Formulario
Métodos Númericos

Corona Guzmán Ameyalli

Instituto Politecnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
Ingeníeria Matemática
3MM1
`https://github.com/ACoronaGuzman`

Resumo

Teorema de Rolle. Si f es derivable en (a,b), con $f(a)=f(b)=0, \exists c$ tal que $f\,'(c)=0$

Teorema del Valor Medio. Si f es derivable, entonces $\exists c$ tal que: $f\,'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Teorema del Valor Extremo. Si $f \in C[a,b]$, entonces los números c_1 y c_2 aparecen en los extremos de $[a,b]$.

Teorema del Valor Intermedio. Existe un número $c \in (a,b)$ para el cual $f(c)=K$.

Teorema de Teylor. Sea $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ con: $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ y $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Teorema Fundamental del Álgebra. Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$ entonces $P(x)=0$ tiene al menos una raiz (posiblemente compleja).

1. Método de Bisección

Sea en intervalo (a,b) entonces:

$$p_0 = \frac{a+b}{2}$$

volviendo aplcar el metodo con $a=p \quad ó \quad b=p$

2. Iteración del Punto Fijo

Buscamos a una g tal que:

$$g(p)=p$$

y que cumpla: $g \in C[a,b]$ y $\mid g'(x) \mid \geq k, k<1$

3. Tipos de Error

Error absoluto:

$$e_a = \mid x_T - x_a \mid$$

Error relativo y Error porcentual es igual, con solo multiplicar $\frac{1}{x_T}$ y 100% respectivamente.

4. Método de Newton-Raphson

$$p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}, n \geq 1$$

5. Método de la Secante

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})f(p_{n-1}-p_{n-2})}{f(p_{n-1})-f(p_{n-2})}, n \geq 2$$

6. Método de Horner

Formalismo de la división sintetica, sea $p(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ y $Q(x)=b_nx^{n-1}+...+b_2x+b_1$ con $b_n=a_n$ y $b_k=a_k+b_{k+1}x_0, k=n-1,...,0$

$$p(x)=(x-x_0)Q(x)$$

7. Método de Müller

Con $n \geq 3$:

$$P(x)=a(x-p_2)^2+b(x-p_1)+c$$

Donde:

$$c=f(p_2)$$

$$b=\frac{(p_1-p_2)^2[f(p_1)-f(p_2)]-(p_1-p_2)^2[f(p_0)-f(p_2)]}{(p_0-p_2)(p_1-p_2)(p_0-p_1)}$$

$$a=\frac{(p_1-p_2)[f(p_0)-f(p_2)]-(p_0-p_2)[f(p_1)-f(p_2)]}{(p_0-p_2)(p_1-p_2)(p_0-p_1)}$$

$$p_3=p_2-\frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}$$

8. Método de Birtow

Sea $p(x)=(x^2+px+q)Q(x)n$ con

$$b_k=a_k-pb_{k-1}-qb_{k-2}, k=n-2,...,0$$

$$\Delta p=\frac{a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3}}{b_{n-2}}$$

$$\Delta q=\frac{a_n-qb_{n-2}}{b_{n-2}}$$

9. Interpolación

Primeras diferencias:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 \;...\; \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$$

Segundas diferencias:

$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

Diferencias n-esimas:

$$\Delta^n y_i = \Delta^{n-1}y_{i+1} - \Delta^{n-1}y_i$$

10. Operador de Diferencia Δ

$$y_k = (1+\Delta)^k y_0, k=1,..,n$$

Polinomio de Newton

$$y_k = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + ... + \binom{k}{j}\Delta^j y_0, j<k$$

recordando: $\binom{k}{j}=\frac{k!}{j!(k-j)!}$

11. Polinomio de Newton con Espacios Constantes

Sustituimos al polinomio de Newton $k\frac{x_k-x_0}{h}$ con h el espaciamiento entre las x
Eligiendo el Dorito que incluya x_k buscado

12. Propiedades del Operador Δ

Regla Distributiva

$$\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

en general:

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i(x)$$

Regla Conmutativa:

$$\Delta c f(x) = c \Delta f(x)$$

Regla de Exponentes:

$$\Delta^m[\Delta^n f(x)] = \Delta^{m+n} f(x)$$

- $\Delta c = 0$
- $\Delta x^n = p(x), p(x) = nx^{n-1}$
- $\Delta^n x^n = n!$
- $\Delta^n c x^n = cn!$
- $\Delta^{n+1} x^n = 0$
- Si $p(x)=a_0x^n+...+a_n \Rightarrow \Delta^n p(x) = a_0 n!$

13. Interpolación con Espacios Variables

Cuando $h_0 \neq ... \neq h_n$

Interpolación de Lagrange

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n}\left[\prod_{j=0}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right] y_i, j \neq i$$

14. Interpolación Inversa

Se hace el cambio de la tabla $(x = "f(x)" f(x) = "x")$ para utilizar Interpolación de Lagrange. *La función debe de ser suprayectiva ($\exists f^{-1}$)

15. Método de Neville

Sea $Q(x) = P_{0,1,...,j-1,j+1,...,k}$ y $\hat{Q} = P_{0,1,...,i-1,i+1,...,k}$

$$P(x) = \frac{(x-x_j)Q(X)-(x-x_i)\hat{Q}(x)}{x_i-x_j}$$

16. Método de Aitken

Reescribiendo la formula de Neville:

$$P_{0,1,...,n} = \frac{1}{x_n-x_{n-1}} \begin{vmatrix} P_{0,1,...,n-1}(x) & x_{n-1}-x \\ P_{0,1,...,n} & x_n-x \end{vmatrix}$$

17. Diferencias Divididas

Reescribiendo:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ... + a_n(x-x_0)...(x-x_{n-1})$$

Diferencia Dividida Cero:

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Primera Diferncia Dividida:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

K-esima Diferencias divididas:

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k-x_i}}$$

Formula de Diferencias Divididas Interpolantes de Newton

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, ..., x_k](x-x_0)...(x-x_{k-1})$$

18. Diferencias Divididas Progresivas

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{s}{k} k! h^k f[x_0, x_1, ..., x_k]$$

con $h = x_{i+1} - x_i$ y $s = \frac{x-x_0}{h}$

19. Polinomio de Hermite

$$H_{2n+1} = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\hat{H}_{n,j}(x)$$

con:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{i=0}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}, j \neq i, k=0,...,n$$

$$H_{n,j}(x) = [1-2(x-x_j)L'_{n,j}(x_j)]L^2_{n,j}(x)$$

$$\hat{H}_{n,j}(x) = (x-x_j)L^2_{n,j}(x)$$

20. Trazador por medio de splines cúbicos

Definimos una nueva sucesión con $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$:

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, ..., z_k](x-z_0)(x-z_1)...(x-z_{k-1})$$

con

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_0), z_{2i} = z_{2i+1}$$

$$f[z_{2i}, z_{2i+1}] = \frac{f[z_{2i+1}]-f[z_{2i}]}{z_{2i+1}-z_{2i}}, z_{2i} \neq z_{2i+1}$$