Test Probabilités - Test 1

Sujet: Notions de Probabilité
Niveau: Intermédiaire
Nombre de questions: 25

Questions et Réponses

Q1. Définissez les termes: expérience aléatoire, espace échantillonnal, événement.

R1. - **Expérience aléatoire:** Processus dont le résultat n'est pas prévisible avec certitude (ex: lancer un dé) - **Espace échantillonnal (Ω):** Ensemble de tous les résultats possibles (ex: {1,2,3,4,5,6}) - **Événement:** Sous-ensemble de Ω (ex: "obtenir un nombre pair" = {2,4,6})

Q2. Quelle est la formule de probabilité classique?

R2. Probabilité de Laplace (équiprobabilité):

```
P(A) = Nombre de cas favorables / Nombre de cas possibles
P(A) = |A| / |Ω|
```

Exemple: Probabilité d'obtenir un 6 avec un dé équilibré P(6) = 1/6 ≈ 0.167 ou 16.7%

Q3. Énoncez les trois axiomes de probabilité (Kolmogorov).

R3. 1. **Non-négativité:** $P(A) \geq 0$ pour tout événement A 2. **Normalisation:** $P(\Omega) = 1$ (certitude) 3. **Additivité:** Si $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Q4. Qu'est-ce que le complément d'un événement?

R4. Le **complément** de A (noté Ā ou A') contient tous les résultats qui ne sont pas dans A.

Formule:

```
P(Ā) = 1 - P(A)
```

Exemple bancaire: Si P(Défaut) = 5%, alors P(Non-défaut) = 95%

Q5. Quelle est la formule de l'union de deux événements?

R5. Formule générale:

```
P(A  B) = P(A) + P(B) - P(A  B)
```

Cas particulier (événements mutuellement exclusifs):

```
Si A  B =  , alors P(A  B) = P(A) + P(B)
```

Q6. Qu'est-ce qu'une probabilité conditionnelle?

R6. La probabilité de A **sachant que** B s'est produit.

Formule:

```
P(A|B) = P(A  B) / P(B)
```

Exemple bancaire: P(Défaut | Score < 500) = Probabilité de défaut sachant que le score est bas

---

Q7. Qu'est-ce que l'indépendance de deux événements?

R7. A et B sont **indépendants** si l'occurrence de l'un n'affecte pas la probabilité de l'autre.

Définition:

```
A et B indépendants  P(A  B) = P(A) × P(B)
```

Équivalent:

```
P(A|B) = P(A)
```

Q8. Énoncez et expliquez le théorème de Bayes.

R8. Formule:

```
P(A|B) = P(B|A) × P(A) / P(B)
```

Avec formule des probabilités totales:

```
P(A|B) = P(B|A) × P(A) / [P(B|A)×P(A) + P(B|Ā)×P(Ā)]
```

Terminologie: - P(A): Probabilité a priori - P(A|B): Probabilité a posteriori - P(B|A): Vraisemblance

---

Q9. Application bancaire: Si 5% des clients font défaut, le test de scoring détecte 90% des défauts (sensibilité) et a 10% de faux positifs. Quelle est P(Défaut | Test Positif)?

R9. Données: - P(D) = 0.05 (taux de défaut) - P(+|D) = 0.90 (sensibilité) - P(+|D̄) = 0.10 (faux positif)

Bayes:

```
P(D|+) = P(+|D) × P(D) / P(+)

P(+) = P(+|D)×P(D) + P(+|D)×P(D)
P(+) = 0.90×0.05 + 0.10×0.95 = 0.045 + 0.095 = 0.14

P(D|+) = 0.90 × 0.05 / 0.14 = 0.045 / 0.14  0.32 ou 32%
```

Conclusion: Même avec un bon test, seulement 32% des positifs sont de vrais défauts.

Q10. Qu'est-ce qu'une variable aléatoire discrète vs continue?

R10. | Discrète | Continue | |———-|———-| | Valeurs dénombrables | Valeurs sur un intervalle | | Comptage | Mesure | | PMF (fonction de masse) | PDF (densité) | | Exemple: Nb de défauts | Exemple: Montant du prêt |

Q11. Qu'est-ce que l'espérance (moyenne) d'une variable aléatoire?

R11. Variable discrète:

```
E[X] = Σ x  × P(X = x )
```

Variable continue:

$E[X] = \; x \times f(x)\, dx$

Propriétés: - $E[aX + b] = a \times E[X] + b$ - $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Q12. Qu'est-ce que la variance d'une variable aléatoire?

R12. Définition:

$Var(X) = E[(X - \;)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$

Propriétés: - $Var(aX + b) = a^2 \times Var(X)$ - Si X et Y indépendants: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Q13. Décrivez la distribution de Bernoulli.

R13. Variable: $X \in \{0, 1\}$ (succès/échec)

Paramètre: p = probabilité de succès

PMF:

$P(X = 1) = p$
$P(X = 0) = 1 - p$

Moments: - $E[X] = p$ - $Var(X) = p(1-p)$

Exemple bancaire: Défaut (1) ou non-défaut (0)

Q14. Décrivez la distribution binomiale.

R14. Variable: X = nombre de succès sur n essais indépendants

Paramètres: n (nombre d'essais), p (probabilité de succès)

PMF:

$P(X = k) = C(n,k) \times p\hat{}k \times (1-p)\hat{}(n-k)$

Moments: - $E[X] = n \times p$ - $Var(X) = n \times p \times (1-p)$

Exemple: Nombre de défauts sur 100 prêts avec taux de défaut 5% $E[X] = 100 \times 0.05 = 5$ défauts

---

Q15. Décrivez la distribution de Poisson.

R15. Variable: X = nombre d'événements dans un intervalle

Paramètre: λ = taux moyen d'occurrence

PMF:

$P(X = k) = (\hat{}k \times e\hat{}(-)) / k!$

Moments: - $E[X] = \lambda$ - $Var(X) = \lambda$

Exemple bancaire: Nombre de nouveaux clients par jour ($\lambda = 5$)

Q16. Décrivez la distribution normale.

R16. Variable: $X \in \mathbb{R}$ (continue)

Paramètres: μ (moyenne), σ (écart-type)

PDF:

```
f(x) = (1/ √2 ) × exp(-(x- )²/2 ²)
```

Propriétés: - Symétrique autour de μ - 68-95-99.7 règle - $Z = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$ (standardisation)

Q17. Comment calculer des probabilités avec la loi normale?

R17.

```python
from scipy.stats import norm

# P(X < 100) avec  =80,  =15
p = norm.cdf(100, loc=80, scale=15)

# P(X > 100)
p = 1 - norm.cdf(100, loc=80, scale=15)
# ou
p = norm.sf(100, loc=80, scale=15)

# P(70 < X < 90)
p = norm.cdf(90, 80, 15) - norm.cdf(70, 80, 15)

# Quantile (inverse): valeur pour P = 0.95
x = norm.ppf(0.95, loc=80, scale=15)
```

Q18. Qu'est-ce que la distribution log-normale?

R18. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors Y = e^X suit une **log-normale**.

Propriétés: - Valeurs strictement positives - Asymétrique à droite - Souvent utilisée pour les montants financiers

Moments: - $E[Y] = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ - $Var(Y) = [\exp(\sigma^2) - 1] \times \exp(2\mu + \sigma^2)$

Q19. Qu'est-ce que la covariance et comment l'interpréter?

R19. Définition:

```
Cov(X,Y) = E[(X -  )(Y -  )] = E[XY] - E[X]E[Y]
```

Interprétation: - Cov > 0: X et Y varient dans le même sens - Cov < 0: X et Y varient en sens opposé - Cov = 0: Pas de relation linéaire (mais pas forcément indépendants)

Q20. Quelle est la différence entre covariance nulle et indépendance?

R20. - **Indépendance → Covariance nulle:** Toujours vrai - **Covariance nulle → Indépendance:** Pas toujours vrai

Exemple: $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$ - Cov(X, Y) = 0 (pas de relation linéaire) - Mais X et Y sont dépendants (Y déterminé par X)

Conclusion: La covariance mesure seulement la relation LINÉAIRE.

Q21. Qu'est-ce que la loi des grands nombres?

R21. Énoncé: Quand n → ∞, la moyenne empirique converge vers l'espérance.

```
x̄ → E[X] quand n → ∞
```

Implication bancaire: Le taux de défaut observé sur un grand portefeuille converge vers le vrai taux de défaut.

Q22. Calculez la probabilité que sur 1000 prêts avec taux de défaut 4%, il y ait plus de 50 défauts.

R22. Méthode exacte (binomiale):

```python
from scipy.stats import binom
p = 1 - binom.cdf(50, n=1000, p=0.04)
```

Approximation normale (n grand):

```
  = np = 1000 × 0.04 = 40
  = √(np(1-p)) = √(1000 × 0.04 × 0.96)   6.2

Z = (50.5 - 40) / 6.2   1.69  (avec correction de continuité)
P(X > 50) = 1 - Φ(1.69)   0.046 ou 4.6%
```

Q23. Qu'est-ce que la VaR (Value at Risk) en termes probabilistes?

R23. La **VaR** à α% est le quantile (1-α) des pertes.

Définition: P(Perte > VaR_α) = α

Exemple: VaR 95% = 1 million HTG signifie: - Il y a 5% de chances de perdre plus de 1M HTG - 95% du temps, les pertes seront < 1M HTG

```python
# Si pertes ~ N( ,  )
var_95 = norm.ppf(0.95, loc=mu_perte, scale=sigma_perte)
```

Q24. Comment utiliser la simulation Monte Carlo?

R24.

```python
import numpy as np

# Simulation de 10,000 portefeuilles
n_simulations = 10000
n_prets = 100
p_defaut = 0.05
perte_par_defaut = 50000

# Simuler le nombre de défauts
defauts = np.random.binomial(n_prets, p_defaut, n_simulations)

# Calculer les pertes
pertes = defauts * perte_par_defaut

# Statistiques
print(f"Perte moyenne: {pertes.mean():,.0f}")
```

```python
print(f"Écart-type: {pertes.std():,.0f}")
print(f"VaR 95%: {np.percentile(pertes, 95):,.0f}")
print(f"VaR 99%: {np.percentile(pertes, 99):,.0f}")
```

Q25. Expliquez le concept de probabilité de défaut (PD) dans le risque de crédit.

R25. PD (Probability of Default): Probabilité qu'un emprunteur fasse défaut sur une période donnée (généralement 1 an).

Estimation: 1. **Historique:** Taux de défaut observé sur le portefeuille 2. **Modèle:** Régression logistique sur les caractéristiques du client 3. **Rating:** Mapping rating → PD (ex: AAA → 0.01%, B → 5%)

Utilisation dans Expected Loss:

```
EL = PD × LGD × EAD
```

En Python:

```python
# Estimation PD avec logistique
from sklearn.linear_model import LogisticRegression

model = LogisticRegression()
model.fit(X_train, y_train)

# PD pour chaque client
pd_estimates = model.predict_proba(X_test)[:, 1]
```

Scoring

Score	Niveau
0-10	À améliorer
11-17	Intermédiaire
18-22	Avancé
23-25	Expert