

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»

Кафедра «Програмна інженерія та інформаційні технології управління»

Лабораторна робота №1
з курсу «Теорія прийняття рішень»

Виконали:

студенти групи КН-34г

Чепурний А. С.

Соколов Д. В.

Курасов О. І.

Перевірили:

доцент каф. ПШТУ

Воловщиков В. Ю.

ас. каф. ПШТУ

Литвинова Ю. С.

Харків

2018

Тема роботи: розв'язання багатокритеріальної задачі щодо знаходження ефективних альтернатив за допомогою теореми Карліна.

Завдання для виконання: вирішити наступну задачу багатокритеріальної оптимізації:

$$f_1(\vec{x}) = x_1 \rightarrow \max,$$

$$f_2(\vec{x}) = x_2 \rightarrow \max,$$

$$f_3(\vec{x}) = x_3 \rightarrow \max,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ 3x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Перевірка коректності задачі

Задача коректна, якщо:

- область допустимих значень функції замкнена;
- кожна з функцій має одне і тільки одне рішення, яке не може бути рішенням для інших функцій;

Обмеження $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ (В), $3x_2 - x_3 \leq 6$ (С) та $x_3 \geq 0$ (А) представлені на рисунку 1.

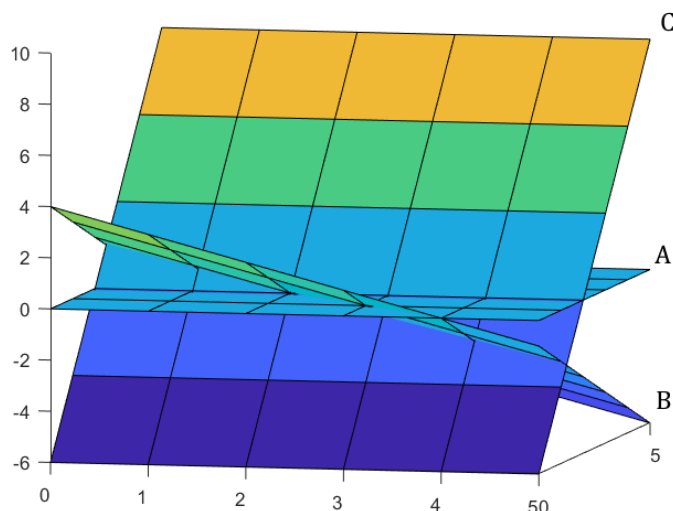


Рисунок 1 — Графік функцій обмежень

Як видно на графіку, рішення задач $f_1(\vec{x}) \rightarrow \max$, $f_2(\vec{x}) \rightarrow \max$, $f_3(\vec{x}) \rightarrow \max$ є суперечливими та фігура області допустимих значень є замкненою та опуклою.

Математична постановка задачі багатокритеріальної оптимізації в загальному вигляді

У загальному випадку формально задача багатокритеріальної оптимізації, ключовою особливістю якої є суперечливість множини функцій мети (критеріїв), може бути подана в наступному вигляді:

$$f_i(\vec{x}) \rightarrow \max, i \in I_1,$$

$$f_i(\vec{x}) \rightarrow \min, i \in I_2,$$

$$\varphi_j(\vec{x}) \leq 0, j \in J.$$

де I_1 та I_2 — множини індексів функцій мети $f_i(\vec{x})$, які відповідно максимізуються та мінімізуються, причому $I = I_1 \cup I_2$;

J — множина індексів функцій $\varphi_j(\vec{x})$, що визначають обмеження задачі та формують множину припустимих варіантів альтернатив

$$A = \{\varphi_j(\vec{x}) \leq 0, j \in J\};$$

\vec{x} — вектор змінних задачі багатокритеріальної оптимізації, з яким пов'яжемо поняття альтернативи — варіанта розв'язку, що задовольняє обмеження задачі і є способом досягнення поставлених цілей.

Математична постановка однокритеріального еквіваленту вихідної багатокритеріальної задачі відповідно до теореми Карліна в загальному вигляді

Основні положення теореми Карліна формулюються не для первісно заданої множини функцій мети $\{f_i(\vec{x}), i \in I\}$, а для множини функцій $\{\omega_i(\vec{x}) = \omega_i(f_i(\vec{x})), i \in I\}$, що складається з монотонних перетворень окремих функцій мети $f_i(\vec{x})$, які приводять їх до безрозмірного вигляду.

Коротко зупинимось на зазначених перетворень. За останні можна взяти одну з монотонних функцій такого вигляду:

$$\omega_i^1(f_i(\vec{x})) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(\vec{x})}{f_i^0 - f_{i(\min)}}, i \in I_1 \\ \frac{f_i(\vec{x}) - f_i^0}{f_{i(\max)} - f_i^0}, i \in I_2 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\omega_i^2(f_i(\vec{x})) = \begin{cases} \frac{f_i^0 - f_i(\vec{x})}{f_i^0}, i \in I_1 \\ \frac{f_i(\vec{x}) - f_i^0}{f_i^0}, i \in I_2 \end{cases}, \quad (2)$$

$$\omega_i^3(f_i(\vec{x})) = \omega_i^j(f_i(\vec{x}))^\mu, i \in I, j \in \{1, 2\}. \quad (3)$$

де $f_{i(\min)}, f_{i(\max)}$ — найменші і найбільші значення функцій мети, які відповідно максимізуються і мінімізуються на множині припустимих варіантів альтернатив;

f_i^0 — оптимальне значення i -ї функції мети на множині припустимих варіантів альтернатив;

μ — число, що визначає степінь, на яку підноситься перетворення (1) або (2).

Згідно теореми Карліна, множина ефективних альтернатив для множини функцій мети $\{f_i(\vec{x}), i \in I\}$ може бути знайдена шляхом розв'язання наступної задачі при використанні відповідних перетворень (1), (2) або (3):

$$\begin{aligned} F(\vec{x}) &= \sum_{i \in I} \rho_i \omega_i^j(f_i(\vec{x})) \rightarrow \min, \vec{x} \in A, \\ \sum \rho_i &= 1, \rho_i > 0, \\ i \in I, j &\in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

де ρ_i визначає важливість функції мети $f_i(\vec{x})$, і чим більшого значення набуває ρ_i , тим кращого значення повинна мати відповідна функція мети.

Математична постановка задачі багатокритеріальної оптимізації згідно з виданим завданням

Згідно виданого завдання задача багатокритеріальної оптимізації прийме наступний вигляд:

$$f_1(\vec{x}) = x_1 \rightarrow \max,$$

$$f_2(\vec{x}) = x_2 \rightarrow \max,$$

$$f_3(\vec{x}) = x_3 \rightarrow \max,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ 3x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Математична постановка однокритеріального еквіваленту вихідної багатокритеріальної задачі відповідно до теореми Карліна згідно до виданого завдання

Згідно теореми Карліна для виконання перетворень (1), (2), (3) необхідно знайти мінімальне та максимальне значення окремо для кожної функції мети на допустимій множині альтернатив:

$$\begin{array}{lll} f_{1(\min)} = 0, & f_{2(\min)} = 0, & f_{3(\min)} = 0, \\ f_{1(\max)} = f_1^0 = 4, & f_{2(\max)} = f_2^0 = 2.5, & f_{3(\max)} = f_3^0 = 4. \end{array}$$

Так як мінімальне значення для всіх f_i дорівнюють 0, то перетворення (2) буде аналогічне (1). Як наслідок, задачі багатокритеріальної оптимізації будуть однакові.

Перетворення (1), (2) приймуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1,2)}(f_1(\vec{x})) &= \frac{f_1^0 - f_1(\vec{x})}{f_1^0 - f_{1(\min)}} = \frac{4 - x_1}{4}, \\ \omega_2^{(1,2)}(f_2(\vec{x})) &= \frac{f_2^0 - f_2(\vec{x})}{f_2^0 - f_{2(\min)}} = \frac{2.5 - x_2}{2.5}, \\ \omega_3^{(1,2)}(f_3(\vec{x})) &= \frac{f_3^0 - f_3(\vec{x})}{f_3^0 - f_{3(\min)}} = \frac{4 - x_3}{4}. \end{aligned}$$

При використанні перетворень (1) та (2) задача матиме вигляд:

$$F(\vec{x}) = \rho_1 \frac{4 - x_1}{4} + \rho_2 \frac{2.5 - x_2}{2.5} + \rho_3 \frac{4 - x_3}{4} \rightarrow \min.$$

При використанні перетворення (3) ($\mu = 2$) задача матиме вигляд:

$$F(\vec{x}) = \rho_1 \left(\frac{4 - x_1}{4} \right)^2 + \rho_2 \left(\frac{2.5 - x_2}{2.5} \right)^2 + \rho_3 \left(\frac{4 - x_3}{4} \right)^2 \rightarrow \min.$$

Результати розрахунків для 3 різних наборів значень вагових коефіцієнтів $\vec{\rho} = (0.7, 0.1, 0.2)$, $\vec{\rho} = (0.3, 0.6, 0.1)$ та $\vec{\rho} = (0.3, 0.3, 0.4)$ були занесені до таблиці 1.

Таблиця 1 — Результати розрахунків

j	ρ_1	ρ_2	ρ_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$f_1(\vec{x}^*)$	$f_2(\vec{x}^*)$	$f_3(\vec{x}^*)$	$\omega_1^j(\vec{x}^*)$	$\omega_2^j(\vec{x}^*)$	$\omega_3^j(\vec{x}^*)$	$\rho_1\omega_1^j(\vec{x}^*)$	$\rho_2\omega_2^j(\vec{x}^*)$	$\rho_3\omega_3^j(\vec{x}^*)$	$F(\vec{x}^*)$
1	0.7	0.1	0.2	4.0	0.0	0.0	4.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.1	0.2	0.3
	0.3	0.6	0.1	0.0	2.5	1.5	0.0	2.5	1.5	1.0	0.0	0.625	0.3	0.0	0.0625	0.3625
	0.3	0.3	0.4	0.0	2.5	1.5	0.0	2.5	1.5	1.0	0.0	0.625	0.3	0.0	0.25	0.55
2	0.7	0.1	0.2	4.0	0.0	0.0	4.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	0.0	0.1	0.2	0.3
	0.3	0.6	0.1	0.0	2.5	1.5	0.0	2.5	1.5	1.0	0.0	0.625	0.3	0.0	0.0625	0.3625
	0.3	0.3	0.4	0.0	2.5	1.5	0.0	2.5	1.5	1.0	0.0	0.625	0.3	0.0	0.25	0.55
3	0.7	0.1	0.2	3.1015	0.0432	0.8553	3.1015	0.0432	0.8553	0.0505	0.9657	0.618	0.0353	0.0966	0.1236	0.2555
	0.3	0.6	0.1	2.0	2.0	0.0	2.0	2.0	0.0	0.25	0.04	1.0	0.075	0.024	0.1	0.199
	0.3	0.3	0.4	0.9635	1.3139	1.7226	0.9635	1.3139	1.7226	0.5763	0.2251	0.3242	0.1729	0.0675	0.1297	0.3701

де \vec{x}^* — ефективна альтернатива.

Висновки

На даній лабораторній роботі було вивчено загальні положення задач багатокритеріальної оптимізації та теорему Карліна про знаходження ефективних альтернатив для багатокритеріальних задач лінійного (нелінійного) програмування. Було вирішено задачу багатокритеріальної оптимізації на основі виданого завдання за допомогою теореми Карліна.

Проаналізуємо отримане рішення задачі однокритеріальної оптимізації при використанні перетворення (1) та вагових коефіцієнтів $\vec{\rho}_1 = (0.7, 0.1, 0.2)$: була отримана ефективна альтернатива $\vec{x}^* = (4, 0, 0)$, яка забезпечує досягнення оптимального значення для функції $f_1(\vec{x}^*)$, так як відповідне перетворення дорівнює 0.0, що свідчить про близькість до оптимуму $f_1(\vec{x}^*)$. Отримане рішення відображає наступну закономірність:

$$\rho_1 \geq \rho_3 \geq \rho_2 \implies \omega_1(x^*) \leq \omega_3(x^*) \leq \omega_2(x^*)$$