Lista 5 - EDO

Prof. Everaldo de Mello Bonotto

Exercício 1) Resolva cada equação diferencial pelo método dos coeficientes indeterminados.

a) $y'' - 2y' + y = t^2 - 1$ *b)* $y'' - 2y' + y = 3e^{2t}$ *c)* $y'' - 2y' + y = 4cos(t)$

d) $y'' - 2y' + y = te^t$ *e)* $y'' - 6y' + 25y = 2sen\left(\frac{t}{2}\right) - cos\left(\frac{t}{2}\right)$

f) $y'' + y' + y = -\frac{1}{6}e^{5t}cos(3t)$ *g)* $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$ *h)* $y^{(4)} - y = 3t + cos(t)$

i) $y^{(6)} + y''' = t$ *j)* $y^{(4)} + y''' = sen(2t)$

k) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3t + 4$, $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = y'''(0) = 1$

l) $y^{(4)} + y''' = sen(2t)$, $y(0) = y'(0) = 0$ e $y''(0) = y'''(0) = 1$

Exercício 2) Use o método da variação dos parâmetros para obter a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^5}$ *b)* $y'' + 4y = 4sec^2(2t)$ *c)* $y'' - 4y' + 3y = \frac{e^t}{1+e^t}$

d) $y'' + 4y = sen^2(2t)$ *e)* $y''' + y' = tg(t)$, $0 < t < \pi$ *f)* $y''' - y' = t.$

g) $y''' + y' = sec(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2.$

h) $y^{(4)} + 2y'' + y = sen(t)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 1.$

Exercício 3) Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial

$$y^{(4)} - y = g(t),$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

Exercício 4) Resolva a equação diferencial

$$y'' + 7y = \sum_{k=3}^{n} e^{3kt}.$$

Exercício 5) Uma massa de $900g$ estica uma mola em $15cm$. Se a massa for deslocada para baixo $7,5cm$ adicionais e depois for solta, determine a posição da massa em qualquer instante t e o período do movimento.

Exercício 6) Suponha que uma massa de $4,5kg$ estica uma mola em $5cm$. Se a massa for deslocada $5cm$ a mais e depois colocada em movimento com velocidade inicial de $30cm/s$, determine a posição da massa em qualquer instante t, o período e a frequência do movimento.

Exercício 7) Uma massa de de $2kg$ estica uma mola de $4cm$. A massa está presa a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento de $2kg.s/cm$. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade para baixo de 3 cm/s, encontre sua posição $x(t)$ e determine quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio.

Exercício 8) Um certo sistema em vibração satisfaz a equação $x'' + \beta x' + x = 0$. Encontre o valor do coeficiente de amortecimento β para o qual o quase período do movimento amortecido é 50% maior do que o período do movimento sem amortecimento correspondente.

Exercício 9) Um circuito em série tem um capacitor de $0,25 \times 10^{-6}$ farad e um indutor de 1 henry. Se a carga inicial no capacitor é de 10^{-6} coulomb e não há corrente inicial, encontre a carga $Q(t)$ no capacitor no instante t.

Exercício 10) Um circuito em série tem um gerador $E(t) = 500$ volts, um capacitor de $\frac{1}{108} \times 10^{-3}$ farad, um resistor de 300 ohms e um indutor de $0,2$ henry. Se a carga inicial no capacitor é de $\frac{217}{216}$ coulomb e não há corrente inicial, encontre a carga $Q(t)$ no capacitor e a corrente no circuito $I(t)$ no instante t.

Gabarito

Exercício 1) *a)* $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + t^2 + 4t + 5$, c_1, c_2 constantes.

b) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + 3e^{2t}$, c_1, c_2 constantes.

c) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t - 2sen(t)$, c_1, c_2 constantes.

d) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + \dfrac{1}{6}t^3e^t$, c_1, c_2 constantes.

e) $y(t) = c_1e^{3t}cos(4t) + c_2e^{3t}sen(4t) + \dfrac{56}{663}sen\left(\dfrac{t}{2}\right) - \dfrac{20}{663}cos\left(\dfrac{t}{2}\right)$, c_1, c_2 constantes.

f) $y(t) = c_1e^{-1/2}cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2e^{-1/2}sen\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{1}{267}e^{5t}cos(3t) - \dfrac{1}{178}e^{5t}sen(3t)$, c_1, c_2 constantes.

g) $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{-t} + 3$.

h) $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3cos(t) + c_4sen(t) - 3t - \dfrac{1}{4}tsen(t)$.

i) $y(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + e^{t/2}\left[c_5cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_6sen\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + \dfrac{1}{24}t^4$.

j) $y(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + \frac{1}{20}sen(2t) + \frac{1}{40}cos(2t)$.

k) $y(t) = (t-4)cost - (\frac{3}{2}t + 4)sent + 3t + 4$.

l) $y(t) = \frac{55}{40} - \frac{15}{10}t + \frac{25}{20}t^2 - \frac{7}{5}e^{-t} + \frac{sen(2t)}{20} + \frac{cos(2t)}{40}$.

Exercício 2) *a)* $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + \dfrac{1}{12}t^{-3}e^t$, c_1, c_2 constantes.

b) $y(t) = c_1cos(2t) + c_2sen(2t) - 1 + (sen2t)\ln|sec(2t) + tag(2t)|$, c_1, c_2 constantes.

c) $y(t) = \left(c_1 - \dfrac{1}{4}\right)e^t + \left(c_2 + \dfrac{3}{4}\right)e^{3t} + \dfrac{e^t}{2}\ln(1+e^{-t}) - \dfrac{e^{3t}}{2}\ln(1+e^{-t}) + \dfrac{e^{2t}}{2}$, c_1, c_2 constantes.

d) $y(t) = c_1cos(2t) + c_2sen(2t) + \dfrac{1}{6}cos^2(2t) + \dfrac{1}{12}sen^2(2t)$, c_1, c_2 constantes.

e) $y(t) = c_1 + c_2cost + c_3sent - \ln(cost) - (sent)\ln(sect + tgt)$.

f) $y(t) = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$.

g) $y(t) = 2cos(t) + sen(t) + \ln(sec(t) + tag(t)) - tcos(t) + (sent)\ln(cost)$.

h) $y(t) = 2cos(t) + \dfrac{7}{8}sen(t) - \dfrac{7}{8}tcos(t) + \dfrac{1}{2}tsen(t) - \dfrac{1}{8}t^2sen(t)$.

Exercício 3)

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3cos(t) + c_4sen(t) +$$
$$+\frac{e^t}{4}\int e^{-t}g(t)dt - \frac{e^{-t}}{4}\int e^t g(t)dt + \frac{cos(t)}{2}\int sen(t)g(t)dt - \frac{sen(t)}{2}\int cos(t)g(t)dt.$$

Exercício 4) $y(t) = c_1cos(\sqrt{7}t) + c_2sen(\sqrt{7}t) + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{e^{3kt}}{9k^2+7}$.

Exercício 5) $x(t) = 7,5cos\left(10\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)$ (em cm) e $T = \frac{\pi\sqrt{6}}{10}s$.

Exercício 6) $x(t) = 5cos(10\sqrt{2}t) + \frac{3\sqrt{2}}{2}sen(10\sqrt{2}t)$ (em cm), $T = \frac{\pi}{5\sqrt{2}}s$ e $f = \frac{5\sqrt{2}}{\pi}Hz$.

Exercício 7) $x(t) = \frac{6}{\sqrt{999}}e^{-\frac{t}{2}}sen\left(\frac{\sqrt{999}}{2}t\right)$ (em cm). A massa retorna novamente no equilíbrio em $t = \frac{2\pi}{\sqrt{999}}s$.

Exercício 8) $\beta = \sqrt{\frac{20}{9}}$.

Exercício 9) $Q(t) = 10^{-6}cos(2000t)$ coulomb.

Exercício 10) $Q(t) = 3e^{-600t} - 2e^{-900t} + \dfrac{1}{216}$ e $I(t) = -1800e^{-600t} + 1800e^{-900t}$.