积分符号内取微分

此条目已<u>列出参考文献</u>,但因为没有<u>文内引注</u>而 使来源仍然不明。 了解更多

积分符号内取微分 (Leibniz integral rule,莱布尼茨积分法则)是一个在<u>数学</u>的 微积分领域中很有用的运算。它是说,给定如下积分

$$F(x,a(x),b(x))=\int_{a(x)}^{b(x)}f(x,t)\,dt$$

如果在 $x_0 \leq x \leq x_1$ 时

f(x,t) 与 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ 对t 和 x 在 (t,x) 平面连续, $a(x) \leq t \leq b(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, 且若对于 $x_0 \leq x \leq x_1$, a(x) 与 b(x) 及其导数连续,

那么当 $x_0 \leq x \leq x_1$ 时,根据<u>全微分</u>公式和<u>微积分基本定理</u>,该积分对x的导数为

$$egin{aligned} rac{d}{dx} \, F(x,a(x),b(x)) &= \left(rac{\partial F}{\partial b}
ight) rac{db}{dx} + \left(rac{\partial F}{\partial a}
ight) rac{da}{dx} + rac{\partial F}{\partial x} \ &= f(x,b(x)) \, b'(x) - f(x,a(x)) \, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} rac{\partial}{\partial x} \, f(x,t) \; dt \end{aligned}$$

注意-f(x,a(x))a'(x)项的负号来源于 <u>对积分下限求导</u>。 如果 a(x) 和 b(x) 是常数而不是 x 的 <u>函</u> 数,那么此时的特殊情况可看做交换积分和求导的顺序:

$$rac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt
ight) = \int_a^b rac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$

高维情况

$$rac{d}{dt} \int_{D(t)} F(ec{\mathbf{x}},t) \, dV = \int_{D(t)} rac{\partial}{\partial t} \, F(ec{\mathbf{x}},t) \, dV + \int_{\partial D(t)} \, F(ec{\mathbf{x}},t) \, ec{\mathbf{v}} \cdot ec{\mathbf{n}} \, dA,$$

定理的证明

引理1:

$$rac{\partial}{\partial b} \left(\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x
ight) = f(b), \qquad rac{\partial}{\partial a} \left(\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x
ight) = -f(a).$$

证明:由微积分基本定理的证明知,

$$egin{aligned} rac{\partial}{\partial b} \left(\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x
ight) &= \lim_{\Delta b o 0} rac{1}{\Delta b} \left[\int_a^{b+\Delta b} f(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x
ight] \ &= \lim_{\Delta b o 0} rac{1}{\Delta b} \int_b^{b+\Delta b} f(x) \, \mathrm{d}x \ &= \lim_{\Delta b o 0} rac{1}{\Delta b} \left[f(b) \Delta b + \mathcal{O} \left(\Delta b^2
ight)
ight] \ &= f(b) \ &= \lim_{\Delta a o 0} rac{1}{\Delta a} \left[\int_{a+\Delta a}^b f(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x
ight] \ &= \lim_{\Delta a o 0} rac{1}{\Delta a} \int_{a+\Delta a}^a f(x) \, \mathrm{d}x \ &= \lim_{\Delta a o 0} rac{1}{\Delta a} \left[-f(a) \, \Delta a + \mathcal{O} \left(\Delta a^2
ight)
ight] \ &= -f(a). \end{aligned}$$

引理2:

假设 a 和 b 是常数, f(x) 涉及常参数 α 的积分,但会形成不同积分.假设函数 $f(x,\alpha)$ 在<u>紧致集</u> $\{(x,\alpha):\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$ and $a \le x \le b\}$ 上连续, f 对 α 的<u>偏导</u> $f_{\alpha}(x,\alpha)$ 存在且连续, 定义函数 $\psi(\alpha)$ (这里将a和b看做是与 α 无关的常数,即a和b不随 α 的增大而增大):

$$\psi(lpha) = \int_a^b f(x,lpha) \; \mathrm{d}x.$$

 ψ 可以对 α 在积分符号内取微分,即

$$rac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}lpha} = \int_a^b rac{\partial}{\partiallpha} \, f(x,lpha) \, \mathrm{d}x.$$

证明:由<u>海涅-康托定理</u>,函数 $f(x,\alpha)$ 在集合中一致连续. 即对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\Delta \alpha$

使得对任意 $x \in [a, b]$,均有:

$$|f(x, \alpha + \Delta \alpha) - f(x, \alpha)| < \varepsilon.$$

另一方面:

$$egin{aligned} \Delta \psi &= \psi(lpha + \Delta lpha) - \psi(lpha) \ &= \int_a^b f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x - \int_a^b f(x,lpha) \; \mathrm{d}x \ &= \int_a^b \left(f(x,lpha + \Delta lpha) - f(x,lpha)
ight) \; \mathrm{d}x \ &\leq arepsilon(b-a) \end{aligned}$$

因此 $\psi(\alpha)$ 是连续函数.

同理,如果 $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,\alpha)$ 存在且连续,则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\Delta \alpha$,使得:

$$orall x \in [a,b] \quad \left| rac{f(x,lpha+\Deltalpha)-f(x,lpha)}{\Deltalpha} - rac{\partial f}{\partiallpha}
ight| < arepsilon.$$

因此,

$$rac{\Delta \psi}{\Delta lpha} = \int_a^b rac{f(x, lpha + \Delta lpha) - f(x, lpha)}{\Delta lpha} \; \mathrm{d}x = \int_a^b rac{\partial \, f(x, lpha)}{\partial lpha} \, \mathrm{d}x + R$$

这里

$$|R| < \int_a^b arepsilon \, \mathrm{d} x = arepsilon(b-a).$$

令 ϵ → 0 且 $\Delta\alpha$ → 0, 从而有,

$$\lim_{\Delta lpha o 0} rac{\Delta \psi}{\Delta lpha} = rac{\mathrm{d} \psi}{\mathrm{d} lpha} = \int_a^b rac{\partial}{\partial lpha} \, f(x,lpha) \, \mathrm{d} x.$$

证毕.

现在给出定理的证明.

证明:

定义函数 $\varphi(\alpha)$,有

$$\int_a^b f(x,lpha) \; \mathrm{d}x = arphi(lpha),$$

这里a and b 是关于 α 的函数,随α的增加 分别增加 Δa 和 Δb ,即当 α 增加 $\Delta \alpha$ 时,有

$$egin{aligned} \Delta arphi &= arphi(lpha + \Delta lpha) - arphi(lpha) \ &= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x - \int_a^b f(x,lpha) \; \mathrm{d}x \ &= \int_{a+\Delta a}^a f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x + \int_a^b f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x + \int_b^{b+\Delta b} f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x - \int_a^b f(x,lpha) \; \mathrm{d}x \ &= -\int_a^{a+\Delta a} f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x + \int_a^b [f(x,lpha + \Delta lpha) - f(x,lpha)] \; \mathrm{d}x + \int_b^{b+\Delta b} f(x,lpha + \Delta lpha) \; \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由积分中值定理得

$$\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = (b-a)f(\xi),$$
 这里 a < ξ < b , 从而上式变为

$$egin{aligned} \Delta arphi &= -\Delta a \, f(\xi_1, lpha + \Delta lpha) + \int_a^b [f(x, lpha + \Delta lpha) - f(x, lpha)] \, \mathrm{d}x + \Delta b \, f(\xi_2, lpha + \Delta lpha) \ \\ &= -\Delta a \, f(\xi_1, lpha + \Delta lpha) + \psi(lpha + \Delta lpha) - \psi(lpha) + \Delta b \, f(\xi_2, lpha + \Delta lpha) \end{aligned}$$

上式除以 $\Delta\alpha$, \diamondsuit $\Delta\alpha \to 0$, 此时 $\xi_1 \to a$ 且 $\xi_2 \to b$,由**引理2**:

$$rac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}lpha} = \int_a^b rac{\partial}{\partiallpha} \, f(x,lpha) \, \mathrm{d}x$$

和**引理1**,得

$$rac{\mathrm{d}arphi}{\mathrm{d}lpha} = \int_a^b rac{\partial}{\partiallpha} \, f(x,lpha) \, \mathrm{d}x + f(b,lpha) rac{\partial b}{\partiallpha} - f(a,lpha) rac{\partial a}{\partiallpha}.$$

定理得证. 这即是<u>莱布尼茨积分定理</u>的一般形式.

大众文化

积分符号内取微分曾在已故的物理学家理 查德·费曼的最畅销的回忆录《别闹了,费 曼先生!》(在"一个不同的工具箱"一章 中)中提到过,他提到他是高中时从一本 旧书《高等微积分》(1926年)中学到 的,书的作者是弗雷德里克·S·伍兹(美国 麻省理工学院数学系教授)。这种方法在 费恩曼以后接受正规教育时很少被教授。 而因为知道这种方法,使得费恩曼在普林 斯顿大学读研究生时能够用其解一些困难

的积分问题。《别闹了,费曼先生!》中 关于在积分符号内取微分方法的原文如 下: "我始终没有学会的是"<u>围道积分</u>

(contour integration)"。高中物理老师贝德先生给过我一本书,我会的所有积分方法,都是从这本书里学到的。

事情是这样的:一天下课之 后,他叫我留下。"费曼",他 说,"你上课时话太多了,声音又太 大。我知道你觉得这些课太沉闷, 现在我给你这本书。以后你坐到后 面角落去好好读这本书,等你全弄 懂了之后,我才准你讲话。" 于是每到上物理课时,不管老师教 的是帕斯卡定律或是别的什么,我 都一概不理。我坐在教室的角落, 念伍兹(woods)著的这本《高等

微积分学》。贝德知道我念过一点《实用微积分》,因此他给我这本真正的大部头著作——给大学二三年级学生念的教材。书内有傅立叶级数、贝塞尔函数、行列式、椭圆函数——各种我前所未知的奇妙东西。

那本书还教你如何对积分符号 内的参数求微分。后来我发现,一 般大学课程并不怎么教这个技巧, 但我掌握了它的用法,往后还一再 地用到它。因此, 靠着自修那本 书,我做积分的方法往往与众不 同。 结果经常发生的是,我在 麻省理工或普林斯顿的朋友被某些 积分难住,原因却是他们从学校学 来的标准方法不管用。如果那是围 道积分或级数展开,他们都懂得怎

么把答案找出;现在他们却碰壁了。这时我便使出"积分符号内取微分"的方法——这是因为我有一个与众不同的工具箱。当其他人用光了他们的工具,还没法找到解答时,便把问题交给我了!

另见

参考文献

费曼积分法——积分符号内取微分: http://spaces.ac.cn/index.php/archives/
1615/

取自"https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title= 积分符号内取微分&oldid=53963737"

Lijt931最后编辑于9月前

除非另有声明,本网站内容采用CC BY-SA 3.0 授权。