Aula 07 Espaços Vetoriais

Para efetuar operações em espaços vetoriais é preciso primeiro apresentar o conjunto que contém os escalares.

I — Corpo algébrico ordenado para os escalares

A partir de um conjunto não vazio ($\mathbb{K}$) definem-se duas operações binárias:

Adição			soma		Multiplicação			produto
$+:$	$\mathbb{K}\times\mathbb{K}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{K}$		$\cdot:$	$\mathbb{K}\times\mathbb{K}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{K}$
	(a,b)	$\longmapsto$	$+(a,b)\stackrel{\text{def}}{=}a+b$			(a,b)	$\longmapsto$	$\cdot(a,b)\stackrel{\text{def}}{=}a\cdot b$

Essas operações devem satisfazer às seguintes propriedades, para cada $\{a,b,c\}\subset\mathbb{K}$

[1] Propriedades da soma:

$(S1)$	Associatividade da soma	$a+(b+c)=(a+b)+c$		
$(S2)$	Existência do elemento neutro ($0_{\mathbb{K}}$)	$0_{\mathbb{K}}+a=a$	&	$a+0_{\mathbb{K}}=a$
$(S3)$	Existência do elemento oposto ($-a$)	$a+(-a)=0_{\mathbb{K}}$	&	$(-a)+a=0_{\mathbb{K}}$
$(S4)$	Comutatividade da soma	$a+b=b+a$		

(Quando soma satisfaz as propriedades acima, isto significa que o par $(\mathbb{K},+)$ é um grupo comutativo).

[2] Propriedades do produto:

$(P1)$	Associatividade do produto	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$		
$(P2)$	Existência do elemento neutro ($1_{\mathbb{K}}$)	$1_{\mathbb{K}}\cdot a=a$	&	$a\cdot 1_{\mathbb{K}}=a$
$(P3)$	Existência do elemento inverso (a^{-1})	$a\cdot a^{-1}=1_{\mathbb{K}}$	&	$a^{-1}\cdot a=1_{\mathbb{K}}$
$(P4)$	Comutatividade do produto	$a\cdot b=b\cdot a$		

(Quando o produto satisfaz as propriedades acima, isto significa que o par $(\mathbb{K}^*,\cdot)$ é um grupo comutativo).

[3] Propriedades distributivas, que relacionam as operações de adição e multiplicação

$(D1)$	Distributiva à esquerda	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
$(D2)$	Distributiva à direita	$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

(Acrescentando-se as propriedades distributivas às anteriores, obtém-se que o trio $(\mathbb{K},+,\cdot)$ é um anel comutativo com unidade e divisão, isto é, um **corpo**).

[4] Propriedades de ordem parcial

$(O1)$	Ordem parcial para a soma		$a\le b$		$\Longrightarrow$	$a+c\le b+c$
$(O2)$	Ordem parcial para o produto	$(a\le b)$	$\wedge$	$(c\ge 0)$	$\Longrightarrow$	$a\cdot c\le b\cdot c$

Quando o trio $(\mathbb{K},+,\cdot)$ satisfaz aos doze axiomas apresentados, trata-se de um corpo algébrico ordenado.

[5] Conjuntos numéricos
A adição tem as propriedades desejadas para a soma de escalares somente em conjuntos numéricos que admitem elemento oposto (o que é necessário para definir a operação de subtração). Isto significa que a seguinte cadeia de pares são grupos comutativos:

$$(\mathbb{Z},+) \subset (\mathbb{Q},+) \subset (\mathbb{R},+)$$

Na multiplicação, as propriedades do produto somente são satisfeitas em conjuntos numéricos que admitem elemento inverso (o que é necessário para definir a operação de divisão). Isto significa que a seguinte cadeia de pares são grupos comutativos:

$$(\mathbb{Q}^*,\cdot) \subset (\mathbb{R}^*,\cdot)$$

Somente as frações, os reais e outras extensões destes admitem a estrutura algébrica necessária. Isto significa que a seguinte cadeia de trios são corpos:

$$(\mathbb{Q},+,\cdot) \subset (\mathbb{R},+,\cdot)$$

II — Espaços Vetoriais

A partir de um corpo algébrico ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q};\mathbb{R}\}$), cujos elementos são chamados de escalares, e um conjunto não vazio (V), cujos elementos são chamados de vetores, é possível estabelecer os axiomas que precisam ser satisfeitos para as aplicações desejadas da Álgebra Linear.

Adição de vetores					Multiplicação de escalar por vetor			
$+:$	$V \times V$	$\longrightarrow$	V		$\cdot:$	$\mathbb{K} \times V$	$\longrightarrow$	V
	$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$	$\longmapsto$	$+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$			$(\alpha,\boldsymbol{v})$	$\longmapsto$	$\cdot\,(\alpha,\boldsymbol{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot \boldsymbol{v}$

Essas operações devem satisfazer às seguintes propriedades, para todos $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\} \in V$ e para todos $\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{K}$

[6] Propriedades da soma interior:

$(EV1)$	Associatividade da soma vetorial	$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$		
$(EV2)$	Existência do vetor nulo ($\boldsymbol{0}_V$)	$\boldsymbol{0}_V+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$	&	$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}_V=\boldsymbol{v}$
$(EV3)$	Existência do vetor oposto ($-\boldsymbol{v}$)	$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}_V$	&	$(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}_V$
$(EV4)$	Comutatividade da soma vetorial	$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$		

[7] Propriedades do produto exterior:

$(EV5)$	Distributiva à esquerda	$\alpha\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\cdot\boldsymbol{u}+\alpha\cdot\boldsymbol{v}$	
$(EV6)$	Distributiva à direita	$(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{u}=\alpha\cdot\boldsymbol{u}+\beta\cdot\boldsymbol{u}$	
$(EV7)$	Associatividade do produto	$\alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{u})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{u}$	
$(EV8)$	Existência do escalar neutro ($1_{\mathbb{K}}$)	$1_{\mathbb{K}}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$	