Wie funktioniert eigentlich ein Navi?

Im folgenden Text erfahren Sie, wie dies funktioniert. Bzw. welchen Beitrag, die Informatik dazu geleistet hat. Einerseits natürlich das Gerät als „Computer"; aber auf der anderen Seite auch einen „ausgefuchsten" Algorithmus, der diese komplexe Problemstellung in einfache Elemente zerlegt und somit erst lösbar macht. In diesem Fall wird auf die Grafentheorie aufgebaut:

Die Graphentheorie (seltener auch Grafentheorie) ist ein Teilgebiet der theoretischen Informatik. Betrachtungsgegenstand sind Graphen (Mengen von Knoten und Kanten), deren Eigenschaften und ihre Beziehungen zueinander (vgl. Ausführung bei Bäumen).

Es gibt viele Anwendungsbereiche, z.B. auch Lösungen zur Frage, wie steuere ich Flüsse (nicht nur Wasser sondern auch Verkehr oder Menschen in einem Flugzeug-Terminal) etc.. Selbst das „Haus des Nickolaus" lässt sich graphen-theoretisch analysieren (Bei Interesse einfach „Haus des Nickolaus Graphentheorie" *googlen*.

Exemplarisch soll einer der bekanntesten graphentheoretischen Algorithmen behandelt werden:

ARBEITSAUFTRAG:

1. Lesen Sie den Text sorgfältig durch, machen Sie sich an den vorgesehenen Stellen tatsächlich Gedanken und lesen Sie nicht gleich weiter.
2. Beantworten Sie die abschließende Frage, dieses Textausschnittes

1. Sag' mir wohin ...

Einführung

Routenplaner gehören heute schon fast zum Alltag: Viele Autos haben sie bereits eingebaut, wer keinen im Fahrzeug hat, lässt sich den günstigsten Weg zu seinem Ziel oft auf dem heimischen PC ermitteln und druckt ihn aus.

Versuchen wir es doch gleich: Nehmen Sie einen großen Straßenatlas und ermitteln Sie die günstigste Strecke von Stockheim nach Weilheim!

Zu viel Arbeit? Kein Atlas? Also gut – ich hatte in der Einleitung ja versprochen, dass alle notwendigen Materialien hier im Buch seien. Daher arbeiten wir erst einmal mit der folgenden kleinen Welt im MoodleKurs "Kartenausschnitt".

Die Karte zeigt Orte, zwei Autobahnen, größere und kleinere Landstraßen. Die roten und blauen Zahlen geben dabei immer die Länge der Straße an, wenn man sie mit dem Auto fährt. Man kann sehen, dass kleine Straßen meistens viel länger sind, als sie scheinen, weil die vielen Kurven und Berge nicht eingezeichnet sind.

Welches ist denn nun der günstigste Weg von Imstadt nach Oppenheim?

Erster Ansatz wäre, zur nächsten Autobahn zu fahren. Aber geht das am besten über Pappstadt oder die Auffahrt Budingen? Außerdem führt ja von Pappstadt aus auch eine direkte Landstraße zum Ziel. Die ist aber wohl gewunden und ziemlich lang. Oder doch lieber die gelbe Straße zum Flughafen und von dort die Autobahn nach Oppenheim nehmen?

Versuchen Sie, die Lösung selbst herauszufinden. Hinweis: Sie müssen 123 Kilometer zurücklegen.

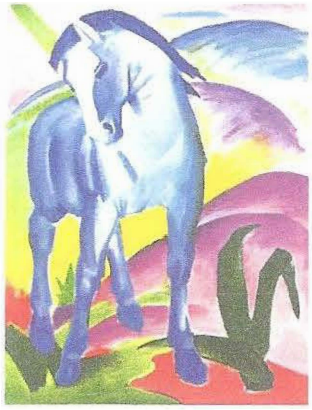
Geschafft? Gut! Dann lehnen Sie sich zurück und genießen Sie den Erfolg.

Wie sind Sie vorgegangen? Sie haben wahrscheinlich alle möglichen Wege durchprobiert und die Entfernung zum Ziel ermittelt. Dann haben Sie sich für den günstigsten Weg entschieden.

Dieses Verfahren gibt es auch bei Computern – es hat sogar einen Namen: die Brute-Force-Methode, also etwa „Brutale Macht". Warum? Weil auf diese Weise etwas größere Probleme nur mit extrem großer Rechenkraft gelöst werden können. Überlegen Sie einmal, wie viele verschiedene Wege Sie schon bei der kleinen

Problemgröße durchspielen mussten. Stellen Sie sich nun vor, wie das bei Karten mit 1000 und mehr Städten ist – hier wären normale Rechner gar nicht mehr zur Lösung fähig.

Außerdem besitzt ein Rechner keine Intelligenz: Während Sie beim Durchprobieren unbewusst alle absurden und unwahrscheinlichen Möglichkeiten verwerfen, muss er diese durchrechnen.



Auch **abstrakte Malerei** ist die Konzentration auf das Wesentliche. Der Künstler stellt die Aspekte in den Mittelpunkt, die ihn bewegen, zum Beispiel ein Gefühl oder ein Ereignis. Details wie die realistische Darstellung treten dadurch in den Hintergrund. Hier abgebildet ist das „blaue Pferd" von Franz Marc (1911).

Vorüberlegungen

Wie kommt ein Informatiker nun zu einer besseren Lösung?

Zunächst sollte man mit der *Methode der Abstraktion* arbeiten!

Methode der Abstraktion
In zur Verfügung stehender Information stecken sowohl relevante als auch unwesentliche Anteile. Durch Abstraktion reduzieren Sie die Information auf das für die aktuelle Problemlösung Wesentliche: Dadurch können Sie sich besser auf Ihre Aufgabe konzentrieren.

Man könnte auch sagen: Werfen Sie alles Überflüssige über Bord und konzentrieren Sie sich auf das Wesentliche. Was ist aber bei der gestellten Aufgabe wesentlich?

Alle gegebenen Informationen stecken in der Karte. Welche Typen von Informationen kann man erkennen? Erstellen Sie eine Liste, bevor Sie weiterlesen.

Die Informationen der Karte sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

	wichtig	nicht wichtig
Namen der Städte	☐	☐
Position der Städte	☐	☐
Größe der Städte	☐	☐
Verlauf der Straßen	☐	☐
Länge der Straßen	☐	☐
Namen und Nummern der Straßen	☐	☐
Straßentyp	☐	☐
Straße führt von ... nach ...	☐	☐
Landschaftliche Information	☐	☐

Überlegen Sie weiter, welche dieser Informationen wir benötigen, um den kürzesten Weg zwischen zwei Städten zu suchen. Markieren Sie für jede Information, ob diese Ihrer Meinung nach für die Aufgabenstellung wichtig oder nicht wichtig ist. Der kürzeste Weg soll sich hierbei auf die zu fahrende Strecke beziehen, nicht auf die gefahrene Zeit.

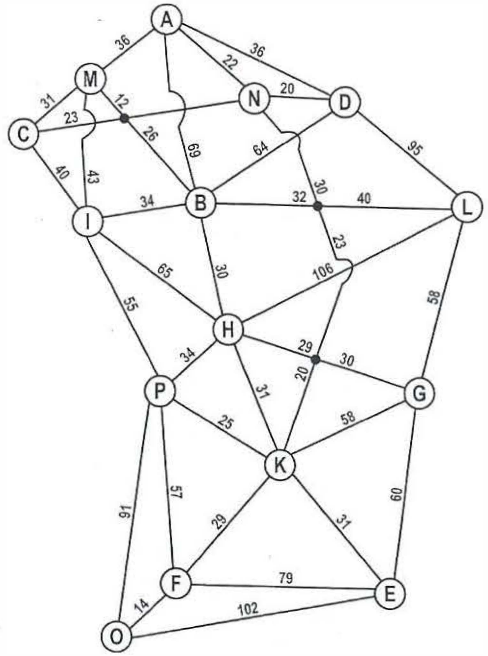
Mein Ergebnis ist folgendes:

Namen der Städte	WICHTIG! Wenn man nicht weiß, welche Stadt wie heißt, kann auch nicht der kürzeste Weg zwischen Imstadt und Oppenheim bestimmt werden
Position der Städte	NICHT WICHTIG! Es ist uns egal, wo sich die Städte genau befinden. Relevant sind nur die Straßen zwischen den Städten.
Größe der Städte	NICHT WICHTIG! Kommt in unserer Aufgabenstellung nirgendwo vor.
Verlauf der Straßen	NICHT WICHTIG! Es kommt nur auf die Strecke an, nicht auf den Verlauf.
Länge der Straßen	WICHTIG! Um die Reisestrecke zu bestimmen, brauchen wir die einzelnen Strecken zwischen den Orten.
Namen und Nummern der Straßen	NICHT WICHTIG! Zumindest zur Bestimmung der kürzesten Strecke irrelevant.
Straßentyp	NICHT WICHTIG! Da es nur auf die Entfernungen, nicht auf Zeit ankommt, ist egal, ob Autobahn oder Feldweg gefahren wird.
Straße führt von ... nach ...	WICHTIG! Wir benötigen die Information, von welcher Stadt zu welcher anderen eine Straße führt.
Landschaftliche Information	NICHT WICHTIG!

Nun kann die Karte neu gezeichnet werden und zwar so, dass möglichst alle unrelevanten und damit störenden Informationen fehlen. Versuchen Sie es einmal selbst, bevor Sie weiterlesen!

Aus Gründen der Übersichtlichkeit habe ich hier in Abbildung 1.2 die Städte auf ihren ersten Buchstaben reduziert. Das ist jedoch nicht unbedingt notwendig und wenn Ihre Lösung die ausgeschriebenen Namen enthält, können Sie auch damit weiterarbeiten.

Man sieht, dass es noch ein paar Spezialitäten gibt: An drei Stellen kreuzen sich zwei Straßen, ohne dass es Auf- oder Abfahrten von einer zur anderen gäbe (z. B. eine Autobahnbrücke über einer Landstraße). Dies ist mit einem Bogen dargestellt. Außerdem gibt es weitere drei Stellen, an denen sich zwei Straßen schneiden und es Auf- und Abfahrten gibt – gekennzeichnet mit einem Punkt.



Abstraktion begegnet uns ständig! Wegweiser, Straßenschilder, Fahrpläne, Infobroschüren und viele andere Dinge des Alltags sind so aufbereitet, dass die nötigen Informationen möglichst offen und gut erkennbar dargestellt sind.

Abbildung 1.2 Abstraktere Form der Landkarte

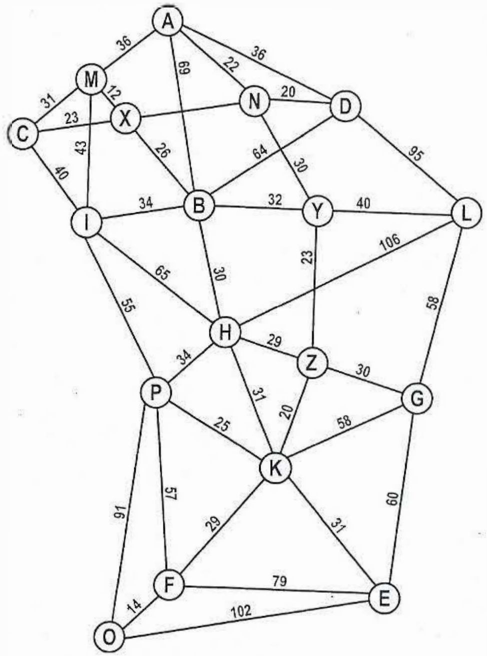
Informatiker sind jedoch prinzipiell faul und lieben es übersichtlich: Zu viele spezielle Fälle und Unterscheidungen machen das Denken schwierig. Wie bei Mathematikern, die einen Bruch erst einmal auf den gleichen Nenner bringen, wird hier auch versucht, ein Problem möglichst gleichförmig darzustellen.

Methode der Gleichformung
Versuchen Sie, die verschiedenen Facetten eines Problems auf die gleichen Grundelemente zurückzuführen. Dadurch wird einerseits das Problem übersichtlicher und andererseits benötigt man weniger Lösungsansätze: Für gleichförmige Teilprobleme kann der gleiche Lösungsansatz verwendet werden.

Können Sie die Karte auf diese Weise noch einfacher gestalten?

Überlegen Sie, welches die Eigenschaften der „normalen" Elemente sind und ob man die speziellen Elemente nicht auch als normale Elemente darstellen kann.

Auf der Karte sind Städte als Kreise eingezeichnet. Ohne dass dies speziell vermerkt ist, kann man offenbar bei Städten problemlos von einer Straße auf eine angrenzende Straße wechseln.



1.3 Landkarte mit ersetzten Knoten-

Genau das soll auch an den mit Punkt gekennzeichneten Stellen möglich sein. Also tun wir einfach so, als wenn sich dort Städte befinden. Um sie nicht mit den anderen Städten zu verwechseln, nennen wir sie (X), (Y) und (Z). Den fertigen Plan zeigt Abbildung 1.3.

An allen weiteren Kreuzungspunkten zwischen zwei Straßen ist jetzt kein Wechsel mehr möglich. Es ist daher auch keine Unterscheidung, also auch keine Kennzeichnung durch Bogen mehr notwendig.

Die Städte sind immer noch auf ihrer geographischen Position eingezeichnet. Dadurch ergeben sich an manchen Stellen Ballungszentren. Die Straßenführung wird unübersichtlich. Die geographische Position der Städte haben wir jedoch weiter vorne als unrelevant deklariert. Um es Ihnen so einfach wie möglich zu machen, habe ich die Karte in Abbildung 1.4 etwas entzerrt.

Leonhard Euler (* 1707 † 1783) nach einem Pastell von Emanuel Handmann 1753: Euler hat schon 1736 als Erster Wegeprobleme durch abstrakte Darstellung vereinfacht, als er das Königsberger Brückenproblem löste: „Gibt es einen Rundweg, der alle sieben Brücken über den Fluss Pregel genau einmal überquert und wieder zum Ausgangspunkt führt?" Euler bewies, dass es keinen solchen Weg geben kann.

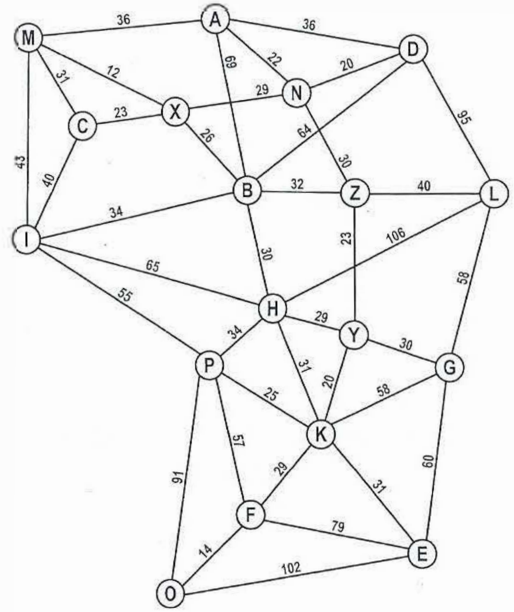


Abbildung 1.4 Entzerrte Landkarte

Bitte überprüfen Sie, dass die Inhalte immer noch übereinstimmen, also die Verbindungen zwischen den Städten gleich sind und die gleiche Längenangabe aufweisen. Lediglich die *Darstellung* hat sich geändert.

Sie können auch überprüfen, dass es sich noch um die gleiche Karte handelt wie am Anfang des Kapitels – lediglich mit weniger Detailinformationen.

Mit dieser Karte werden wir im Folgenden weiter arbeiten, daher ist sie als Kopiervorlage am Ende des Buches nochmals besonders groß abgedruckt.

Dijkstra und die Ameisen

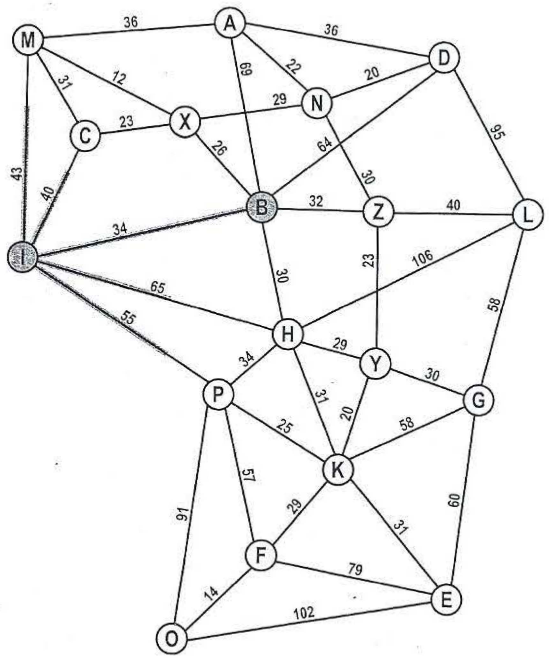
Wie kommen wir denn aber nun zum kürzesten Weg von Imstadt nach Oppenheim?

Der direkte Ansatz, immer ganze Wege zu betrachten, ist ja bereits aufgrund des hohen Aufwands gescheitert. Versuchen wir etwas anderes – vielleicht können wir ja hier von der Natur lernen:

Ein Stamm Ameisen hat auf der Suche nach Futter ein ähnliches Problem: Eine Kundschafterin findet ein großes Stück Fleisch. Welchen Weg sollen die Arbeiterinnen nehmen, um die Beute am schnellsten zu sichern?

Setzen wir also den Stamm Ameisen auf unseren Ausgangspunkt Imstadt bzw. (I). Fünf Wege führen von dort weg, also teilen sich unzählige Ameisen auf, um diese zu erkunden. Wir nehmen jetzt einmal an, dass alle Ameisen gleich schnell sind, zum Beispiel 1 km pro Minute (okay, für unser Problem setzen wir offenbar Turbo-Ameisen ein...).

In der Landkarte verfolgen wir den Weg der Ameisen. Abbildung 1.5 zeigt in Rot ihren Fortschritt nach 34 Minuten.



g 1.5 Die Ameisen
Veg von Imstadt aus

Die Ameisen haben (B) erreicht. Auf den anderen Strecken sind sie noch auf dem Weg. Bitte lassen Sie sich nicht davon täuschen, dass die Strecke mit 34 km am längsten aussieht: Wir verwenden ja explizit keinen maßstabsgetreuen Plan!

Was haben wir dadurch bisher von den Ameisen gelernt?

Genau! Um von (I) nach (B) zu kommen, gibt es garantiert keinen günstigeren Weg als den mit 34 km. Die Ameisen haben ja sämtliche bisher für sie möglichen Wege ausprobiert und sind nach 34 km zuerst bei (B) angekommen.

Wie geht es jetzt weiter? Die Ameisen, die bisher nirgendwo angekommen sind, setzen ihren Weg einfach fort. die Ameisen bei B teilen sich erneut auf: Wieder sind fünf Wege möglich. Den bisherigen Erfolg dokumentieren sie, indem sie die bisher zurückgelegte Strecke bei (B) vermerken. Abbildung 1.6 zeigt den Plan der Ameisen.

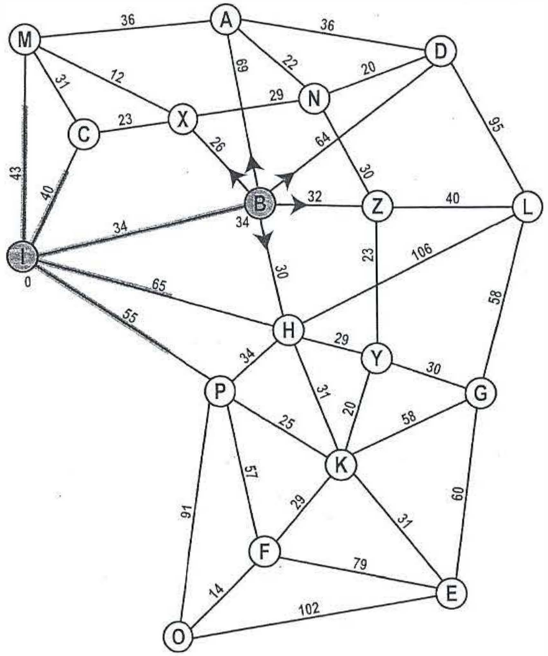
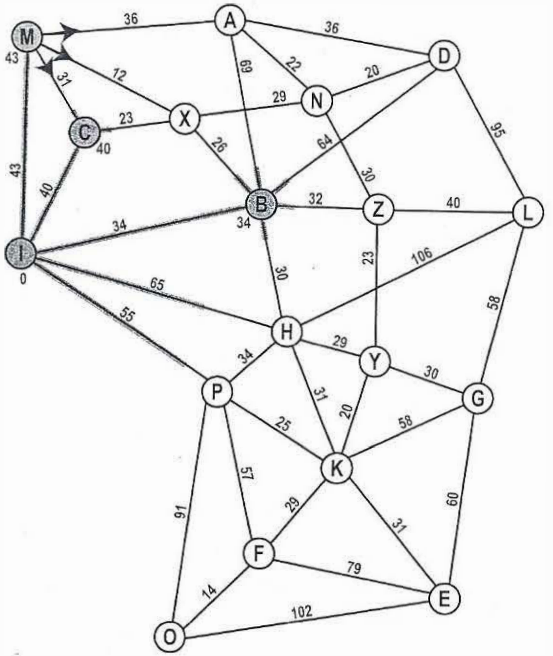


Abbildung 1.6 Die Ameisen bewegen sich von (B) in alle Richtungen

Nach insgesamt 40 Minuten kommt der nächste Ameisentrupp bei (C) an. Die Insekten sehen, dass sie die Ersten sind, markieren die Strecke, verzeichnen die Anzahl der bisher gelaufenen Kilometer und teilen sich auf die zwei bei (C) weitergehenden Wege auf.

In der 43. Minute kommt dann auch der Trupp bei (M) als Erster an. Auch dieser Weg wird vermerkt (siehe Abbildung 1.7). Von hier aus sind drei weitere Strecken zu erkunden.



g 1.7 Drei weitere
rden von (M) aus

Soweit verlief alles nach dem gleichen Schema. Die kürzesten Strecken zu den Städten (B), (C) und (M) stehen nun fest.

Vielleicht haben Sie bemerkt, dass nun Ameisentrupps sowohl von (M) als auch von (C) ausgehend unterwegs sind – zwischen beiden Städten auf Kollisionskurs. Was passiert jetzt, wenn sie sich irgendwo auf der Strecke dazwischen begegnen? Welche Informationen können sie austauschen? Bringt ihnen das etwas für ihr Ziel, das Gelände zu erkunden?

Genau! Der Trupp von (C) weiß, dass dieses Ziel bereits erreicht ist, die kürzeste Strecke dorthin also feststeht. Der Trupp, der von (M) kommt, kann das Gleiche von seinem Ausgangspunkt berichten. Es ist also sinnlos, weiterzumarschieren. Die Strecke wird als „unbrauchbar" markiert, die Ameisen können wieder zu ihrem Stamm zurück, sie sind sozusagen aus dem Rennen. Abbildung 1.8 zeigt das gleich mit einem dicken roten Kreuz.

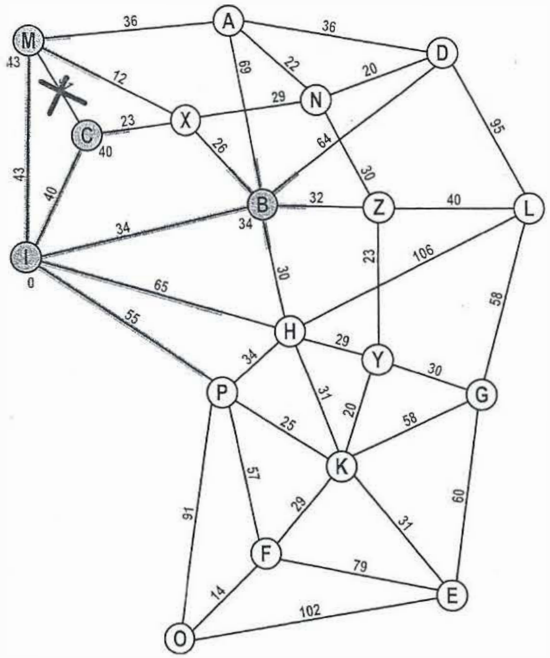
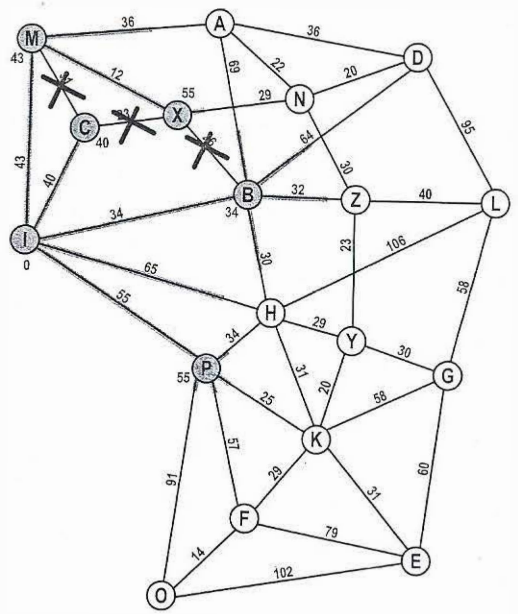


Abbildung 1.8 Der Weg zwischen (C) und (M) wird als unbrauchbar markiert

Als Nächstes kommen zwei Erkundungstrupps gleichzeitig an: In der 55. Minute erreichen die Ameisen (P) und (X). (P) erreichen sie auf direktem Wege von (I) aus. Bei (X) kommt der Trupp an, der von (M) unterwegs ist (43 km bis (M) plus 12 bis (X)).

Wieder teilen sich die Ameisen auf. Von (X) gibt es nur noch einen erfolgversprechenden Weg, bei den anderen treffen sie recht schnell auf Kameraden und geben die Strecke auf. Die von (P) ausgehenden Touren sind alle noch offen. Abbildung 1.9 zeigt den aktuellen Stand.



ıg 1.9 Weiterer Fort-
ɜr Ameisen

Haben Sie das Prinzip verstanden?

Statt immer nur einen Weg auszuprobieren und wieder zu verwerfen, wenn sich ein besserer gefunden hat, erkunden die Ameisen gleichzeitig alle sich bietenden Möglichkeiten.

Kommen sie als Erste bei einer Stadt an, wissen sie, dass der genommene Weg der günstigste ist, denn sonst wäre ja ein anderer Erkundungstrupp bereits da (zur Erinnerung: Alle bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit).

Treffen die Ameisen irgendwo auf Artgenossen, dann wissen sie, dass ihre Reise zu Ende ist, weil sie sich gegenseitig ein „Ich bin schon da" berichten können. Andere haben also das anvisierte Ziel früher erreicht.

Führen Sie zur Übung das Verfahren noch zu Ende und zeichnen Sie den Weg der Ameisen, die gefundenen Strecken sowie verworfene Wege in die Landkarte ein!

Können Sie sich vielleicht gleichzeitig auch schon vorstellen, wie ein Computer das Ameisenprinzip adaptiert?

Die Lösung wird in Abbildung 1.10 dargestellt. Was für Informationen haben wir dadurch jetzt eigentlich gewonnen?

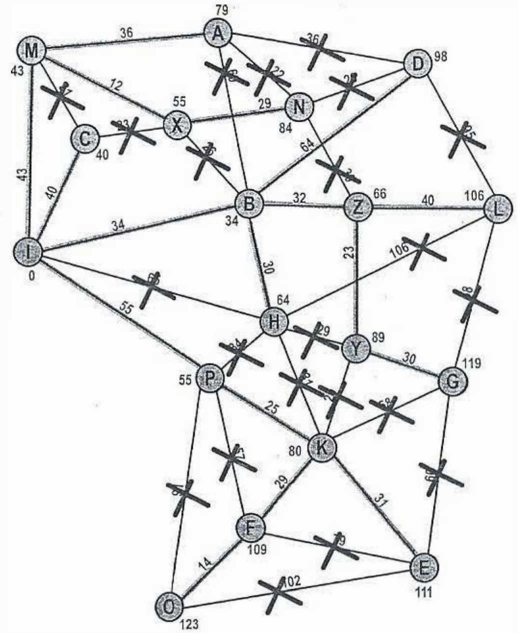


Abbildung 1.10 Die fertig erkundete Landkarte der Ameisen

Um von Imstadt zu einem beliebigen anderen Ort zu kommen, folgen Sie dem Pfad der Ameisen:

Von Imstadt nach Oppenheim kommt man so am günstigsten über Pappstadt, Krupsing und Flughafen. Die Gesamtstrecke beträgt 123 km. Ein günstigerer Weg existiert nicht!

Sie haben aber nicht nur die ursprüngliche Aufgabe gelöst, sondern sozusagen als Abfallprodukt noch die kürzesten Wege von Imstadt zu allen weiteren Städten ermittelt. So fährt man zum Beispiel nach Giwelau am besten über Buding und die beiden Autobahnkreuze, die wir mit Z und Y bezeichnet haben.

Beachten Sie bitte auch die „0", die nun der Vollständigkeit halber bei Imstadt steht, denn der Weg von Imstadt nach Imstadt beträgt ja ganz offensichtlich 0 km.

Warum ist das Ameisen-Prinzip für einen Informatiker interessant?

- Es führt in absehbarer Zeit zum Ziel. Da die Ameisen ständig in Bewegung sind und keine Strecke doppelt gehen, müssen sie recht bald alles erkundet haben (maximal nach der Zeit, die dem kürzesten Weg zur am weitesten entfernten Stadt entspricht).

- Es werden immer wieder die gleichen, sehr einfachen Anweisungen benutzt, um die Ameisen zu steuern:
  1. Teile den Trupp auf und folge allen Routen.
  2. Wenn ein Ort erreicht wird: günstigste Strecke dorthin gefunden, weiter bei 1.
  3. Wenn man einem anderen Trupp begegnet: Strecke verwerfen, Ende.

Solche Verfahren lassen sich (normalerweise) gut und einfach für den Computer umsetzen. Eine solche Vorschrift nennt sich dann *Algorithmus*.

ımus
ı Sie, dass die Herkunft
egriffes nie richtig ge-
ırde? Entweder kommt
griechischen „arith-
as Zahl bedeutet, oder
r veränderte Name des
arabischen Mathema-
Al-Charismi", der –
ausgesprochen – in
e „algorithm" klingt.
gorithmen wurden
; bereits lange vor der
ende hauptsächlich
chischen Mathemati-
:wickelt: Etwa im 4.
dert v. Chr. das euklid-
fahren zur Bestim-
es größten gemeinsa-
ers zweier Zahlen oder
ırhundert v. Chr. das
Eratosthenes zur Er-
von Primzahlen. Bei-
ithmen werden heute
Computern eingesetzt!

> **Algorithmus**
> Ein Algorithmus ist eine Handlungsvorschrift zur Lösung eines Problems bzw. einer Kategorie von Problemen. Diese Handlungsvorschriften lassen sich im Allgemeinen in ein Computerprogramm umsetzen. Hierfür muss sie hinreichend genau formuliert sein.

Wie lösen also unsere Routenplaner im Auto das Problem des kürzesten Weges? Enthalten sie einen Ameisen-Simulator und spielen die genaue Vorgehensweise nach?

Sicherlich wäre das vorteilhafter als die ganz zu Anfang beschriebene „Brute-Force-Methode". Trotzdem ist der Informatiker hier erneut gefragt, das gefundene Verfahren für den Computer zu optimieren.

Können Sie sich vorstellen, wie?

Das Ameisen-Prinzip liegt uns Menschen sehr, weil wir uns gut vorstellen können, wie die kleinen Krabbeltiere die Pfade erkunden. Dadurch erschließt sich auch recht deutlich, warum das Verfahren wirklich die günstigsten Wege hervorbringt.

Wann immer wir so ein „aus dem Leben gegriffenes" Verfahren im Computer benötigen und es daher in Bits und Bytes umsetzen, hilft wieder das Prinzip der Abstraktion:

Überlegen Sie, was vom Ameisen-Prinzip für die Problemlösung relevant ist: Computer benötigen keine Anschauung, diese Anteile sind also zu eliminieren.

Ob Edsger W. Dijkstra, zuletzt Professor in Texas, 1959 über eine Ameisenstraße lief; ist unbekannt. Er hat jedoch bereits zu diesem Zeitpunkt ein Verfahren vorgestellt, das unser Ameisen-Prinzip im Computer zur Berechnung eines kürzesten Weges nutzt. Es ist bis heute nach ihm benannt.

Doch versuchen Sie zunächst einmal selbst, ein solches Verfahren herauszufinden. Vielleicht kommen Sie ja sogar auf eine bessere Methode, die dann nach Ihnen benannt wird.

Der Dijksta-Algorithmus

Edsger Wybe Dijkstra: Er wurde 1930 in Rotterdam geboren, arbeitete nach der Ausbildung zunächst als Professor an der Univeristät in Eindhoven und wechselte 1984 an die Universität von Texas. Neben seinen Arbeiten zur Berechnung des kürzesten Weges hat er auch einen wesentlichen Beitrag zur Einführung der strukturierten Programmierung geleistet. Dafür erhielt er 1972 auch den Turing-Preis, der das Pendant des Nobelpreises für Informatiker ist. Er starb 2002 in seiner Heimat Nuenen.

Fangen wir noch einmal ganz von vorne an: Sie sitzen in Imstadt und wollen nach Oppenheim.

Die Ameisen unseres letzten Experiments liefen nun einfach in alle anderen direkt erreichbaren Städte, um zu ermitteln, wie lange sie dort hin unterwegs sind. Die hierfür notwendigen Zeiten braucht ein Computer jedoch gar nicht zu ermitteln, er liest einfach die Strecken ab. Wie aus Abbildung 1.11 ersichtlich, sind dies ja einfach die verzeichneten Längen der Verbindungslinien zwischen den Städten.

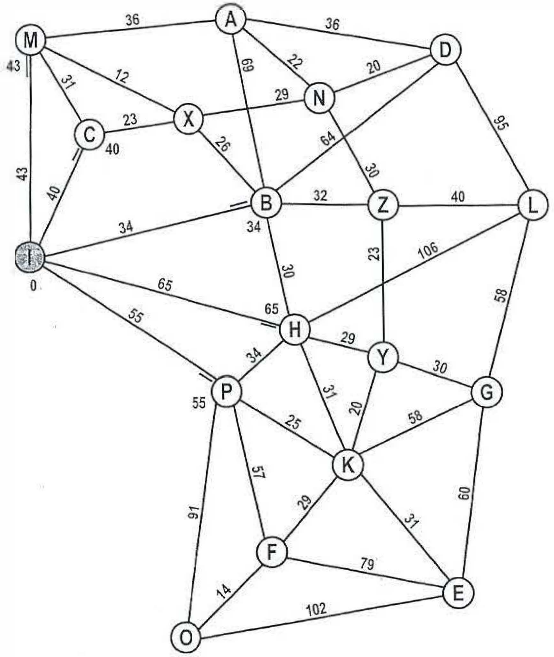
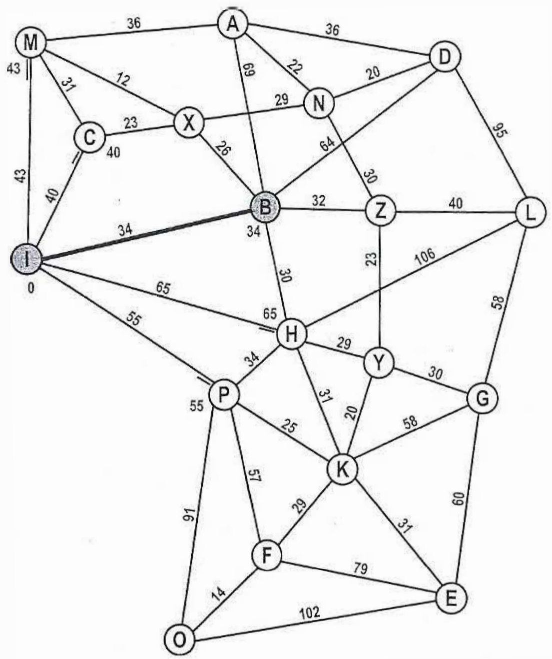


Abbildung 1.11 Potenziell erreichbare Städte und die Weglängen dorthin

In der Grafik ist außerdem bei allen Zielpunkten markiert, woher Sie kommen, damit die beschriebene Entfernung zutrifft.

Wie ging es mit den Ameisen weiter? Der Trupp, der zuerst bei einer Stadt ankam, markierte die genommene Strecke als „günstig" und verteilte sich auf die umliegenden Strecken.

Für den Computer ist nun gar kein Problem, diese Stadt zu bestimmen: Es ist diejenige, die mit der kleinsten Zahl bezeichnet ist, also (B). In Abbildung 1.12 ist dies verzeichnet.



ng 1.12 Der erste kür-
eg von Imstadt wurde
t

Von dieser Stadt aus werden wiederum die Entfernungen zu allen Nachbarn bestimmt. Da die Ameisen jedoch bis nach (B) bereits 34 km unterwegs waren, müssen diese addiert werden. Versuchen Sie es! Stoßen Sie auf ein Problem?

Genau! Für (X), (D) und (Z) können wir die Methodik einfach durchführen, aber was ist mit (H)? Hier steht bereits ein Wert!

Wie ist hier zu verfahren? Ziehen wir die Ameisen zurate: Der Weg über (B) nach (H) ist 64 km lang, der direkte Weg von (I) nach (H) 65 km. Der Ameisentrupp von (B) würde also VOR dem Trupp aus (I) ankommen und daher „gewinnen".

Daher gilt für das Dijkstra-Verfahren die folgende Regel für den Fall, dass an einer Nachbarstadt bereits eine Zahl steht:

- Wenn die Zahl, die neu hingeschrieben werden soll, kleiner ist, dann wird die alte durch die neue Zahl ersetzt und dementsprechend auch die Marke, woher die Ameisen kommen.
- Wenn die neue Zahl größer wäre, passiert gar nichts.

Ergebnis ist daher die Karte aus Abbildung 1.13.

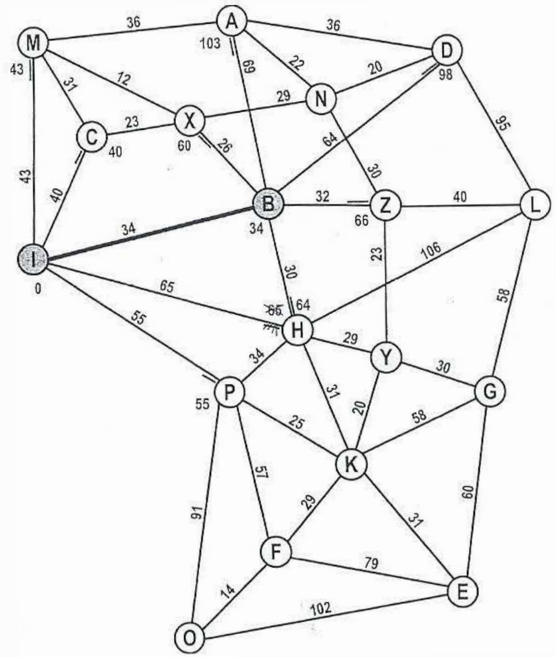


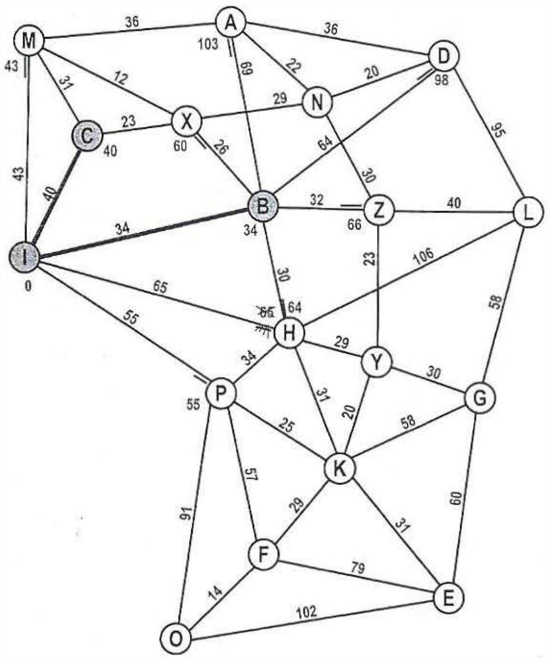
Abbildung 1.13 Potenziell erreichbare Städte und die Weglängen dorthin

Wie geht es nun weiter?

Prinzipiell wie am Anfang: Aus allen mit Zahlen markierten Städten, die noch nicht von Ameisen besucht wurden (noch nicht rot gefärbt), wird die mit der kleinsten Zahl herausgesucht. Dort kommen die Ameisen als Nächstes an.

In diesem Fall ist das (C).

Von (C) aus werden wieder alle benachbarten Städte betrachtet. Nach (M) käme man in 71 km, nach (X) nach 63 km. Beides wird jedoch von der bereits vorhandenen Zahl unterboten, also passiert gar nichts weiter, die nächste nichtmarkierte Stadt mit der kleinsten Zahl wird gesucht. Das Ergebnis sehen Sie in Abbildung 1.14.



ıng 1.14 Erneut wurde
zester Weg gefunden

Bevor Sie nun weitermachen, versuchen Sie doch einmal, den Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege aufzuschreiben.

1 Algorithmen spielen in der Informatik eine sehr große Rolle: Ein Großteil der vorkommenden Aufgaben aus Wirtschaft und Wissenschaft lässt sich mit Algorithmen lösen, die schon vor längerer Zeit entwickelt wurden (dazu mehr am Ende des Kapitels).

Es gibt auch diverse formale Methoden, die Algorithmen zu Papier zu bringen. Eigentlich geht es jedoch darum, die Beschreibung so genau zu machen, dass jemand anderes den Algorithmus danach durchführen kann.

Behalten Sie das im Hinterkopf, wenn Sie jetzt versuchen, den beschriebenen Dijkstra-Algorithmus insgesamt zu formulieren.

Es gibt natürlich unzählige korrekte Lösungen. Ihre sollte im Kern mit Abbildung 1.15 übereinstimmen.

0. Markiere die **Startstadt** rot, weise ihr die **Kennzahl** 0 zu. Bezeichne diese als **aktuelle Stadt.**

1. Gehe aus von der **aktuellen Stadt** zu allen direkt erreichbaren **Nachbarstädten.**

   ... und führe das Folgende für jede **Nachbarstadt** durch:

   Errechne die **Summe** aus der Kennzahl an der **aktuellen Stadt** und der Länge der Strecke dorthin.

   - Ist die **Nachbarstadt** bereits rot markiert, mache nichts.
   - Hat die **Nachbarstadt** keine **Kennzahl**, weise ihr die **Summe** als **Kennzahl** zu, markiere die Strecke zur **aktuellen Stadt.**
   - Hat die **Nachbarstadt** eine **Kennzahl** kleiner der **Summe**, mache nichts.
   - Hat die **Nachbarstadt** eine **Kennzahl** größer der **Summe**, streiche die dortige **Kennzahl** sowie die Markierung. Weise ihr danach die **Summe** als neue **Kennzahl** zu. Markiere die Strecke zur **aktuellen Stadt.**

2. Betrachte alle Städte, die zwar eine **Kennzahl** haben, aber noch nicht rot markiert sind. Suche die Stadt mit der kleinsten **Kennzahl.**

3. Bezeichne diese als **aktuelle Stadt**. Weisen mehrere Städte die kleinste **Kennzahl** auf, wähle eine beliebige davon als **aktuelle Stadt.**

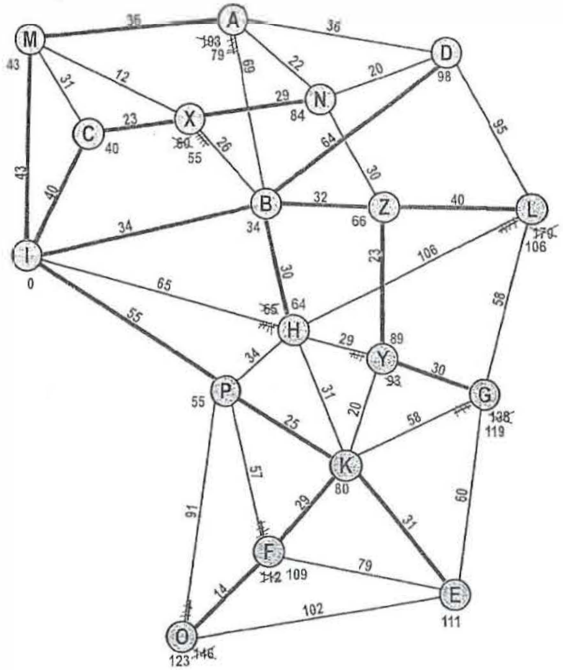
4. Markiere die **aktuelle Stadt** rot, zeichne die dort markierte Strecke in rot ein.

5. Falls es noch Städte gibt, die nicht rot markiert sind, weiter bei (1.)

Abbildung 1.15 Der Algorithmus

Führen Sie nun den Algorithmus für das gegebene Beispiel fort.

Das Ergebnis ist in Abbildung 1.16 dargestellt.



lung 1.16 Alle kürzesten von Imstadt, mit dem a-Algorithmus heraus- den

Erkennen Sie die Gemeinsamkeiten mit dem Ergebnis des Ameisen-Prinzips?

Üben Sie nun den neuen Algorithmus und bestimmen Sie den kürzesten Weg von Lupera nach Eindhofen, nach Giwelau und nach Morbach.
Zur Kontrolle: Die ermittelten Entfernungen sollten 58 km, 110 km und 114 km betragen.