

1 Concept

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système LTI permet de caractériser le comportement de ce système et de calculer la **réponse temporelle** pour une entrée donnée. Lorsque l'on travaille dans le domaine fréquentiel, on a montré dans les TP précédents que la fonction de transfert $H(s)$ caractérise notre système. Elle donne toute l'information sur la "boîte noire" en caractérisant la **réponse fréquentielle**. On peut simplement étudier $H(j\omega)$ car cela exprime l'effet du système sur un signal harmonique de fréquence arbitraire f (ou pulsation arbitraire ω).

• Pourquoi parle-t-on de réponse fréquentielle ?

On part d'une entrée harmonique $u(t) = e^{j\omega t}$. On calcule la sortie $y(t)$ du système de réponse impulsionnelle $h(t)$ en appliquant la convolution :

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j\omega t} H(j\omega) = uH(j\omega)$$

où

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} h(\tau) d\tau$$

est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système.

En résumé,



• Application

Pour une entrée, $u(t) = \cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$, la sortie est donnée par : $y(t) = \frac{1}{2}(H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t})$.

La réponse d'un système *LTI* à une exponentielle complexe à une certaine fréquence est donc une exponentielle complexe de *même fréquence* mais dont la phase et l'amplitude ont été modifiées ♡. Cette modification est entièrement caractérisée par la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

En décomposant $H(j\omega)$ par son amplitude et sa phase, *i.e.* $|H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$, on peut exprimer la sortie $y(t) = |H(\omega)| \cos(\omega t + \angle H(\omega))$. Le signal $u(t)$ est donc bien modifié en amplitude (*gain*) et en phase, mais pas en fréquence.

Étudier la fonction de transfert $H(j\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}$ permet de capturer le fonctionnement du système LTI *stable*. En effet, il s'agit du système stable associé à $H(s)$ car il faut sélectionner la ROC contenant $s = j\omega$.

Comme illustré dans le TP sur les séries de Fourier, on peut étudier $H(j\omega)$ via¹ son diagramme d'amplitude $|H(\omega)| = f(\omega)$ et son diagramme de phase $\angle H(\omega) = g(\omega)$. Ces graphes s'appellent les **diagrammes de Bode** et correspondent à la représentation graphique usuelle de la réponse fréquentielle d'un système LTI.

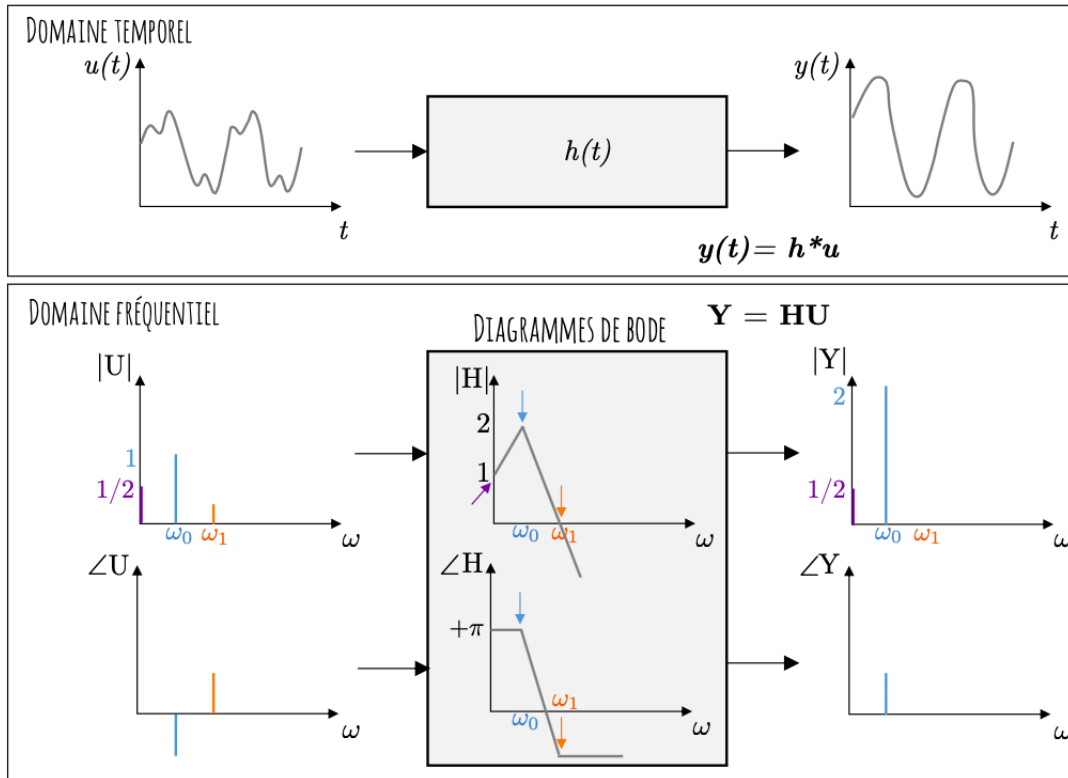
• Parallélisme entre domaine temporel et domaine fréquentiel

La figure ci-dessous illustre l'équivalence entre les deux domaines d'étude des signaux. Dans le domaine temporel, le signal est représenté par son évolution au cours du temps. Pour obtenir la réponse du système, il suffit de convoluer l'entrée avec la réponse impulsionnelle $y(t) = h(t) * u(t)$.

1. On écrit $H(j\omega)$ pour mettre en évidence qu'il s'agit d'une fonction complexe. L'amplitude et la phase ne sont pas complexes. On écrit donc $|H(\omega)|$ et $\angle H(\omega)$.

Ce même signal d'entrée peut être décrit à l'aide de son spectre fréquentiel (U) en amplitude et en phase. Cela permet de simplement voir le contenu fréquentiel du signal (quelles fréquences constituent le signal). Le système est décrit à l'aide de sa fonction de transfert (H) qui est simplement la transformée de Fourier de $h(t)$. Cette fonction de transfert peut également être visualisée selon son amplitude et sa phase. On appelle cela les diagrammes de Bode.

Pour obtenir la réponse du système, il suffit de lire le diagramme de Bode et indiquer comment H affecte U . A la fréquence nulle, le diagramme de Bode en amplitude est égal à 1. Le signal d'entrée n'est donc pas modifié en amplitude à cette fréquence (la "barre" mauve de $|U|$ reste bien inchangée sur le graphe de $|Y|$). En ω_0 , le signal d'entrée voit son amplitude doublée car $|H(\omega_0)|$ est égal à 2 (la "barre" bleue de $|Y(\omega_0)|$ vaut 2 au lieu de $|U(\omega_0)| = 1$). Pour la phase, il suffit d'additionner comme mentionné à la section précédente (les arguments des exponentielles s'additionnent).



1.1 Dessiner un diagramme de Bode

C'est à partir d'ici que l'on explique comment dessiner des diagrammes de Bode. Prends le temps de lire et relire les différents points pour être sûr·e de savoir les mettre en pratique !

L'allure de $|H|$ et de $\angle H$ nous permet de facilement comprendre l'impact de la boîte noire sur le signal d'entrée. Dès lors, le but de ce TP est de **dessiner ces diagrammes de Bode**. Pour cela, il nous faut l'amplitude et la phase de la fonction de transfert.

Cas 1 : H est exprimée selon son amplitude et sa phase :

On prend comme système $y(t) = u(t - t_0)$. Il s'agit d'une boîte noire qui retarde l'entrée $u(t)$ par un délai de t_0 . Le système est donc décrit par une fonction de transfert $H(s) = e^{-t_0 \cdot s}$. Pour dessiner les diagrammes de Bode, on se place en $s = \sigma + j\omega$ avec $\sigma = 0$. On veut donc dessiner $H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$. Il suffit de décomposer en amplitude et en phase sous la forme $H(j\omega) = |H|e^{j\angle H}$. Par inspection, on peut écrire :

$$|H(\omega)| = 1, \angle H(\omega) = -\omega t_0.$$

L'amplitude est unitaire et la phase est simplement une fonction linéaire de la pulsation où la *pente* de la droite correspond à t_0 , le délai généré par la boîte noire sur le signal d'entrée.

On peut dessiner les diagrammes de Bode pour cette fonction :

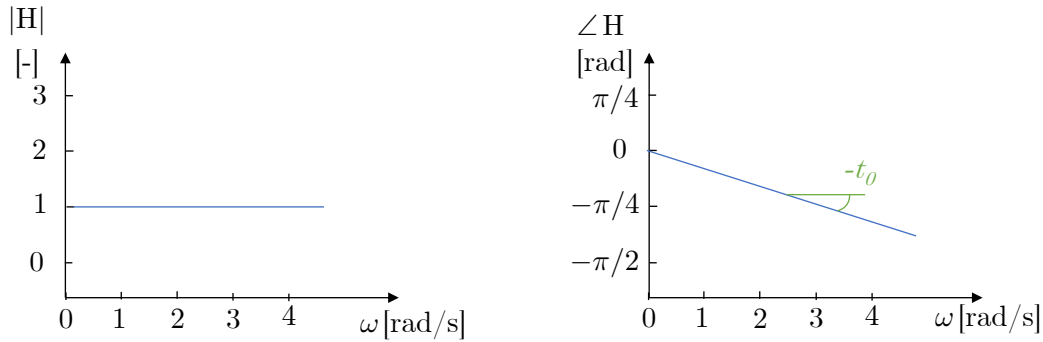


FIGURE 1 – Diagrammes de Bode en amplitude (gauche) et en phase (droite) de la fonction de transfert $H(s) = e^{-t_0 s}$. L'axe des abscisses est selon une graduation linéaire.

Cas 2 : H est exprimée selon sa partie réelle et imaginaire

H est exprimée selon sa partie réelle et sa partie imaginaire tel que $H(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$. Les deux composantes sont dépendantes de la pulsation. On pourrait dessiner sur un graphique A et B en fonction de ω^2 . Mais, comme on l'a souvent rappelé, dans le domaine fréquentiel nous préférons travailler avec l'amplitude et la phase des signaux. Il suffit d'utiliser les bases d'algèbre pour écrire un nombre complexe sous différentes formes. La fonction complexe de H décrite par A et B peut se transformer de la manière suivante :

$$H(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |H(\omega)|e^{j\angle H(\omega)}.$$

La conversion s'obtient avec les relations suivantes :

$$|H(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}$$

$$\angle H(\omega) = \arctan\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right).$$

Finalement, il suffit de tracer les deux expressions en fonction de ω .

Exemple :

La fonction de transfert $D(s) = s + a$ avec $a > 0$. En appliquant le raisonnement décrit ci-dessus, on obtient $D(j\omega) = a + j\omega$:

$$|D(\omega)| = \sqrt{\omega^2 + a^2}$$

$$\angle D(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Diagramme de Bode en amplitude $|D(\omega)|$

On pourrait tracer $\sqrt{\omega^2 + a^2}$ en fonction de ω sur un graphique mais l'expression est "compliquée" - c'est une racine carrée de $\omega^2 +$ une constante. Dès lors, on préfère travailler avec des logarithmes. On introduit la notion de décibels (dB) ♡. C'est une nouvelle unité qui s'obtient en calculant : $20 \log(\cdot)$. Au lieu de tracer $|D(\omega)|$, on dessine $20 \log(|D(\omega)|)$.

Le calcul s'écrit :

$$20 \log(|D(\omega)|) = 20 \log(\sqrt{\omega^2 + a^2}) = 10 \log(\omega^2 + a^2)$$

Pour dessiner cette fonction de la pulsation, on peut calculer les limites

- $\omega \ll a$: $10 \log(\omega^2 + a^2) \rightarrow 10 \log(a^2) = 20 \log(a)$: ce qui correspond à une constante.

2. On appelle cela un diagramme de Nyquist - voir le cours de Linear System Design.

- $\omega \gg a$: $10 \log(\omega^2 + a^2) \rightarrow 10 \log(\omega^2) = 20 \log(\omega)$ ce qui correspond à une fonction linéaire de ω , *i.e.* une droite avec une pente croissante de 20 dB/dec (décibel par décade, une décade représentant un rapport de 10 entre deux graduations) lorsque l'axe des abscisses est bien gradué en échelle logarithmique (en base 10). On parle donc bien en décade car on fait des sauts de 10 à 100 à 1000 de manière logarithmique.
- $\omega = a$: on va simplifier l'expression de l'amplitude de D et simplement relier les cas limites considérés ci-dessus.

Diagramme de Bode en phase $\angle D(\omega)$

On repart de la définition : $\angle D(j\omega) = \arctan(\frac{\omega}{a})$. On considère différents cas limites :

- $\omega \ll a$: $\arctan(\frac{\omega}{a}) \rightarrow 0$
- $\omega \gg a$: $\arctan(\frac{\omega}{a}) \rightarrow \pi/2$

Si l'on trace l'échelle des abscisses en graduation logarithmique, on peut décrire l'allure de $\arctan(.)$ de manière simplifiée :

- $\omega < a/10$: $\angle D(\omega) = 0$
- $\omega \in [a/10; 10a]$: $\angle D(\omega)$ croît de $+\pi/4$ par décade
- $\omega > 10a$: $\angle D(\omega) = \pi/2$

Il est à noter que, par convention, la fonction $\arctan(x)$ est définie comme la réciproque de la fonction $\tan(x)$ pour x restreint à l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$. Dès lors, lorsqu'on évalue $\arctan(b/a)$, où a, b sont les coordonnées d'un point dans le plan complexe, la convention voudrait que la phase associée soit toujours dans les premier et quatrième quadrants. Il faut donc faire attention aux signes de a et b afin de correctement évaluer la phase. Lorsqu'on évalue celle-ci à l'aide d'une fonction Matlab, Python, etc., il faut donc veiller à utiliser une fonction définie de manière appropriée.

Les diagrammes de Bode de $D(s) = s + a$ sont illustrés à la Figure 2. Il est à noter que ces diagrammes sont des versions simplifiées des diagrammes réels. On peut tracer ceux-ci aisément avec différents outils, dont Wolfram alpha (entrer "Bode plot transfer function" dans la barre de recherche amène au calculateur).

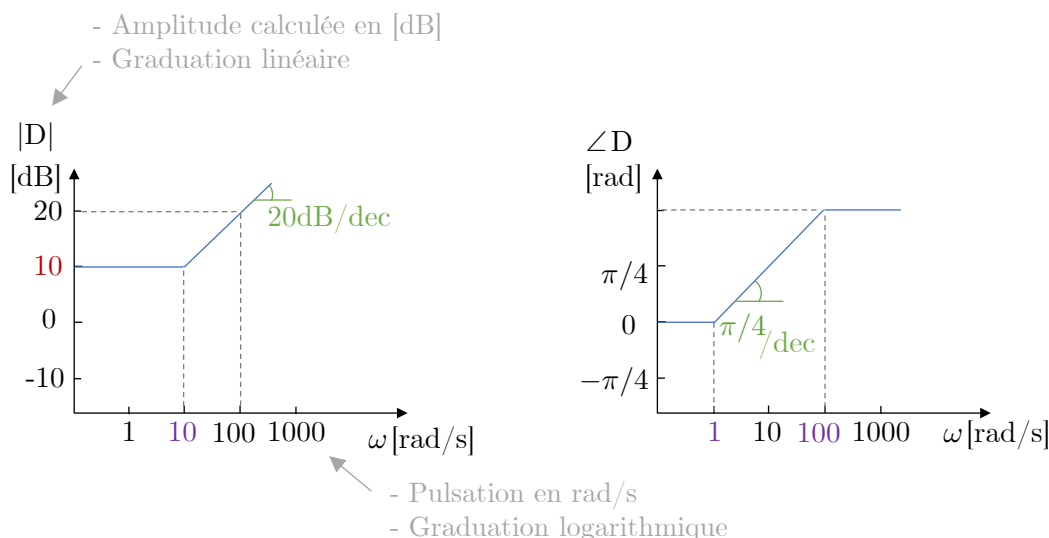


FIGURE 2 – Diagrammes de Bode en amplitude (gauche) et en phase (droite) de la fonction de transfert $D(s) = s + a$ avec $a = \sqrt{10}$. L'amplitude est calculée en dB avec graduation linéaire. La phase en radian avec graduation linéaire. L'axe des abscisses est bien la pulsation en rad/s avec une graduation logarithmique.

! Ne pas mélanger les unités et les graduations !

- Figure 1 : l'amplitude est exprimée en unité naturelle *i.e.* si $|H(\omega^*)| = 2$ à une pulsation donnée ω^* , la boîte noire double simplement l'amplitude du signal d'entrée. L'axe des abscisses est en rad/s et l'espacement entre les graduations est linéaire *i.e.* il y a le même espacement entre 1 et 2 qu'entre 3 et 4.
- Figure 2 : l'amplitude est calculée en dB. Il suffit juste de reporter les résultats trouvés dans cet unité. La graduation est linéaire. Par exemple, un gain unitaire en unité naturelle correspond à 0dB. Vu qu'on obtient une expression sous la forme de $20 \log(\omega)$, on va modifier la graduation de l'axe des abscisses pour avoir une graduation logarithmique *i.e.* l'espacement entre 1 et 10 est le même qu'entre 10 et 100 (et correspond à une décade).

Cas 3 : la fonction de transfert est exprimée sous la forme d'une fraction

Lors des TP précédents, on a souvent observé des fonctions de transfert semblables à $H(s) = \frac{1}{s+a}$. On aimerait également tracer le diagramme de Bode de cette fonction. Cela correspond à l'inverse de $D(s)$, *i.e.* $H(s) = 1/D(s)$.

On doit repartir de la décomposition en amplitude et phase : $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$. On peut réécrire cette expression rationnelle complexe comme $H(j\omega) = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$. La partie réelle est donnée par $A(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2}$ et la partie imaginaire est donnée par $B(\omega) = \frac{-j\omega}{a^2+\omega^2}$. On peut ensuite trouver l'amplitude $\sqrt{A^2+B^2}$ et la phase $\arctan(B/A)$. On peut repartir du même raisonnement que celui fait pour D et calculer l'amplitude en dB. Les calculs sont laissés aux lectrices et aux lecteurs. Ils sont également donnés dans le livre [TXB-théorie]. On peut également déduire les résultats depuis l'inverse de $D(s)$. Les diagrammes de Bode sont illustrés à la Figure 3.

Diagramme de Bode en amplitude $|H(\omega)|$ ($= \frac{20}{2} \log\left(\frac{1}{a^2+\omega^2}\right)$)

- $\omega \ll a$: $20 \log(1/a)$: ce qui correspond à une constante.
- $\omega \gg a$: $10 \log(1/\omega^2) = -20 \log(\omega)$ ce qui correspond à une fonction linéaire de ω , *i.e.* une droite avec une pente *décroissante* de -20 dB/dec lorsque l'axe des abscisses est bien gradué en échelle logarithmique.
- $\omega = a$: on va simplifier l'expression de l'amplitude de H et simplement relier les cas limites considérés ci-dessus.

Diagramme de Bode en phase $\angle H(\omega)$ ($= \arctan\left(\frac{-\omega}{a}\right)$)

- $\omega < a/10$: $\angle H(\omega) = 0$
- $\omega \in [a/10; 10a]$: $\angle H(\omega)$ décroît de $-\pi/4$ par décade
- $\omega > 10a$: $\angle H(\omega) = -\pi/2$

1.2 Étude de systèmes continus à l'aide des diagrammes de Bode

Dans les premiers TP, on a découvert qu'on pouvait étudier les systèmes sur base de leurs équations différentielles. Ensuite, on a appris à calculer la fonction de transfert. Dès lors, on va discuter des diagrammes de Bode des fonctions de transfert de systèmes fondamentaux.

Réponse d'un système continu du premier ordre

- Forme générale :

La réponse est donnée par une équation différentielle de premier ordre avec une entrée u : $\tau \dot{y} + y = Ku$ avec τ la constante de temps et K une constante.

- Fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

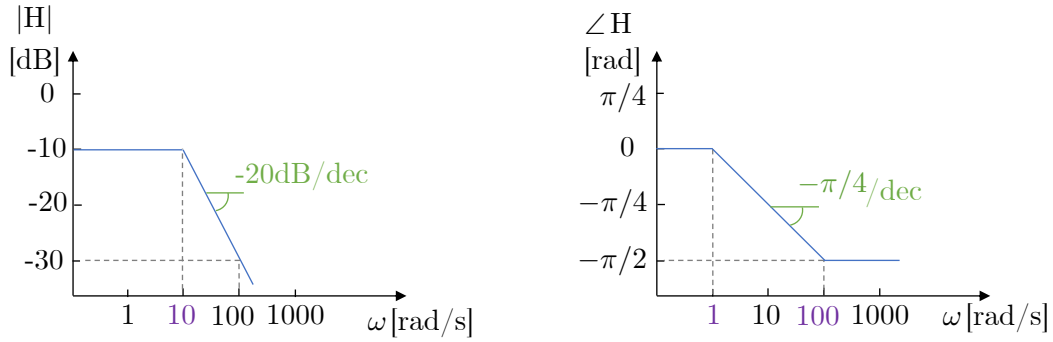


FIGURE 3 – Diagramme de Bode en amplitude (gauche) et en phase (droite) de la fonction de transfert $H(s) = \frac{1}{s+a}$ avec $a = 10$. L'amplitude est donnée en dB avec graduation linéaire et la phase en radian avec graduation linéaire. L'axe des abscisses est bien la pulsation en rad/s avec une graduation logarithmique.

avec $\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > -\frac{1}{\tau}\}$ (pour un système stable). On remarque que la région de convergence contient bien $\sigma = 0$.

• Réponse temporelle du système :

On peut calculer les différentes réponses du système : la réponse impulsionnelle $h(t)$ (*i.e.* pour une entrée $u(t) = \delta(t)$) et la réponse indicielle $s(t)$ (*i.e.* pour une entrée $u(t) = \mathbb{I}(t)$).

$$\begin{cases} H(j\omega) &= \frac{K}{j\omega\tau + 1} \\ h(t) &= \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \mathbb{I}(t) \\ s(t) &= K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \mathbb{I}(t) \end{cases}$$

Ces expressions peuvent être dessinées comme sur la Figure 4 (gauche). La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système d'ordre 1 est simplement une exponentielle décroissante avec une constante de temps τ . La réponse indicielle $s(t)$ montre que la réponse évolue de 0 à 1 avec une constante de temps τ .

• Diagrammes de Bode :

On connaît la fonction de transfert $H(s)$ et on peut donc dessiner les diagrammes de Bode. La forme analytique ressemble à l'exemple présenté ci-dessus. On pourrait tout redécomposer en amplitude et en phase ou bien utiliser les discussions limites.

Diagramme de Bode en amplitude $|H(\omega)|$

- $\omega < \frac{1}{\tau}$: $20 \log |H(\omega)| \simeq 20 \log K$.
- $\omega > \frac{1}{\tau}$: $20 \log |H(\omega)|$ décroît linéairement à -20 dB/dec.

On peut désigner $\frac{1}{\tau}$ comme étant la pulsation de coupure ω_c .

Diagramme de Bode en phase $\angle H(\omega)$

- Si $\omega < \frac{1}{10}\omega_c$: $\angle H(\omega) \simeq 0$.
- Si $\frac{1}{10}\omega_c < \omega < 10\omega_c$: $\angle H(\omega)$ décroît linéairement (avec une pente de $-\frac{\pi}{4}/\text{dec}$) et vaut $-\frac{\pi}{4}$ en ω_c .
- Si $10\omega_c < \omega$: $\angle H(\omega) \simeq -\frac{\pi}{2}$.

Il y a donc un déphasage à hautes fréquences et non à basses fréquences.

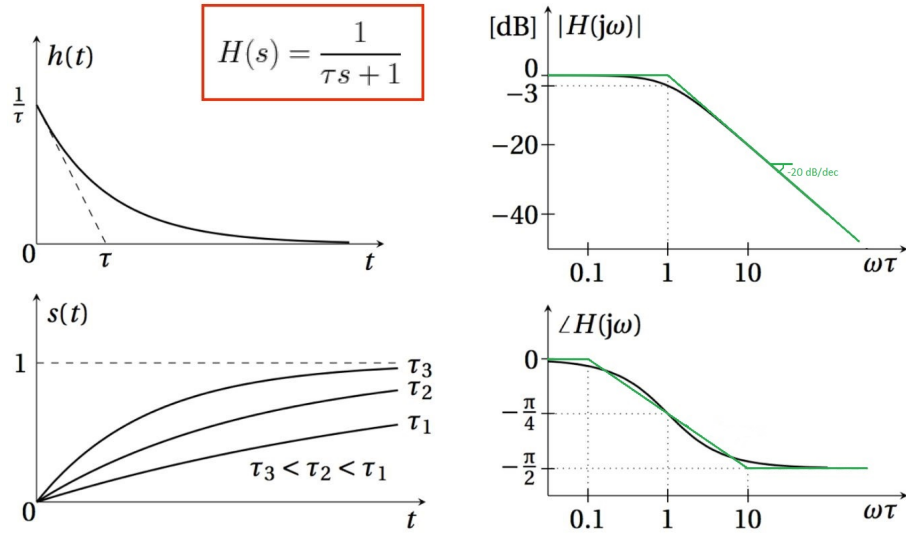


FIGURE 4 – Système d'ordre 1 pour $K = 1$: (top-left) réponse impulsionnelle $h(t)$, (bottom-left) réponse indicielle, (top-right) diagramme de Bode en amplitude, (bottom-right) diagramme de Bode en phase. Les courbes vertes correspondent aux courbes noires approximées.

- Résumé pratique des diagrammes de Bode de systèmes d'ordre 1 à la Figure 5.

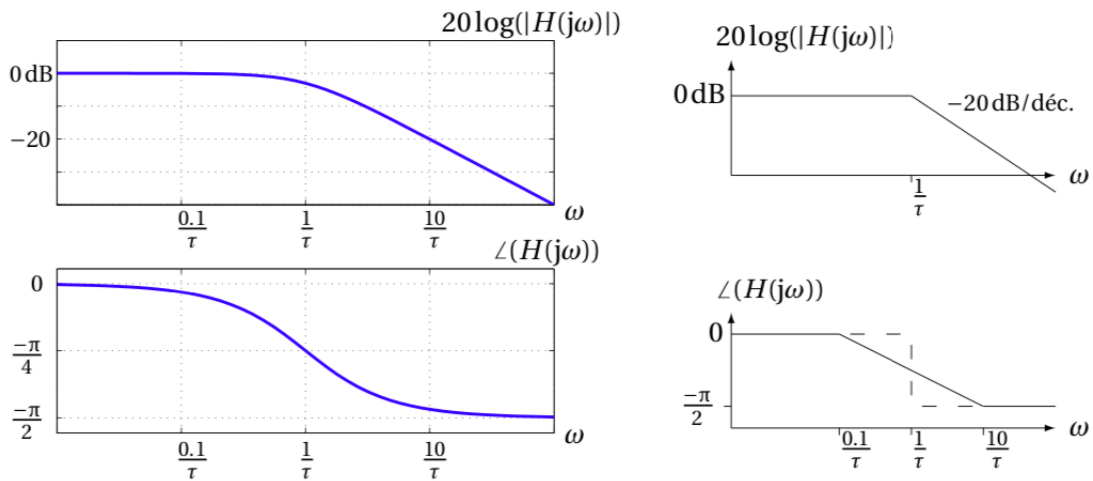


FIGURE 5 – Diagrammes de Bode de systèmes d'ordre 1 (version simplifiée à droite)

Réponse d'un système continu du deuxième ordre

- Forme générale :

Un système d'ordre 2 peut être exprimé par une équation différentielle de deuxième ordre comme le système masse-ressort-amortisseur :

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 K u.$$

♡ ω_0 est la pulsation naturelle

♡ $\zeta (> 0)$ est le facteur d'amortissement : plus $\zeta \nearrow$, plus l'amortissement \nearrow .

- Fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

avec $\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \Re\{-\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}\}\}$.

On aimerait tracer le diagramme de Bode donc on se place en $\sigma = 0$. On a

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}.$$

Est-ce que le dénominateur est factorisable sous une forme telle que $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$?

On calcule les pôles de la fonction de transfert :

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

Pour savoir si le dénominateur est factorisable, il faut que l'argument de la racine carrée soit positif :

- Si $\zeta > 1$ (l'amortissement est très élevé) : la racine carrée est positive. La fonction de transfert peut s'écrire comme un produit de deux systèmes d'ordre 1 : $H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s+a} \frac{1}{s+b}$. On peut utiliser les outils précédents ci-dessus pour chaque sous-système.
- Si $0 < \zeta < 1$ (l'amortissement est faible) : le dénominateur de la fonction de transfert est caractérisé par deux complexes conjugués.

Diagramme de Bode en amplitude de $|H|$

On repart sur la décomposition en amplitude et en phase mais les calculs deviennent plus compliqués. Les développements sont donnés section 9.5 [TXB-Théorie].

Pour éviter de devoir utiliser les longs développements, on utilise les résultats connus pour les systèmes d'ordre 2 à *condition* d'exprimer le système d'ordre 2 sous la **forme canonique** présentée ici :

$$H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

On peut reprendre les différents cas limites :

- Si $\omega < \omega_0$, alors $20 \log |H(\omega)| \simeq 20 \log K$.
- Si $\omega > \omega_0$, alors $20 \log |H(\omega)|$ décroît linéairement à 40 dB/dec (car il y a 2 pôles donc l'effet est doublé).

Les systèmes d'ordre 2 ont une réponse temporelle différente de celle de systèmes d'ordre 1. A cause du facteur d'amortissement, le système d'ordre 2 peut présenter un *overshoot*. A nouveau, les développements mathématiques ne sont pas présentés mais les informations utiles sont résumées ci-dessous :

- Si $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il y a un *overshoot* (un pic) dans la réponse fréquentielle, à la pulsation de résonance $\tilde{\omega} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ (qui tend vers ω_0 lorsque $\zeta \rightarrow 0$) et dont l'amplitude est $|H(j\tilde{\omega})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ (qui tend vers $+\infty$ lorsque $\zeta \rightarrow 0$).

- Si $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$, il n'y a pas d'*overshoot*.

Identifier la valeur de l'amortissement dans la fonction de transfert permet de déterminer si la réponse impulsionnelle $h(t)$ converge sans oscillations. Si $\zeta > \frac{\sqrt{2}}{2}$, le diagramme de Bode en amplitude ne présente pas d'*overshoot*. Dans le cas contraire, si $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la réponse impulsionnelle *oscille* avant de converger vers 0 et le diagramme de Bode en amplitude présente un overshoot. Plus le facteur d'amortissement est faible (*i.e.* le système n'est pas capable d'amortir la réponse), plus la réponse impulsionnelle présente de grandes oscillations, plus le pic est haut et plus le déphasage est abrupt.

Diagramme de Bode en phase $\angle H$

- Si $\omega < \frac{\omega_0}{10}$: $\angle H(j\omega) \simeq 0$.
- Si $\frac{\omega_0}{10} < \omega < 10\omega_0$: $\angle H(j\omega)$ décroît linéairement (à $\frac{\pi}{2}/\text{dec}$) et vaut $-\frac{\pi}{2}$ en ω_0 .
- Si $10\omega_0 < \omega$: $\angle H(j\omega) \simeq -\pi$.

Autrement dit, la phase subit une transition d'autant plus abrupte que ζ est petit. A la limite $\zeta \rightarrow 0$, le système devient instable, la phase subit un saut discontinu et le maximum du pic d'amplitude tend vers l'infini. Il y a donc aussi un déphasage à hautes fréquences et pas à basses fréquences.

Il est à noter que le facteur 10 apparaissant dans les 3 cas est un choix d'approximation. D'autres méthodes existent, comme expliqué ici, mais nous considérerons cette manière simple de faire dans le cadre de ce TP.

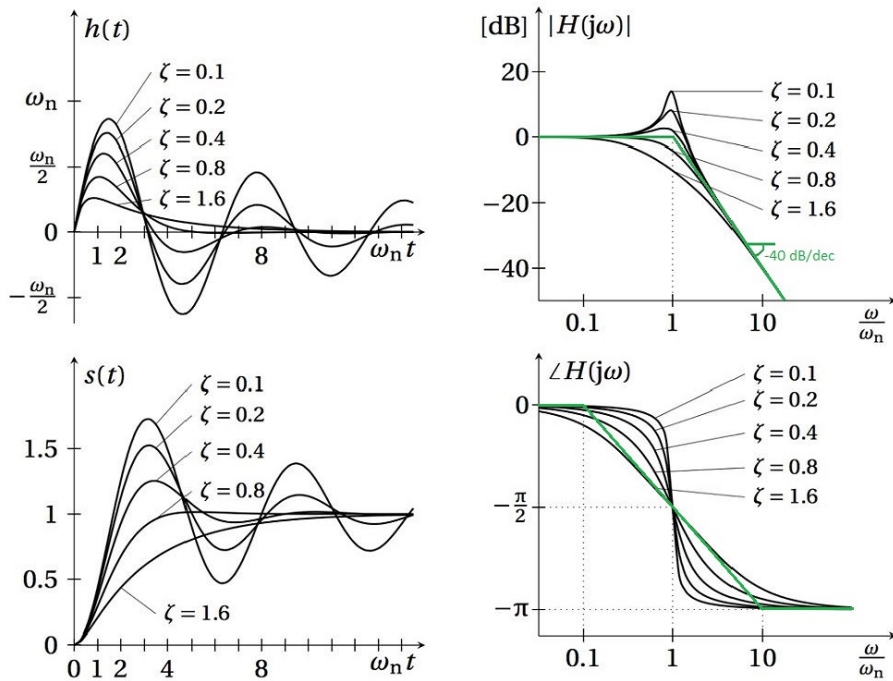


FIGURE 6 – Système d'ordre 2 pour $K = 1$: (top-left) réponse impulsionnelle $h(t)$, (bottom-left) réponse indicielle, (top-right) diagramme de Bode en amplitude, (bottom-right) diagramme de Bode en phase. Les courbes vertes correspondent aux courbes noires approximées et ω_n signifie ω_0 selon nos notations.

- Résumé pratique des diagrammes de Bode de systèmes d'ordre 2 à la Figure 7.

Dans le cadre d'applications réelles, on peut vouloir calculer l'amplitude du pic à la fréquence de résonance, ce qui n'est pas pris en compte par l'approximation présentée ci-avant qui ne dépend pas de ζ . La valeur est donnée par $|H(j\tilde{\omega})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$, mais il est fréquent de trouver la version simplifiée comme à la Figure 7 à droite.

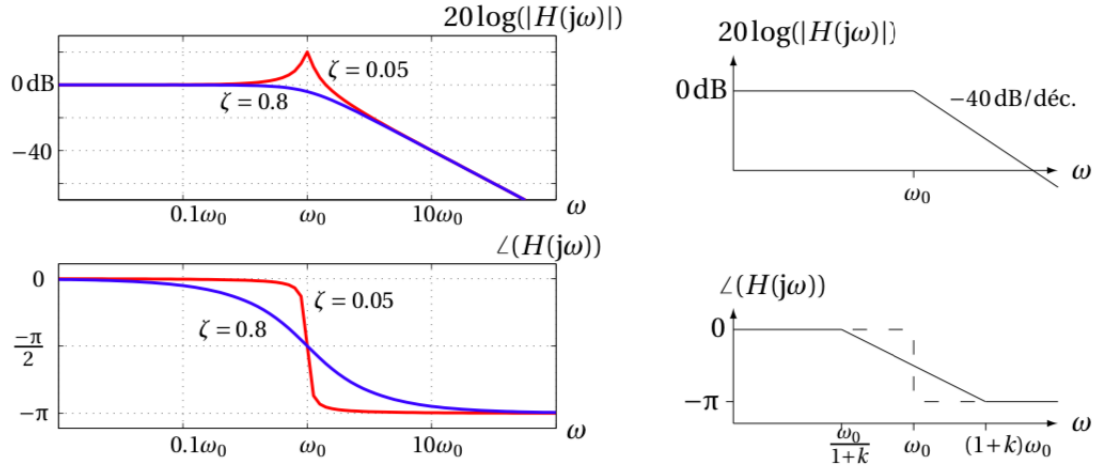


FIGURE 7 – Diagrammes de Bode de systèmes d'ordre 2 (version simplifiée à droite, où le facteur k est un paramètre de la méthode d'approximation choisie.)

1.3 Diagrammes de Bode : pratiques courantes

Dans les livres de référence ou les livres d'exercices, on voit souvent revenir quelques **pratiques courantes pour dessiner** les diagrammes en amplitude et en phase de $H(j\omega)$:

- L'axe des abscisses pour ω est en échelle logarithmique. Cela vient des résultats analytiques présentés ci-dessus mais cela permet également d'analyser de manière plus détaillée les basses fréquences, où une petite différence est bien plus importante qu'à hautes fréquences.
- L'axe des ordonnées peut être représenté en échelle logarithmique pour $|H(j\omega)|$ car cela permet une symétrie (les mêmes distances, poids, ...) entre atténuation et amplification. De plus, $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \Rightarrow \log |Y(j\omega)| = \log |H(j\omega)| + \log |U(j\omega)| \rightarrow$ facile à représenter !
- L'axe des ordonnées peut être exprimé en décibel tel que l'on dessine $20 \log(|H(j\omega)|)$.
- Échelle linéaire pour $\angle H(j\omega)$ (axe des ordonnées) car celle-ci peut être aussi bien négative que positive. De plus, $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega) \Rightarrow \angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle U(j\omega) \rightarrow$ facile à représenter !
- On notera que le graphe n'est représenté que pour $\omega > 0$ car si la réponse impulsionnelle $h(t)$ est une fonction réelle, l'amplitude de sa transformée de Fourier est paire et la phase de sa transformée de Fourier est impaire.

Décomposition en série de systèmes simples

Lorsqu'un système est décrit par la mise en série de sous-systèmes, on peut étudier la fonction de transfert du système total en utilisant les logarithmes à notre avantage. Si la fonction de transfert totale du système s'exprime comme la multiplication de fonctions plus simples tel que :

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)...H_n(s),$$

il suffit d'utiliser une échelle logarithmique :

$$\begin{aligned} 20 \log_{10}(|H(j\omega)|) &= 20 \log_{10}(|H_1(j\omega)||H_2(j\omega)|...|H_n(j\omega)|) \\ &= 20 \log_{10}(|H_1(j\omega)|) + 20 \log_{10}(|H_2(j\omega)|) + ... + 20 \log_{10}(|H_n(j\omega)|) \end{aligned}$$

De même, pour la phase :

$$\begin{aligned} \angle(H(j\omega)) &= \angle(e^{\angle H_1(j\omega)} e^{\angle H_2(j\omega)} ... e^{\angle H_n(j\omega)}) \\ &= \angle(H_1(j\omega)) + \angle(H_2(j\omega)) + ... + \angle(H_n(j\omega)). \end{aligned}$$

Dès lors, on peut étudier la décomposition en amplitude et en phase de chaque sous-système. Ensuite, on additionne les amplitudes et les phases.

Fonction de transfert sous forme rationnelle

Au TP précédent, on a insisté sur la factorisation de la fonction de transfert et sur sa décomposition en fractions simples. Ainsi, on utilise la forme factorisée de la fonction de transfert en systèmes d'ordre 1 et d'ordre 2.

Exemple de décomposition

En pratique, on se retrouve souvent face à des expressions comme celle-ci :

$$H(s) = \frac{K(s+a)}{(s+b)} \frac{(s^2 + \alpha s + \beta)}{(s^2 + \mu s + \gamma)} H_6(s)$$

$$a > 0, b > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \mu > 0, \gamma > 0.$$

Si tu penses avoir déjà bien compris les notions expliquées ci-dessus, essaye de faire les diagrammes de Bode (amplitude et phase) de $H(s)$ sans regarder ce qui suit. Cela te permettra de vérifier tes connaissances.



Schéma de résolution : tracer les diagrammes de Bode en amplitude et en phase

- 1- Analyser l'expression de la fonction de transfert globale et identifier les sous-systèmes *i.e.* les différents termes du produit.
- 2- Étudier chaque sous-système séparément et trouver la décomposition en amplitude et en phase.
- 3- Additionner les différents résultats obtenus pour donner le diagramme de Bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert générale.

étape 1 : décomposer en sous-systèmes

$$H_1(s) = K$$

$$H_2(s) = s + a$$

$$H_3(s) = \frac{1}{s + b}$$

$$H_4(s) = s^2 + \alpha s + \beta$$

$$H_5(s) = \frac{1}{s^2 + \mu s + \gamma}$$

étape 2 : décomposition en amplitude et en phase de chaque sous-système

Si la forme analytique du sous-système ressemble à une forme canonique étudiée, on peut éviter de tout recalculer et reprendre les résultats directement.

Pour notre exemple,

- $H_1(s) = K$:

L'amplitude est constante et vaut $20 \log(K)$. La phase est nulle pour toutes les valeurs de ω .

- $H_2(s) = s + a$ ($a > 0$) :

La pulsation de coupure est égale à a ; l'amplitude à basses fréquences est égale à $20 \log(a)$ et ensuite, à la pulsation de coupure, l'amplitude croît avec une pente de 20 dB/dec. La phase croît de 0 à $\pi/2$ entre $a/10$ et $10a$.

- $H_3(s) = \frac{1}{s + b}$ ($b > 0$) :

La pulsation de coupure est égale à b ; l'amplitude à basses fréquences est égale à $20 \log(1/b)$ et ensuite, à la pulsation de coupure, l'amplitude décroît avec une pente de -20 dB/dec. La phase décroît de 0 à $-\pi/2$ entre $b/10$ et $10b$ (les développements analytiques sont montrés au début du rappel).

- $H_4(s) = s^2 + \alpha s + \beta$:

On regarde d'abord si on peut décomposer le polynôme de deuxième ordre en deux polynômes de

premier ordre et ainsi revenir aux points précédents de décomposition en sous-systèmes d'ordre 1. Si le polynôme n'est pas factorisable (*i.e.* possède 2 racines complexes conjuguées), il faut appliquer les notions vues pour les systèmes d'ordre 2. Il faut donc revenir à la forme canonique identifiant les paramètres clés ζ et ω_0 avec $\alpha = 2\zeta\omega_0$ et $\beta = \omega_0^2$. L'amplitude à basses fréquences est donnée par $20\log(\beta)$. Il faut ensuite avoir les valeurs numériques pour continuer l'analyse. L'amplitude va croître de +40 dB/dec à partir de la pulsation de résonance et la phase va augmenter de 0 à $+\pi$ autour de la pulsation de résonance. La pulsation de résonance est donnée par $\tilde{\omega} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ et l'amplitude à la pulsation de résonance est $|H(j\tilde{\omega})| = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$ en unité naturelle.

- $H_5(s) = \frac{1}{s^2 + \mu s + \gamma}$:

On regarde d'abord si on peut décomposer le polynôme de deuxième ordre en deux polynômes de premier ordre, et ainsi revenir aux points précédents de décomposition en sous-systèmes d'ordre 1. Si le polynôme n'est pas factorisable, il faut appliquer les notions vues pour les systèmes d'ordre 2. Il faut donc revenir à la forme canonique identifiant les paramètres clés ζ et ω_0 depuis $\mu = 2\zeta\omega_0$ et $\gamma = \omega_0^2$. L'amplitude à basses fréquences est donnée par $20\log(1/\gamma)$. Il faut ensuite avoir les valeurs numériques pour continuer l'analyse. L'amplitude va décroître de -40 dB/dec à partir de la pulsation de résonance et la phase va chuter de 0 à $-\pi$ autour de la pulsation de résonance. La pulsation de résonance est donnée par $\tilde{\omega} = \omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}$ et l'amplitude à la pulsation de résonance est $|H(j\tilde{\omega})| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ en unité naturelle.

- $H_6(s)$ est une fonction de transfert d'un sous-système mais elle n'a pas une "forme canonique" (comme celles présentées de $H_1(s)$ à $H_5(s)$). L'expression peut être par exemple $H_6(s) = s - a$ ($a > 0$) ou $\frac{1}{s-b}$ ($b > 0$) ou Ke^{-t_0s} . Dès lors, il faut appliquer les outils de décomposition en amplitude et en phase précédents au début du rappel.

étape 3 : additionner tous les résultats obtenus.

Voir plus haut.

Bande passante à -3 dB

Dans de nombreux systèmes physiques, on s'intéresse à la variation d'énergie entre l'entrée et la sortie. On sait que l'énergie d'un signal passant par un système de fonction de transfert $H(s)$ est modulée par $|H(s)|^2$. Par conséquent, lorsque le gain (le diagramme de Bode en amplitude) vaut -3 dB, on a

$$20\log(|H(j\omega)|) = -3 \text{ dB} \longleftrightarrow 10\log(|H(j\omega)|^2) = -3 \text{ dB} \simeq 10\log(1/2),$$

et l'énergie d'un signal de fréquence ω est dans ce cas divisée par 2 en passant à travers le système³. La bande passante désigne l'intervalle de fréquences pour lesquelles l'atténuation du signal est inférieure à une valeur donnée. La bande passante à -3 dB d'un système désigne donc l'ensemble des fréquences pour lesquelles $|H(j\omega)|^2 \geq H^2/2$ où H peut désigner le maximum de puissance $\max_{\omega}|H(j\omega)|$ ou le gain statique $|H(0)|$ selon la convention.

Remarque

Pour un système *causal*, si un seul pôle est positif (sa partie réelle), alors le système est *instable*. Or, $H(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $h(t)$, qui n'existe pas si le système est instable! Dès lors, si $H(j\omega)$ n'existe pas, les diagrammes de Bode n'ont plus de sens! Pour un système **causal**, on peut donc tracer les **diagrammes de Bode si et seulement si le système est stable**.

Construction expérimentale d'un diagramme de Bode

La construction d'un diagramme de Bode peut se faire expérimentalement, sans connaître la fonction de transfert du système : en appliquant à l'entrée du système une sinusoïde de fréquence ω_0 et en la comparant à la sortie mesurée (après disparition des transitoires), on obtient facilement l'amplitude $|H(j\omega_0)|$ et la phase $\angle H(j\omega_0)$ du système à cette fréquence particulière. En répétant l'expérience pour différentes fréquences, on obtient différents points du diagramme de Bode.

3. Cette notion est utile notamment pour le cours de "Principes des télécommunications analogiques et numériques".

Filtres idéaux

Un filtre idéal est un système qui atténue l'amplitude du signal pour certaines fréquences. Rappelons que l'entrée peut être exprimée dans le domaine fréquentiel où l'on met en évidence le contenu fréquentiel. Le filtre quant à lui diminue (ou supprime) le contenu fréquentiel de l'entrée dans certaines bandes de fréquences mais laisse le contenu fréquentiel à d'autres fréquences inchangé. La Figure 8 illustre les différents filtres idéaux qui peuvent exister⁴. Comme tout système idéal, il n'existe pas en réalité mais certains systèmes s'en approchent.

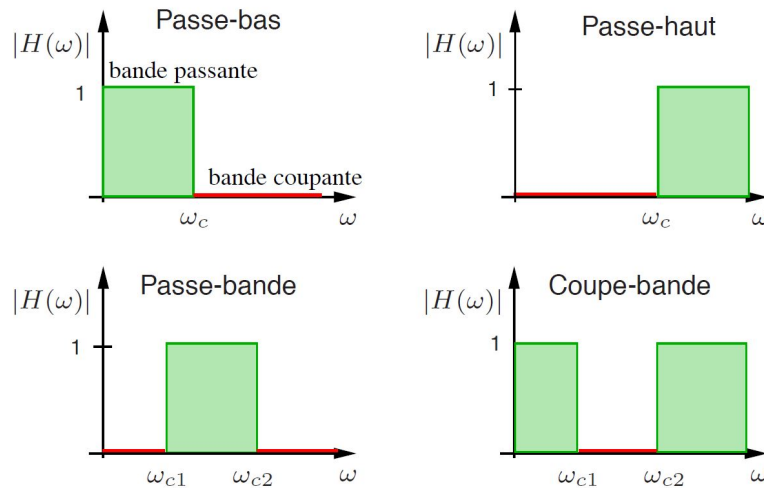


FIGURE 8 – Diagramme de Bode en amplitude de filtres idéaux

Notions clés

- Maîtriser le concept des diagrammes de Bode : origine, importance, fonctionnement.

Comment tracer un diagramme ?

- 1- Décomposer en sous-fonctions si possible.
- 2- Est-ce que l'expression correspond à une forme canonique ?

Forme canonique d'ordre 1 : $H(s) = \frac{1}{s/a+1}$

Forme canonique d'ordre 2 : $H(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}$

Est-ce que le dénominateur sous la forme du polynôme de deuxième ordre est factorisable ?

Oui > utiliser les outils associés à la forme canonique d'ordre 1

Non > utiliser les outils associés à la forme canonique d'ordre 2.

Oui, l'expression a une forme canonique → j'utilise les outils du cours développés pour les formes canoniques d'ordre 1 et d'ordre 2.

Non, l'expression n'a pas une forme canonique → je décompose l'expression complexe en son amplitude et sa phase qui sont des fonctions de ω .

- 3- Quelles sont les consignes concernant les graduations et unités ?

Amplitude en dB ou en unité naturelle ? Phase en degré ou en rad ? L'axe des abscisses est gradué selon une graduation linéaire ou logarithmique ?

4. Source : cours de Circuits Électriques - Bertrand Cornélusse - ULiège. Les notations sont légèrement différentes que celles utilisées dans le cadre du cours.

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 8.2 [TXB]

Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{30(s+8)}{s(s+2)(s+4)}.$$

Exercice 2 = Devoir 2020 Q3

On considère la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{-1/m}{s^2}$$

avec $m = 2$.

- Tracez le diagramme de Bode de la fonction de transfert. Le diagramme en amplitude a comme abscisse la pulsation selon une échelle linéaire (uniquement entre 1 rad/s et 10 rad/s) et en ordonnée, l'amplitude dans des unités naturelles selon une échelle linéaire. Le diagramme en phase est également dessiné avec la pulsation en abscisse selon une graduation linéaire (uniquement entre 1 rad/s et 10 rad/s) et l'ordonnée est en degré selon une échelle linéaire également.
- Tracez le diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert selon les conventions classiques c-à-d l'abscisse correspond à la pulsation selon une échelle logarithmique (entre 1 et 10 rad/s) et l'ordonnée correspond à l'amplitude en dB. Expliquez comment vous êtes passés-es du diagramme de la question a) à celui-ci (sur base d'explications mathématiques).

3 Exercices à faire

Exercice 3 = Aout 2021 [Online]

On considère la fonction de transfert suivante :

$$H = \frac{s - 1000}{s^2 + 2s + 64}$$

Dessiner le diagramme de Bode en amplitude et en phase.

- Détailler la construction du diagramme sur base de développement analytique de la décomposition en amplitude et en phase si les outils vus en cours ne sont pas applicables.
- L'axe des abscisses est gradué selon une échelle logarithmique entre 1 rad/s et 10000 rad/s. L'amplitude est donnée en décibels.
- Dessinez avec soin les diagrammes en indiquant explicitement les informations nécessaires à la compréhension des courbes (gain statique, pente, amplitude des pics si présents, la valeur de l'amplitude et de la phase en $\omega = 10000 \text{ rad/s}$,...)
- Convention mathématique :
si $a > 0$: $\arctan(b/a) \Rightarrow \arctan(b/a)$
si $a < 0$: $\arctan(b/a) \Rightarrow \arctan(b/a) + \pi$

Exercice 4 = Exercice 8.4 [TXB]

Soit le système causal représenté par un circuit RLC série avec $R = 1\Omega$, $C = 1F$ et $L = 1H$. L'entrée $u(t)$ est la tension au générateur et la sortie $y(t)$ est la tension aux bornes du condensateur.

- a) Déterminer la fonction de transfert $H(s)$ entre la tension d'entrée $u(t)$ et la tension de sortie $y(t)$, et spécifier sa région de convergence.
- b) A l'aide du diagramme de Bode en amplitude pour $H(s)$, établir le caractère passe-bas, passe-haut ou passe-bande du circuit.
- c) Procéder comme aux points a) et b) pour $R = 10^{-3}\Omega$.

Exercice 5 = Exercice 8.1 [TXB]

Tracer les diagrammes de Bode de la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{1 + \frac{s}{2}}{s^2}.$$

Exercice 6 = Janvier 2020 - Q3

4 Pour s'exercer

Exercice 7 = Exercice 8.9 [TXB]

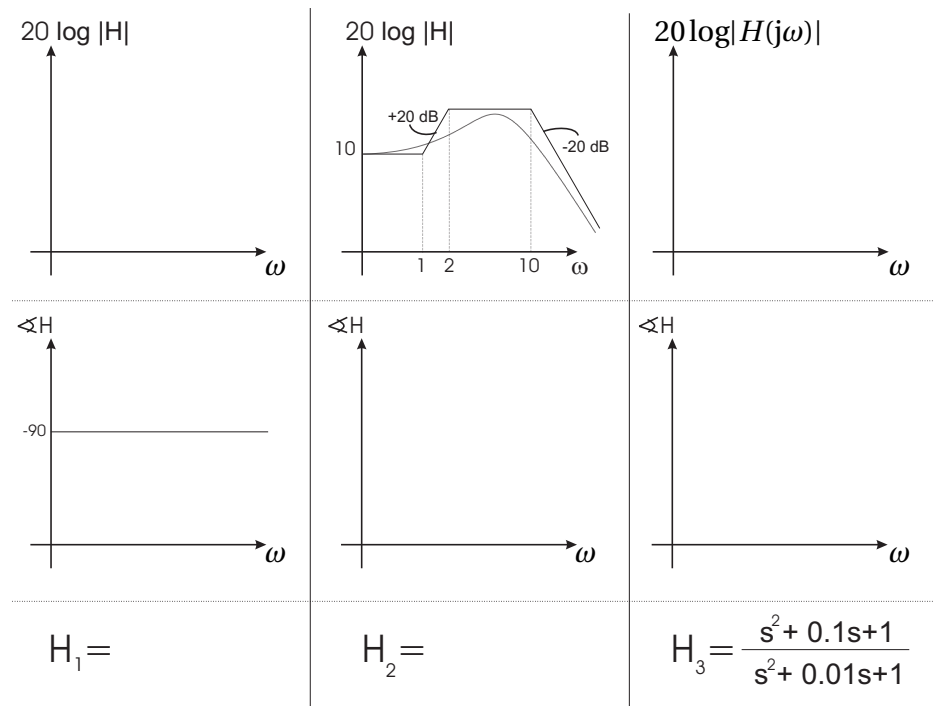
Tracer les diagrammes de Bode du système décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{y}(t) + 10\dot{y}(t) + 9y(t) = 180u(t).$$

Évaluer le gain statique.

Exercice 8 = Exercice 8.12 [TXB]

Pour chacun des systèmes LTI stables suivants, tracer le(s) diagramme(s) de Bode manquant(s) et donner une expression d'une fonction de transfert à coefficients réels leur correspondant. A quoi peut servir un filtre analogique de fonction de transfert H_3



Exercice 9 = Janvier 2020 - Q2 (ix)

Exercice 10 = Janvier 2019 - Q2 (viii-ix)

Exercice 11 = Aout 2019 - Q2 (viii)

5 Sources supplémentaires

Khan Academy 1 : https://www.youtube.com/watch?v=_eh1conN6YM

Khan Academy 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=CSAp9ooQRT0>

Khan Academy 3 : https://www.youtube.com/watch?v=02Cw_4zd-aU

Khan Academy 4 : https://www.youtube.com/watch?v=02Cw_4zd-aU

Khan Academy 5 : <https://www.youtube.com/watch?v=4d4WJdU61Js>

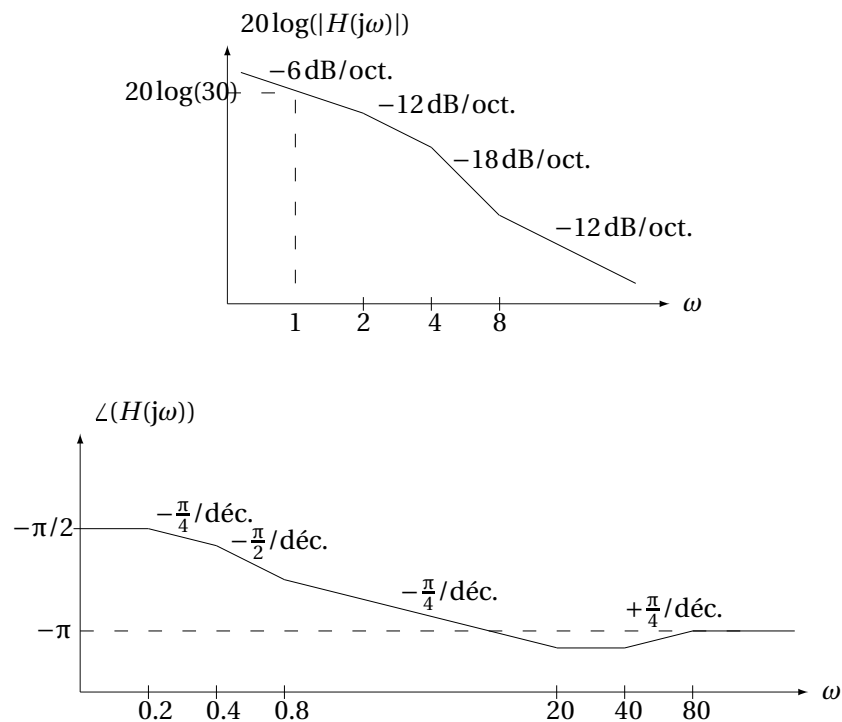
Khan Academy 6 : https://www.youtube.com/watch?v=GI1x9Yu__y8

https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Bode

<https://cahier-de-prepa.fr/psi-buffon/download?id=54>

TP11

Exercice 1 = Exercice 8.2 [TXB]



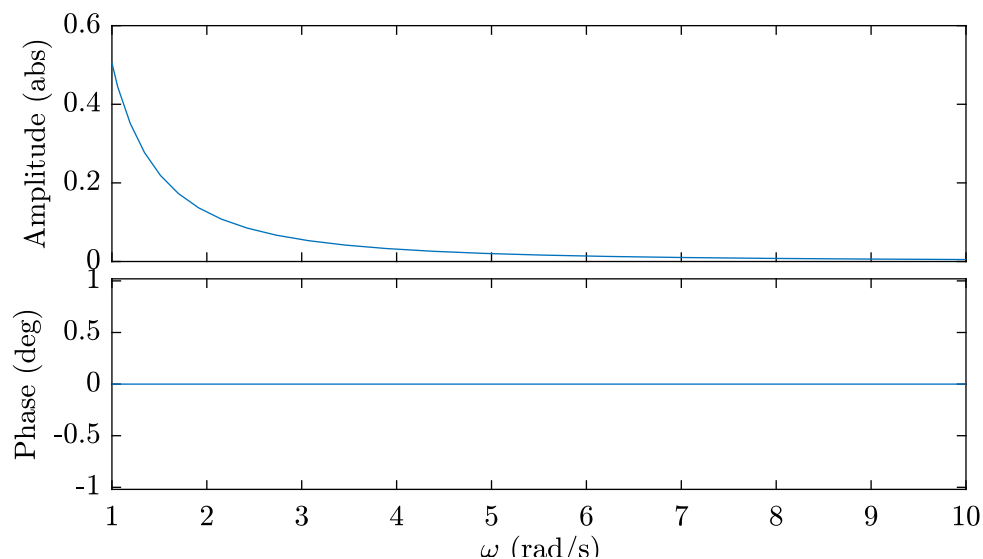
Exercice 2 = Devoir 2020 Q3

La fonction de transfert est donnée par $H(s) = \frac{-1/m}{s^2}$. Pour tracer son diagramme de Bode en amplitude et en phase, il suffit d'écrire $s = \sigma + j\omega$, de ne considérer que la partie $\sigma = 0$. On obtient $H(j\omega) = \frac{1/m}{\omega^2}$. En décomposant l'expression en amplitude et en phase, on obtient :

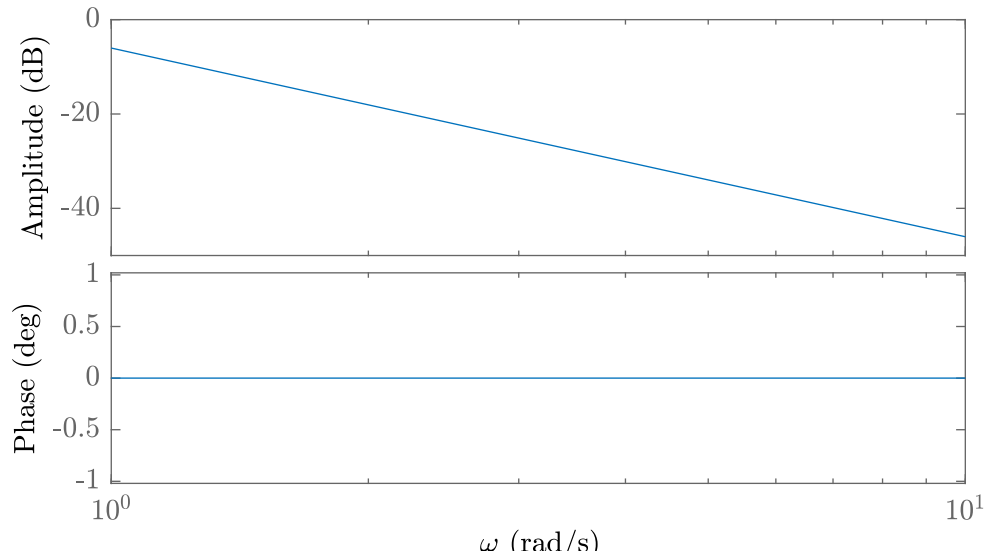
$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \exp(j\angle H(j\omega))$$

avec $|H(j\omega)| = \frac{-1/m}{j^2\omega^2} = \frac{1/m}{\omega^2}$ qui est simplement l'inverse d'une parabole et $\angle H(j\omega) = 0$ il n'y a aucun déphasage pour aucune pulsation

Diagrammes de Bode en amplitude et en Phase de H - graduation linéaire



Diagrammes de Bode en amplitude et en Phase de H - graduation conventionnelle



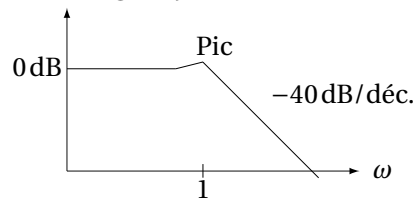
Exercice 3 = Aout 2021 [Online]

Exercice 4 = Exercice 8.4 [TXB]

Exercice 8.4 a) $H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$, pour $\Re(s) > -\frac{1}{2}$.

b)

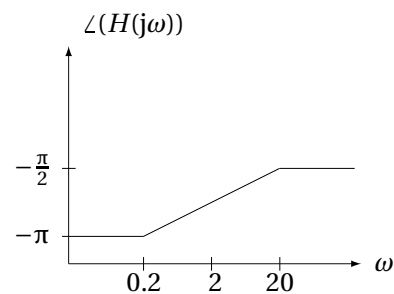
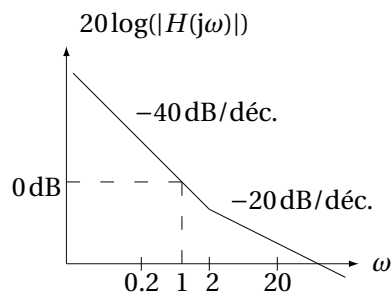
$20\log(|H(j\omega)|)$



Pic : $|H(j\omega_{\max})| = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1$, alors passe-bas.

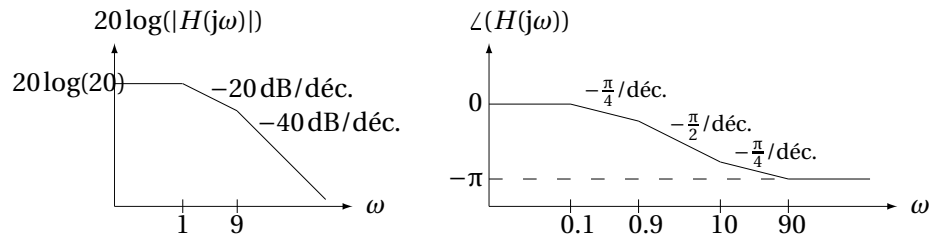
c) $H(s) = \frac{1}{s^2 + 0.001s + 1}$, pour $\Re(s) > -1/2000$. Même diagramme en amplitude que précédemment mais avec un pic où $|H(j\omega_{\max})| \approx 10^3$, alors passe-bande autour de $\omega \approx 1$.

Exercice 5 = Exercice 8.1 [TXB]



Exercice 6 = Janvier 2020 - Q3 [Online]

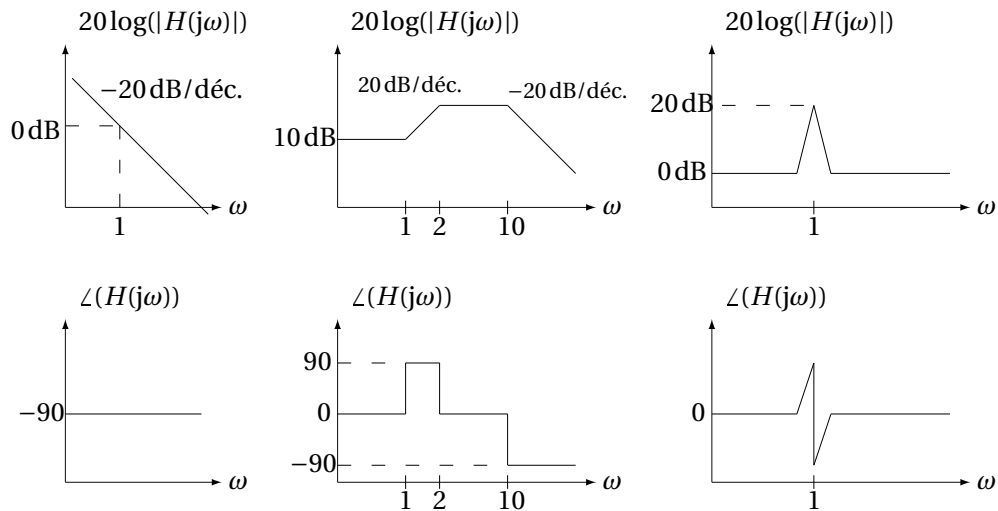
Exercice 7 = Exercice 8.9 [TXB]



Gain statique : $H(0) = 20$.

Bande passante à -3 dB : $|H(j\omega_{-3\text{dB}})|^2 = \frac{H(0)^2}{2}$, alors $\omega_{-3\text{dB}} = \sqrt{41 \left(\sqrt{1 + \frac{81}{41^2}} - 1 \right)} \approx 0.998$.

Exercice 8 = Exercice 8.12 [TXB]



$$H_1 = \frac{1}{s}$$

$$H_2 = \frac{\sqrt{10}(s+1)}{(s/2+1)(s/10+1)}$$

$$H_3 = \frac{s^2+0.1s+1}{s^2+0.01s+1}$$

Un filtre analogique de fonction de transfert H_3 permet d'extraire hors d'un signal une bande de fréquences restreinte autour de $\omega = 1$, par exemple pour sélectionner une chaîne de radio.

Exercice 9 = Janvier 2020 - Q2 [Online]

Exercice 10 = Janvier 2019 - Q2 [Online]

Exercice 11 = Aout 2019 - Q2 [Online]