3 Transportprobleme

Das Transportproblem ist eine spezielle Klasse der linearen Planungsrechnung.
Es liegt in einfachster Form vor, wenn es einerseits verschiedene Erzeuger, Versandlager oder Angebotsorte als Anbieter eines Gutes und auf der anderen Seite verschiedene Verbraucher, Beschaffungslager oder Nachfrageorte nach diesem Gut auftreten.

3.1 Grundmodell

von den m Lieferorten oder Angebotsorten $A_1, A_2, \ldots, A_m$

sollen die Vorratsmengen $a_1, a_2, \ldots, a_m$

zu den n Verbrauchsorten oder Nachfrageorten $B_1, B_2, \ldots, B_n$

mit den Bedarfsmengen $b_1, b_2, \ldots, b_n$

transportiert werden.

Lieferorte

Verbrauchsorte

Transportkostenminimierungsaufgabe

Beispiel

Es gibt drei Angebotsorte A_1, A_2, A_3 mit den Vorratsmengen $a_1 = 18,\ a_2 = 22,\ a_3 = 10$ und vier Nachfrageorte mit dem Bedarf $b_1 = 10,\ b_2 = 13,\ b_3 = 14,\ b_4 = 13$.

Die Transportkosten pro Mengeneinheit betragen von A nach B:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	6	5	7
A_2	2	7	9	4
A_3	1	3	4	2

Gottlieb-Daimler-Schule 2
Technisches Schulzentrum Sindelfingen
mit Abteilung Akademie für Datenverarbeitung

Zielfunktion: Minimiere	Damit lautet die Kostenfunktion:
K = $c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} +$ $c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} +$ $\vdots$ $c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}$	K = $2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{13} + 7x_{14} +$ $2x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} + 4x_{24} +$ $x_{31} + 3x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34}$
Unter den Nebenbedingungen Angebotsgleichungen $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ für alle Angebotsorte $i = 1, 2, \ldots, m$ Nachfragegleichungen $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ für alle Nachfrageorte $j = 1, 2, \ldots n$	
Gesamtangebot und Gesamtnachfrage gleichen sich aus: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$	

Matrix der Transportmethode

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

3.2 Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung

Es gibt verschiedene Verfahren zur Bestimmung einer ersten Ausgangslösung, die Basislösung des Systems von Nebenbedingungen ist. Die mit Hilfe der verschiedenen Verfahren erzielbaren zulässigen Lösungen unterscheiden hinsichtlich ihrer Nähe zur Optimallösung und damit hinsichtlich der notwendigen Iterationen bis zur optimalen Lösung.

3.2.1 Nord-West-Ecken-Verfahren

Man besetzt die Felder ohne Berücksichtigung der Kosten von links oben nach rechts unten.
Eine Transportmenge ist dann begrenzt, wenn für ein beliebiges Feld mindestens ein Vorrat aufgebraucht oder ein Bedarf gedeckt ist.

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					18
A_2					22
A_3					10
Nachfrage	10	13	14	13	

3.2.2 Reihenfolge aufsteigender Kostenwerte c_{ij}

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					18
A_2					22
A_3					10
Nachfrage	10	13	14	13	

3.2.3 Vogel'sche Approximationsmethode

Bei der Vogel'schen Approximationsmethode werden für jede Zeile und Spalte der Transportkostenmatrix die Kostendifferenzen zwischen dem zweigünstigsten und dem günstigsten Kostenelement gebildet. Dann wird in der Zeile oder Spalte mit der maximalen Differenz dem Feld mit dem günstigsten Kostenelement – das an der maximalen Kostendifferenz beteiligt ist – die größtmögliche Menge zugeordnet. Anschließend wird diese Vorgehensweise für die verbleibenden Zeilen und Spalten wiederholt, bis alle Mengen zugeordnet sind.

von \ nach	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					18
A_2					22
A_3					10
Nachfrage	10	13	14	13	

3.3 Iterationsverfahren zur Bestimmung einer Optimallösung – Stepping-Stone-Verfahren

Wie beim Simplexverfahren kann eine verbesserte Lösung dadurch erreicht werden, dass man eine Variable, die bisher Null war, so weit vergrößert, bis mindestens eine Variable, die vorher positiv war, zu Null wird.

von \ nach	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					18
A_2					22
A_3					10
Nachfrage	10	13	14	13	

Übung

Es gibt drei Angebotsorte A_1, A_2, A_3 mit den Vorratsmengen $a_1 = 9,\ a_2 = 10,\ a_3 = 3$ und vier Nachfrageorte mit dem Bedarf $b_1 = 5,\ b_2 = 6,\ b_3 = 7,\ b_4 = 4$.

Die Transportkosten pro Mengeneinheit betragen von A nach B:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	90	150	40	80
A_2	30	80	70	10
A_3	20	40	20	60

→ Bestimmen Sie eine erste Basislösung nach den angegebenen Verfahren und berechnen sie jeweils die Kosten:

Nord-West-Ecken-Verfahren

von \ nach	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

Reihenfolge aufsteigender Kostenwerte c_{ij}

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

Gottlieb-Daimler-Schule 2
Technisches Schulzentrum Sindelfingen
mit Abteilung Akademie für Datenverarbeitung

Datum: ______________________

Optimieren Sie das Tableau der aufsteigenden Kostenwerte mit Hilfe der Stepping-Stone-Methode.
Berechnen sie dazu für jedes nicht besetzte Feld die Kostendifferenz v_{ij}, um zu prüfen, ob eine Minimierung möglich ist.

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

Bestimmen Sie das Ausgangstableau nach der Vogel'schen Approximationsmethode

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

Datum: ______________________

Übung

Es gibt drei Angebotsorte A_1, A_2, A_3 mit den Vorratsmengen $a_1 = 38,\ a_2 = 52,\ a_3 = 30$ und vier Nachfrageorte mit dem Bedarf $b_1 = 17,\ b_2 = 50,\ b_3 = 10,\ b_4 = 43$.

Die Transportkosten pro Mengeneinheit betragen von A nach B:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	17	11	10	12
A_2	18	20	19	30
A_3	13	25	15	27

Ausganglösung mit Vogelscher Approximationsmethode

nach / von	B_1	B_2	B_3	B_4	Angebot
A_1					
A_2					
A_3					
Nachfrage					

3.4 Erweiterung des Grundmodells

Angebotsmenge größer als Bedarfsmenge (offenes Transportproblem)

Ein Warenhaus wünscht folgende Posten an Damenkleidern einzukaufen:

Kleidergröße	34	36	38	40	42
Menge in Stück	75	100	250	350	200

Von drei verschiedenen Kleiderfabriken werden Angebote eingeholt. Die Hersteller bieten an, die nachstehenden Mengen an Kleidern liefern zu können:

Kleiderfabrik	A	B	C
Angebotsmenge in Stück	420	400	380

Die Angebotspreise je Kleidergröße und Hersteller sind (in GE je Kleid):

		Kleidergröße				
		34	36	38	40	42
	A	100	120	140	160	180
Hersteller	B	115	140	150	180	190
	C	165	180	185	190	195

Die Angebotsmenge $\sum_{i=1}^{3} a_i = 1200$ ist um 225 Stück größer als die Nachfragemenge mit $\sum_{j=1}^{5} b_j = 975$. Für diese Differenz wird eine fiktive Nachfrage über 225 Stück Kleider eingeführt.

Kleidergröße Hersteller	34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	Angebot
A							
B							
C							
Nachfrage							

Datum: ______________________

Kleidergröße Hersteller	34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	Angebot
A							
B							
C							
Nachfrage							

Kleidergröße Hersteller	34	36	38	40	42	fiktive Nachfrage	Angebot
A							
B							
C							
Nachfrage							