MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Sebastião Marcelo

Relações

Matemática Discreta

Relação:

O conceito de **relação** está muito associado ao conceito formal de **relação**.

- Estatura das pessoas
- Igualdade
- Lista de contatos
- Conjunto de países

Matemática Discreta

Relações:

Podemos definir uma **relação** como sendo a existência de determinadas conexões entre “pares ordenados” assumindo uma determinada ordem.

Matemática Discreta

Relações:

Uma relação $\boldsymbol{R}$ do conjunto $\boldsymbol{A}$ para o conjunto $\boldsymbol{B}$ definida como: $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

de pares ordenados de elementos $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$, sendo definida como: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Matemática Discreta

Relações:

Pares ordenados de elementos $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, sendo definida como: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Um par ordenado onde $\boldsymbol{a}$ é o primeiro elemento e $\boldsymbol{b}$ o segundo elemento.

Matemática Discreta

Para os pares ordenados, onde podemos particularizar: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$

Quando:

Logo:

A menos que:

Matemática Discreta

Produto de Cartesiano:

Considerando dois conjuntos quaisquer $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

O conjunto de todos os pares ordenados $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

onde, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$,

é chamado de produto ou **produto cartesiano** de $A \; por \; B$.

Matemática Discreta

Produto de Cartesiano:

Onde podemos escrever o **produto cartesiano** como sendo:

$$\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{B} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \mid \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\}$$

Matemática Discreta

Exemplo 1:

Podemos ter a representação do conjunto $\boldsymbol{R^2 = R \times R}$, como sendo o conjunto de pares ordenados de números reais, onde teremos um ponto $\boldsymbol{P}$, que representa um par ordenado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ de números reais, sendo $\boldsymbol{R^2}$ frequentemente chamado de **plano cartesiano**.

Matemática Discreta

Exemplo 2:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Determine: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

Exemplo 2:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Determine: $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B}$.

Exemplo 3:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Determine o número de elementos de:

$$\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{B} \text{ x } \boldsymbol{B}$$

Exemplo 4: Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

$$\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{B} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{b}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{c}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{b}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{c})\}$$

Representação gráfica do conjunto.

Matemática Discreta

Relações:

Se $\boldsymbol{R}$ é uma relação de $\boldsymbol{A}$ *em* $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{R}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$

então $\boldsymbol{R}$ é um subconjunto de pares ordenados,

de tal forma que a relação $\boldsymbol{R}$

é um subconjunto de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

Se $\boldsymbol{R}$ é uma relação de $\boldsymbol{A}$ *em* $\boldsymbol{A}$,

então $\boldsymbol{R}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$.

Matemática Discreta

Relações:

Para cada par $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$, duas afirmações são verdadeiras:

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$; dizemos que

  a é R-relacionado com b,

- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \notin \boldsymbol{R}$; dizemos que

  a não é R-relacionado com b,

Matemática Discreta

Relações:

Se ***R*** é uma relação de ***A*** *em* ***B***, então ***R*** é um subconjunto de pares ordenados, de tal forma que a relação ***R*** é um subconjunto de ***A* x *B***.

Matemática Discreta

Relações:

O ***domínio*** de uma relação ***R*** será o conjunto de todos os primeiros elementos dessa relação, ou seja, em um produto cartesiano os primeiros elementos do par ordenado.

Matemática Discreta

Relações:

A ***imagem*** de uma relação R será o conjunto de todos os segundos elementos dessa relação, ou seja, em um produto cartesiano os segundos elementos do par ordenado.

Exemplo 5: Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$,

E seja $\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{y}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{z}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{y})\}$.

Onde ***R*** é uma relação de ***A*** *em* ***B***, uma vez que ***R*** é um subconjunto de ***A*** **x** ***B***.

Determinar o Domínio e a Imagem de ***R***.

Exemplo 6:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{ovos}, \boldsymbol{leite}, \boldsymbol{milho}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{vacas}, \boldsymbol{cabras}, \boldsymbol{galinhas}\}$.

Onde $\boldsymbol{R}$ é uma relação de $\boldsymbol{A}$ *em* $\boldsymbol{B}$, por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$, quando $\boldsymbol{a}$ for produzido por $\boldsymbol{b}$.

Matemática Discreta

Relação Inversa:

Seja $\boldsymbol{R}$ uma relação qualquer de um conjunto de $\boldsymbol{A}$ para um conjunto $\boldsymbol{B}$.

A inversa de $\boldsymbol{R}$, escrita como $\boldsymbol{R^{-1}}$, é a relação de $\boldsymbol{B}$ ***em*** $\boldsymbol{A}$ que consiste nos pares ordenados, que tem sua ordem invertida, e pertencem a $\boldsymbol{R}$.

Exemplo 7:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$.

A inversa de $\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{y}), (\mathbf{1}, \boldsymbol{z}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{y})\}$.

é:

Matemática Discreta

Representação das Relações:

Considere uma relação $\boldsymbol{S}$ sobre o conjunto $\boldsymbol{R}$ dos números reais.

$\boldsymbol{S}$ é um subconjunto de $\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{R} \mathbf{x} \boldsymbol{R}$.

$\boldsymbol{S}$ consiste em todos os pares ordenados de números reais que satisfazem a equação

Exemplo 8:

Representar a equação: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$

Matemática Discreta

Representação das Relações:

Grafo Orientado de Relação sobre Conjuntos

Quando temos setas dos elementos de ***x*** relacionados aos elementos de ***y***, sempre que ***x*** estiver relacionado com ***y***.

Chamamos de **Grafo orientado** da relação

Exemplo 9:

Qual o grafo orientado da relação ***R*** sobre ***A* = { *1*, *2*, *3*, *4*}**.

$$\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{2},\mathbf{2}),\ (\mathbf{2},\mathbf{4}),\ (\mathbf{3},\mathbf{2}),\ (\mathbf{3},\mathbf{4}),\ (\mathbf{4},\mathbf{1}),\ (\mathbf{4},\mathbf{3})\}$$

Matemática Discreta

Composição das Relações:

Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ conjuntos, e sejam $\boldsymbol{R}$ uma relação de $\boldsymbol{A}$ para $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{S}$ uma relação de $\boldsymbol{B}$ para $\boldsymbol{C}$.

Onde, $\boldsymbol{R}$ é um subconjunto de $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ e $\boldsymbol{S}$ é um subconjunto de $(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$.

Matemática Discreta

Composição das Relações:

Então, $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$ originam uma relação de $\boldsymbol{A}$ para $\boldsymbol{C}$ denotada por $\boldsymbol{R \circ S}$

A relação $\boldsymbol{R \circ S}$ é dita composição de $\boldsymbol{R}$ ***e*** $\boldsymbol{S}$; é algumas veze escrita por $\boldsymbol{RS}$

Exemplo 10:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, e

Seja: $\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{d}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{b}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{d})\}$ $\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})\}$.

Qual a Relação composição $\boldsymbol{R} \circ \boldsymbol{S}$.

Exemplo 10:

Sejam: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$, $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, e

Seja: $\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{2}, \boldsymbol{d}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{a}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{b}), (\mathbf{3}, \boldsymbol{d})\}$,

$\boldsymbol{S} = \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{z})\}$

Temos o seguinte diagrama de flechas de $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{S}$.

Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

Há outra maneira de determinar $\boldsymbol{R \circ S}$

Sejam $\boldsymbol{M_R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{M_S}$, respectivamente,

as representações matriciais das relações $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{S}$

Então temos:

$$\boldsymbol{R = \{(1, a), (2, d), (3, a), (3, b), (3, d)\}}$$

Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

Há outra maneira de determinar $\boldsymbol{R \circ S}$

Sejam $\boldsymbol{M_R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{M_S}$, respectivamente,

as representações matriciais das relações $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{S}$

Então temos:

$$\boldsymbol{S = \{(b,x), (b,z), (c,y), (d,z)\}}$$

Matemática Discreta

Composição de Relações e Matrizes

Se multiplicarmos $\boldsymbol{M_R \ por \ M_S}$, obtemos a seguinte matriz:

Matemática Discreta

Tipos de Relações

Há alguns tipos de relações importantes:

Relações Reflexivas;

Relações Simétricas;

Relações Transitivas.

Matemática Discreta

Relações Reflexivas

Uma relação $\boldsymbol{R}$ em um conjunto $\boldsymbol{A}$ é reflexiva se $\boldsymbol{aRa}$ para todo, $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$, isto é, se $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}$

Portanto, $\boldsymbol{R}$ não é reflexiva se existe um $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{tal\ que}\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \notin \boldsymbol{R}$.

Exemplo 11:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$\boldsymbol{A} = \{\, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \,\}.$$

$$\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{2}), (\mathbf{2},\mathbf{3}), (\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4})\}$$

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{2}), (\mathbf{2},\mathbf{1}), (\mathbf{2},\mathbf{2}), (\mathbf{3},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4})\}$$

$$\boldsymbol{T} = \{(\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{2},\mathbf{1})\}$$

$\boldsymbol{V} = \emptyset$, relação vazia

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$, relação universal

Determinar quais das relações são **reflexivas**.

Matemática Discreta

Relações Simétricas

Uma relação $\boldsymbol{R}$ em um conjunto $\boldsymbol{A}$ é simétrica se $\boldsymbol{aRb}$ implica $\boldsymbol{bRa}$, isto é, se $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$, implica $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{R}$.

Logo, $\boldsymbol{R}$ não é simétrica se existe $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$ mas $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \notin \boldsymbol{R}$.

Exemplo 12:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$$

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

$$T = \{(1,3), (2,1)\}$$

$V = \emptyset$, relação vazia

$U = A \text{ x } A$, relação universal

Determinar quais das relações são **simétricas**.

Matemática Discreta

Relações Transitivas

Uma relação $\boldsymbol{R}$ em um conjunto $\boldsymbol{A}$ é transitiva se $\boldsymbol{aRb}$ e $\boldsymbol{bRa}$, implicam $\boldsymbol{aRc}$ isto é, sempre que $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ e $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R}$, então $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R}$.

Logo, $\boldsymbol{R}$ não é transitiva se existem $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$ de tal forma que $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ e $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{R}$ mas $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \notin \boldsymbol{R}$.

Exemplo 13:

Considere as seguintes relações em um conjunto

$$\boldsymbol{A} = \{\, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4} \,\}.$$

$$\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{2}),\ (\mathbf{2}, \mathbf{3}), (\mathbf{1}, \mathbf{3}), (\mathbf{4}, \mathbf{4})\}$$

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}),\ (\mathbf{1}, \mathbf{2}),\ (\mathbf{2}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{3}),\ (\mathbf{4}, \mathbf{4})\}$$

$$\boldsymbol{T} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{3}),\ (\mathbf{2}, \mathbf{1})\}$$

$\boldsymbol{V} = \emptyset$, relação vazia

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{A}$, relação universal

Determinar quais das relações são **transitivas**.

Relação de Equivalência

Seja um conjunto ***S*** não vazio.

Um relação ***R*** sobre ***S*** é uma relação de equivalência se ***R*** é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva** ao mesmo tempo.

Exemplo 14: Relação de Equivalência

$$\boldsymbol{R} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}),\ (\mathbf{1},\mathbf{2}), (\mathbf{2},\mathbf{3}), (\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4})\}$$

$$\boldsymbol{S} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}), (\mathbf{1},\mathbf{2}),\ (\mathbf{2},\mathbf{1}),\ (\mathbf{2},\mathbf{2}), (\mathbf{3},\mathbf{3}), (\mathbf{4},\mathbf{4})\}$$

$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\ \mathbf{x}\ \boldsymbol{A}$, relação universal

$\boldsymbol{T} = \{(\mathbf{1},\mathbf{3}), (\mathbf{2},\mathbf{1})\}$

$\boldsymbol{V} = \emptyset$, relação vazia

Exemplo 15:

Sejam $\boldsymbol{A} = \{\, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5} \,\}$ e $\boldsymbol{B} = \{\, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{10} \,\}$.

Para cada uma das seguintes relações determine:

- Os elementos (pares) da relação,
- Determine o conjunto domínio,
- Determine o conjunto imagem,
- Representação gráfica (plano cartesiano).

$$\boldsymbol{R_1} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{x} \text{ é } \boldsymbol{divisível\ por\ y}\}$$

$$\boldsymbol{R_2} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = \mathbf{12}\}$$

$$\boldsymbol{R_3} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \mathbf{1}\}$$

$$\boldsymbol{R_4} = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \mid \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}\}$$

Exemplo 16:

Considere a relação $\boldsymbol{R} = \{\,(\mathbf{1},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{4},),(\mathbf{3},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{4})\}$ sobre $\boldsymbol{A} = \{\,\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\,\}$.

a) Encontre a Matriz M_R de R.

b) Encontre o Domínio e a imagem de R.

c) Encontre R^{-1}.

d) Esboce o grafo orientado de R.

e) Determine a relação composição $R \circ R$.

f) Encontre $R \circ R^{-1}$.

g) Encontre $R^{-1} \circ R$.