Test Probabilités - Test 2

Sujet: Notions de Probabilité
Niveau: Intermédiaire
Nombre de questions: 20

Questions et Réponses

Q1. Calculez P(A ∪ B) si P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A ∩ B) = 0.15

R1.

```
P(A  B) = P(A) + P(B) - P(A  B)
P(A  B) = 0.3 + 0.4 - 0.15 = 0.55
```

Q2. Si P(A|B) = 0.6, P(B) = 0.3, calculez P(A ∩ B).

R2.

```
P(A|B) = P(A  B) / P(B)
P(A  B) = P(A|B) × P(B)
P(A  B) = 0.6 × 0.3 = 0.18
```

Q3. Deux événements A et B sont-ils indépendants si P(A) = 0.4, P(B) = 0.5, P(A ∩ B) = 0.2?

R3. Test d'indépendance: A et B indépendants si P(A ∩ B) = P(A) × P(B)

```
P(A) × P(B) = 0.4 × 0.5 = 0.20
P(A  B) = 0.20
```

Conclusion: Oui, A et B sont indépendants (0.20 = 0.20).

Q4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un défaut sur 5 prêts indépendants si chaque prêt a 10% de probabilité de défaut?

R4.

```
P(au moins 1) = 1 - P(aucun)
P(aucun) = (1 - 0.10)^5 = 0.90^5 = 0.59049
P(au moins 1) = 1 - 0.59049 = 0.40951  41%
```

Q5. Calculez l'espérance et la variance d'une variable Binomiale B(20, 0.05).

R5.

```
E[X] = n × p = 20 × 0.05 = 1
Var(X) = n × p × (1-p) = 20 × 0.05 × 0.95 = 0.95
 = √0.95  0.97
```

Interprétation: En moyenne, 1 défaut attendu sur 20 prêts, avec écart-type ≈ 1.

Q6. Une agence reçoit en moyenne 3 nouvelles demandes de prêt par heure. Quelle est la probabilité de recevoir exactement 5 demandes en une heure?

R6. Distribution de Poisson avec λ = 3:

```
P(X = 5) = ( ^k × e^(- )) / k!
P(X = 5) = (3^5 × e^(-3)) / 5!
P(X = 5) = (243 × 0.0498) / 120
P(X = 5) = 12.1 / 120   0.101 ou 10.1%
```

Q7. Si $X \sim N(100, 15^2)$, calculez $P(X > 120)$.

R7.

```
Z = (X -  ) /   = (120 - 100) / 15 = 1.33

P(X > 120) = P(Z > 1.33) = 1 - Φ(1.33)
           = 1 - 0.9082 = 0.0918   9.2%
```

```
from scipy.stats import norm
p = 1 - norm.cdf(120, loc=100, scale=15)  # 0.0912
```

Q8. Quelle valeur x vérifie $P(X < x) = 0.95$ si $X \sim N(50, 10^2)$?

R8.

```
Z .  = 1.645 (quantile 95%)
x =   + Z ×   = 50 + 1.645 × 10 = 66.45
```

```
from scipy.stats import norm
x = norm.ppf(0.95, loc=50, scale=10)  # 66.45
```

Q9. Expliquez pourquoi $P(|Z| > 2) \approx 5\%$ pour $Z \sim N(0,1)$.

R9.

```
P(|Z| > 2) = P(Z < -2) + P(Z > 2)
           = 2 × P(Z > 2)
           = 2 × (1 - 0.9772)
           = 2 × 0.0228
           = 0.0456   4.6%
```

C'est la base de la règle des 2σ (environ 95% dans $\mu \pm 2\sigma$).

Q10. Quelle est la distribution de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes?

R10. La somme de n variables de Bernoulli(p) indépendantes suit une **distribution Binomiale(n, p)**.

```
Si X , X , ..., X  ~ Bernoulli(p) indépendantes
Alors S = X  + X  + ... + X  ~ Binomiale(n, p)
```

Q11. Qu'est-ce que la distribution exponentielle et quand l'utiliser?

R11. Distribution exponentielle: Modélise le temps entre événements d'un processus de Poisson.

PDF: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$

Propriétés: - $E[X] = 1/\lambda$ - $Var(X) = 1/\lambda^2$ - Sans mémoire: $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$

Usage bancaire: Temps entre défauts, temps entre transactions.

Q12. Calculez l'espérance de la perte totale si EL = PD × LGD × EAD avec PD ~ Bernoulli(0.05), LGD = 0.45, EAD = 1,000,000.

R12.

```
E[Perte] = E[PD] × LGD × EAD
E[Perte] = 0.05 × 0.45 × 1,000,000
E[Perte] = 22,500 HTG
```

Q13. Qu'est-ce que l'inégalité de Chebyshev?

R13. **Énoncé:** Pour toute variable aléatoire X avec moyenne μ et variance σ^2:

```
P(|X -  |  k )  1/k²
```

Exemple: $k = 2 \rightarrow P(|X - \mu| \geq 2\sigma) \leq 25\%$

Utilité: Borne valable pour TOUTE distribution (pas seulement normale).

Q14. Comment calculer la corrélation entre deux variables aléatoires?

R14.

```
 (X,Y) = Cov(X,Y) / (  ×  )
       = E[(X- )(Y- )] / (  ×  )
       = [E(XY) - E(X)E(Y)] / (  ×  )
```

Propriétés: - $-1 \leq \rho \leq 1$ - $\rho = 0 \rightarrow$ pas de relation linéaire - X, Y indépendants $\rightarrow \rho = 0$ (mais pas l'inverse)

Q15. Si X et Y sont indépendants, quelle est la variance de X + Y?

R15.

```
Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2×Cov(X,Y)
```

Si X et Y **indépendants**, Cov(X,Y) = 0, donc:

```
Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)
```

Q16-20. [Questions additionnelles sur la simulation Monte Carlo, distributions composées, et applications au risque bancaire…]

Scoring

Score	Niveau
0-8	À améliorer

Score	Niveau
9-13	Intermédiaire
14-17	Avancé
18-20	Expert