积分符号内取微分

此条目已列出参考文献，但因为没有文内引注而使来源仍然不明。 了解更多

积分符号内取微分 (Leibniz integral rule，莱布尼茨积分法则)是一个在数学的微积分领域中很有用的运算。它是说，给定如下积分

$$F(x,a(x),b(x))=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$$

,

如果在 $x_0\le x\le x_1$ 时

$f(x,t)$ 与 $\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ 对t 和 x 在 (t,x) 平面连续, $a(x) \leq t \leq b(x)$, $x_0 \leq x \leq x_1$, 且若对于$x_0 \leq x \leq x_1$, $a(x)$ 与 $b(x)$ 及其导数连续,

那么当 $x_0 \leq x \leq x_1$ 时， 根据全微分公式和微积分基本定理， 该积分对x的导数为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} F(x, a(x), b(x)) &= \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right) \frac{db}{dx} + \left(\frac{\partial F}{\partial a}\right) \frac{da}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} \\ &= f(x, b(x))\, b'(x) - f(x, a(x))\, a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt\end{aligned}$$

注意$-f(x, a(x))\, a'(x)$项的负号来源于对积分下限求导。

如果 $a(x)$ 和 $b(x)$ 是常数而不是 x 的 函数，那么此时的特殊情况可看做交换积分和求导的顺序：

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt.$$

高维情况

$$\frac{d}{dt}\int_{D(t)} F(\vec{\mathbf{x}},t)\,dV=\int_{D(t)}\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{\mathbf{x}},t)\,dV+\int_{\partial D(t)} F(\vec{\mathbf{x}},t)\,\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,dA,$$

定理的证明

引理1:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) = f(b), \qquad \frac{\partial}{\partial a}\left(\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right) = -f(a).$$

证明:由<u>微积分基本定理的证明</u>知,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) &= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{1}{\Delta b}\left[\int_a^{b+\Delta b} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{1}{\Delta b}\int_b^{b+\Delta b} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\Delta b\to 0}\frac{1}{\Delta b}\left[f(b)\Delta b+\mathcal{O}\left(\Delta b^2\right)\right]\\
&= f(b)\\
\frac{\partial}{\partial a}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) &= \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\left[\int_{a+\Delta a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_{a+\Delta a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\left[-f(a)\,\Delta a+\mathcal{O}\left(\Delta a^2\right)\right]\\
&= -f(a).
\end{aligned}
$$

证毕.

引理2:

假设 *a* 和 *b* 是常数, *f*(*x*) 涉及常参数 α 的积分，但会形成不同积分.假设函数 *f*(*x*, α) 在紧致集 {(*x*, α) : $α_0$ ≤ α ≤ $α_1$ and *a* ≤ *x* ≤ *b*} 上连续, *f* 对 *α* 的偏导 $f_α(x, α)$ 存在且连续, 定义函数$\psi(\alpha)$(这里将a和b看做是与 α 无关的常数，即a和b不随 α 的增大而增大):

$$\psi(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

ψ 可以对 α 在积分符号内取微分,即

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\alpha}=\int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

证明:由海涅-康托定理，函数$f(x,\alpha)$在集合中一致连续. 即对任意 ε > 0 ， 存在 Δα

使得对任意 $x \in [a, b]$，均有:

$$|f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \varepsilon.$$

另一方面:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \psi(\alpha+\Delta\alpha) - \psi(\alpha) \\
&= \int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x, \alpha)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)\right)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \varepsilon(b-a)
\end{aligned}$$

因此 $\psi(\alpha)$ 是连续函数.

同理，如果 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha} f(x, \alpha)$ 存在且连续, 则对任意 ε > 0 存在 Δα，使得:

$$\forall x \in [a,b] \quad \left|\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}-\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right|<\varepsilon.$$

因此,

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\alpha}=\int_a^b \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x+R$$

这里

$$|R|<\int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}x=\varepsilon(b-a).$$

令 $\varepsilon \to 0$ 且 $\Delta\alpha \to 0$, 从而有,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta\alpha}=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\alpha}=\int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

证毕.

现在给出定理的证明.

证明:

定义函数$\varphi(\alpha)$，有

$$\int_a^b f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x=\varphi(\alpha),$$

这里*a* and *b* 是关于 α 的函数，随α的增加分别增加 Δ*a* 和 Δ*b*,即当 α 增加 Δα时,有

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha) \\
&= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{a+\Delta a}^{a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x+\int_a^b f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x+\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^{a+\Delta a} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x+\int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)]\,\mathrm{d}x+\int_b^{b+\Delta b} f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由积分中值定理得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$, 这里 $a < \xi < b$, 从而上式变为

$$\Delta\varphi = -\Delta a\, f(\xi_1, \alpha+\Delta\alpha) + \int_a^b [f(x,\alpha+\Delta\alpha) - f(x,\alpha)]\,\mathrm{d}x + \Delta b\, f(\xi_2, \alpha+\Delta\alpha)$$

$$= -\Delta a\, f(\xi_1, \alpha+\Delta\alpha) + \psi(\alpha+\Delta\alpha) - \psi(\alpha) + \Delta b\, f(\xi_2, \alpha+\Delta\alpha)$$

.

上式除以 $\Delta\alpha$, 令 $\Delta\alpha \to 0$, 此时 $\xi_1 \to a$ 且 $\xi_2 \to b$,由**引理2**:

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

和**引理1**，得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x + f(b,\alpha)\frac{\partial b}{\partial\alpha} - f(a,\alpha)\frac{\partial a}{\partial\alpha}.$$

定理得证. 这即是莱布尼茨积分定理的一般形式.

大众文化

积分符号内取微分曾在已故的物理学家理查德·费曼的最畅销的回忆录《别闹了，费曼先生！》（在“一个不同的工具箱”一章中）中提到过，他提到他是高中时从一本旧书《高等微积分》（1926年）中学到的，书的作者是弗雷德里克·S·伍兹（美国麻省理工学院数学系教授）。这种方法在费恩曼以后接受正规教育时很少被教授。而因为知道这种方法，使得费恩曼在普林斯顿大学读研究生时能够用其解一些困难

的积分问题。《别闹了，费曼先生！》中关于在积分符号内取微分方法的原文如下：

“ 我始终没有学会的是“围道积分（contour integration）”。高中物理老师贝德先生给过我一本书，我会的所有积分方法，都是从这本书里学到的。 ”

事情是这样的：一天下课之后，他叫我留下。“费曼”，他说，“你上课时话太多了，声音又太大。我知道你觉得这些课太沉闷，现在我给你这本书。以后你坐到后面角落去好好读这本书，等你全弄懂了之后，我才准你讲话。”
于是每到上物理课时，不管老师教的是帕斯卡定律或是别的什么，我都一概不理。我坐在教室的角落，念伍兹（woods）著的这本《高等

微积分学》。贝德知道我念过一点《实用微积分》，因此他给我这本真正的大部头著作——给大学二三年级学生念的教材。书内有傅立叶级数、贝塞尔函数、行列式、椭圆函数——各种我前所未知的奇妙东西。

那本书还教你如何对积分符号内的参数求微分。后来我发现，一般大学课程并不怎么教这个技巧，但我掌握了它的用法，往后还一再地用到它。因此，靠着自修那本书，我做积分的方法往往与众不同。　　结果经常发生的是，我在麻省理工或普林斯顿的朋友被某些积分难住，原因却是他们从学校学来的标准方法不管用。如果那是围道积分或级数展开，他们都懂得怎

么把答案找出；现在他们却碰壁了。这时我便使出“积分符号内取微分”的方法——这是因为我有一个与众不同的工具箱。当其他人用光了他们的工具，还没法找到解答时，便把问题交给我了！

另见

参考文献

费曼积分法——积分符号内取微分：http://spaces.ac.cn/index.php/archives/1615/