1、试题序号：321
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：第二章　矩阵及其运算
5、分值：8
6、所需时间：8 分钟
7、试题关键字：矩阵秩的性质
8、试题内容：

设 A 为一个 n 阶方阵，E 为同阶单位矩阵且 $A^2=E$，证明：$R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)=n$.

9、答案内容：

证明:

Q $A^2=E \Rightarrow A^2-E^2=0$

$\Rightarrow (A+E)(A-E)=0$

由矩阵秩的性质,则有

$R(A+E)+R(A-E)=$

$R(A+E)+R(E-A)\leq n.$

同时, 有

$R(A+E)+R(E-A)\geq R(A+E+E-A)=n.$

$\therefore R(A+E)+R(A-E)=n.$

10、评分细则：由题设推出 $\left(A+E\right)\left(A-E\right)=0$ 得 2 分;由矩阵秩的性质推出 $R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)\leq n$ 得 2 分;推出 $R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)\geq n$ 得 2 分;因而推出 $R\left(A+E\right)+R\left(A-E\right)=n$ 得 2 分.

1、试题序号：322
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：　第五章　相似矩阵及二次型
5、分值：8
6、所需时间：6 分钟
7、试题关键字：正交矩阵的特征值
8、试题内容：

设 A 为一个 n 阶正交矩阵，且 $\left|A\right|=-1$.证明：$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

9、答案内容：
证明：

$\because A$是正交矩阵,$\therefore A^T A = E$.

又$\because |A| = -1$,

$\therefore |A-(-1)E| = |A+E| = |A+A^T A|$

$= |(E+A^T)A| = |E+A^T||A|$

$= -|E+A^T| = -|E^T+A^T|$

$= |-(E+A)^T| = -|E+A|$

$\therefore |A+E| = 0 \Rightarrow |A-(-1)E| = 0$.

$\therefore \lambda = -1$是A的特征值.

10、评分细则：推出$\left|A-\left(-1\right)E\right| = \left|A+AA^T\right|$（2 分）$= -\left|E+A^T\right|$（2 分）$= -\left|E+A\right|$（2 分）推出$\left|A-\left(-1\right)E\right| = 0$并说明$\lambda = -1$是$A$的特征值（2 分）.

1、试题序号：323

2、题型：证明题

3、难度级别：4

4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型

5、分值：8

6、所需时间：10 分钟

7、试题关键字：二次型的正定性

8、试题内容：

已知A, B均为n阶正定矩阵，试证明：分块矩阵$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$也为正定矩阵.

9、答案内容：

证明

$\because A,B$是正定矩阵，$\therefore A$，B是对称矩阵.

$\therefore \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & 0^T \\ 0^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

$\therefore \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是对称矩阵.

令$f = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, 此为$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$所确定的二次型.

$\forall \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow X_1, X_2$中至少有一个不为0,

则有$f = X_1^T A X_1 + X_2^T B X_2 > 0$.

$\therefore$此二次型为正定二次型，

则$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$为正定矩阵.

10、评分细则：由题设中条件推出$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$是对称矩阵(2 分)；令 $f = \begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ (2 分)；由$\begin{pmatrix} X_1^T & X_2^T \end{pmatrix} \neq 0$推出 X_1, X_2 中至少有一个不为零 (2 分). 则有 $f = X_1^T A X_1 + X_2^T B X_2 > 0$, 推出 $f = X_1^T A X_1 + X_2^T B X_2$ 为正定二次型(2 分). 因而有$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$为正定矩阵(2 分).

1、试题序号：324

2、题型：证明题

3、难度级别：3

4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型

5、分值：8

6、所需时间：8 分钟

7、试题关键字：二次型的正定性

8、试题内容：

设 A, B 均为 n 阶正定矩阵，试证明：$A+B$ 也为正定矩阵.

9、答案内容：

证明：

$\because A,B$都是正定矩阵,

$\therefore A^T=A,\ B^T=B.$

$(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$

$\Rightarrow A+B$为对称矩阵.

令$f=x^T(A+B)x.$

$\forall x\neq 0,$则有

$f=x^TAx+x^TBx.$

$\because A,B$是正定矩阵

$\therefore x^TAx,x^TBx$是正定二次型.

则有$f=x^TAx+x^TBx>0.$

$\therefore f=x^T(A+B)x$为正定二次型.

则A+B也为正定矩阵.

10、评分细则：由题设中条件推出 $A+B$ 为对称矩阵(2 分)；令 $f=x^T\left(A+B\right)x$ (2 分)；$\forall x\neq 0\Rightarrow f=x^TAx+x^TBx>0$ (2 分)；推出 $f=x^T\left(A+B\right)x$ 为正定二次型(2 分)；因而有 $A+B$ 为正定矩阵(2 分).

1、试题序号：325

2、题型：证明题

3、难度级别：2

4、知识点：第四章　向量组的线性相关性

5、分值：8

6、所需时间：8 分钟

7、试题关键字：向量组的线性关系

8、试题内容：

若向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，但 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 线性表示，试证：

α_r 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$ 线性表示.

9、答案内容：

证明：

$\because \beta$可以由α_1，$\alpha_2,\cdots\ \alpha_r$线性表示，

$\therefore$存在一组数K_1，$\mathrm{K}_2,\cdots\ \mathrm{K}_r$, 使得

$\mathrm{K}_1\alpha_1+\mathrm{K}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{K}_r\alpha_r=\beta.$

若$\mathrm{K}_r=0,$则$\beta=\mathrm{K}_1\alpha_1+\mathrm{K}_2\alpha_2+\cdots+\mathrm{K}_{r-1}\alpha_{r-1}.$

这与β不能由α_1，$\alpha_2,\cdots\ \alpha_{r-1}$线性表示矛盾.

$$\therefore \mathrm{K}_r\neq 0\Rightarrow \alpha_r=-\frac{\mathrm{K}_1}{\mathrm{K}_r}\alpha_1-\frac{\mathrm{K}_2}{\mathrm{K}_r}\alpha_2\cdots-\frac{\mathrm{K}_{r-1}}{\mathrm{K}_r}\alpha_{r-1}-\frac{1}{\mathrm{K}_r}\beta.$$

$\therefore \alpha_r$可由α_1，$\alpha_2,\cdots\ \alpha_{r-1},\beta$线性表示.

10、评分细则：由题设中条件令 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\beta$ (2 分)；假设 $k_r=0$ 推出 β 不能

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示矛盾(2 分)；$\therefore k_r \neq 0 \Rightarrow \alpha_r$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$，$\beta$线性表示(4 分).

1、试题序号：326
2、题型：证明题
3、难度级别：4
4、知识点：第四章　向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：10 分钟
7、试题关键字：向量的线性关系与矩阵的秩
8、试题内容：

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，试证：向量组　$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$线性无关.

9、答案内容：
证明：

令$A=\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_S\right), B=\left(\alpha_1\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_S\right)$.

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_S$线性无关，

$\therefore R\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_S\right)=R(A)=S.$

$$\left(\alpha_1\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_S\right)=\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_S\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

令$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

则有B=AC，显然C可逆.

10、评分细则：令$A=\left(\alpha_1\quad \alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_s\right)$，$B=\left(\alpha_1\quad \alpha_1+\alpha_2\quad \cdots\quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots\ \alpha_s\right)$(1 分)；由题设条件推出$R(A)=s$(1 分)；

令$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$推出$B=AC$(2 分)；推出$A=BC^{-1} \Rightarrow R(B) \geq R(A)=s$(2 分)

又$R(B) \leq s \Rightarrow R(B)=s \Rightarrow \alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\ldots\ \alpha_1+\cdots\ \alpha_s$线性无关(2 分).

1、试题序号：327
2、题型：证明题

3、难度级别：3
4、知识点：第二章　矩阵及其运算
5、分值：8
6、所需时间：8 分钟
7、试题关键字：奇异矩阵
8、试题内容：

已知矩阵 $A^2=E, B^2=E$，且 $|A|+|B|=0$ 证明：$A+B$ 为奇异矩阵.

9、答案内容：
证明：

$\because A^2=E \Rightarrow |A|=\pm 1, B^2=E \Rightarrow |B|=\pm 1.$

又$\because |A|+|B|=0 \Rightarrow$ 若$|A|=\pm 1$,则$|B|=\mp 1.$

而$A(A+B)=A^2B+AB^2=B+A.$

$\therefore |A(A+B)B|=|B+A|.$

$\therefore |A||A+B||B|=|A+B|.$

$\therefore -|A+B|=0$,则$A+B$为奇异矩阵.

10、评分细则：由题设中条件推出 $|A|=\pm 1, |B|=\mp 1$（1 分）；推出 $A\left(A+B\right)B=B+A$（3 分）；推出 $|A||A+B||B|=|B+A|$（2 分）；推出 $|A+B|=0 \Rightarrow A+B$ 为奇异矩阵（2 分）.

1、试题序号：328
2、题型：证明题
3、难度级别：2
4、知识点：第四章　向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：6 分钟
7、试题关键字：向量组的线性关系与矩阵的秩
8、试题内容：

设 n 维基本单位向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可由 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，证明：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

9、答案内容：
证明：

令$A=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\right)$,且$E_n=\left(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n\right).a$

$\because \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$可以由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表示.

$\therefore$存在一个n阶方阵B,使得

$E_n=AB \Rightarrow R\left(A\right) \ge R\left(E_n\right)=n.$

同时$R\left(A\right) \le n.$

$\therefore R\left(A\right)=n \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性无关.

10、评分细则：令 $A=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n\right), E=\left(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n\right)$（2 分）；由题设条件推出

存在一个n阶矩阵B（2 分）；使得$AB=E\Rightarrow R\left(A\right)=n$（4 分）.

1、试题序号：329
2、题型：证明题
3、难度级别：4
4、知识点：第四章 向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：10 分钟
7、试题关键字：向量组的线性关系与矩阵的秩
8、试题内容：

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，$\beta_2$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，证明：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性无关（其中$\lambda$为常数）.

9、答案内容：

证明:

$\because \beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m$，

$\therefore\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\lambda\beta_1+\beta_2\right)\sim\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta_2\right)$.

假设$R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_M\quad\beta_2\right)\le m$,则有

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_2$线性相关,因而与$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示矛盾.

$\therefore R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta_2\right)>m,\therefore R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\lambda\beta_1+\beta_2\right)=m+1$

$\therefore\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性无关.

10、评分细则：由题设中条件推出$\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\lambda\beta_1+\beta_2\right)\sim\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta_2\right)$（2 分）；假设$R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta_2\right)\le m$由题设推出$\beta_2$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示，与题设矛盾（2 分）；$\therefore R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\beta_2\right)>m$推出$R\left(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_m\quad\lambda\beta_1+\beta_2\right)=m+1$（3 分）；推出$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\lambda\beta_1+\beta_2$线性无关（1 分）.

1、试题序号：330
2、题型：证明题
3、难度级别：2
4、知识点：第四章 向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：6 分钟
7、试题关键字：向量组与矩阵的秩
8、试题内容：

设 A 为 $n\times m$ 矩阵， B 为 $m\times n$ 矩阵， $n<m$,若 $AB=E$ ，证明 B 的列向量组线性无关.
9、答案内容：
证明: $\because$ A 为 $n\times m$ 矩阵, B 为 $m\times n$ 矩阵,且 $AB=E$, E 为单位矩阵.由矩阵秩的性质,则有

$R(B)\geq R(E)=n$.

又 $\because n<m, \therefore R(B)\leq n.$

$\therefore R(B)=n$

$\therefore B$ 的列向量组线性无关.

10、评分细则：由题设推出 $R(B)\geq R(E)=n$ (2 分)；又有题设中 $n<m\Rightarrow R(B)\leq n$ (2 分)； $\therefore R(B)=n$ (2 分)；所以 B 的列向量组线性无关(2 分).

1、试题序号：331
2、题型：证明题
3、难度级别：4
4、知识点：第四章　向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：10 分钟
7、试题关键字：向量组的线性关系与矩阵的秩
8、试题内容：
设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 n 维列向量， η_1,η_2 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交，证明：

η_1,η_2 线性相关.

9、答案内容：

证明: $\because \eta_1,\eta_2$ 分别与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交,

$$\therefore \begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \eta_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

令 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \eta_2^T\end{pmatrix}, BA=0\Rightarrow R(A)=n-1\Rightarrow R(B)\leq 1$

$\therefore \eta_1,\eta_2$ 线性相关.

10、评分细则：令 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}^T$ (1 分);由题设中条件推得

$BA=0\Rightarrow R(A)+R(B)\leq n$ (2 分); $\therefore R(A)=n-1\Rightarrow R(B)\leq 1$ (1 分); 若

$R(B)=0\Rightarrow \eta_1=0,\eta_2=0$ (1 分); $\therefore \eta_1,\eta_2$ 线性相关 (1 分); 若

$R(B)=1 \Rightarrow R(\eta_1 \quad \eta_2)=1<2$ (1 分),所以η_1,η_2线性相关(1 分).

1、试题序号：332
2、题型：证明题
3、难度级别：2
4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型
5、分值：8
6、所需时间：6 分钟
7、试题关键字：正交向量组
8、试题内容：

已知 n 阶实矩阵 A 为正交矩阵， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维正交单位向量组，证明：

$A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_n$ 也是 n 维正交单位向量组.

9、答案内容：
证明:$\because A$是阶正交矩阵,则有

$\because \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是维正交向量组

$\therefore \alpha_i \neq 0, \alpha_i^T \alpha_j = 0, i \neq j$

$(A\alpha_i)^T (A\alpha_j) = \alpha_i^T A^T A\alpha_j = \alpha_i^T \alpha = 0$

$\therefore A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots\ A\alpha_n$ 是正交向量组.

10、评分细则：由题设中条件推出 $\alpha_i \neq 0, \alpha_i^T \alpha_j = 0, i \neq j$ (2 分)；$(A\alpha_i)^T (A\alpha_j) = \alpha_i^T A^T A\alpha_j = \alpha_i^T E\alpha_j = \alpha_i^T \alpha_j = 0$ (2 分)；$\alpha_i \neq 0$ 且 A 可逆，推得 $A\alpha_i \neq 0$ (2 分)；推得 $A\alpha_1, A\alpha_2,\cdots, A\alpha_n$ 是正交向量组(2 分).

1、试题序号：333
2、题型：证明题
3、难度级别：4
4、知识点：第四章　向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：10 分钟
7、试题关键字：向量组的秩与方程组的解
8、试题内容：

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系， β 不是 $Ax=0$ 的解，证明：

$\beta, \beta+\alpha_1, \beta+\alpha_2,\cdots, \beta+\alpha_s$ 线性无关.

9、答案内容：

证明:假设$R(\beta \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s)<s+1$.这与$\beta$不是$Ax=0$的解矛盾

$\therefore R\left(\beta \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s\right)=s+1$

$R\left(\beta \quad \beta+\alpha_1 \quad \cdots \quad \beta+\alpha_s\right)=s+1$

即 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots\ \beta+\alpha_s$ 线性无关.

10、评分细则：由题设推出 $R\left(\beta \quad \beta+\alpha_1 \quad \cdots \quad \beta+\alpha_s\right)=R\left(\beta \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s\right)$（2 分）;假设 $R\left(\beta \quad \alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_s\right)<s+1$, 由题设中条件推出 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示, 与 β 不是 $Ax=0$ 的解矛盾（2 分）; $\therefore R\left(\beta \quad \beta+\alpha_1 \quad \cdots \quad \beta+\alpha_s\right)=s+1$（2 分）; $\therefore \beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_s$ 线性无关（2 分）.

1、试题序号：334

2、题型：证明题

3、难度级别：2

4、知识点：第四章　向量组的线性相关性

5、分值：8

6、所需时间：8 分钟

7、试题关键字：矩阵的秩与方程组的解

8、试题内容：

设 A 为 n 阶矩阵，若 $Ax=0$ 只有零解，证明：方程组 $A^k x=0$ 也只有零解，其中 k 为正整数.

9、答案内容：

证明: $\because Ax=0$ 只有零解 $\Rightarrow R(A)=n$

A 为 n 阶矩阵,

$\therefore A$ 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0.$

则 $\left|A^k\right|=|A|^k\neq 0$

即 A^k 为可逆矩阵

$\therefore R\left(A^k\right)=n\Rightarrow A^k x=0$ 只有零解.

10、评分细则：由题设推出 $R(A)=n\Rightarrow A$ 可逆（3 分）;推出 $\left|A^k\right|=|A|^k\neq 0$（2 分）;推得 $R\left(A^k\right)=n\Rightarrow A^k x=0$ 只有零解（3 分）.

1、试题序号：335

2、题型：证明题

3、难度级别：4

4、知识点：第四章　向量组的线性相关性

5、分值：8

6、所需时间：10 分钟
7、试题关键字：向量组的秩,矩阵的秩及方程组的解
8、试题内容：
设 A 是 $m\times n$ 矩阵，D 是 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times m$ 矩阵，求证：若 B 可逆且 BA 的行向量的转置都是 $Dx=0$ 的解，则 A 的每个行向量的转置也都是该方程组的解.
9、答案内容：

证明：设 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（I）

设 B 的行向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$（II）

则向量组（I）与（II）均为 n 维向量组

$BA=C,B$ 可逆 $\Rightarrow A=B^{-1}C$

令 $B^{-1}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}$，则有

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 向量组（I）可以由（II）线性表示
$\because$ 向量组（II）是 $Dx=0$ 的解
$\therefore$ 向量组（I）也是 $Dx=0$ 的解

10、评分细则：令 A 的行向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（I），$C$ 的行向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$（II）(1 分)；$BA=C\Rightarrow A=B^{-1}C$（2 分）；

推得 $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_m \end{pmatrix},B^{-1}=\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{m2} \end{pmatrix}$(2 分)
所以(I)可以由(II)线性表示(2 分);由(II)是 $Dx=0$ 的解推出(I)也是 $Dx=0$ 的解(1 分).

1、试题序号：336
2、题型：证明题

3、难度级别：2
4、知识点：第四章　向量组的线性相关性
5、分值：8
6、所需时间：6 分钟
7、试题关键字：向量组的线性关系与方程组的基础解系
8、试题内容：

设非齐次线性方程组$Ax=b$的系数矩阵的秩为r，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是其导出组的一个基础解系，$\eta$是$Ax=b$的一个解，证明：$\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关.

9、答案内容：

证明：假设$\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性相关，

$\because \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是$Ax=0$的基础解系，

$\therefore \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是线性无关的.

由以上可得η可以由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性表示.

则η是$Ax=0$的解,与η是$Ax=b$的解矛盾.

$\therefore$假设不成立,即$\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关.

10、评分细则：假设$\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots\ \eta_{n-r}$线性相关,由题设推得$\eta$可以由$\eta_1,\eta_2,\cdots\ \eta_{r-1}$线性表示(3 分);所以$\eta$是$Ax=0$的解与$\eta$是$Ax=b$的解矛盾(3 分);所以$\eta,\eta_1,\eta_2,\cdots\ \eta_{n-r}$线性无关(2 分).

1、试题序号：337
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型
5、分值：8
6、所需时间：8 分钟
7、试题关键字：正定矩阵的逆矩阵与伴随矩阵
8、试题内容：

设A^*为A的伴随矩阵，若A为正定的，试证A^*及A^{-1}均为正定的.

9、答案内容：

证明：

$\because A$为正定矩阵，

$\therefore A$的特征值全为正数。

设A的特征值为λ，则有

$$Ax=\lambda x, x\neq 0 \Rightarrow A^{-1}Ax=\lambda A^{-1}x \Rightarrow \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x.$$

$\therefore A^{-1}$的特征值$\frac{1}{\lambda}>0$,则A^{-1}为正定矩阵.

同理:$Ax=\lambda x$, $x\neq 0 \Rightarrow A^{*}Ax=\lambda A^{*}x$

$\because A$正定$\Rightarrow |A|>0$,

$\therefore |A|Ex=\lambda A^{*}x \Rightarrow A^{*}x=\frac{A}{\lambda}x.$

$\therefore A^{*}$的特征值$\frac{|A|}{\lambda}>0$,则A^{*}为正定矩阵.

10、评分细则：设 A 的特征值为 λ，由题设推得 $\lambda>0$（2 分）；由 A 的特征值为 λ 推得 A^{-1} 的特征值为 $\frac{1}{\lambda}$（1 分），则有 $\frac{1}{\lambda}>0 \Rightarrow A^{-1}$ 为正定矩阵（2 分）；A 正定 $\Rightarrow |A|>0$（1 分）$\Rightarrow A^{*}$ 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda}>0 \Rightarrow A^{*}$ 为正定矩阵（2 分）.

1、试题序号：338
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型
5、分值：8
6、所需时间：8 分钟
7、试题关键字：正定矩阵
8、试题内容：
若 A 为实对称矩阵，证明：当 t 充分大时，$tE+A$ 为正定矩阵.
9、答案内容：
证明：

$\because A$为实对称矩阵.

$\therefore A^{T}=A$.则有

$(tE+A)^{T}=tE+A^{T}=tE+A.$

$\therefore tE+A$也为实对称矩阵.

设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$,最小值记为

$\lambda=\min\{\lambda_i\}, i=1,2,\cdots,n.$

$t+\lambda_i$均为$tE+A$的特征值.

当$t+\lambda>0 \Rightarrow t>-\lambda$时,$tE+A$的全部特征值均为正数.

$\therefore t$充分大时,$tE+A$为正定矩阵.

10、评分细则：由题设推得$tE+A$为实对称矩阵(2 分)；说明$t+\lambda_i, i=1,2,\mathrm{L}\ ,n$均为$tE+A$的特征值(2 分)；当$t+\lambda>0,\lambda$为最大特征值,推得$t>-\lambda$时,$tE+A$的特征值全为正数(2 分)；所以$t$充分大时，$tE+A$为正定矩阵(2 分).

1、试题序号：339
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：第五章　相似矩阵及二次型
5、分值：8
6、所需时间：8 分钟
7、试题关键字：正定二次型
8、试题内容：

设C为n阶实可逆矩阵，E为单位矩阵，$\lambda>0$,证明：$\lambda E+C^TC$为正定的.

9、答案内容：

证明：

$\mathrm{Q}\ (\lambda E+C^TC)^T=\lambda E^T+C^TC=\lambda E+C^TC,$

$\therefore \lambda E+C^TC$为对称矩阵.

令f=$\lambda x^TEx+x^TC^TCx\Rightarrow \lambda x^Tx+(Cx)^T(Cx).$

$\mathrm{Q}\ C$为实可逆矩阵, $\lambda>0,$

$\therefore \forall x\neq 0,$有$\lambda x^Tx=\lambda\|x\|>0,(Cx)^T(Cx)=\|x\|>0.$

$\therefore f=x^T(\lambda E+C^TC)x$为正定二次型

$\therefore \lambda E+C^TC$为正定矩阵.

10、评分细则：由题设推得$\lambda E+C^TC$为对称矩阵(2 分)；令$f=x^T\left(\lambda E+C^TC\right)x\Rightarrow f=\lambda x^Tx+\left(Cx\right)^T\left(Cx\right)$ (2 分)；$\mathrm{Q}\ A$可逆, $\lambda>0,\forall x\neq 0\Rightarrow f=\lambda\|x\|+\|Cx\|>0$ (2 分)；$\therefore f$为正定二次型$\Rightarrow \lambda E+C^TC$为正定矩阵(2 分).

1、试题序号：340
2、题型：证明题
3、难度级别：3
4、知识点：第二章　矩阵及其运算
5、分值：8
6、所需时间：7 分钟
7、试题关键字：求解逆矩阵
8、试题内容：

若 3 阶实对称矩阵 A 满足 $A^3-6A^2+11A-6E=0$， E 为单位矩阵.试证: A 为正定矩阵.

9、答案内容：

证明：

$$\because A^3-6A^2+11A-6E=0$$
$$\therefore A^3-A-6A^2+12A-6E=0$$
$$\therefore A(A^2-E)-(6A^2-A)+6A-6E=0$$
$$\therefore A(A^2-E)-6A(A-E)+6(A-E)=0$$
$$\therefore (A^2+A-6A+6E)(A-E)=0$$
$$\therefore (A^2-5A+6E)(A+E)=0$$
$$\therefore (A-3E)(A-2E)(A-E)=0$$
$$\therefore |A-3E||A-2E||A-E|=0$$

则3阶实对称矩阵的全部特征值为$1,2,3$.

$\therefore A$的特征值全为正数,即A为正定矩阵.

10、评分细则：由题设推得 $A^3-A-6A^2+12E-6E=0$ （2 分）$\left(A-3E\right)\left(A-2E\right)\left(A-E\right)=0$（2 分）$\Rightarrow |A-3E||A-2E||A-E|=0 \Rightarrow A$ 的特征值为 1, 2, 3（2 分）;所以 A 为正定矩阵（2 分）.