**Universidad de Buenos Aires**

Facultad de Ciencias Económicas

# Decisiones bajo incertidumbre: un enfoque markoviano

*Trabajo monográfico final Estadística Actuarial*

Profesor:
Nasif Alejandro

Autor:
Cucchiaro Agustín

Registro:
891.665

Agosto 2020

# 1. Introducción

En el presente trabajo se pretende analizar el comportamiento de una serie de acciones argentinas que cotizan en mercados externos (ADRs) utilizando ciertos conceptos de las cadenas de Markov. La situación sanitaria provocada por el COVID-19 impactó negativamente en las economías mundiales, tanto en términos de oferta como demanda global. Ante la presente incertidumbre, la motivación del análisis consiste en identificar la mejor opción de inversión dentro de los ADRs elegidos para lo cual se utiliza un modelo de cadena de Markov basado en ciertas muestras de las cotizaciones históricas de cierre. Las cadenas de Markov son una herramienta muy útil para elaborar modelos predictivos de distintos fenómenos bajo el cumplimiento de ciertas condiciones. Para la construcción del modelo, será necesario repasar ciertos aspectos teóricos de las cadenas de Markov que luego serán utilizados para el estudio empírico. Luego, se hablará de las herramientas de inferencia estadística necesarias para poder obtener conclusiones respecto a las muestras analizadas. Seguido, se introducirá el modelo que se desea construir, describiendo la metodología de trabajo.

El objetivo es construir una cadena de Markov para cada ADR, a fin de describir un proceso discreto-discreto en donde la variable estocástica será la cotización o precio de la acción. De esta manera, la cotización se puede pensar como un fenómeno dicotómico dando lugar a dos posibles escenarios o estados, un estado de alza y un estado de baja. De la muestra de cada acción, se obtendrán 3255 observaciones que serán agrupadas en 105 conjuntos de igual tamaño con 31 observaciones cada uno, conjuntos que representarán el espacio de índices.

Una vez presentado todo el herramental y construidas las cadenas, se procederá a analizar sus distintas características tal que en el apartado de conclusiones se presentarán las estrategias de inversión recomendadas que sean acordes al análisis estadístico realizado. Finalmente, se dedica una página para la bibliografía.

# 2. Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son procesos estocásticos del tipo discreto-discreto que cumplen con una propiedad conocida como *falta de memoria.*

**DEFINICIÓN:** *$\{X_t\}_{t\in T}, T \subseteq \mathbb{Z}$ es una cadena de Markov si $X_t$ es discreta $\forall t \in T$ y cumple la propiedad de Markov dada por:*

$$P(X_{t+1} = i \mid X_t = j) = P(X_{t+1} = i \mid X_t = j, X_{t-1} \in \mathbb{B}_{t-1}, X_{t-2} \in \mathbb{B}_{t-2}, ...) \tag{1}$$

La propiedad de Markov implica que el valor de $X_t$ contiene toda la información necesaria para predecir valores futuros en el sentido que $X_t$ resume todo el pasado relevante. De esta manera, las cadenas de Markov permiten describir procesos estocásticos en donde el fenómeno estudiado alterna o transita entre distintos estados a lo largo del tiempo. Las cadenas de Markov son finitas cuando el rango de $X_t$ es finito, es decir, cuando el espacio de estados es finito. Se denomina probabilidad de transición de $1^{er}$ orden a la probabilidad de alcanzar el estado $i$ en el momento $t+1$ si se estaba en el estado $j$ en el momento $t$.

$$P(X_{t+1} = i \mid X_t = j) = p_{ij}(t) \tag{2}$$

Las probabilidades de transición formarán las matrices de transición de una cadena de Markov, las cuales pueden o no depender del tiempo. Cuando no dependen del tiempo, se dice que la cadena de Markov es homogénea tal que toda la estructura de probabilidad del proceso se caracteriza por una única matriz de transición, la cual junto a una distribución marginal define la totalidad de la cadena.
Las probabilidades marginales que representan la probabilidad de que la variable alcance determinado estado en un determinado momento se agrupan en la distribución marginal que está dada por un vector estocástico en el sentido que todos sus elementos son probabilidades (valores entre 0 y 1) y suman la unidad. En general, las cadenas de Markov se definen por su matriz de transición (asumiendo homogeneidad) y por la distribución marginal inicial en el momento 0[1].
Siempre que la cadena de Markov tenga un espacio de estados finito, se cumple que:

$$\overrightarrow{p}(t+1) = M(t)\overrightarrow{p}(t) \tag{3}$$

De la ecuación anterior, se puede demostrar por el principio de *Inducción Matemática Completa* que si la cadena de Markov es homogénea, entonces:

$$\overrightarrow{p}(t) = M^t\overrightarrow{p}(0) \tag{4}$$

[1] Implícitamente definen la familia de distribuciones conjuntas finitas.

Se llama distribución estacionaria a la distribución de probabilidad de alguna $X_t$ que se mantiene para todas las variables que siguen del proceso tal que,

$$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p}(t+1) = \pi \tag{5}$$

Luego, una cadena de Markov es estacionaria si:

$$M\overrightarrow{p}(0) = \overrightarrow{p}(0) \rightarrow \overrightarrow{p}(0) = \pi \tag{6}$$

Por otro lado, la distribución límite es la distribución de probabilidad a la que tiende la sucesión de distribuciones marginales en el largo plazo tal que,

$$\overrightarrow{p_\infty} = lim_{t\rightarrow\infty}\overrightarrow{p}(t) \tag{7}$$

Una cadena de Markov es ergódica cuando la distribución estacionaria puede alcanzarse en el largo plazo tal que la distribución marginal tiende a estabilizarse en el límite:

$$lim_{t\rightarrow\infty}\overrightarrow{p}(t) = \pi \tag{8}$$

Para computar la distribución límite, se aplica límite a la expresión genérica de la distribución marginal. Esta última se puede expresar de dos formas, siendo en ambos casos necesario diagonalizar para obtener los autovalores y autovectores asociados. Por un lado,

$$\overrightarrow{p}(t) = M^t\overrightarrow{p}(0) = PD^tP^{-1}\overrightarrow{p}(0) \tag{9}$$

donde $P$ es la matriz de paso formada por los autovectores mientras que D es la matriz diagonal formada por los autovalores. Por orto lado,

$$\overrightarrow{p}(t) = \alpha_1\lambda_1^t v_1 + \alpha_2\lambda_2^t v_2 + ... + \alpha_n\lambda_n^t v_n \tag{10}$$

en donde $v_i$ es el autovector asociado al autovalor $\lambda_i$ mientras que las coordenadas $\alpha_i$ se obtienen en base a la distribución inicial resolviendo un sistema de ecuaciones tal que,

$$\overrightarrow{p}(0) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \tag{11}$$

Si se define $d_i$ como el *Máximo Común Divisor* (MCD) de $\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ (en exactamente $n$ pasos se puede ir desde el estado $i$ al estado $i$), se dice que:

- Si $d_i > 1$, el estado $i$ es periódico con período $d_i$.
- Si $d_i = 1$, el estado $i$ es aperiódico.

Además, se dice que una cadena de Markov es irreducible si, y solo si:

$$C(i) = S, \forall i \tag{12}$$

Lo cual implica que la clase comunicante de cualquier estado es todo el espacio de estados tal que todos los estados están comunicados entre sí y no hay estados sin retorno, entendiendo a la clase comunicante del estado $i$ como el conjunto de todos los estados que están comunicados con el estado $i$ en términos de que se puede acceder a dichos estados desde $i$ como así también se puede acceder al estado $i$ desde los estados que forman la clase comunicante de $i$, al menos en un paso.

Se define a las cadenas de Markov regulares como aquellas que cumplen con los dos atributos previos; son cadenas aperiódicas e irreducibles. Es importante considerar la noción de cadenas regulares porque tienen propiedades muy distintivas. Dado el *Teorema de comportamiento límite de las cadenas regulares*, si $\{X_t\}$ es una cadena de Markov homogénea y regular, entonces:

- Existe una única distribución estacionaria tal que si en algún momento la cadena toma dicha distribución, a partir de ese momento mantiene siempre esa distribución marginal.

$$\exists!\pi : M\pi = \pi \tag{13}$$

- En el límite, las columnas de la matriz de transición son todas iguales a la única distribución estacionaria.

$$lim_{t\rightarrow\infty}M^t = (\pi \mid \pi \mid ...) \tag{14}$$

- La cadena de Markov es ergódica y la distribución límite no depende de la distribución marginal inicial.

$$lim_{t\rightarrow\infty}\overrightarrow{p}(t) = \pi, \forall\overrightarrow{p}(0) \tag{15}$$

- El tiempo medio de recurrencia de cada estado, entendido como la cantidad de períodos promedio que se tarda en volver al estado $i$ una vez parado en el estado $i$, se calcula como el recíproco de la componente respectiva de la distribución estacionaria tal que el tiempo de recurrencia es una variable aleatoria geométrica con parámetro $\pi_i$.

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i} \tag{16}$$

# 3. Inferencia estadística sobre cadenas de Markov

Asumiendo una cadena de Markov homogénea finita de $k$ estados, la matriz de transición está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{bmatrix} \quad (17)$$

A la hora de analizar cuestiones empíricas, surgen una serie de inconvenientes:

- En primer lugar, se debería emplear algún criterio para saber si los datos analizados cumplen la propiedad de Markov para que sea posible pensar el problema como una cadena markoviana.
- En segundo lugar, la matriz de transición es desconocida por lo que es necesario estimarla de alguna manera.
- En tercer lugar, se debe poner a prueba la homogeneidad.

Para resolver estas cuestiones, se recurrirá a la librería *markovchain* de Rstudio que brinda varias herramientas que serán de utilidad para *testear* el cumplimiento (o no) de la propiedad de Markov y la homogeneidad (o no) de la matriz de transición estimada.

Para verificar el cumplimiento de la propiedad de Markov, se empleará la función *verifyMarkovProperty* de la librería *markovchain*, cuya finalidad es realizar una prueba de independencia *Chi cuadrado* a una serie o secuencia de valores empíricos como *input* devolviendo los resultados del test como *output.* Si la hipótesis nula es que hay independencia estadística (se cumple propiedad de Markov), la misma será rechazada cuando el *p-value* sea menor o igual al nivel de significatividad $\alpha$, que se asume de 5 %.

A la hora de estimar la matriz de transición, se utiliza el método clásico[2] que consiste en el método de máxima verosimilitud. Con el paquete *markovchain* es posible hacerlo a través de la función *markovchainFit*[3]. Asumiendo homogeneidad, la estimación de máxima verosimilitud de las probabilidades de transición resulta:

$$\widehat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$$

en donde $n_{ij}$ son las transiciones observadas desde el estado $j$ al estado $i$ y $n_i$ son las transiciones totales observadas desde cualquier estado al estado $i$.

La cadena de Markov se dice homogénea si las probabilidades de transición no dependen del tiempo,

$$p_{ij}(t) = p_{ij}, \forall t \quad (19)$$

El test de homogeneidad puede representarse como,

$$\begin{cases} H_0 : p_{ij}(t) = p_{ij}, \forall t \\ H_1 : No\ se\ cumple\ H_0 \end{cases} \quad (20)$$

El estadístico de prueba para el test es,

$$\chi_i^2 = \sum_t \sum_j \frac{n_i(t-1)[\widehat{p}_{ij}(t) - \widehat{p}_{ij}]^2}{\widehat{p}_{ij}}$$

tal que como se observa en la medida que las probabilidades de transición observadas sean más próximas a las probabilidades de transición estimadas, el estadístico de prueba será más bajo y será más probable no rechazar la hipótesis nula tal que en los test *Chi cuadrado* la región de rechazo es a derecha, por lo que no rechazar implica un valor del estadístico de prueba lo suficientemente bajo. Bajo la hipótesis nula, el estadístico de prueba $\chi_i^2$ tiene una distribución $\chi^2$ con $(k-1)(T-1)$ grados de libertad. Para llevar a cabo esta prueba, se utiliza

[2] Anderson y Goodman(1957).

[3] También permite hacer la estimación a través de inferencia Bayesiana o mediante la técnica *bootstrapping*.

la función *verifyHomogeneity* del paquete cuyo *input* es una lista que contiene $T$ tablas de contingencia, que miden las frecuencias de las transiciones observadas en cada $t$, y cuyo *output* son los resultados del test. Al ser una prueba *Chi cuadrado*, la hipótesis nula será rechazada cuando el *p-value* sea menor o igual al nivel de significatividad $\alpha$, que se asume de 5 %.
Para el test de homogeneidad también se puede usar el criterio de Neyman-Pearson en base al ratio de probabilidad, cuyo estadístico de prueba es

$$\lambda_i = -2 \sum_t \sum_j n_{ij}(t) log[\frac{\widehat{p}_{ij}}{\widehat{p_{ij}}(t)}]$$

que tiene una distribución asintótica $\chi^2$ con $k(k-1)(T-1)$ grados de libertad. Así, en la medida que las probabilidades de transición estimadas y las probabilidades de transición observadas se aproximen, el estadístico de prueba será más bajo porque implicará el logaritmo de un número más cercano a 1 tal que el logaritmo de 1 es 0 por lo que será más probable no rechazar la hipótesis nula ya que el estadístico de prueba tomará un valor más bajo y los test del tipo *Chi cuadrado* tienen la zona de rechazo a derecha.

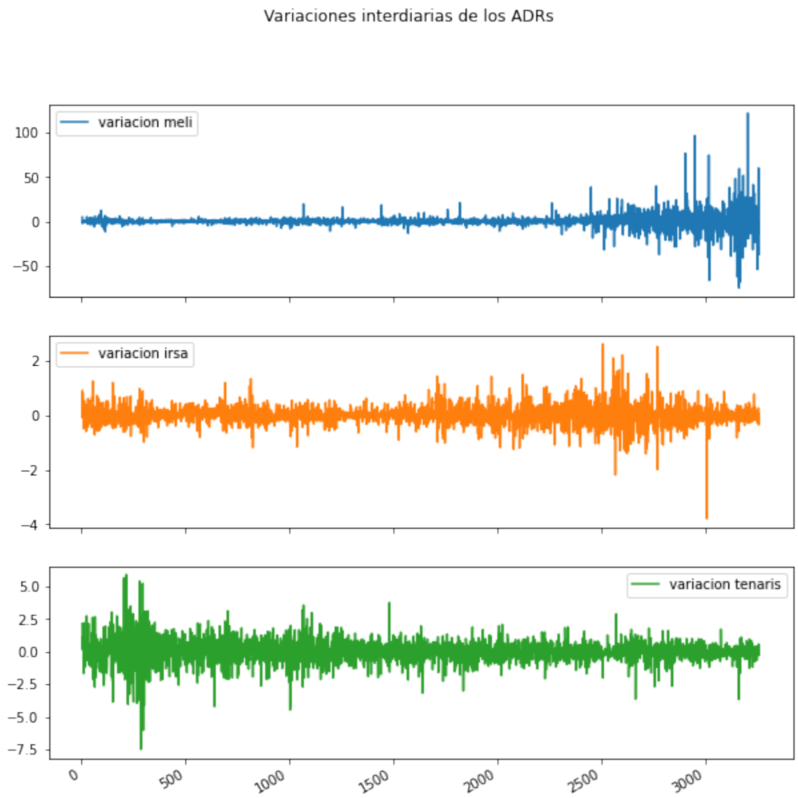
# 4. Modelo y análisis empírico

Se consideran tres acciones de empresas argentinas que cotizan en el exterior, véase Mercado Libre, IRSA y Tenaris. La idea subyacente del modelo es elaborar tres cadenas de Markov con dos estados, alza (estado 1) y baja (estado 2), para intentar predecir el comportamiento del precio de las acciones en el futuro y decidir cuál de las tres acciones es la mejor opción de inversión. La metodología de trabajo consiste en mirar las cotizaciones de cierre y obtener las diferencias de cotización día a día tal que cuando la diferencia es positiva implica que la acción subió de precio y cuando la diferencia es negativa implica que la acción bajó de precio, mientras que no se tiene en cuenta aquellas diferencias nulas que es cuando la acción no sube ni baja de un día para el otro dado que dichas observaciones son insignificantes[4]. Las 3255 transiciones observadas son agrupadas en 105 conjuntos de igual tamaño donde cada grupo contiene exactamente 31 observaciones, existiendo así 105 elementos del conjunto de índices. Por lo tanto, las probabilidades de transición se deben interpretar como la probabilidad de que si en el período $t$ la variación interdiaria en promedio es de alza/baja, en el período $t+1$ la variación interdiaria en promedio sea de alza/baja; mientras que las distribuciones marginales se deben interpretar como las probabilidades de alza y de baja de las cotizaciones interdiarias promedio en el momento $t$. Dado que cada período $t$ del conjunto de índices $T$ tiene 31 observaciones de transición respecto a variaciones interdiarias, la indexación se puede interpretar bajo un criterio de mensualidad. Las cotizaciones contempladas como muestras datan desde agosto del 2007 hasta el mes de julio del 2020, obtenidas desde el sitio web *Rava*. Luego, la cadena de Markov para cada acción quedaría representada por:

$$P_A = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

para una distribución inicial determinada dada por,

$$p_0 = \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \end{bmatrix} \quad (24)$$




Las muestras no presentan información suficiente como para rechazar la hipótesis nula de independencia.

Los resultados de los test de independencia para verificar la propiedad de Markov dadas las secuencias empíricas se pueden resumir en la siguiente tabla:

[4]Para dichos casos, se asigna la mediana de la secuencia empírica obtenida a partir de las muestras.

| Resultados del test de independencia, $\alpha = 5\,\%$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | p-value | Grados de libertad | Decisión del test |
| Meli | 0.1265604 | 0.9997103 | 5 | No rechazar $H_0$ |
| IRSA | 5.438902 | 0.3646921 | 5 | No rechazar $H_0$ |
| Tenaris | 0.7989003 | 0.9771034 | 5 | No rechazar $H_0$ |

En lo que sigue, se estiman las probabilidades de transición para cada acción bajo el supuesto de homogeneidad que luego será sometido a prueba. Para la etiqueta de los estados, se sigue la convención previa general dada por la ecuación 23.

- Para Mercado Libre, la matriz de transición resulta:

$$P_{MELI} = \begin{pmatrix} 0{,}5275176 & 0{,}5213454 \\ 0{,}4724824 & 0{,}4786546 \end{pmatrix} \quad (25)$$

- Para IRSA, la matriz de transición resulta:

$$P_{IRS} = \begin{pmatrix} 0{,}4583611 & 0{,}4632059 \\ 0{,}5416389 & 0{,}5367941 \end{pmatrix} \quad (26)$$

- Para Tenaris, la matriz de transición resulta:

$$P_{TS} = \begin{pmatrix} 0{,}5032993 & 0{,}521109 \\ 0{,}4967007 & 0{,}478891 \end{pmatrix} \quad (27)$$

La necesidad de realizar un test de homogeneidad surge debido a que las secuencias empíricas presentan información suficiente como para rechazar la hipótesis nula de estacionariedad [5]. Si las cadenas fuesen estacionarias, las distribuciones conjuntas y marginales (que definen a las probabilidades de transición) no se verían afectadas por desplazamientos y, en consecuencia, las probabilidades de transición se mantendrían constantes en el tiempo tal que estacionariedad implica homogeneidad mientras que el recíproco no es cierto tal que la homogeneidad (probabilidades de transición constantes) no implica que la cadena sea estacionaria porque no necesariamente las distribuciones marginales se mantienen invariantes en el tiempo. La relación entre las distribuciones conjuntas, marginales y las probabilidades de transición se desprende de las definiciones pues,

$$P_{X_{t+1}X_t} = P(X_{t+1} = i, X_t = j) = P(X_{t+1} = i \mid X_t = j)P(X_t = j) = p_{ij}(t)p_j(t) \rightarrow p_{ij}(t) = \frac{P_{X_{t+1}X_t}}{p_j(t)} \quad (28)$$

Los resultados de los test de homogeneidad se resumen en la siguiente tabla:

| Resultados de los test de homogeneidad, $\alpha = 5\,\%$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\chi^2$ | p-value | Grados de libertad | Decisión del test |
| Meli | 315.2363 | 0.4381036 | 312 | No rechazar $H_0$ |
| IRSA | 325.189 | 0.2920796 | 312 | No rechazar $H_0$ |
| Tenaris | 282.0661 | 0.8872487 | 312 | No rechazar $H_0$ |

Por lo tanto, las muestras no presentan información suficiente como para rechazar la hipótesis nula de homogeneidad.

Es sencillo ver que las cadenas de Markov presentadas son todas cadenas regulares al ser irreducibles y aperiódicas tal que al ser todas las probabilidades de transición positivas, todo estado se puede alcanzar desde cualquier otro estado en al menos un solo paso. Por lo tanto, existe una distribución límite la cual es igual a la distribución estacionaria y no depende de la distribución inicial. Luego, las distribuciones estacionarias y límites son para cada caso:

$$\pi_{MELI} = \begin{pmatrix} 0{,}5245832 \\ 0{,}4754168 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\pi_{IRS} = \begin{pmatrix} 0{,}4609726 \\ 0{,}5390274 \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\pi_{TS} = \begin{pmatrix} 0{,}5119906 \\ 0{,}4880094 \end{pmatrix} \quad (31)$$

[5] Se puede evaluar la estacionariedad de una secuencia empírica con la función *assessStationarity* del paquete *markovchain* o bien se puede verificar que $M\overrightarrow{p}(0) \neq \overrightarrow{p}(0), \forall \overrightarrow{p}(0) \neq \pi$

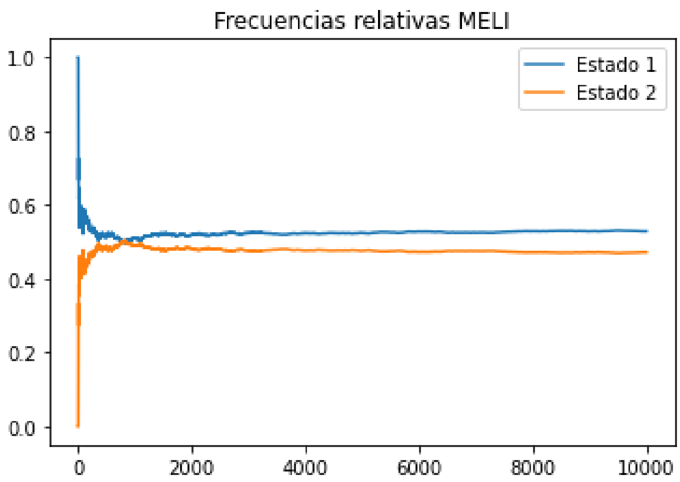
Los tiempos medios de recurrencia vienen dados por:

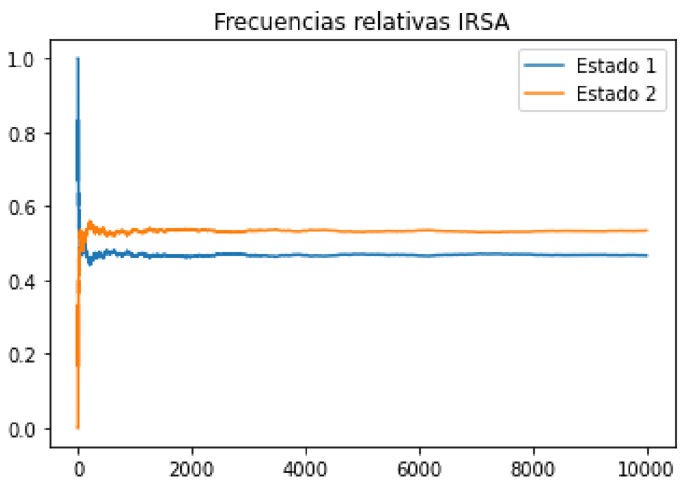
$$\mu_{MELI} = \begin{pmatrix} 1{,}906275 \\ 2{,}103418 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$\mu_{IRS} = \begin{pmatrix} 2{,}169326 \\ 1{,}855193 \end{pmatrix} \quad (33)$$

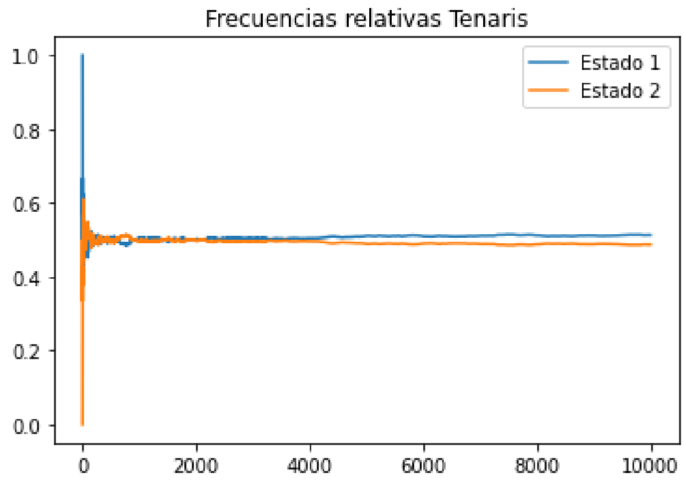
$$\mu_{TS} = \begin{pmatrix} 1{,}953161 \\ 2{,}049141 \end{pmatrix} \quad (34)$$

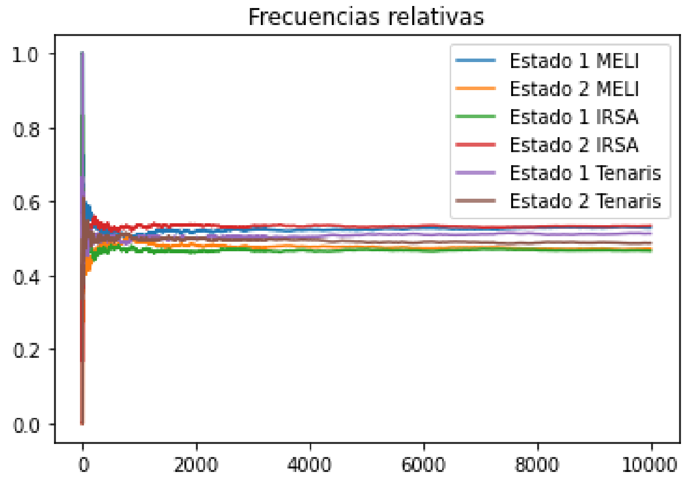
Finalmente, la ergodicidad implica que para una trayectoria lo suficientemente larga las frecuencias relativas de los estados de dicha trayectoria son aproximadamente iguales a las probabilidades de la distribución estacionaria. Por medio de la función *markovchainSequence* del paquete se generará una simulación de 10000 realizaciones de la cadena para cada acción a fin de analizar la evolución de las frecuencias relativas de las cadenas simuladas. Los resultados se muestran a continuación[6]:




[6]Las frecuencias relativas convergen a las probabilidades de la distribución estacionaria por *Ley de los Grandes Números*.




## 5. Conclusiones

En base a las distribuciones estacionarias, la mejor opción de inversión es Mercado Libre ya que presenta la mayor probabilidad de alza en el largo plazo. Incluso, se podría financiar la inversión de largo tomando una posición vendida[7] de IRSA ya que presenta la mayor probabilidad de baja en el largo plazo.

En base a las simulaciones, Tenaris presenta mayores probabilidades de baja en el corto plazo pero luego en el largo plazo tiende a estabilizarse en la distribución estacionaria la cual presenta mayor probabilidad de alza por lo que también sería recomendable adquirir Tenaris en el corto a un precio barato con la expectativa de que en el largo plazo adopte una tendencia alcista. Las otras dos acciones, en cambio, parecen adoptar sus tendencias estacionarias relativamente rápido.

Asimismo, es posible predecir[8] la distribución de probabilidad futura a través de la distribución de probabilidad realizada por medio de la propiedad definida en la ecuación 3. Las operaciones analizadas no son taxativas sino que pueden existir muchas otras más y se pueden complejizar introduciendo posiciones compradas y vendidas de opciones, contratos a término y de futuros. Se invita al lector a pensar posibles operaciones de arbitraje probabilísticas que puedan surgir observando el gráfico de frecuencias relativas totales.

La comparación del modelo de cadena de Markov con otros modelos predictivos, principalmente asociados a la $IA$ de $MachineLearning$, y la simulación $MonteCarlo$ son aspectos no abarcados en el trabajo, entre otros, pero que pueden motivar estudios futuros.

[7] Pedir prestado una acción, venderla para obtener financiamiento y al vencimiento del préstamo devolver la acción debiendo adquirirla a su cotización corriente.

[8] En el paquete se cuenta con la función *predict()*.

# 6. Bibliografía


Jain, S. (1986). Markov chain model and its application. Computers and biomedical research, 19(4), 374-378.

Jonsson, R. (2011). Tests of Markov Order and Homogeneity in a Markov Chain.

Servy, E., Marí, G. P., Wojdyla, D. (2003). Estimación de probabilidades de transición bajo diseños muestrales complejos.

Tan, B., Yilmaz, K. (2002). Markov chain test for time dependence and homogeneity: an analytical and empirical evaluation. European Journal of Operational Research, 137(3), 524-543.

Craig, B. A., Sendi, P. P. (2002). Estimation of the transition matrix of a discrete?time Markov chain. Health economics, 11(1), 33-42.

Samsuddin, S., Ismail, N. (2019). Markov Chain Model and Stationary Test: A Case Study on Malaysia Social Security (SOCSO). Sains Malaysiana, 48(3), 697-701.

Franke, T. M., Ho, T., Christie, C. A. (2012). The chi-square test: Often used and more often misinterpreted. American Journal of Evaluation, 33(3), 448-458.

Jones, M. M. T. (2005). Estimating Markov transition matrices using proportions data: an application to credit risk (No. 5-219). International Monetary Fund.