4G UAA5 - Deuxième degré

Exercices

Exercice 1.

Résolvez les équations suivantes.

1. $3x + 2 = -1$
2. $-1 + y = \frac{1}{2}$
3. $5 = 8a - 3$
4. $t + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
5. $x + 2 = 3x - 1$
6. $2(z + 1) + z = 1 - 5z$
7. $\frac{v + 1}{2} = \frac{5v - 2}{3}$
8. $\frac{2t - 1}{2} + \frac{3t - 1}{3} = \frac{1}{6}$

Exercice 2.

Résolvez les équations suivantes en utilisant les principes d'équivalence.

1. $-x^2 - 4x - 4 = 0$
2. $2y^2 - 12y = -18$
3. $2z^2 = 3z$
4. $9t^3 + t^2 = 0$
5. $u^2 = 9$
6. $v^2 - 169 = 0$
7. $w^2 + 5 = 0$
8. $4 = 9r^2$
9. $s^3 - 6s^2 + 12s - 8 = 0$
10. $3q^2 - 4 = 0$
11. $(5y - 2)^2 = 4$
12. $(2x + 1)^2 - (3x - 1)^2 = 0$
13. $(z + 1)^2 - 12(z + 1) + 36 = 0$
14. $2t + 81t^2 = -\frac{1}{81}$
15. $(x + 1)(2x - 3) + (5x - 2)(2x - 3) = 0$
16. $(5 - 3y)(5y - 2) = 4 - 25y^2$
17. $(z + 1)(z - 3) - (z + 2)^2 = 0$
18. $(u + 1)(2u - 1) = u(2u + 5)$
19. $2x^3 + 10x^2 - 2x - 10 = 0$
20. $2t^3 - t^2 - 8t + 4 = 0$

Exercice 3.

Résolvez les équations suivantes en utilisant la méthode du discriminant Δ.

1. $6x^2 + x - 1 = 0$
2. $40y^2 - 200y + 250 = 0$
3. $z^2 + \sqrt{3}z - 6 = 0$
4. $t^2 - 2\sqrt{2}t + 2 = 0$
5. $4u^2 + 7 = 5u$
6. $v^2 - \dfrac{5}{6}x - 1 = 0$
7. $x^2 - 2x - 35 = 0$
8. $y^2 - 12y + 35 = 0$
9. $4 = z^2 - 2\sqrt{3}z$
10. $4t = 3 - 2t^2$
11. $(u+1)^2 + (2u-3)^2 = -2$
12. $(v+1)^2 + (2v-3)^2 = 15$
13. $(x-1)^5(3-x)^2 = x(1-x)^3(x-3)^2$
14. $(2x-1)^4(1-x) = x(2x-1)^3(x^2-1)$

Exercice 4.

Factorisez au maximum les expressions suivantes.

1. $4x^2 - 9$
2. $4y^2 + 44y + 121$
3. $2z^2 - z - 1$
4. $3t^2 + 8t - 35$
5. $5u^2 - 16u + 3$
6. $9v^2 + 16v + 7$
7. $2x^5 - 5x^4 - 3x^3$
8. $\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + y$
9. $z^2 - 2z - 1$
10. $2t^2 - 3t - 1$
11. $(2u+1)^2(u+3)^3 + (2u+1)(u+3)^4(u+5)$
12. $(v-1)^2(v+3) - v(1-v)(v+3)^2$

Exercice 5.

1. Vérifiez que la valeur x_1 donnée est bien solution de l'équation du $2^{\text{ème}}$ degré correspondante et déterminez l'autre solution x_2 de l'équation sans utiliser la méthode du discriminant Δ.
   - $x^2 - x - 2 = 0$ et $x_1 = 2$
   - $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ et $x_1 = \sqrt{2}$
   - $x^2 - 3(a+b)x + 2(a+b)^2 = 0$ et $x_1 = a + b$ où a et b sont supposés connus
2. Déterminez la somme S et le produit P des racines des équations du $2^{\text{ème}}$ degré suivantes. Déduisez-en la valeurs des racines.
   - $x^2 - 5x + 6 = 0$
   - $5x^2 + 45x + 70 = 0$
   - $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$
   - $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ où a et b sont supposés connus
   - $x^2 - \dfrac{a-b}{2} - \dfrac{ab}{4} = 0$

Exercice 6.

Établissez les conditions d'existence (CE) des équations suivantes et résolvez-les.

1. $\dfrac{x^2-9}{x^2+50x+625}=0$
2. $\dfrac{y^2+y+1}{y^2-1}=0$
3. $\dfrac{u^2+4u+3}{u^2+5u+4}=0$
4. $\dfrac{v+1}{v+2}=1+\dfrac{v+2}{v+1}$
5. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=0$
6. $\dfrac{y+2}{(y+1)(y^2-4)}=0$
7. $\dfrac{z}{(z^2-1)}=\dfrac{1}{2z-3}$
8. $\dfrac{t^2}{t+1}-2t=\dfrac{1}{t+1}-1$
9. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{9}$
10. $\dfrac{1}{3+y}-\dfrac{2}{y+5}+\dfrac{1}{y+7}=0$
11. $\dfrac{z+1}{2z+4}+\dfrac{1}{z+1}=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$
12. $\dfrac{3t^2-13}{t-3}-\dfrac{3t^2-3}{t+1}=\dfrac{8t^2-12t+4}{t^{-}2t-3}$
13. $\left(1+\dfrac{6}{u-3}\right)\left(1-\dfrac{5}{u+2}\right)=2$
14. $\dfrac{1}{v^2+v}-\dfrac{v^2}{v+1}+\dfrac{v^2-1}{v}-\dfrac{v-1}{3v^2+v-2}=0$

Exercice 7.

Résolvez les inéquations suivantes.

1. $3x+2>-2x-1$
2. $\dfrac{y+3}{2}\leq 2y-5$
3. $(2z-3)(3z+5)<0$
4. $t^3-t\geq 0$
5. $x^4-2x^2\leq 0$
6. $y^2-14y+49\geq 0$
7. $\dfrac{2z-7}{4-3z}\leq 0$
8. $\dfrac{1-t^2}{3+t}\geq 0$
9. $-2x^2-5x+7>0$
10. $-9y^2+9y-2\geq 0$
11. $z^3-2z^2\geq 5z$
12. $(t^2+t+9)(1-t)<0$
13. $(x+1)(2x-3)<-x$
14. $(y^2-1)(2-4y)(y^2+y+5)<0$
15. $\dfrac{1-2z}{z+2}\geq\dfrac{z-2}{1+2z}$
16. $\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-7t+12}\leq 1$

Exercice 8.

Établissez les conditions d'existence (CE) des équations suivantes et résolvez-les.

1. $\sqrt{3x-1} = 2$
2. $1 = \sqrt{2y+3}$
3. $\sqrt{z^2+1} = 2$
4. $\sqrt{t^2-4} = 2\sqrt{3}$
5. $\dfrac{2}{\sqrt{u+1}} = 1$
6. $\dfrac{1}{\sqrt{3v-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{v-3}}$
7. $\dfrac{1}{\sqrt{9-w^2}} = 2$
8. $x = \sqrt{x+6}$
9. $y = -\sqrt{y+6}$
10. $u = \sqrt{6u-8}$
11. $v = -\sqrt{6v-8}$
12. $2 = z + \sqrt{z+3}$
13. $t + \sqrt{2t+3} = 6$
14. $\dfrac{2-x}{\sqrt{10-3x}} = 1$

Exercice 9.

Problèmes.

1. Trouvez trois nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés vaut 50.
2. Déterminez un nombre positif qui est égal à son inverse diminué de $\dfrac{7}{12}$.
3. Décomposez le nombre 17 en une somme de deux nombres entiers dont le produit vaut 60.
4. Quelle est la longueur des aiguilles d'une horloge si la distance qui sépare leurs extrémités vaut 17 mm à midi et 85 mm à 9 h.
5. Deux cyclistes démarrent du même endroit et en même temps pour une destination situé à 180 km de leur point de départ. Nous supposerons que les cyclistes se déplacent à vitesse constante. Le premier cycliste, dont la vitesse est supérieur de 2 km h^{-1} à celle du second cycliste arrive une heure avant l'autre. Déterminez la vitesse de chaque cycliste.
6. Vous avez acheté un certain nombre de livres, tous vendus au même prix unitaire, pour un montant total de 60 EUR. Vous auriez pu en acheter trois de plus pour la même somme d'argent si le prix unitaire des livres avait été 1 EUR moins cher. Déterminez le nombre de livres que vous avez achetés ainsi que le prix unitaire des livres.
7. Déterminez la mesure des deux bases et de la hauteur d'un trapèze sachant que son aire vaut 144 m^2, que la grande base est trois fois plus longue que la hauteur et deux fois plus longue que la petite base.
8. Une personne achète un terrain rectangulaire qu'elle désire clôturer. La longueur du terrain est une fois et demie plus grande que sa largeur. Sachant que le terrain est vendu à 30 EUR le mètre carré et que le prix de la clôture est estimée à 4 EUR le mètre, la personne devra débourser un total de 14 940 EUR. Calculez les dimensions du terrain.

Exercice 10.

Problèmes et exercices supplémentaires.

1. Déterminez la valeur du paramètre m pour que l'équation
$$x^2 + 7x + 4m = 0$$
admette une seule solution.

2. Déterminez la valeur du paramètre m de sorte que les solutions de l'équation
$$4x^2 - 6mx - 1 = 0$$
soient l'opposée l'une de l'autre.

3. Déterminez la valeur du paramètre m de sorte que les solutions de l'équation
$$3x^2 - 10x - 2m = 0$$
soient l'inverse l'une de l'autre.

4. Les équations bicarrées sont des équations à une inconnue de la forme
$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$
où x désigne l'inconnue, a, b et c sont des nombres supposés connus ($a \neq 0$) et où n est un nombre entier strictement supérieur à 1. Résolvez les équations bicarrées suivantes.
Suggestion : Posez $y = x^n$.
   - $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$
   - $x^6 + 5x^3 + 6 = 0$
   - $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
   - $x^8 - 5x^4 - 4 = 0$
   - $x^6 = 2 - x^3$
   - $15x^4 + 16 = x^8$

5. Le drapeau suédois est constitué d'un rectangle bleu dans lequel se trouve une croix jaune dont les bras sont d'égale largeur. La longueur du drapeau vaut 1 m et que sa largeur vaut $2/3$ de sa longueur. Si la croix occupe $1/3$ de la surface du drapeau, déterminez la largeur des bras de la croix.

6. Un train relie les ville de Paris et Bordeaux qui sont distantes de 588 km. Nous supposerons que le train se déplace à vitesse constante. Afin de diminuer la durée du trajet d'une heure, la vitesse du train devrait augmenter de 10,5 km h^{-1}. Déterminez la vitesse du train.

7. Un héritage s'élève à 16 200 EUR et doit être partagé entre les héritiers. Chaque héritier reçoit une part égale. Trois d'entre eux refusent leur part, ce qui augmente la part des héritiers restants de 900 EUR. Combien y a-t-il d'héritiers au départ ?

8. Déterminez un nombre formé de deux chiffres dont la somme vaut 12 et dont le carré augmenté de 48 est égal au tiers du carré du nombre renversé.

Solutions

Solution 1.

1. $x = -1$
2. $y = \frac{3}{2}$
3. $a = 1$
4. $t = \frac{1}{6}$
5. $x = \frac{3}{2}$
6. $z = -\frac{1}{8}$
7. $v = 1$
8. $t = \frac{1}{2}$

Solution 2.

1. $x = -2$ (racine double)
2. $y = 3$ (racine double)
3. $z = 0$ ou $z = \frac{3}{2}$
4. $t = 0$ (racine double) ou $t = -\frac{1}{9}$
5. $u = 3$ ou $u = -3$
6. $v = 13$ ou $v = -13$
7. Pas de solutions réelles
8. $r = \frac{2}{3}$ ou $r = -\frac{2}{3}$
9. $s = 2$ (racine triple)
10. $q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $q = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$
11. $y = 0$ ou $y = \frac{4}{5}$
12. $x = 0$ ou $x = 2$
13. $z = 5$ (racine double)
14. $t = -\frac{1}{81}$ (racine double)
15. $x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{6}$
16. $y = \frac{2}{5}$ ou $y = \frac{7}{2}$
17. $z = -\frac{7}{6}$
18. $u = -\frac{1}{4}$
19. $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = -5$
20. $t = 2$ ou $t = -2$ ou $t = \frac{1}{2}$

Solution 3.

1. $x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{1}{2}$
2. $y = \frac{5}{2}$ (racine double)
3. $z = \sqrt{3}$ ou $z = -2\sqrt{3}$
4. $t = \sqrt{2}$
5. Pas de solutions réelles
6. $u = \frac{3}{2}$ ou $u = -\frac{2}{3}$
7. $x = 7$ ou $x = -5$
8. $y = 5$ ou $y = 7$
9. $z = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ ou $z = \sqrt{3} - \sqrt{7}$
10. $t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$ ou $t = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$
11. Pas de solutions réelles
12. $v = 1 - \sqrt{2}$ ou $v = 1 + \sqrt{2}$
13. $x = 1$ (racine triple) ou $x = 3$ (racine double)
14. $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ (racine triple), $x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$

Solution 4.

1. $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$
2. $4y^2 + 44y + 121 = (2y+11)^2$
3. $2z^2 - z - 1 = 2(z+1/2)(z-1)$
4. $3t^2 + 8t - 35 = 3(t-7/3)(t+5)$
5. $5u^2 - 16u + 3 = 5(u-1/5)(u-3)$
6. $9v^2 + 16v + 7 = 9(v+7/9)(v+1)$
7. $2x^5 - 5x^4 - 3x^3 = 2x^3(x+1/2)(x-3)$
8. $\dfrac{y^3}{3} + \dfrac{y^2}{2} + y = y(\dfrac{y^2}{3} + \dfrac{y}{2} + 1)$
9. $z^2 - 2z - 1 = (z+1+\sqrt{2})(z+1-\sqrt{2})$
10. $2t^2 - 3t - 1 = 2\left(t - \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\left(t - \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right)$

11 $(2u+1)^2(u+3)^3 + (2u+1)(u+3)^4(u+5) = (2u+1)(u+3)^3(u+2)(u+8)$

12 $(v-1)^2(v+3) - v(1-v)(v+3)^2 = (v-1)(v+3)(v+2+\sqrt{5})(v+2-\sqrt{5})$

Solution 5.

1.
   - $x_2 = -1$
   - $x_2 = -2\sqrt{2}$
   - $x_2 = 2(a+b)$

2.
   - $S = 5$ et $P = 6$. Les racines valent 2 et 3.
   - $S = -9$ et $P = 14$. Les racines valent -2 et -7.
   - $S = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ et $P = -\sqrt{6}$. Les racines valent $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
   - $S = 2a$ et $P = a^2 - b^2$. Les racines valent $a+b$ et $a-b$.
   - $S = \dfrac{a-b}{2}$ et $P = \dfrac{-ab}{4}$. Les racines valent $\dfrac{a}{2}$ et $-\dfrac{b}{2}$.

Solution 6.

1. CE : $x \neq -25$
   Solutions : $x = 3$ ou $x = -3$
2. CE : $y \neq \{-1, 1\}$
   Solution : Pas de solution réelle
3. CE : $u \neq \{-4, -1\}$
   Solution : $u = -3$, la solution $u = -1$ est à rejeter
4. CE : $v \neq \{-2, -1\}$
   Solutions : $v = \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$ ou $v = \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}$
5. CE : $x \neq \{-1, 1\}$
   Solution : $x = 0$
6. CE : $y \neq \{-2, -1, 2\}$
   Solution : $y = -2$ à rejeter, pas de solution

7. CE : $z \neq \{-1, 1, 3/2\}$
   Solutions : $z = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $z = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$
8. CE : $t \neq -1$
   Solution : $t = 0$
9. CE : $x \neq \{1, 4\}$
   Solution : $x = \dfrac{5}{2}$
10. CE : $y \neq \{-7, -5, -3\}$
    Solution : Pas de solution réelle
11. CE : $z \neq \{-2, -1\}$
    Solution : $z = -3$, la solution $z = -1$ est à rejeter
12. CE : $t \neq \{-1, 3\}$
    Solution : $t = 2$, la solution $t = -1$ est à rejeter
13. CE : $u \neq \{-2, 3\}$
    Solution : $u = -1$, la solution $u = 3$ est à rejeter
14. CE : $v \neq \{-1, 0, 2/3\}$
    Solution : $v = 1$, la solution $v = 0$ est à rejeter

Solution 7.

1. $x \in]-3/5, +\infty[$
2. $y \in [13/3, +\infty[$
3. $z \in]-5/3, 3/2[$
4. $t \in [-1, 0] \cup [1, +\infty[$
5. $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
6. $y \in \mathbb{R}$
7. $z \in]-\infty, 4/3[\cup[7/2, +\infty[$
8. $t \in]-\infty, -3[\cup[-1, 1]$
9. $x \in]-7/2, 1[$
10. $y \in]-\infty, 1/3] \cup [2/3, +\infty[$
11. $z \in]1-\sqrt{6}, 0] \cup [1+\sqrt{6}, +\infty[$
12. $t \in]1, +\infty[$
13. $x \in]-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}[$
14. $y \in]-1, 1/2]\cup]1, +\infty[$
15. $z \in]-2, -1]\cup]-1/2, 1]$
16. $t \in]-\infty, 7/2]\cup]3, 4[$

Solution 8.

1. CE : $x \in [1/3, +\infty[$
   Solution : $x = 5/3$
2. CE : $y \in [-3/2, +\infty[$
   Solution : $y = -1$
3. CE : /
   Solutions : $z = \sqrt{3}$ ou $z = -\sqrt{3}$
4. CE : $t \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$
   Solutions : $t = 4$ ou $t = -4$
5. CE : $u \in]-1, +\infty[$
   Solution : $u = 3$
6. CE : $v \in]3, +\infty[$
   Pas de solution, la solution $v = -1$ est à rejeter
7. CE : $t \in]-3, 3[$
   Solutions : $t = \dfrac{\sqrt{35}}{2}$ ou $t = -\dfrac{\sqrt{35}}{2}$
8. CE : $x \in [-6, +\infty[$ et $x \geq 0$
   Solution : $x = 3$, la solution $x = -2$ est à rejeter

9. CE : $y \in [-6, +\infty[$ et $y \leq 0$
Solution : $y = -2$, la solution $y = 3$ est à rejeter

10. CE : $u \in [4/3, +\infty[$ et $u \geq 0$
Solutions : $u = 2$ ou $u = 4$

11. CE : $v \in [4/3, +\infty[$ et $v \leq 0$
Pas de solution, les solutions $v = 2$ ou $v = 4$ sont à rejeter

12. CE : $z \in [-3, 2]$
Solution : $z = \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}$, la solution $z = \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2}$ est à rejeter

13. CE : $t \in [-3/2, 6]$
Solution : $t = 3$, la solution $t = 11$ est à rejeter

14. CE : $x \in]-\infty, 2]$
Solution : $x = -2$, la solution $x = 3$ est à rejeter

Solution 9.

1. Les trois nombres recherchés sont 3, 4 et 5.
2. Le nombre recherché est $\dfrac{3}{4}$.
3. Les nombres recherchés sont 5 et 12.
4. La grande aiguille mesure 68 mm et la petite mesure 51 mm.
5. Les cycliste se déplace respectivement à 18 km h^{-1} et à 20 km h^{-1}.
6. Vous avez acheté 12 livres qui vous ont coûté 5 EUR pièce. Bonne lecture !
7. La grande base mesure 24 m, la petite base mesure 12 m et la hauteur mesure 8 m.
8. Le terrain mesure 27 m sur 18 m.

Solution 10.

1. Lorsque $m = \dfrac{49}{16}$, l'équation admet $-\dfrac{7}{2}$ comme unique solution.
2. Lorsque $m = 0$, l'équation admet $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$ comme solution.
3. Lorsque $m = -\dfrac{3}{2}$, l'équation admet 3 et $\dfrac{1}{3}$ comme solution.
4.
   - $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$
   - $x = -\sqrt[3]{2}$ ou $x = -\sqrt[3]{3}$
   - Pas de solution réelle
   - $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$
   - $x = 1$ ou $x = -\sqrt[3]{2}$
   - $x = -2$ ou $x = 2$

5. Le largeur des bras de la croix vaut $\dfrac{5-\sqrt{17}}{6} \approx 0{,}1461\,\mathrm{m}$.

6. Le train se déplace à 73,5 km h^{-1}.

7. Il y a 9 héritiers au départ.

8. Le nombre recherché est 48. Nous avons bien $4+8=12$ et $48^2+48=84^2/3=2352$.