Teoría del Portafolio de Inversiones

Unidad 2

Alfonso Chang Medina
achangm@uni.edu.pe

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Económica y CC.SS.
Finanzas Corporativas II

FEF61L

Contenido

Inversión en un Activo Libre de Riesgo y en un Activo Riesgoso

Activo Libre de Riesgo

Son activos donde un inversionista puede esperar obtener retornos con un riesgo cero. Si bien, toda inversión conlleva algún riesgo, se considera como el típico activo libre de riesgo, a los T-Bills a 3 meses. Hay que recordar algunos detalles sobre estos instrumentos:

- T-Bills: responsabilidad de la Reserva Federal Norteamericana (ámbito monetario).
- T-Bonds: responsabilidad del Bonos del Gobierno Norteamericano (ámbito fiscal).

La Reserva Federal Norteamericana existe desde 1913, y desde entonces, USA con su historial de pagos, ha dotado de un carácter de activos libres de riesgo a sus letras del tesoro, y bonos de gobierno, pagando sus deudas, en cualquier contexto, inclusive durante conflictos globales.

Activo Riesgoso

Son activos donde un inversionista puede esperar obtener retornos con cierto riesgo asociado, donde el peligro de no recibir los retornos esperados es relevante. Existen distintos tipos de activos:

- Bonos: Corporativos, de Gobiernos (a diferentes niveles) de países en vías de desarrollo, o inclusive de países desarrollados, cuando estos presentan periodos de recesión.
- Acciones de empresas, fondos mutuos, etc.

Al tener un riesgo asociado, los inversionistas exigen un rendimiento superior al retorno prometido por un activo de riesgo, debido al costo de oportunidad del mismo. Este riesgo está vinculado por diversos factores, tales como:

- Tasas de Interés en el mercado, contexto macroeconómico, performance de los rendimientos pasados del activo, performance del sector o rubro donde se circunscribe el activo.

La Aversión al Riesgo y la Inversión en Activos

Perfil de Riesgo de los Inversionistas

Son el conjunto de características de los inversionistas para la elección de los activos en los que decida asignar su capital. Es una medida de la tolerancia al riesgo que se está dispuesto a asumir respecto a los diversos instrumentos de inversión. Las variables que sirven para su construcción:

- **Edad:** A mayor edad, menor apetito al riesgo.
- **Situación Conyugal:** Influye en el nivel de ingresos del hogar.
- **Presencia de Dependientes:** Influye en el nivel de gastos en el hogar.
- **Fuente del dinero a ser invertido:** Préstamos, loterías o premios, herencia, o producto del trabajo.
- **Nivel de Instrucción:** Primaria, Secundaria, Técnica, o Superior.

Perfil de Riesgo de los Inversionistas

- **Ocupación:** Empresario, Trabajador (Dependiente o Independiente), Jubilado.
- **Seguros No Obligatorios Contratados:** Ninguno, Seguro de Vida, Seguro de Salud, Seguros Generales (Contra Incendios, Contra Robos, etc.)
- **Tolerancia a resultados adversos a la inversión:** Van desde no perder nada (0%) hasta perder la totalidad de la inversión (100%).
- **Horizonte de la inversión:** Se maneja diversos tiempos, pero los principales puntos temporales son: Hasta 3 meses, entre 3 y 12 meses, entre 1 y 3 años, y más de 3 años.
- **Proporción de ahorros destinado a inversión:** Se maneja diversos porcentajes, pero los principales rangos son: menor al 30%, entre 30% y 60%, y más del 60% del total del ahorro disponible.

Perfil de Riesgo de los Inversionistas

Los perfiles de riesgo, de acuerdo a la SMV, se puede clasificar típicamente entre estas categorías:

- **Conservador:** Inversionista con poca tolerancia a sufrir pérdidas, por lo que prefiere invertir en valores o instrumentos financieros asociados a una menor probabilidad de que el capital invertido se vea afectado. Se le recomienda informarse sobre las diferentes alternativas de inversión que ofrece el mercado público de valores, los diferentes niveles de riesgo y costos de transacción asociadas con estas, así como invertir únicamente sus excedentes y no arriesgar el dinero comprometido en sus actividades diarias, debiendo ser prudente ante los consejos o recomendaciones que terceros le formulen.

Generalmente, asociado a personas mayores, que no quieren arriesgar el capital generado en sus vidas debido a la corta esperanza de vida de la que disponen, y no tendrían el tiempo suficiente para recuperarlo en caso de pérdida.

Perfil de Riesgo de los Inversionistas

- **Moderado:** Inversionista que está dispuesto a aceptar un riesgo moderado y asumir una posible pérdida, aunque no significativa, frente a la posibilidad de obtener una mayor rentabilidad por su dinero. Se le recomienda considerar criterios de diversificación al momento de invertir y revisar detalladamente la documentación que es puesta a su disposición, identificando sus derechos y obligaciones como inversionista. Siempre debe tener presente que una mayor rentabilidad se encuentra asociada por lo general a un mayor riesgo y que la rentabilidad que pudo haber obtenido en el pasado no puede asegurarse que se repita en el futuro.

Aquí se encuentras las personas de mediana edad, con apetito de lograr ganancias con fines a mejorar su calidad de vida y emprender negocios, pero tienen dependientes por lo que no pueden arriesgar fondos que serían vitales para el bienestar de sus familias.

Perfil de Riesgo de los Inversionistas

- **Agresivo:** Inversionista que invierte en instrumentos a largo plazo y busca altos rendimientos por su dinero, por lo que está dispuesto a asumir mayores riesgos y por tanto enfrentar la posibilidad de experimentar la pérdida de su dinero. Se le recomienda hacer un seguimiento permanente sobre el estado de sus inversiones, ya que los activos asociados con un alto riesgo pueden ser muy volátiles.

Este perfil es cubierto por personas jóvenes, que aun tienen poco tiempo en el mercado laboral, o poco capital acumulado, por lo que tienen incentivos para emprender inversiones riesgosas pero que prometen grandes retornos.

Inversión en Activos

Los inversionistas, teniendo un capital disponible para invertir en una pluralidad de activos, deben elegir en qué activos colocar sus fondos y en qué proporción hacerlo. La colección de estos activos (identificación del activo y proporción asignada a ese inversionista del monto total invertido) es conocido como **portafolio**.

El concepto ha existido durante muchos años, y era anterior al capitalismo. En el sentido moderno, se puede identificar sus orígenes hasta el Siglo XVI, en Bélgica (en las primitivas Bolsas de Valores de Lyon o Brujas), pero formalmente comienzan con la Compañía Holandesa de las Indias Orientales en 1602, que fue la primera compañía en el mundo en emitir bonos y acciones para su venta al público en general.

La Teoría de Portafolio que se maneja hoy en día se conoció tal como lo conocemos, con Markowitz, H.M en la segunda mitad del Siglo XX.

El Modelo de Markowitz: La Frontera Eficiente

Modelo de Markowitz - Introducción

La Teoría de Portafolio surge formalmente con Markowitz, H.M, con documentos de investigación como:

- *Portfolio Selection, 1952 (Documento de Trabajo).*
- *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, 1959 (Libro).*

PORTFOLIO SELECTION*

HARRY MARKOWITZ
The Rand Corporation

THE PROCESS OF SELECTING a portfolio may be divided into two stages. The first stage starts with observation and experience and ends with beliefs about the future performances of available securities. The second stage starts with the relevant beliefs about future performances and ends with the choice of portfolio. This paper is concerned with the second stage. We first consider the rule that the investor does (or should) maximize discounted expected, or anticipated, returns. This rule is rejected both as a hypothesis to explain, and as a maximum to guide investment behavior. We next consider the rule that the investor does (or should) consider expected return a desirable thing *and* variance of return an undesirable thing. This rule has many sound points, both as a maxim for, and hypothesis about, investment behavior. We illustrate geometrically relations between beliefs and choice of portfolio according to the "expected returns—variance of returns" rule.

Markowitz, H.M (1952)

Portfolio Selection
EFFICIENT DIVERSIFICATION OF INVESTMENTS

Harry M. Markowitz

Markowitz, H.M (1959)

Modelo de Markowitz - Introducción

En el Markowitz (1952), se plantea respecto a la Teoría de Portafolio:

- Hasta 1952, se pensaba que el inversor maximiza o debería maximizar los rendimientos esperados o anticipados descontados.
- Markowitz sugiere, que no se ha incluido el concepto de riesgo, por lo que incluye aportes de la Teoría de Consumo, en específico los de Hicks (1939), así, podríamos dejar que los retornos “anticipados” incluyan una estimación de riesgo, o podríamos permitir que la tasa a la que capitalizamos los retornos de valores particulares varíe con el riesgo.

Antes, la regla que seguían los inversionistas era: “Maximizar el retorno descontado” Ya que hay imperfecciones del mercado, eso no es sensato. Sensato es diversificar.

- Diversificar es sensato y deseable en si mismo, para disminuir el riesgo al que el inversionista se expone.

Modelo de Markowitz - Introducción

A partir de ahí, se viene un desarrollo conceptual. Retorno anticipado descontado, estaría dado por:

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{it} r_{it} X_i$$

Donde:

- R: Retorno anticipado descontado de portafolio.
- r_{it}: El rendimiento anticipado (según lo decidido) en el momento t por dólar invertido en el activo i.
- d_{it}: La tasa a la cual el rendimiento del activo i en el momento t se descuenta hasta el presente.
- X_i: Monto invertido en el activo i.

Modelo de Markowitz - Introducción

Luego:

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{it} r_{it} X_i \Rightarrow \quad R = \sum_{i=1}^{N} X_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right)$$

$$\Rightarrow \quad R = \sum_{i=1}^{N} X_i R_i; \quad R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it}$$

Donde:

- R_i: El rendimiento anticipado (según lo decidido) del activo i.
- R_i es independiente de X_i

Definiciones preliminares y notaciones

- N: Número de activos riesgoso.
- $E(r_i)$: Retorno Esperado del activo riesgoso i.
- $E(r)$: Vector columna de los retornos esperados de los activos riesgosos.
- S: Matriz de Varianzas y Covarianzas

$$E(r) = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix} \quad , \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Definiciones preliminares y notaciones

Un portafolio de activos riesgosos es un vector columna de X cuyos elementos suman 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad , \quad \boxed{\sum_{i=1}^{N} x_i = 1}$$

Cada elemento x_i es la proporción del protafolio invertido en el activo i.
El retorno esperado del portafolio x, está dado por la multiplicación de x y R:

$$\boxed{E\left(r_x\right) = x^T.R \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i E\left(r_i\right)}$$

Definiciones preliminares y notaciones

La varianza del retorno de portafolio está dado por el producto:

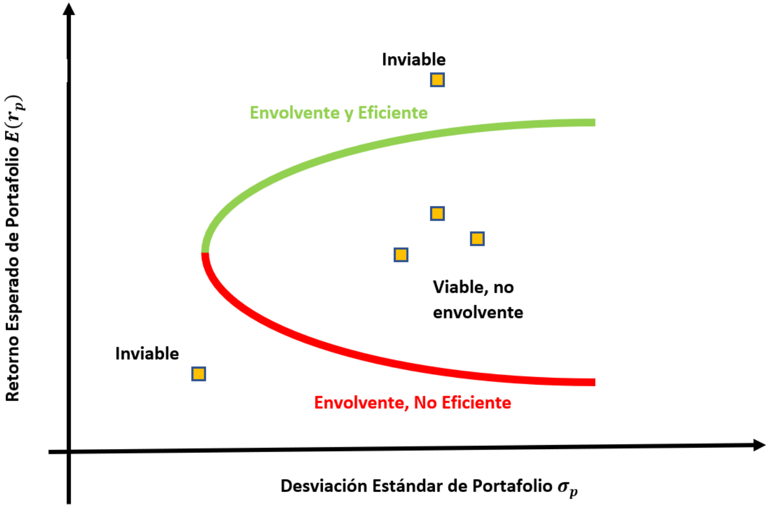
$$\sigma_x^2 \equiv \sigma_{xx} = \boxed{x^T S x} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}$$

La covarianza entre dos portafolios x y y está dado por:

$$Cov(r_x, r_y) \equiv \sigma_{xy} = x^T S y = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i y_j \sigma_{ij}$$

donde $\boxed{\sigma_{xy} = \sigma_{yx}}$. A continuación se mostrarán conceptos básicos de la teoría de portafolio.

Definiciones preliminares y notaciones



Definiciones preliminares y notaciones

- **Portafolio Viable:** Cualquier portafolio cuya suma de proporciones es 1.
- **Conjunto Viable:** Conjunto de portafolios viables. Este conjunto viable, o factible es el área dentro y a la derecha de la línea curva (llamada envolvente). Incluye a la curva.
- **Portafolio en la Envolvente:** Un portafolio factible está en la envolvente del conjunto viable si para un rendimiento medio dado tiene una varianza mínima (Envolvente verde y rojo)
- **Portafolio Eficiente:** Un portafolio que maximiza el retorno esperado con una varianza dada (Envolvente de color verde).

Otro concepto importante es el de *portafolio de mercado*. Es un portafolio compuesto de **TODOS** los activos de riesgo en la **ECONOMÍA**, con cada activo tomado en proporción a su valor.

Calculando la Frontera Eficiente

Sea un conjunto de N activos riesgosos: $Z : \{z_1, z_2, \cdots, z_N\}$, tenemos lo siguiente:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}, \quad E(r) = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix},$$

$$E(r) - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \vdots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix}$$

Calculando la Frontera Eficiente

Donde:

- S: Matriz de Varianzas y Covarianzas entre los retornos de cada activo.
- $E(r)$: Vector con las retornos esperados para cada activo.
- c: Constante. En circunstancia generales es la *tasa libre de riesgo*, que el rendimiento prometido por activos libres de riesgos.

Para ello, necesitamos hacer dos pasos:

- **Paso 1:** Calcular dos portafolios de la envolvente del conjunto factible de portafolios. Registrar sus retornos esperados y sus varianzas. Luego,
- **Paso 2:** Se calcula la Frontera Eficiente a partir de esos dos portafolios, como una combinación lineal donde los coeficientes suman 1.

Calculando la Frontera Eficiente - Paso 1

Calculamos los dos portafolios, de la siguiente manera:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \left(\frac{S^{-1}\left(E\left(r\right)-c\right)}{\Sigma \quad de \quad elementos \quad de \quad S^{-1}\left(E\left(r\right)-c\right)} \right)$$

El primer portafolio, será calculado para un $c = 0$ y el segundo, para $c = r_f$, donde r_f es la tasa libre de riesgo. Esto es, un concepto a ser desarrollado más adelante. De momento, trabajaremos con dos ideas: $c = 0$ y $c \neq 0$. Luego, el primer portafolio, llamado x, y el segundo, nombrado y, estarán calculados de la siguiente manera:

Calculando la Frontera Eficiente - Paso 1

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \left(\frac{S^{-1}\left(E\left(r\right)\right)}{\Sigma \quad de \quad elementos \quad de \quad S^{-1}\left(E\left(r\right)\right)} \right)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \left(\frac{S^{-1}\left(E\left(r\right) - c\right)}{\Sigma \quad de \quad elementos \quad de \quad S^{-1}\left(E\left(r\right) - c\right)} \right)$$

Calculando la Frontera Eficiente - Paso 1

Donde:

$$E(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix}, E(Y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix}$$

$$Var(X) = X^T SX, \quad Var(Y) = Y^T SY$$

$$Cov(X, Y) = X^T SY, \quad Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$$

Calculando la Frontera Eficiente - Paso 2

Luego, a partir de los portafolios x y y, el retorno esperado y la varianza de la combinación de esos dos portafolios. Sean:

- a: Proporción asignado a X.
- b: Proporción asignado a Y.

Donde: $a + b = 1$.

Luego, el portafolio típico de la **Frontera Eficiente**, estará caracterizado por su retorno esperado y su desviación estándar (obtenida a partir de la varianza). Luego:

$$E\left(r_p\right) = aE\left(X\right) + bE\left(Y\right)$$

$$Var\left(r_p\right) = \sqrt{a^2 Var\left(X\right) + b^2 Var\left(Y\right) + 2abCov\left(X, Y\right)}$$

Luego, para diferentes combinaciones de a y b, se obtendrá un conjunto de pares ordenados de $E\left(r_p\right)$ y $Var\left(r_p\right)$, que conforman la **Frontera Eficiente**.

Aplicación a un portafolio de 3 activos riesgosos

Portafolio de 3 activos riesgosos

Sean los activos riesgosos A, B y C, los que definen un vector columna 3x1 con retornos y asignaciones:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_b \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el vector de retornos esperandos será:

$$E[R] = E\left[\begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_b \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} E[R_a] \\ E[R_b] \\ E[R_c] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_b \\ \mu_c \end{pmatrix} = \mu$$

La matriz de Varianzas y Covarianzas (S) de 3x3:

$$S = Var[R] = \begin{bmatrix} \sigma_{aa} & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ba} & \sigma_{bb} & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ca} & \sigma_{cb} & \sigma_{cc} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} = \Sigma$$

Cálculo del entorno Media Varianza

El ***retorno del portafolio*** se denota y calcula como:

$$R_{p,x} = \mathbf{x}'\mathbf{R} = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_a \\ R_b \\ R_c \end{pmatrix} = x_a R_a + x_b R_b + x_c R_c$$

Mientras que ***varianza del portafolio*** es:

$$\boxed{\sigma_{p,x}^2 = \mathbf{var}(\mathbf{x}'\mathbf{R}) = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} & \sigma_{ac} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 & \sigma_{bc} \\ \sigma_{ac} & \sigma_{bc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{pmatrix}}$$

Portafolio de Mínima Varianza

El portafolio de mínima varianza $\mathbf{m} = (m_a \ m_b \ m_c)'$ para uno conformado por tres activos se modela:

$$\min_{m_a, m_b, m_c} \sigma^2_{p,m} = m_a^2\sigma_a^2 + m_b^2\sigma_b^2 + m_c^2\sigma_c^2 + 2m_a m_b \sigma^2_{ab} + 2m_a m_c \sigma^2_{ac} + 2m_b m_c \sigma^2_{bc}$$

$$s.a. \ m_a + m_b + m_c = 1$$

Bajo notación matricial se tiene:

$$\min_{\mathbf{m}} \sigma^2_{p,m} = \mathbf{m}'\Sigma\mathbf{m}$$
$$s.a. \ \mathbf{m}'.\mathbf{1} = 1$$

Portafolio de Mínima Varianza sujeto a un objetivo de retorno dado

Sea $\sigma^2_{p,0}$ el nivel de riesgo, el problema de maximización está dado por la siguiente expresión:

$$\max_x \; \mu_p = \mathbf{x}'\mu$$
$$s.a. \quad \sigma^2_p = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} = \sigma^2_{p,0} \text{ y } \quad \mathbf{x}'.\mathbf{1} = 1$$

Mientras que para el problema de minimización del riesgo del portafolio, por esta otra:

$$\min_x \; \sigma^2_{p,x} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$$
$$s.a. \quad \mu_p = \mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \text{ y } \quad \mathbf{x}'.\mathbf{1} = 1$$

Portafolio Tangente

El ***portafolio tangente u óptimo*** es aquel que presenta el mayor ***ratio Sharpe***. Se denota al portafolio tangente como: $t = (t_a \ t_b \ t_c)'$, donde t es un vector "x" (de pesos) y resuelve la siguiente expresíon:

$$\max_t \frac{\mathbf{t}'\mu - r_f}{(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{1/2}} = \frac{\mu_{p,t} - r_f}{\sigma_{p,t}}$$

$$s.a. \quad \mathbf{x}'.\mathbf{1} = 1$$

Siendo la solución:

$$t = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot \mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mu - r_f \cdot \mathbf{1})}$$

Notar que al estar trabajando con activos riesgosos, lo usual es que $\mu_{p,m} > r_f$. Siendo r_f el rendimiento del activo libre de riesgo (risk-free).

Construcción de la Frontera Eficiente

Se siguen los pasos descritos en la sección previa. Se trabajará con dos portafolios eficientes de retornos objetivos distintos. Sea $\mathbf{x} = (x_a \ x_b \ x_c)'$ y $\mathbf{y} = (y_a \ y_b \ y_c)'$ tal que: $\mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \neq \mathbf{y}' = \mu_{p,1}$. $\mathbf{x}$ soluciona:

$$\min_{x} \ \sigma^2_{p,x} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x}$$

$$s.a. \quad \mu_p = \mathbf{x}'\mu = \mu_{p,0} \text{ y } \mathbf{x}'.\mathbf{1} = 1$$

y el portafolio $\mathbf{y}$ soluciona:

$$\min_{y} \ \sigma^2_{p,y} = \mathbf{y}'\Sigma\mathbf{y}$$

$$s.a. \quad \mu_p = \mathbf{y}'\mu = \mu_{p,1} \text{ y } \mathbf{y}'.\mathbf{1} = 1$$

Cálculo de la Frontera Eficiente (1/2)

Se define el portafolio z como combinación lineal de x e y. Bajo la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\mathbf{z} &= \alpha \cdot \mathbf{x} + (1-\alpha)\cdot \mathbf{y} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_a + (1-\alpha) y_a \\ \alpha x_b + (1-\alpha) y_b \\ \alpha x_c + (1-\alpha) y_c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cálculo de la Frontera Eficiente (2/2)

Se aplican los pasos descritos en la sección pasada:

1. El portafolio z es un portafolio de mínima varianza con retorno esperado y varianza dado por:

$$
\begin{aligned}
\mu_{p,z} = \quad & \mathbf{z}'\mu & = \alpha \cdot \mu_{p.x} + (1-\alpha) \cdot \mu_{p,y} \\
\sigma^2_{p,z} = \quad & \mathbf{z}'\Sigma\mathbf{z} & = \alpha^2\sigma^2_{p.x} + (1-\alpha)^2\sigma^2_{p,y} + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{xy}
\end{aligned}
$$

   donde:

$$
\sigma^2_{p,x} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{x} \quad , \quad \sigma^2_{p,y} = \mathbf{y}'\Sigma\mathbf{y} \quad , \quad \sigma_{xy} = \mathbf{x}'\Sigma\mathbf{y}
$$

2. Si $\mu_{p,z} \geq \mu_{p,m}$, donde $\mu_{p,m}$ es el retorno esperado del portafolio de mínima varianza, entonces el portafolio z es un portafolio eficiente.

Estudio de Caso de 3 activos riesgosos

Estudio de Caso en Ms Excel

Portafolios de 2 y 3 activos desarrollados en clase

Estudio de Caso en R Studio desarrollado en clase

Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
#=================================================
#=== UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA - FIEECS ====
#=================================================
## Finanzas Corporativas II - MSc Alfonso Chang M. ##
#=================================================
# U2: Intr. a la Teoria del Portafolio de Inversiones
#=================================================
# Estudio de Caso
#=================================================
#
#==================================================
# CONSTRUCCION DE PORTAFOLIO , CML, FRONTERA EFICIENTE, RATIO DE SHARPE, ETC
#==================================================
# Instalar y activar paquetes
install.packages("Ecdat")
library(Ecdat)
install.packages("quadprog")
library(quadprog)
#============================================
```

Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
# Esta base de datos contiene datos diarios de:
# General Electric Company (GE)
# International Business Machines Corporation (IBM)
# Exxon Mobil Corporation (XOM), que para los anos considerados el ticker era MOBIL
# CRSP Indice ponderado por valor, incluidos dividendos.
# CRSP es el Center for Research in Security Prices de la Universidad de Chicago


#===============================================
# Vemos los datos
View(CRSPday)
head(CRSPday)
tail(CRSPday)
# Seleccionamos las columnas donde estan los retornos de los acciones,
```

Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
# y multiplicamos por 100 para convertir en porcentajes
R = 100*CRSPday[,4:6]

# Creamos el vector con los retornos promedio
# aplicamos, en el  objeto R, a las columnas, la funcion mean.
# Nota: objeto margin en la funcion apply, solo toma dos valores:
# si margin=1, la funcion que sigue se aplica a FILAS
# si margin=2, la funcion que sigue se aplica a COLUMNAS

# Por eso, usamos "2"
mean_vect = apply(R,2,mean)

# Calculamos la matriz de covarianzas
cov_mat = cov(R)

# Calculamos matriz de desviaciones estandar
sd_vect = sqrt(diag(cov_mat))

# Creando la matriz de restricciones: una columna de puros 1,
# y la segunda columna con los retornos promedios

Amat = cbind(rep(1,3),mean_vect)
```

Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
#Entre las partes de esta funci?n:

# Dmat: matriz que aparece en la funci?n cuadr?tica a ser minimizada
# dvec: vector que aparece en la funci?n cuadr?tica a ser minimizada
# Amat: matriz que define las restricciones bajo las cuales queremos minimizar la funcion cua
# bvec: vector que contiene los valores de b_0 (por defecto es cero).
# meq: las primeras restricciones de meq se tratan como restricciones de igualdad, todas
#       ademas como restricciones de desigualdad (el valor predeterminado es 0).
```

Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
  result =
    solve.QP(Dmat=2*cov_mat,dvec=rep(0,3),Amat=Amat,bvec=bvec,meq=2)
  sdP[i] = sqrt(result$value)
  weights[i,] <- result$solution
}

# Graficando lo anterior:

#x11()
plot(sdP,muP,type="l",xlim=c(1.0,2.5),ylim=c(0.076,0.3),lty=3, lwd = .5)



#===============================================
# la frontera eficiente (y carteras ineficientes
# debajo de la cartera de min var)


mufree = 1.3/253 # valor de entrada de la tasa de interes libre de riesgo
# 253 dias utiles en un anho tipico
#===============================================
# Anhadiendo puntos al grafico
# cex es tama?o del simbolo, 4 significa 4 veces mas grande lo normal
# pch es el tipo de simbolo, le pondremos asterisco
```

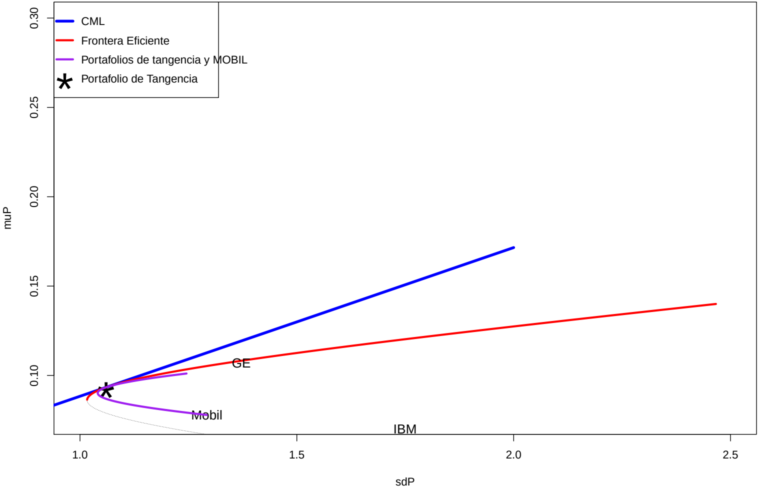
Cálculo de la Frontera Eficiente con R

```
#==============================================
# Calculando el RATIO DE SHARPE

sharpe = (muP - mufree)/sdP

# Encontrando el m?ximo valor de RATIO DE SHARPE
ind = (sharpe == max(sharpe))
options(digits=3)

weights[ind,] #  imprimir los pesos de la cartera de tangencia


#==============================================
# Graficando la CML

lines(c(0,2),mufree+c(0,2)*(muP[ind]-mufree)/sdP[ind],lwd=4,lty=1, col = "blue")
# lwd: ancho relativo de l?nea
# lty: tipo de l?nea (s?lo puntos, l?neas entrecortadas, etc. Varia entre 1,2,3,4,5 y 6)

#==============================================
```

Envolvente, Frontera Eficiente y Portafolio Óptimo

```
points(sdP[ind],muP[ind],cex=4,pch="*") # Mostrar portafolio de tangencia


#================================================
# Encontrando el portafolio de MINIMA VARIANZA
ind2 = (sdP == min(sdP)) # Encontrando la minima desviaci?n estandar
ind3 = (muP > muP[ind2]) # Seleccionando los retornos esperados mayores a ese portafolio
#================================================
# Graficando la FRONTERA EFICIENTE
lines(sdP[ind3],muP[ind3],type="l",xlim=c(0,.25),
      ylim=c(0,.3),lwd=3, col = "red")


#================================================
# Anadiendo leyendas al grafico

text(sd_vect[1],mean_vect[1],"GE",cex=1.15)
text(sd_vect[2],mean_vect[2],"IBM",cex=1.15)
text(sd_vect[3],mean_vect[3],"Mobil",cex=1.15)

#================================================
w = seq(0, 1.5,len = 500)
```

Envolvente, Frontera Eficiente y Portafolio Óptimo



Referencias

Markowitz, Harry (1952).
Portfolio selection.
The Journal of Finance, Vol. 7, 77-91.

Benniga, Simon & Czaczkes, Benjamin (2014).
Financial Modeling.
The MIT Press. The Fourth Edition. Chapts: 8 - 10.

Ruppert, David & Mattenso, David S. et al. (2011).
Statistics and data analysis for financial engineering.
Springer. Vol. 13. The Second Edition. Chap. 16.

The End