# Lista 4 - EDO

*Prof. Everaldo de Mello Bonotto*

**Exercício 1)** Encontre a solução geral para a equação diferencial dada.

*a)* $4y'' + y' = 0$ *b)* $2y'' - 5y' = 0$ *c)* $y'' - 36y = 0$

*d)* $y'' + 9y = 0$ *e)* $y'' - y' - 6y = 0$ *f)* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$

*g)* $y'' - 4y' + 5y = 0$ *h)* $2y'' + 2y' + y = 0$ *i)* $my'' + \gamma y' + ky = 0$, $m > 0$, $\gamma > 0$ e $k > 0$.

*j)* $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$ *k)* $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$ *l)* $y^{(6)} - y'' = 0$

*m)* $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$ *n)* $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$ *o)* $y^{(6)} + y = 0$

**Exercício 2)** Resolva os PVIs:

*a)* $y'' + 16y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.

*b)* $y'' + 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

*c)* $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

*d)* $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 4$ $y'''(0) = 0$.

**Exercício 3)** Em cada uma das equações, determine os valores de $\alpha$, se existir algum, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to +\infty$. Determine, também, os valores de $\alpha$, se existir algum, para os quais as soluções (não-nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to +\infty$.

*a)* $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$.

*b)* $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$.

**Exercício 4)** Se as raízes da equação característica são reais, mostre que toda solução não nula de $ay'' + by' + cy = 0$ só pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

**Exercício 5)** Neste problema, esquematizamos uma dedução da fórmula de Euler, $e^{it} = cos(t) + isen(t)$.

*a)* Mostre que $y_1 = cos(t)$ e $y_2 = sen(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$.

*b)* Mostre que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$. Conclua que existe constantes $c_1$ e $c_2$ tais que
$$e^{it} = c_1 cos(t) + c_2 sen(t).$$

*c)* Mostre que $c_1 = 1$ e $c_2 = i$.

Use a fórmula de Euler para mostrar que $cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ e $sen(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

**Exercício 6)** Determine se o par de funções dadas é linearmente independente ou linearmente dependente:

*a)* $f(t) = t^2 + 5t$ e $g(t) = t^2 - 5t$, em $I = \mathbb{R}$.

*b)* $f(\theta) = cos(2\theta) - 2cos^2(\theta)$ e $g(\theta) = cos(2\theta) + 2sen^2(\theta)$, em $I = \mathbb{R}$.

*c)* $f(t) = 3t$ e $g(t) = |t|$, em $I = (-\infty, 0)$ e em $I = (-2, 2)$.

*d)* $f(t) = x^3$ e $g(x) = |x|^3$, em $I = (0, +\infty)$ e em $I = (-1, 2)$.

**Exercício 7)** O Wronskiano de duas funções é $W(t) = tsen^2(t)$, $t \in (-3\pi, 3\pi)$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?

**Exercício 8)** A função $y = sen(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com coeficientes constantes, em um intervalo contendo 0? Explique sua resposta.

**Exercício 9)** Se as funções $y_1$ e $y_2$ são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, prove que $y_3 = y_1 + y_2$ e $y_4 = y_1 - y_2$ também formam um conjunto linearmente independente de soluções. Vale a recíproca deste resultado?

**Exercício 10)** Encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial dada.

*a)* $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$.

*b)* $(cost)y'' + (sent)y' - ty = 0$.

*c)* $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$. (Equação de Bessel).

*d)* $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$

*e)* $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0$

*f)* $t^2y^{(4)} + ty''' + y'' - 4y = 0$

**Exercício 11)** Mostre que se $p : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $p(t) > 0$ para todo $t \in I$, então o wronskiano $W(t)$ de duas soluções de $(p(t)y')' + q(t)y = 0$ é $W(t) = \dfrac{c}{p(t)}$, onde $c$ é uma constante.

**Exercício 12)** Sejam $p$ e $q$ funções contínuas em um intervalo aberto $I$, e sejam $y_1$ e $y_2$ duas soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em $I$.

*a)* Prove que, se $y_1$ e $y_2$ se anulam no mesmo ponto em $I$, então elas não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

*b)* Prove que, se $y_1$ e $y_2$ atingem máximo ou mínimo em um mesmo ponto em $I$, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

**Exercício 13)** Mostre que $t$ e $t^2$ são linearmente independentes em $-1 < t < 1$. Mostre, também, que $W(t, t^2)$ é zero em $t = 0$. O que você pode concluir sobre a possibilidade de $t$ e $t^2$ serem soluções de uma equação diferencial da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$? Verifique que $t$ e $t^2$ são soluções da equação $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$. Isso contradiz sua conclusão? O comportamento do wronskiano de $t$ e $t^2$ contradiz o Teorema de Abel?

## Gabarito

**Exercício 1)** $a)$ $y_h(t) = c_1 + c_2e^{-t/4}$ $b)$ $y_h(t) = c_1 + c_2e^{5t/2}$ $c)$ $y_h(t) = c_1e^{-6t} + c_2e^{6t}$

$d)$ $y_h(t) = c_1cos(3t) + c_2sen(3t)$ $e)$ $y_h(t) = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t}$ $f)$ $y_h(t) = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}$

$g)$ $y_h(t) = c_1e^{2t}cos(t) + c_2e^{2t}sen(t)$ $h)$ $y_h(t) = c_1e^{-t/2}cos(t/2) + c_2e^{-t/2}sen(t/2)$

$i)$ Se $\gamma^2 = 4mk$, então $y_h(t) = c_1e^{\frac{-\gamma t}{2m}} + c_2te^{\frac{-\gamma t}{2m}}$.

Se $\gamma^2 > 4mk$, então $y_h(t) = c_1e^{\frac{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-4mk})t}{2m}} + c_2te^{\frac{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-4mk})t}{2m}}$.

Se $\gamma^2 < 4mk$, então $y_h(t) = c_1e^{\frac{-\gamma t}{2m}}cos\left(\frac{\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m}t\right) + c_2e^{\frac{-\gamma t}{2m}}sen\left(\frac{\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m}t\right)$

$j)$ $y_h(t) = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} + c_4te^{2t}$.

$k)$ $y_h(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4e^{-t} + c_5te^{-t} + c_6t^2e^{-t}$.

$l)$ $y_h(t) = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} + c_5cos(t) + c_6sen(t)$.

$m)$ $y_h(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{2t} + c_4cos(t) + c_5sen(t)$.

$n)$ $y_h(t) = e^t[(c_1 + c_2t)cost + (c_3 + c_4t)sent] + e^{-t}[(c_5 + c_6t)cost + (c_7 + c_8t)sent]$.

$o)$ $y_h(t) = c_1cost + c_2sent + e^{\frac{\sqrt{3}t}{2}}(c_3cos(\frac{t}{2}) + c_4sen(\frac{t}{2})) + e^{-\frac{\sqrt{3}t}{2}}(c_5cos(\frac{t}{2}) + c_6sen(\frac{t}{2}))$.

**Exercício 2)** $a)$ $y_h(t) = 2cos(4t) - \dfrac{1}{2}sen(4t)$

$b)$ $y_h(t) = -\dfrac{3}{4}e^{-5t} + \dfrac{3}{4}e^{-t}$

$c)$ $y_h(t) = e^{2(t-1)} - e^{t-1}$

$d)$ $y_h(t) = -2 - 5t + 3e^{2t} - 2te^{2t}$

**Exercício 3)** $a)$ $y \to 0$ para $\alpha < 0$ e as soluções não-nulas tornam-se ilimitadas para $\alpha > 1$.

$b)$ $y \to 0$ para $\alpha < 1$ e as soluções não-nulas tornam-se ilimitadas para $\alpha > 1$.

**Exercício 6)** $a)$ L.I. $b)$ L.D.

$c)$ L.I. quando a origem está no interior do intervalo e L.D caso contrário.

$d)$ L.I. quando a origem está no interior do intervalo e L.D caso contrário.

**Exercício 7)** L.I.

**Exercício 8)** Não.

**Exercício 9)** Note que $W(y_3, y_4) = -2W(y_1, y_2)$. A recíproca é verdadeira.

**Exercício 10)** $a)$ $ct^2e^t$ $b)$ $ccos(t)$ $c)$ $\dfrac{c}{x}$ $d)$ $W = ce^{-2t}$ $e)$ $W = \frac{c}{t^2}$ $f)$ $W = \frac{c}{t}$ ($c$ é uma constante).

**Exercício 11)** Use o Teorema de Abel.