dito finito se contém exatamente m elementos distintos, onde m denota algum inteiro não negativo.

Caso contrário, o conjunto é dito infinito.

O conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto das letras do alfabeto $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}\}$ são exemplos de conjuntos finitos.

Conjuntos finitos e Princípio da contagem

Um conjunto $\boldsymbol{A}$ é contável se $\boldsymbol{A}$ é finito ou se os elementos de $\boldsymbol{A}$ podem ser arranjados como uma sequência.

Neste caso o conjunto $\boldsymbol{A}$ será *infinito* e *contável*.

Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ é finito.

O número de elementos será definido por:

Contando elementos em conjuntos finitos

Exemplo

Em uma turma de ADS ***(A)*** há 25 estudantes e 10 deles participam de uma turma de biologia ***(B)***.

Então o número de alunos da turma ***A*** que não está na turma ***B*** será:

Matemática Discreta

Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam dois conjuntos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ finitos.

Então $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ e $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ são finitos.

O número de elementos de um conjunto será $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$, quando os conjuntos não são disjuntos.

Matemática Discreta

Princípio da Inclusão-Exclusão

Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$, conjuntos finitos.

Logo, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$ é finito.

Então, temos:

Exemplo

Suponha que a lista A tenha 30 alunos de matemática e que a lista B tenha 35 alunos português, e que há 20 nomes em ambas as listas.

Encontre o número de alunos que estão:

a) Apenas na lista A.

b) Apenas na lista B.

c) Na lista A ou B.

d) Em exatamente uma lista.

Exercício 2

- 65 estudam francês,
- 45 estudam alemão,
- 42 estudam russo,
- 20 estudam francês e alemão,
- 25 estudam francês e russo,
- 15 estudam alemão e russo,
- 8 estudam os três idiomas.

Considere os seguintes dados sobre 120 estudantes de matemática no que diz respeito aos idiomas francês, alemão e russo.

Sejam F, A e R os conjuntos de alunos que estudam francês, alemão e russo respectivamente.

Determinar o número de alunos que estudam pelo menos um dos três idiomas e preencher o diagrama de Venn com o número de estudantes em cada região.

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Dado um conjunto ***S***, podemos falar sobre alguns de seus subconjuntos, ou seja, um conjunto de subconjuntos, e a isto chamaremos de classe de conjuntos ou coleção de conjuntos.

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Seja o conjunto $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$.

Chamamos de classe de conjuntos de $\boldsymbol{S}$ que contêm exatamente três elementos de $\boldsymbol{S}$.

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Seja ***B*** a classe de subconjuntos de ***S***, sendo que cada um contêm o 2 e dois outros elementos de ***S***.

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Dado um conjunto $\boldsymbol{S}$, podemos falar da classe de todos os subconjuntos de $\boldsymbol{S}$.

Essa classe é chamada de potência de $\boldsymbol{S}$, escrita por $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S})$.

O número de elementos em $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S})$ é:

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Seja o conjunto $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

Determinar a potência de $\boldsymbol{S}$.

Então:

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Seja um conjunto não vazio. Uma partição de ***S*** é uma subdivisão de ***S*** em conjuntos disjuntos e não vazios.

Uma partição de ***S*** é uma coleção $\{\boldsymbol{Ai}\}$ de subconjuntos não vazios de ***S***.

Os subconjuntos em uma partição são chamados de células.

Matemática Discreta

- Classes de conjuntos
- Potências
- **Partições**

No diagrama de Venn a seguir temos uma partição do conjunto retangular ***S*** de pontos em cinco células:

Matemática Discreta

- **Classes de conjuntos**
- **Potências**
- **Partições**

Considere a seguinte coleção de subconjuntos de $\boldsymbol{S}$, e identifique qual é partição.

$$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}\}$$

$a)\ [\ \{\ 1, 3, 5\ \}, \{\ 2, 6\ \}, \{\ 4, 8, 9\ \}\ ]$

$b)\ [\ \{\ 1, 3, 5\ \}, \{\ 2, 4, 6, 8\ \}, \{\ 5, 7, 9\ \}\ ]$

$c)\ [\ \{\ 1, 3, 5\ \}, \{\ 2, 4, 6, 8\ \}, \{\ 7, 9\ \}\ ]$

Exercício 3

Suponha o conjunto universo $S = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{p, q, r, s\}$,

$B = \{r, t, v\}$,

$C = \{p, s, t, u\}$,

$Determine$:

a) $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$;
b) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C};$
c) $\sim\boldsymbol{C}$;
d) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}$;
e) $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$;
f) $\sim(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$;
g) $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap \sim\boldsymbol{C}$.
h) $\boldsymbol{A}$ **x B**;

Exercício 4

Suponha o conjunto universo $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$,

$B = \{1, 4, 5, 9\}$,

$C = \left\{ \begin{matrix} x \mid x \in \boldsymbol{Z} \ \ e \\ 2 \leq x < 5 \end{matrix} \right\}$.

Determine:

a) $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$;

b) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$;

c) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$;

d) $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}$;

e) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$;

f) $\sim\boldsymbol{A}$;

g) $\boldsymbol{A} \cap \sim\boldsymbol{A}$;

h) $\sim(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$;

$Determine$:

i) $\boldsymbol{C - B}$;

j) $(\boldsymbol{C} \cap \boldsymbol{B}) \cup \sim\boldsymbol{A}$;

k) $\sim(\boldsymbol{B - A}) \cap (\boldsymbol{A - B})$;

l) $\sim(\sim\boldsymbol{C} \cup \boldsymbol{B})$;

m) $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$;

n) $\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$.

Exercício 4

Suponha o conjunto universo $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ bem como os seguintes conjuntos:

$A = \{2, 4, 5, 6, 8\}$,

$B = \{1, 4, 5, 9\}$,

$C = \left\{ \begin{matrix} x \mid x \in \boldsymbol{Z} \;\; e \\ 2 \leq x < 5 \end{matrix} \right\}$.