MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Sebastião Marcelo

Lógica e Cálculo Proposicional

Lógica Matemática

- básica para qualquer estudo em Computação e Informática
- em particular, para estudo de Matemática Discreta
- **Para desenvolver qualquer algoritmo (qualquer *software*)**
- necessários conhecimentos básicos de Lógica

Lógica Matemática

- **Existem linguagens de programação baseadas em Lógica**
- desenvolvidas segundo o paradigma lógico
- exemplo: Prolog

Lógica Matemática

Estudo centrado em:

- Lógica Booleana ou Lógica de Boole
  - George Boole: inglês, 1815-1864
  - Um dos precursores da Lógica
- Estudo dos princípios e métodos usados para se distinguir sentenças verdadeiras de falsas

Lógica Matemática

Expressões lógicas como:

- "Se ***p*** então ***q***" ...
  - É necessário conhecer os casos nos quais essas expressões são VERDADEIRAS ou FALSAS,
  - Saber o "valor verdade" dessas expressões

Lógica Matemática

Proposição

- Proposição (ou sentença) é uma afirmação que é verdadeira ou falsa, mas não ambas

a. Gelo flutua na água
b. A China é na Europa
c. $2 + 2 = 4$
d. $2 + 2 = 5$
e. Aonde você está indo?
f. Faça sua atividade de casa

Lógica Matemática

Proposições compostas:

- Formadas por subproposições e vários conectivos
- Que pode ser decomposta em proposições mais simples
  - Simples ou primitivas

Lógica Matemática

Proposições compostas:

- Podem ser usadas para se construir novas proposições compostas
- Windows é um sistema operacional e Pascal é uma linguagem de computação
- Vou comprar um PC ou um MAC

Lógica Matemática

Exemplos:

- Brasil é um país
- Buenos Aires é a capital do Brasil
- $3 + 4 > 5$
- $7 - 1 = 5$

Operações Lógicas Básicas

Conjunção, disjunção e negação:

Condicional e bicondicional

Operações Lógicas Básicas

Conjunção:

- Quaisquer duas proposições podem ser combinadas pela palavra "e", onde podemos chamar essa composição de conjunção das proposições

Simbolicamente temos:

Operações Lógicas Básicas

Conjunção:

- Reflete uma noção de “simultaneidade”
- Verdadeira, apenas quando $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ são simultaneamente verdadeiras
- Falsa, em qualquer outro caso

Operações Lógicas Básicas

Conjunção:

Exemplo 1:

Se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ são verdadeiras, então $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ é verdadeira; caso contrário, $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ é falsa

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$

Lógica Matemática

Conjunção:

Exemplo 2:

Considere as quatro proposições a seguir:

a. Gelo flutua na água e $2 + 2 = 4$
b. Gelo flutua na água e $2 + 2 = 5$
c. A China é na Europa e $2 + 2 = 4$
d. A China é na Europa e $2 + 2 = 5$

Operações Lógicas Básicas

Disjunção:

- Quaisquer duas proposições podem ser combinadas pela palavra “ou”, onde podemos chamar essa composição de disjunção das proposições

Simbolicamente temos:

Operações Lógicas Básicas

Disjunção:

- Reflete uma noção de “pelo menos uma”
- Verdadeira, quando pelo menos uma das proposições é Verdadeira
- Falsa, somente quando simultaneamente ***p*** e ***q*** são Falsas

Operações Lógicas Básicas

Disjunção:

Exemplo 3:

Se $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ são falsas, então $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ é falsa; caso contrário, $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ é verdadeira

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

Lógica Matemática

Disjunção:

Exemplo 4:

Considere as quatro sentenças a seguir:

a. Gelo flutua na água ou $2 + 2 = 4$
b. Gelo flutua na água ou $2 + 2 = 5$
c. A China é na Europa ou $2 + 2 = 4$
d. A China é na Europa ou $2 + 2 = 5$

Operações Lógicas Básicas

Negação:

- Dada qualquer sentença ***p***, outra sentença, chamada de negação de ***p***, pode ser formada escrevendo-se "não é verdade que …" ou "é falso que …", antes de ***p*** ou, se possível em ***p*** a palavra "não"

Simbolicamente temos:

Operações Lógicas Básicas

Disjunção:

Exemplo 5:

Se $\boldsymbol{p}$ é verdadeira, então $\neg \boldsymbol{p}$ é falsa; Se $\boldsymbol{p}$ é falsa, então $\neg \boldsymbol{p}$ é verdadeira

$\boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{p}$

Lógica Matemática

Negação:

Exemplo 6: Considere as seis sentenças a seguir:

a. Gelo flutua na água
b. É falso que gelo flutua na água
c. Gelo não flutua na água
d. $2 + 2 = 5$
e. É falso que $2 + 2 = 5$
f. $2 + 2 \neq 5$

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Seja ***P***(***p***, ***q***, ...) uma expressão construída a partir de variáveis lógicas que assumem o valor VERDADEIRO (V) ou FALSO (F), e a partir dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ **e** $\neg$.

Essa expressão é chamada de proposição.

O seu valor verdade depende dos valores verdades de suas variáveis.

Uma maneira de se representar as relações é por meio de uma tabela, chamada de Tabela Verdade .

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

As primeiras colunas da Tabela são para as variáveis ***p***, ***q***, ...,

e que as linhas sejam preenchidas com todas as combinações V e F para cada uma das variáveis.

- Para duas variáveis são necessárias quatro linhas,
- Para três variáveis são necessárias oito linhas,
- No caso geral, ou seja, ***n*** variáveis serão necessárias

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Deve existir uma coluna para cada estágio da construção da proposição,

O Valor Verdade em cada etapa será determinado a partir da etapa anterior.

A partir da definição dos conectivos lógicos

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 7 :

Construir a seguinte proposição $\neg(p \wedge \neg q)$.

p	q			

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 7 : Método alternativo.

p	q					
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Primeiro deve-se listar as variáveis e as combinações de seus valores.

Colocar os valores das variáveis. 1

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 8:

Seja $\boldsymbol{p}$ a sentença “está frio” e $\boldsymbol{q}$ “Está chovendo”.

Escreva uma sentença que descreva cada uma das seguintes sentenças:

a) $\neg p$;

b) $p \wedge q$;

c) $p \vee q$;

d) $q \vee \neg p$.

Lógica Matemática

Tautologia:

Algumas proposições $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots)$ podem conter em sua última coluna apenas o valor VERDADEIRO (V), o que indica que são verdadeiras para qualquer Valor Verdade de suas variáveis.

A essas proposições nós chamamos de **Tautologia**.

Onde $\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p}$ é uma **Tautologia**.

Lógica Matemática

Contradição:

Algumas proposições $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots)$ podem conter em sua última coluna apenas o valor FALSO (F),
o que indica que são falsos para qualquer Valor Verdade de suas variáveis.

A essas proposições nós chamamos de **Contradições**.

Onde $\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p}$ é uma **Tautologia**.

Lógica Matemática

Tautologias e Contradições:

A negação de uma **Tautologia** é uma **Contradição**, pois sempre é Falsa.

A negação de uma **Contradição** é uma **Tautologia**, pois sempre é Verdadeira.

Lógica Matemática

Equivalência Lógica:

Duas proposições $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots)$ e $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots)$ serão equivalentes ou logicamente equivalentes,

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots) \equiv \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \ldots)$$

se as Tabelas Verdade forem Idênticas.

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 9 :

Construir as seguintes proposições: $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 9 :

Construir as seguintes proposições: $\neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$

Lógica Matemática

Tabela Verdade:

Exemplo 9 :

As proposições são logicamente equivalentes

$$\neg(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv \neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$$

Lógica Matemática

Exemplo 10:

Seja ***p*** a sentença "Rosas são vermelhas" e ***q*** a sentença "Violetas são azuis"

Seja ***S*** a declaração:

"Não é verdade que rosas são vermelhas e violetas são azuis"

Determinar uma declaração ***R***, que seja equivalente a declaração ***S***.

Lógica Matemática

Exemplo 10:

Podemos escrever a sentença $\boldsymbol{S}$ na forma $\neg\,(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$.

Observado que no exemplo anterior tínhamos:

$$\neg\,(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \equiv \neg\,\boldsymbol{p} \vee \neg\,\boldsymbol{q}$$

Álgebra das Proposições

As proposições satisfazem várias leis.

Onde teremos ***V*** e ***F*** como sendo os valores verdade "Verdadeiro" e "Falso", respectivamente.

Idempotência	$p \vee p = p$	
Associatividade	$(p \vee q) \vee r =$ $p \vee (q \vee r)$	
Comutatividade	$p \vee q = q \vee p$	
Distributividade	$p \vee (q \wedge r) =$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	

Álgebra das Proposições

Identidade	$\boldsymbol{p} \vee \mathbf{F} = \boldsymbol{p}$ $\boldsymbol{p} \vee \mathbf{V} = \boldsymbol{V}$	
Involução	$\neg \neg \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}$	
Complemen-tariedade	$\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{p} = \boldsymbol{V}$ $\neg \mathbf{V} = \mathbf{F}$	
Leis de DeMorgan	$\neg (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) =$ $\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$	

Operações Lógicas Básicas

Condicional:

- Muitas sentenças, em matemática, são da forma

  “Se ***p*** então ***q***”.

Simbolicamente temos:

Operações Lógicas Básicas

- A **condicional** $p \rightarrow q$ é Falsa,

  apenas quando a primeira parte p é verdadeira e

  a segunda parte q é falsa.

- Logo, quando p é falsa, a **condicional** $p \rightarrow q$ é

  Verdadeira, independentemente do valor verdade de q.

p	q	$p \rightarrow q$

Operações Lógicas Básicas

Bicondicional:

- Outras sentenças matemáticas, são da forma

  "***p*** se, e somente se, ***q***".

Simbolicamente temos:

Operações Lógicas Básicas

- A **biconditional** $p \leftrightarrow q$ é Verdadeira,

  sempre que p e q têm os mesmos valores verdade.

- E falsa nos demais casos.

p	q	$p \leftrightarrow q$

Lógica Matemática

Então teremos que: $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \quad \equiv \quad \neg\, \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$

São **logicamente equivalentes**

Podemos dizer que a sentença Condicional “Se ***p*** então ***q***” é

logicamente equivalente à sentença

“Não ***p*** ou não ***q***”,

que envolve apenas os conectivos $\vee$ ***e*** $\neg$,

e que faz parte usual da nossa linguagem.

Lógica Matemática

Argumentos:

- Um **argumento** ou inferência é uma afirmação na qual um dado conjunto de proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$, chamadas de premissas implicam em uma outra proposição Q, chamada de conclusão.

Esse **argumento** é escrito da seguinte forma:

Lógica Matemática

- Um **argumento** $\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q}$

  é dito válido se $\boldsymbol{Q}$, é verdadeira e se todas as premissas

  $$\boldsymbol{P_1, P_2, \dots, P_n,}$$

  são verdadeiras.

  Um **argumento** que não é valido é chamado de falácia.

Lógica Matemática

Argumento:

Exemplo 11:

O seguinte **argumento** é válido: $p, p \rightarrow q \vdash q$

Pode-se observar a seguinte tabela:

p	q	$p \rightarrow q$

Lógica Matemática

Argumento:

Exemplo 12:

O seguinte **argumento** é válido: $p \rightarrow q, q \vdash q$

Pode-se observar a seguinte tabela:

p	q	$p \rightarrow q$

Lógica Matemática

- As proposições $P_1, P_2, \dots, P_n$

  são simultaneamente verdadeiras se, e somente se, a

  proposição $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots P_n,$

  é verdadeira.

Lógica Matemática

O **argumento** $\boldsymbol{P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q}$

é valido se, e somente se, Q é verdadeira sempre que

$\boldsymbol{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q}$ for verdadeira, ou

se a proposição $\boldsymbol{(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q}$

for uma tautologia.

Exemplo 13: Se $\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{q}$ implica $\boldsymbol{r}$, então $\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{r}$.

Principio fundamental do Raciocínio lógico

Exemplo 13: Se $\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{q}$ e $\boldsymbol{q}$ implica $\boldsymbol{r}$, então $\boldsymbol{p}$ implica $\boldsymbol{r}$.

Principio fundamental do Raciocínio lógico

O argumento a seguir é valido:

$$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r} \vdash \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{r}$$

Lógica Matemática

Exemplo 14:

Considere o seguinte argumento:

S_1: Se um homem é solteiro, ele é infeliz.

S_2: Se um homem é infeliz, ele morre cedo.

S: Solteiros morrem cedo.

A sentença S mostra a conclusão do argumento.

As sentenças S_1 e S_2 correspondem as premissas.