Worksheet 4

1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2 \\ R_4 \to R_4 - \frac{1}{3}R_2}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4/3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - \frac{R_3}{4}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

So,

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}}$$

So, the elementary row operations are

$e_1 : R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1$

$e_3 : R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_1$

$e_4 : R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2$

$e_5 : R_4 \to R_4 - \frac{1}{3}R_2$

$e_6 : R_4 \to R_4 - \frac{R_3}{4}$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1$

$f_3 : R_4 \to R_4 + \frac{1}{2}R_1$

$f_4 : R_3 \to R_3 + \frac{1}{3}R_2$

$f_5 : R_4 \to R_4 + \frac{1}{3}R_2$

$f_6 : R_4 \to R_4 + \frac{1}{4}R_3$

So, $L = (f_1 \cdots f_6)\, I$

Now

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + \frac{1}{4} R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + \frac{1}{3} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{3} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + \frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{1}{2} R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2} R_1} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}} = L$$

So,
$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

So, $A = LU$

(2) Now for $Ax = b$ where $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

first we solve $L\bar{y} = \bar{b}$

Forward substitution give

$$y_1 = 1$$

$$\frac{1}{2} y_1 + y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{3} y_2 + y_3 = -1 \Rightarrow y_3 = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

$$\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{3} y_2 + \frac{1}{4} y_3 + y_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 5/4$$

So, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3/2 \\ -1 \\ 5/4 \end{bmatrix}$

For this $\bar{y}$, we solve $U\bar{x} = \bar{y}$

By backward Substitution

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= -\tfrac{3}{2} \\ \tfrac{4}{3}x_3 + \tfrac{1}{3}x_4 &= -1 \\ \tfrac{5}{4}x_4 &= 5/4 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{5}{4}x_4 = \frac{5}{4} \Rightarrow x_4 = 1$

Then $\frac{4}{3}x_3 = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_3 = -1$

Then $\frac{3}{2}x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x_2 = -1$

Now $2x_1 = 1 - (-1) - (-1) - 1$
$= 1 + 1 + 1 - 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

So, the solution is $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to R_4 - 3R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

The elementary row operations are:

$e_1 : R_2 \to R_2 - R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_1$

$e_3 : R_4 \to R_4 - R_1$

$e_4 : R_3 \to R_3 - 2R_2$

$e_5 : R_4 \to R_4 - 3R_2$

$e_6 : R_4 \to R_4 - 3R_3$

The inverse operations are:

$f_1 : R_2 \to R_2 + R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_1$

$f_3 : R_4 \to R_4 + R_1$

$f_4 : R_3 \to R_3 + 2R_2$

$f_5 : R_4 \to R_4 + 3R_2$

$f_6 : R_4 \to R_4 + 3R_3$

Now to obtain L, we have to compute

$$L = (f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6)\, I$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L$$

So,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

So, (check). $A = LU$

Now $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

So, first we solve $L\bar{y} = \bar{b}$

$y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$

$y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -y_1 = -1$

$y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -y_1 - 2y_2 = -1 + 2 = 1$

$y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = -y_1 - 3y_2 - 3y_3$
$= -1 + 3 - 3 = -1$

So, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Now $U\bar{x} = \bar{y}$

$\Rightarrow$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$
$= 1 + 6 - 4 + 1 = 4$

$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1 \Rightarrow x_2 = -1 - 2x_3 - 3x_4$
$= -1 - 8 + 3 = -6$

$x_3 + 3x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 3x_4$
$= 1 + 3 = 4$

$x_4 = -1$

So, the solution is $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

3

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix} = U$$

The operation are

$e_1 : R_2 \to R_2 - R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_1$

$e_3 : R_4 \to R_4 - R_1$

$e_4 : R_3 \to R_3 - R_2$

$e_5 : R_4 \to R_4 - R_2$

$e_6 : R_4 \to R_4 - R_3$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_1$

$f_3 : R_4 \to R_4 + R_1$

$f_4 : R_3 \to R_3 + R_2$

$f_5 : R_4 \to R_4 + R_2$

$f_6 : R_4 \to R_4 + R_3$

So, $L = f_1 f_2 \cdots f_6 I$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_1} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix} = L$$

So,
$$\boxed{\begin{bmatrix} a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c \end{bmatrix}}$$

For four pivots we need $a \neq 0$, $b-a \neq 0$, $c-b \neq 0$, $d-c \neq 0$

i.e. $\boxed{a \neq 0,\ b \neq a,\ c \neq b \text{ and } d \neq c}$

(4) $A = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & b-r & c-r & t-r \\ 0 & b-r & c-r & d-r \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 - R_2}]{} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & c-s & d-s \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ 0 & b-r & s-r & s-r \\ 0 & 0 & c-s & t-s \\ 0 & 0 & 0 & d-t \end{bmatrix} = U$

The operations are

$e_1 : R_2 \to R_2 - R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_1$

$e_3 : R_4 \to R_4 - R_1$

$e_4 : R_3 \to R_3 - R_2$

$e_5 : R_4 \to R_4 - R_2$

$e_6 : R_4 \to R_4 - R_3$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_1$

$f_3 : R_4 \to R_4 + R_1$

$f_4 : R_3 \to R_3 + R_2$

$f_5 : R_4 \to R_4 + R_2$

$f_6 : R_4 \to R_4 + R_3$

Now $L = (f_1 \cdots f_6) I$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 + R_3]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_4 \to R_4 + R_2$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&1\end{bmatrix} \xleftarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_4 \to R_4 + R_1$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_2 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} = L$$

So, $$\boxed{\begin{bmatrix}a&r&r&r\\a&b&s&s\\a&b&c&t\\a&b&c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}a&r&r&r\\0&b-r&s-r&s-r\\0&0&c-s&t-s\\0&0&0&d-t\end{bmatrix}}$$

For four pivots, we need $a \neq 0$, $b-r \neq 0$, $c-s \neq 0$, $d-t \neq 0$

i.e. $\boxed{a \neq 0,\ b \neq r,\ c \neq s \text{ and } d \neq t}$

5

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Now $Lc = b \Rightarrow$

$$c_1 = 4 \Rightarrow c_1 = 4$$

$$c_1 + c_2 = 5 \Rightarrow c_2 = 5 - c_1 = 5 - 4 = 1$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 6 \Rightarrow c_3 = 6 - c_1 - c_2 = 6 - 4 - 1 = 1$$

So, $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Then $Ux = c \Rightarrow$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - x_2 - x_3 = 4 - 0 - 1 = 3$$

$$x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_3 = 1 - 1 = 0$$

$$x_3 = 1$$

So, $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\downarrow R_3 \to R_3 - R_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

The Row operations are

$e_1 : R_2 \to R_2 - R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_2$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_2$

So, $L = (f_1 \, f_2) I$

Now $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\downarrow R_2 \to R_2 + R_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L$

So, ~~Ab~~

$$\boxed{\underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}}$$

6 (b) $A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}$

$A \Rightarrow \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}$

$\downarrow R_3 \to R_3 - R_2$

$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = U$

The row operation are

$e_1 : R_2 \to R_2 - R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_2$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_2$

So, $L = (f_1 f_2) I$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = L$

So, $\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}}_{A}}$

7

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

The row operations are

$e_1 : R_2 \to R_2 - 2R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 + R_2$

$e_3 : R_4 \to R_4 - R_3$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + 2R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 - R_2$

$f_3 : R_4 \to R_4 + R_3$

So, $L = (f_1 f_2 f_3) I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

So,

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U}}$$

8 (a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 14 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$

The row operation are

$e_1 : R_2 \to R_2 - 2R_1$

$e_2 : R_3 \to R_3 - R_1$

$e_3 : R_3 \to R_3 + R_2$

The inverse operations are

$f_1 : R_2 \to R_2 + 2R_1$

$f_2 : R_3 \to R_3 + R_1$

$f_3 : R_3 \to R_3 - R_2$

So, $L = (f_1 f_2 f_3) I$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

So, $\boxed{A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 14 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{U}}$

(b) First we solve

$L\bar{y} = \bar{b}$ where $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

So,
$$y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0$$
$$2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1$$
$$y_1 - y_2 + y_3 = -1 \Rightarrow y_3 = -1 - y_1 + y_2$$
$$= -1 + 1 = 0$$

So, $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Now $U\bar{x} = \bar{y}$

$$\Rightarrow 7x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 7x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{14}$$
$$2x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 2x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$
$$4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

So, $\boxed{x = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}}$

9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 + 2R_1$
$R_3 \to R_3 - R_1$
$R_4 \to R_4 + 3R_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + 3R_2$
$R_4 \to R_4 - 4R_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - 2R_3$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U}$$

Row operations	Inverse Operations
$e_1 : R_2 \to R_2 + 2R_1$	$f_1 : R_2 \to R_2 - 2R_1$
$e_2 : R_3 \to R_3 - R_1$	$f_2 : R_3 \to R_3 + R_1$
$e_3 : R_4 \to R_4 + 3R_1$	$f_3 : R_4 \to R_4 - 3R_1$
$e_4 : R_3 \to R_3 + 3R_2$	$f_4 : R_3 \to R_3 - 3R_2$
$e_5 : R_4 \to R_4 - 4R_2$	$f_5 : R_4 \to R_4 + 4R_2$
$e_6 : R_4 \to R_4 - 2R_3$	$f_6 : R_4 \to R_4 + 2R_3$

L will be a 4×4 matrix

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 4R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L}$$

So, $A = LU$ where L and U are given above.