Всего предлагается 10 задач. Для нескольких из них есть теория в канале. Сами задачи могут быть не упорядочены по сложности, хотя я старался приблизиться к такому варианту. Решение будет выложено в канале через некоторое время.

Желаю удачи!

1. [Турнир Колмогорова] Для вещественного x выполнено равенство

$$\frac{x-4}{x^2-5x+1}+\frac{2x-4}{2x^2-5x+1}+\frac{x-2}{x^2-3x+1}=\frac{3}{x}$$

Найти сумму возможных значений выражения

$$\frac{1}{x^2-5x+1}+\frac{1}{2x^2-5x+1}+\frac{1}{x^2-3x+1}$$

2. На плоскости нарисованы несколько окружностей, образующих связную фигуру. Докажите, что ее можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, при этом не проводя одну и ту же линию (или часть линии) два раза.

3. Пусть p, q, r — простые числа такие, что $p \mid q^r+1$. Докажите, что $2r \mid p-1$ или $p \mid q^2-1$.

4. Пусть $a, b, c, d > 0$ и $a+b+c+d=4$. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a}\geq\frac{8}{(a+c)(b+d)}$$

5. [ВСОШ, региональный этап] В алфавите $n>1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырех, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

6. [Турнир городов] На доске написана функция $\sin x+\cos x$. Разрешается написать на доске производную любой написанной ранее функции, а также сумму и произведение любых двух написанных ранее функций, так разрешается делать много раз. В конце на доске оказалась функция, равная для всех действительных x некоторой константе c. Чему может равняться c?

7. [Олимпиада СПБГУ] При каких n клетчатую доску $n\times n$ можно разбить по клеточкам на один квадрат 2×2 и некоторое количество полосок из пяти клеток так, что квадрат будет примыкать к стороне доски?

8. [ВСОШ, заключительный этап] Многочлен $P(x)$ таков, что $P(P(P(x)))$ и $P(P(x))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что многочлен $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

9. [ВСОШ, региональный этап] В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам. В каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

10. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и PC пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.