Lista 2 - EDO

Prof. Everaldo de Mello Bonotto

Exercício 1) Resolva as equações diferenciais:

$a)$ $y' = y^2x^7$ $\qquad$ $b)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+2}{5y}$ $\qquad$ $c)$ $y' = 5t(3y^2+7)$

$d)$ $d)$ $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2$ $\qquad$ $e)$ $y' = \dfrac{1}{(t^2+1)sec^2(y)}$ $\qquad$ $f)$ $\dfrac{dz}{d\theta} = sen(z)sec^3(\theta)$

Exercício 2) Resolva os PVI's:

$a)$ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{e^t}{y}, \qquad y(0) = 1.$ $\qquad$ $b)$ $y' = \dfrac{x^2y - y}{y+1}, \qquad y(3) = 2.$

$c)$ $\sqrt{1-t^2}\,\dfrac{dy}{dt} = sec(3y), \qquad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \pi.$ $\qquad$ $d)$ $y' = \dfrac{\arctan(t)}{sec^2 y}, \qquad y(0) = \dfrac{\pi}{3}.$

Exercício 3) Encontre a solução geral de cada uma das equações abaixo:

$a)$ $y' + y = cost + sent$ $\qquad$ $b)$ $(cost)y' + (sent)y = cost + sent, \qquad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}.$

$c)$ $ty' + y = (t-1)e^t, \quad t > 0$ $\qquad$ $d)$ $z' + 2tz = 4te^{-t^2}.$

Exercício 4) Resolva os PVIs:

$a)$ $\begin{cases} ty' - 2y - \ln t = 0 \quad (t>0) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{cases} (1+t^2)y' + 2ty = 6t^2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} (sent)y' + (cost)y = cos(2t) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 3 \end{cases} \qquad (0 < t < \pi)$ $\qquad$ $d)$ $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{t-2}y = 3t \quad (t<2) \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Exercício 5) Resolva as equações não lineares.

$a)$ $t^2y' + 2ty - y^3 = 0 \quad t > 0$ $\qquad$ $b)$ $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, onde $\epsilon > 0$ e $\sigma > 0$.

$c)$ $y' - ty^2 + (2t-1)y = t - 1, \quad y_1(t) = 1$ $\qquad$ $d)$ $y' + ty^2 - 2t^2y + t^3 = t + 1, \quad y_1(t) = t - 1.$

Exercício 6) Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3sent, \quad y(0) = y_0$$

permaneça limitada quando $t \to +\infty$.

Exercício 7) Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é qualquer número real, então toda solução da equação $y' + ay = be^{-\lambda t}$ tem a propriedade: $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Exercício 8) $a)$ Mostre que a equação diferencial $z'(t) = F\left(\dfrac{z}{t}\right)$ pode ser transformada em uma equação separável usando a mudança $x = \dfrac{z}{t}$.

$b)$ Resolvas as equações: $b1)$ $z' = \dfrac{z^2 - 5xz}{x^2}$ $\qquad$ $b2)$ $z' = \dfrac{x^2 + xz}{z^2 + xz}$

Gabarito

Exercício 1) *a)* $y(x) = 0$ e $y(x) = -\dfrac{8}{x^8 + 8k}$, k constante.

b) $y(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3}{15} + \dfrac{4x}{5} + \dfrac{2k}{5}}$ ou $y(x) = -\sqrt{\dfrac{2x^3}{15} + \dfrac{4x}{5} + \dfrac{2k}{5}}$, k constante.

c) $y(t) = \dfrac{\sqrt{21}}{3} tg\left(\sqrt{21}\left(\dfrac{5t^2}{2} + k\right)\right)$, k constante. *d)* $x(t) = 1 + tg(t+k)$, k constante.

e) $y(t) = arctg(arctg(t) + k)$, k constante.

f) As soluções constantes são $z(\theta) = q\pi$, $q \in \mathbb{Z}$. As soluções não constantes satisfazem implicitamente a equação $\ln|cotg(z) - cossec(z)| = \dfrac{1}{2} sec(\theta) tag(\theta) + \dfrac{1}{2}\ln|sec(\theta) + tag(\theta)| + k$, k constante.

Exercício 2) *a)* $y(t) = \sqrt{2e^t - 1}$.

b) A solução é dada implicitamente pela equação $\dfrac{x^3}{3} - x - y - \ln|y| - 4 + \ln(2) = 0$.

c) $y(t) = \dfrac{1}{3}\arcsin\left(3\arcsin(t) - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

d) $y(t) = arctg\left(t arctg(t) - \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + \sqrt{3}\right)$.

Exercício 3) *a)* $y(t) = sen(t) + ke^{-t}$, k constante.

b) $y(t) = cos(t)\ln(sec(t) + tg(t)) + 1 + k cos(t)$, k constante.

c) $y(t) = e^t\left(1 - \dfrac{2}{t}\right) + \dfrac{k}{t}$, k constante.

d) $z(t) = 2t^2 e^{-t^2} + ke^{-t^2}$, k constante.

Exercício 4) *a)* $y(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(t) - \dfrac{1}{4}$ *b)* $y(t) = \dfrac{2t^3 + 5}{1 + t^2}$ *c)* $y(t) = cos(t) + \dfrac{3}{sen(t)}$

d) $y(t) = \dfrac{t^3 - 3t^2 - 6}{t - 2}$.

Exercício 5) *a)* $|y(t)| = \dfrac{1}{kt^4 + \frac{2}{5t}}$, k constante. *b)* $|y(t)| = \dfrac{1}{\sqrt{-ke^{-2\epsilon t} + \frac{\sigma}{\epsilon}}}$, k constante.

c) $y(t) = 1 + \dfrac{1}{ke^{-t} + 1 - t}$, k constante. *d)* $y(t) = t - 1 + \dfrac{1}{ke^{-t^2} + \frac{1}{2}}$, k constante.

Exercício 6) $-\dfrac{5}{2}$.

Exercício 7) Separe os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$.

Exercício 8) *b1)* $z(x) = 0$, $z(x) = 6x$ e $z(x) = \dfrac{6x}{1 - kx^6}$, $k \neq 0$ constante.

b2) $z^2 = x^2 + k$, k constante.