

# Introducción al Riesgo y el Rendimiento de Activos Financieros

## Unidad 1

**Alfonso Chang Medina**

achangm@uni.edu.pe

**Universidad Nacional de Ingeniería**  
Facultad de Ingeniería Económica y CC.SS.  
**Finanzas Corporativas II**

FEF61



## 1 Retorno y Riesgo de un Activo Financiero

- Definiciones básicas
- Agentes
- Hechos estilizados

## 2 La Diversificación

- Conceptos básicos
- Conceptos formales

## 3 Teoría de Portafolio

- Propiedades de Media - Varianza
- Propiedades de Media - Varianza de Portafolio
- Contribución a la Economía
- Otras proposiciones derivadas
- Portafolio Eficiente

## 4 Casos de Estudio



## Section 1

# Retorno y Riesgo de un Activo Financiero



# Conceptos y definiciones básicas

- **Activo:** Es un bien o derecho de propiedad, que genera o retiene valor para su titular o beneficiario.



# Conceptos y definiciones básicas

- **Activo:** Es un bien o derecho de propiedad, que genera o retiene valor para su titular o beneficiario.
- **Retorno o Rentabilidad:** Relación entre el valor creado (beneficios) por un activo y el esfuerzo de obtenerlo (tiempo, recursos, y demás expresado como costos).



# Conceptos y definiciones básicas

- **Activo:** Es un bien o derecho de propiedad, que genera o retiene valor para su titular o beneficiario.
- **Retorno o Rentabilidad:** Relación entre el valor creado (beneficios) por un activo y el esfuerzo de obtenerlo (tiempo, recursos, y demás expresado como costos).
- **Riesgo:** Posibilidad de que un resultado o las ganancias reales de la inversión difieran de un resultado o rendimiento esperado. El riesgo incluye la posibilidad de perder parte o la totalidad de una inversión original.



# Conceptos y definiciones básicas

- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.



# Conceptos y definiciones básicas



- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.
  - Para ello disponen de un gran abanico de opciones en el mercado bancario y el de capitales.

Mercado de Capitales:  
Intermediarios:  
SAB, S.Estructuradora, Ag. Colocador,  
Cavali, etc ==> Comisiones (Fees)





# Conceptos y definiciones básicas

- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.
  - Para ello disponen de un gran abanico de opciones en el mercado bancario y el de capitales.
  - El mercado de capitales ofrece una cartera de inversiones más amplia, debido a que el bancario negocia más instrumentos a tasas fijas y bajas en comparación con el primero.



# Conceptos y definiciones básicas

- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.
  - Para ello disponen de un gran abanico de opciones en el mercado bancario y el de capitales.
  - El mercado de capitales ofrece una cartera de inversiones más amplia, debido a que el bancario negocia más instrumentos a tasas fijas y bajas en comparación con el primero.
- En el **mercado de capitales**:



# Conceptos y definiciones básicas

- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.
  - Para ello disponen de un gran abanico de opciones en el mercado bancario y el de capitales.
  - El mercado de capitales ofrece una cartera de inversiones más amplia, debido a que el bancario negocia más instrumentos a tasas fijas y bajas en comparación con el primero.
- En el **mercado de capitales**:
  - Comparemos los siguientes activos: Letras del Tesoro americano a 3 meses (3-months T-Bills), Bonos del tesoro americano a 10 años (10-Years T-Bonds) y Acciones comunes del mercado de capitales americano (Índice S&P500).

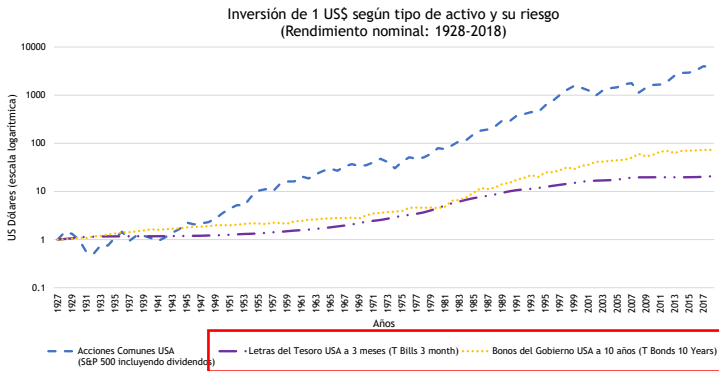


# Conceptos y definiciones básicas

- Los **inversionistas** siempre buscan formas de obtener valor por los recursos que entregan.
  - Para ello disponen de un gran abanico de opciones en el mercado bancario y el de capitales.
  - El mercado de capitales ofrece una cartera de inversiones más amplia, debido a que el bancario negocia más instrumentos a tasas fijas y bajas en comparación con el primero.
- En el **mercado de capitales**:
  - Comparemos los siguientes activos: Letras del Tesoro americano a 3 meses (3-months T-Bills), Bonos del tesoro americano a 10 años (10-Years T-Bonds) y Acciones comunes del mercado de capitales americano (Índice S&P500).
  - Veamos qué hubiera sucedido si hubiésemos invertido US\$ 1 en 1927 hasta 2018:



# Inversión de 1 US\$ en términos nominales

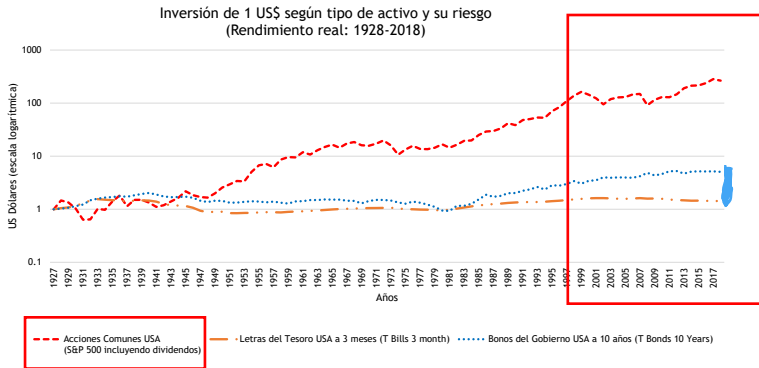
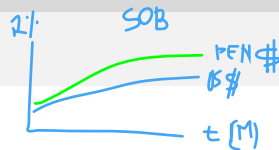


Fuente: Damodaran, InflationData.com (2019)

Elaboración: Propia



# Inversión de 1 US\$ en términos reales



Fuente: Damodaran, InflationData.com (2019)  
Elaboración: Propia



# Rendimientos históricos

- Observamos que:



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.





# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:

	Tasa anual de rendimiento promedio (1928-2018)		
	Nominal	Real	Prima de riesgo promedio (rendimiento adicional vs. Letras del Tesoro)
<b>Letras del Tesoro</b>	3.43%	0.46%	0.00%
<b>Bonos del Gobierno</b>	5.10%	2.11%	1.67%
<b>Acciones Comunes</b>	11.36%	8.20%	7.93%



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:  
**Letras del Tesoro:** Riesgo muy bajo. La Reserva Federal es una entidad que goza de gran confianza de los mercados financieros.



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:

	Tasa anual de rendimiento promedio (1928-2018)		
	Nominal	Real	Prima de riesgo promedio (rendimiento adicional vs. Letras del Tesoro)
<b>Letras del Tesoro</b>	3.43%	0.46%	0.00%
<b>Bonos del Gobierno</b>	5.10%	2.11%	1.67%
<b>Acciones Comunes</b>	11.36%	8.20%	7.93%



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:  
**Bonos del Gobierno:** Históricamente el gobierno americano es manejado de forma responsable, no toma decisiones en contra del libre mercado, y tiene garantizada su continuidad operativa incluso en caso de guerra. Por ello tiene un riesgo relativamente superior respecto a la Fed, pero no es mucho.



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:

	Tasa anual de rendimiento promedio (1928-2018)		
	Nominal	Real	Prima de riesgo promedio (rendimiento adicional vs. Letras del Tesoro)
<b>Letras del Tesoro</b>	3.43%	0.46%	0.00%
<b>Bonos del Gobierno</b>	5.10%	2.11%	1.67%
<b>Acciones Comunes</b>	11.36%	8.20%	7.93%



# Rendimientos históricos

- Observamos que:
  - La rentabilidad varía dependiendo de los rendimientos de cada activo a lo largo del siglo.
  - La inflación destruyó parcialmente el valor creado.
- Veamos el rendimiento promedio del periodo de estudio:  
**Acciones comunes:** El riesgo es mayor, ya que los rendimientos dependen del desempeño corporativo y del sector privado. Por eso es mayor la rentabilidad.





# Elementos resaltantes

- 1 ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?



# Elementos resaltantes

- ① ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.



# Elementos resaltantes

- ① ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.
  - La única forma de obtener indicios es una perspectiva histórica de largo plazo.



# Elementos resaltantes

- ① ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.
  - La única forma de obtener indicios es una perspectiva histórica de largo plazo.
- ② Entonces, ¿cuál es la relación entre rentabilidad y riesgo de un activo?



# Elementos resaltantes

- ❶ ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.
  - La única forma de obtener indicios es una perspectiva histórica de largo plazo.
- ❷ Entonces, ¿cuál es la relación entre rentabilidad y riesgo de un activo?
  - El riesgo es intrínseco a la confianza y desempeño pasado del activo, y de la persona jurídica o natural que lo respalda o emite.



# Elementos resaltantes

- ❶ ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.
  - La única forma de obtener indicios es una perspectiva histórica de largo plazo.
- ❷ Entonces, ¿cuál es la relación entre rentabilidad y riesgo de un activo?
  - El riesgo es intrínseco a la confianza y desempeño pasado del activo, y de la persona jurídica o natural que lo respalda o emite.
  - La rentabilidad exigida por el mercado variará en función del tamaño del riesgo: a mayor riesgo, mayor rentabilidad exigida.



# Elementos resaltantes

- ❶ ¿Es necesario revisar un periodo de tiempo tan largo?
  - Debido a que las tasas de rendimiento anuales de las acciones comunes fluctúan tanto, analizar periodos cortos de tiempo harían que se cancelaran y no tuviera propósito el análisis.
  - La única forma de obtener indicios es una perspectiva histórica de largo plazo.
- ❷ Entonces, ¿cuál es la relación entre rentabilidad y riesgo de un activo?
  - El riesgo es intrínseco a la confianza y desempeño pasado del activo, y de la persona jurídica o natural que lo respalda o emite.
  - La rentabilidad exigida por el mercado variará en función del tamaño del riesgo: a mayor riesgo, mayor rentabilidad exigida.
  - Que el inversionista realmente obtenga la rentabilidad que esperaba, depende de la naturaleza del activo transado, así como del carácter legal del mismo.



## Section 2

# La Diversificación





# Conceptos intuitivos

## La Diversificación



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.
- Se trata de asignar el dinero a ser invertido (capital) en diversos activos, para así disminuir la volatilidad de los retornos de los activos en los que se está invirtiendo.



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.
- Se trata de asignar el dinero a ser invertido (capital) en diversos activos, para así disminuir la volatilidad de los retornos de los activos en los que se está invirtiendo.
- El conjunto de activos conforman un portafolio.



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.
- Se trata de asignar el dinero a ser invertido (capital) en diversos activos, para así disminuir la volatilidad de los retornos de los activos en los que se está invirtiendo.
- El conjunto de activos conforman un portafolio.
- Cabe destacar que, hay dos estrategias para reducir el riesgo de inversión:



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.
- Se trata de asignar el dinero a ser invertido (capital) en diversos activos, para así disminuir la volatilidad de los retornos de los activos en los que se está invirtiendo.
- El conjunto de activos conforman un portafolio.
- Cabe destacar que, hay dos estrategias para reducir el riesgo de inversión:
  - ➊ Diversificación



# Conceptos intuitivos

## La Diversificación

- Es un concepto que data desde la antigüedad pero formalizado a través de las matemáticas a partir del siglo XIX.
- Se trata de asignar el dinero a ser invertido (capital) en diversos activos, para así disminuir la volatilidad de los retornos de los activos en los que se está invirtiendo.
- El conjunto de activos conforman un portafolio.
- Cabe destacar que, hay dos estrategias para reducir el riesgo de inversión:
  - 1 Diversificación
  - 2 Cobertura



# Conceptos y definiciones formales

- Sea el precio de un activo financiero  $P_t$ . De éstos nos interesan los rendimientos o retornos.





# Conceptos y definiciones formales

- Sea el precio de un activo financiero  $P_t$ . De éstos nos interesan los rendimientos o retornos.
- ¿Qué es el retorno de un activo? Es el cambio relativo en su precio durante un intervalo de tiempo, expresado como porcentaje.



# Conceptos y definiciones formales

- Sea el precio de un activo financiero  $P_t$ . De éstos nos interesan los rendimientos o retornos.
- ¿Qué es el retorno de un activo? Es el cambio relativo en su precio durante un intervalo de tiempo, expresado como porcentaje.

# Conceptos y definiciones formales

- Sea el precio de un activo financiero  $P_t$ . De éstos nos interesan los rendimientos o retornos.
- ¿Qué es el retorno de un activo? **Es el cambio relativo en su precio durante un intervalo de tiempo, expresado como porcentaje.**
- **Retornos aritméticos o en tiempo discreto**

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

# Conceptos y definiciones formales

- Sea el precio de un activo financiero  $P_t$ . De éstos nos interesan los rendimientos o retornos.
- ¿Qué es el retorno de un activo? **Es el cambio relativo en su precio durante un intervalo de tiempo, expresado como porcentaje.**

- **Retornos aritméticos o en tiempo discreto**

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- **Retornos logarítmicos o en tiempo continuo:**

$$Y_t = \log(1 + R_t) = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$$

# Retornos aritméticos vs. log-retornos

- Los retornos simples son preferidos por áreas contables e inversionistas por su simplicidad.



# Retornos aritméticos vs. log-retornos

- Los retornos simples son preferidos por áreas contables e inversionistas por su simplicidad.
- Sin embargo, los log-retornos (o continuamente compuestos) tienen la ventaja de ser “simétricos” en reacción a la modelación de la volatilidad.



# Ejemplo

## Ejemplo

Una inversión de US\$ 100 que produce un rendimiento aritmético del 50 % seguido de un rendimiento aritmético del -50 % dará como resultado US\$ 75, mientras que una inversión de US\$ 100 que produce un rendimiento compuesto continuo del 50 % seguido de un rendimiento compuesto continuo del -50 % resultará permanecerá en US\$ 100.

Veamos en una hoja de cálculo:



# Ejemplo

## Ejemplo

Una inversión de US\$ 100 que produce un rendimiento aritmético del 50 % seguido de un rendimiento aritmético del -50 % dará como resultado US\$ 75, mientras que una inversión de US\$ 100 que produce un rendimiento compuesto continuo del 50 % seguido de un rendimiento compuesto continuo del -50 % resultará permanecerá en US\$ 100.

Veamos en una hoja de cálculo:

	B	C	D	E	F	G
4		retornos		retornos		
5		aritméticos		logarítmicos		
6	M	100		100		
7	r_1	50%		64.87% =EXP(C7)-1		
8	r_2	-50%		-39.35% =EXP(C8)-1		
9						
10	S_T	75		100 =E6*(1+E7)*(1+E8)		





# Movimiento browniano geométrico

## Movimiento browniano geométrico



# Movimiento browniano geométrico

## Movimiento browniano geométrico

- Los rendimientos compuestos en tiempo continuo juegan un papel importante en el fondo de muchos cálculos financieros.



# Movimiento browniano geométrico

## Movimiento browniano geométrico

- Los rendimientos compuestos en tiempo continuo juegan un papel importante en el fondo de muchos cálculos financieros.
- Son una forma discreta de movimiento browniano de tiempo continuo, que es la base para la fijación de precios de derivados y se utiliza para modelar los cambios en los precios de las acciones, como por ejemplo en el modelo Black-Scholes.



# Movimiento browniano geométrico

## Movimiento browniano geométrico

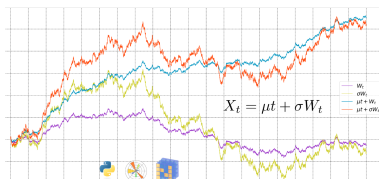
- Los rendimientos compuestos en tiempo continuo juegan un papel importante en el fondo de muchos cálculos financieros.
- Son una forma discreta de movimiento browniano de tiempo continuo, que es la base para la fijación de precios de derivados y se utiliza para modelar los cambios en los precios de las acciones, como por ejemplo en el modelo Black-Scholes.
- Movimiento Browniano Geométrico, también llamado proceso de Winner, es un proceso gaussiano con media cero  $\{W_t; t\}$ . [Ver más.](#)



# Movimiento browniano geométrico

## Movimiento browniano geométrico

- Los rendimientos compuestos en tiempo continuo juegan un papel importante en el fondo de muchos cálculos financieros.
- Son una forma discreta de movimiento browniano de tiempo continuo, que es la base para la fijación de precios de derivados y se utiliza para modelar los cambios en los precios de las acciones, como por ejemplo en el modelo Black-Scholes.
- Movimiento Browniano Geométrico, también llamado proceso de Wiener, es un proceso gaussiano con media cero  $\{W_t; t\}$ . [Ver más.](#)



# Riesgos y Diversificación

El riesgo se divide principalmente en dos categorías:

- Riesgo no sistemático o diversificable.



# Riesgos y Diversificación

El riesgo se divide principalmente en dos categorías:

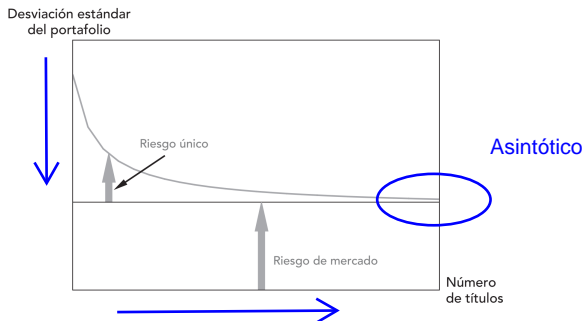
- Riesgo no sistemático o diversificable.
- Riesgo sistemático o no diversificable.



# Riesgos y Diversificación

El riesgo se divide principalmente en dos categorías:

- Riesgo no sistemático o diversificable.
- Riesgo sistemático o no diversificable.





## Section 3

**Teoría de Portafolio**

# Evolución Histórica de la Teoría del Portafolio

	Teoría de la cartera moderna <i>Est. 1952 - Adoptado en los 70</i>	Factoring Portfolio <i>Est. 1960 - Adoptado en los 80</i>	Endowment Model <i>Hoy</i>
<b>Tesis de inversión</b>	Los inversores con aversión al riesgo pueden construir carteras para optimizar los rendimientos en función de un nivel determinado de riesgo de mercado, es decir. 60/40	Diferenciar los activos dentro de clases amplias, en función de sus características, puede resaltar oportunidades para aumentar el rendimiento ajustado al riesgo.	La asignación a activos alternativos puede aumentar la eficiencia de la cartera debido a sus perfiles únicos de riesgo-rendimiento.
<b>Base de inversores actual</b>	Ahorros para la jubilación	Masa afluente Alto valor neto	Valor neto ultra alto Family Offices Inversores institucionales
<b>Proveedores actuales</b>	MFDA  Gestores de ETF de bajo coste  Robo-Advisors	Gestores de activos tradicionales  Bancos	Administradores de activos alternativos sofisticados



# Evolución Histórica de la Teoría del Portafolio

Donde:

- MFDA: Mutual Fund Dealers Association of Canada.
- Robo-Advisors: Chatbots automatizados.
- Portfolio Factoring: Fama-French Model Investing.
- Endowment Model: Los inversores institucionales utilizan asignaciones de activos alternativos para mejorar el rendimiento y diversificar sus carteras.



# Conceptos y definiciones formales

**Activos financieros:** Activos riesgosos.

**Retorno:** El retorno medio esperado. Denotado como:  $E[R_i]$

**Medida de riesgo:** La varianza de los retornos esperados. Denotado como:  $\sigma_i^2$ .

**Portafolio:** Tenencia o posesión de activos riesgosos, considerando restricción presupuestaria. Donde:  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

**La Frontera Eficiente:** Región sobre las líneas de portafolios 'isovarianza' en la que se maximiza retorno y minimiza varianza.

**El Portafolio Tangente:** Aquel portafolio donde se optimiza el balance riesgo-retorno, considerando la existencia de un *risk free asset*.



# Propiedades de Media-Varianza

Propiedades de Media-Varianza para activos individuales:

$$\begin{aligned}
 \text{Media} &= E[R_i] = \mu_i \\
 \text{Varianza} &= \text{Var}[R_i] = E[(R_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2 \\
 \text{Desviación Estándar} &= \sqrt{\text{Var}[R_i]} = \sigma_i
 \end{aligned}$$

Propiedades de Media-Varianza para portafolios:

$$\begin{aligned}
 R_P &= \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 + \dots + \omega_n R_n \\
 E[R_P] &= \omega_1 \mu_1 + \omega_2 \mu_2 + \dots + \omega_n \mu_n \\
 &= \mu_P \dots (\text{Promedio ponderado})
 \end{aligned}$$

# Propiedades de Media-Varianza

Propiedades de Media-Varianza para portafolios:

$$\begin{aligned} \text{Var}[R_P] &= E[(R_P - \mu_P)^2] \\ &= E[(\omega_1(R_1 - \mu_1) + \omega_2(R_2 - \mu_2) + \dots + \omega_n(R_n - \mu_n))^2] \end{aligned}$$

$$\sigma_P^2 = \sum_j x_j^2 \sigma_j^2 + \sum_j \sum_{k \neq j} x_j x_k \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$$\begin{aligned} E[\omega_i \omega_j (R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)] &= \omega_i \omega_j \text{Cov}[R_i, R_j] \\ &= \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\ &= \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \end{aligned}$$

# Propiedades de Media-Varianza de Portafolio

La Varianza de Portafolio es la suma ponderada de todas las varianzas y covarianzas:

	$\omega_1(R_1 - \mu_1)$	$\omega_2(R_2 - \mu_2)$	$\cdots$	$\omega_n(R_n - \mu_n)$
$\omega_1(R_1 - \mu_1)$	$\omega_1^2 \sigma_1^2$	$\omega_1 \omega_2 \sigma_{12}$	$\cdots$	$\omega_1 \omega_n \sigma_{1n}$
$\omega_2(R_2 - \mu_2)$	$\omega_2 \omega_1 \sigma_{21}$	$\omega_2^2 \sigma_2^2$	$\cdots$	$\omega_2 \omega_n \sigma_{2n}$
$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\omega_n(R_n - \mu_n)$	$\omega_n \omega_1 \sigma_{n1}$	$\omega_n \omega_2 \sigma_{n2}$	$\cdots$	$\omega_n^2 \sigma_n^2$

- Existen  $n$  varianzas y  $n^2 - n$  covarianzas.
- Las Covarianzas domina la Varianza de Portafolio.
- Covarianzas positivas incrementan la varianza del Portafolio, covarianzas negativas reducen la Varianza del Portafolio [Diversificación].



# Propiedades de Media-Varianza de Portafolio de Markowitz (1952)

Para dos activos  $a$  y  $b$ :

Para dos activos, se cumpliría:

$$\begin{aligned}E[R_P] &= \omega_a \mu_a + \omega_b \mu_b \\ \text{Var}[R_P] &= \omega_a^2 \sigma_a^2 + \omega_b^2 \sigma_b^2 + 2\omega_a \omega_b \text{COV}[R_a, R_b] \\ &= \omega_a^2 \sigma_a^2 + \omega_b^2 \sigma_b^2 + 2\omega_a \omega_b \rho_{ab} \sigma_a \sigma_b\end{aligned}$$





# Contribución (1/2)

- 1 Mientras economistas financieros se refieren tradicionalmente a la maximización de retorno esperado como el objetivo de selección de portafolio, la practica (común) se orienta a la diversificación del portafolio. En consecuencia, se define como función objetivo el entorno “media-varianza”.
- 2 La función objetivo “**Media-Varianza**” es consistente con un inversionista que maximiza su utilidad esperada, donde la utilidad es la función cuadrática de su riqueza (Ver Markowitz (1952)).
- 3 La **Varianza de Portafolio** es una función de: (i) las varianzas y (ii) covarianzas de los activos que la conforman. Así la contribución al riesgo de portafolio depende de las correlaciones entre los activos subyacentes.



# Contribución (2/2)

- 1 La preocupación de los inversionistas se enfoca en el set de portafolios eficientes (Frontera Eficiente), estos son, aquellos con mínimo riesgo ( $V$ ) para un retorno dado ( $E$ ) y máximo retorno ( $E$ ) para un riesgo dado ( $V$ ).
- 2 La programación cuadrática puede ser usada para estimar el set de portafolios eficientes (Frontera Eficiente).



## Otras proposiciones implícitas:

- El paper de Markowitz formalizó (matemáticamente) por primera vez la idea de la deversificación de inversiones.
- Mediante la diversificación reduce o mitiga el riesgo, no lo elimina. Con ello se formalizan los conceptos: **Riesgo Sistemático y No Sistemático**.
- Introdujo la versión financiera de: “La suma del todo es mejor que la suma de sus partes”.
- Así, lo que interesa a un inversionista **NO SON LOS RIESGOS INDIVIDUALES** de cada activo, sino la contribución al riesgo (varianza) del portafolio completo.



# Portafolio Eficiente

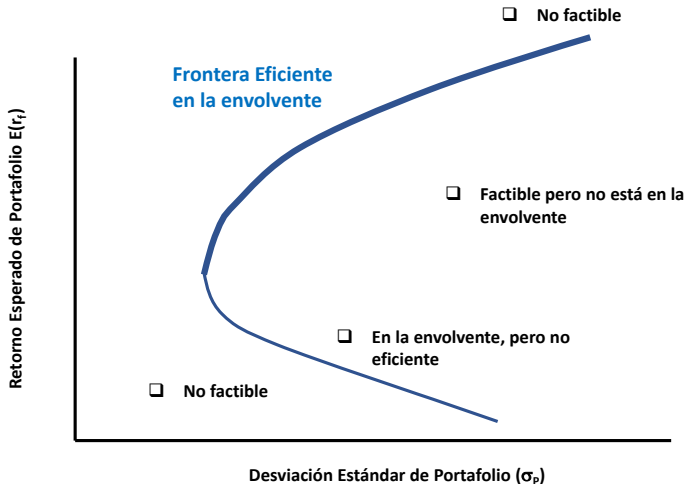
Otras proposiciones implícitas:

- Portafolio factible: aquel cuyas proporciones sumen 1.
- Portafolio en la envolvente: para una rentabilidad dada, se minimiza la varianza.
- Portafolio eficiente: cuando se maximiza el retorno del portafolio con una varianza dada.

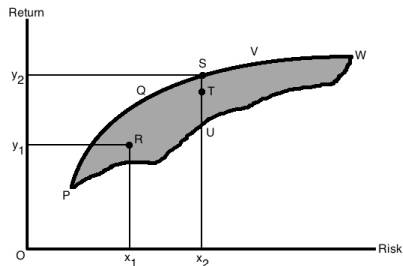


# Portafolio Eficiente

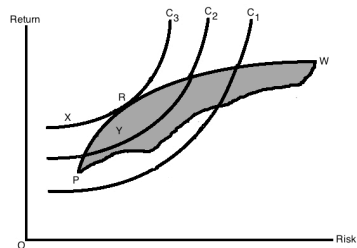
## Portafolio (Nomenclatura)



# Selección de Portafolio



(a) Conjunto posible



(b) Utilidad esperada

Figura: Selección de portafolio



## Section 4

### Casos de Estudio



Revisar y desarrollar caso presentado en Ms Excel en la clase práctica.

