

Annexe A

Transformées de Laplace et en z

Les tableaux qui suivent reprennent quelques formules élémentaires concernant les transformées de Laplace et en z . La plupart de ces formules peuvent être retrouvées facilement à partir des définitions des transformées. Il peut cependant être utile de mémoriser les formules les plus fréquentes, surtout celles liées aux transformées inverses. La consultation de ces tableaux sera interdite lors des évaluations (interrogations ou examens).

A.1 Transformées bilatérales

A.1.1 Propriétés de la transformée de Laplace bilatérale

On considère les signaux $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ de transformées respectives X_1 et X_2 et les régions de convergence associées ROC_1 et ROC_2 .

Propriété	Signal $x(\cdot)$	Transformée X	ROC
Linéarité	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Décalage temporel	$x_1(t - t_0)$	$e^{-st_0} X_1(s)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Décalage fréquentiel	$e^{s_0 t} x_1(t)$	$X_1(s - s_0)$	$s \in \text{ROC}_X$ si $s - s_0 \in \text{ROC}_1$
Changement d'échelle temporelle	$x_1(at)$	$\frac{1}{ a } X_1\left(\frac{s}{a}\right)$	$s \in \text{ROC}_X$ si $\frac{s}{a} \in \text{ROC}_1$
Complexe conjugué	$\overline{x_1}$	$\overline{X_1}(\overline{s})$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Convolution	$x_1 * x_2$	$X_1 X_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Dérivée temporelle	\dot{x}_1	$s X_1(s)$	$\text{ROC}_1 \subset \text{ROC}_X$
Dérivée fréquentielle	$-t x_1(t)$	\dot{X}_1	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Intégration temporelle	$\int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X_1(s)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$, év. $\cap \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$

A.1.2 Transformées de Laplace bilatérales élémentaires

Signal	Transformée	ROC
$\delta(t)$	1	\mathbb{C}
$\mathbb{I}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) > 0$
$-\mathbb{I}(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re(s) < 0$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re(s) > 0$
$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathbb{I}(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re(s) < 0$
$e^{-at} \mathbb{I}(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re(s) > -a$
$-e^{-at} \mathbb{I}(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re(s) < -a$
$\cos(\omega_0 t) \mathbb{I}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re(s) > 0$
$\sin(\omega_0 t) \mathbb{I}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re(s) > 0$

A.1.3 Propriétés de la transformée en z bilatérale

On considère les signaux $x_1[\cdot]$ et $x_2[\cdot]$ de transformées respectives X_1 et X_2 et les régions de convergence associées ROC_1 et ROC_2 .

Propriété	Signal $x[\cdot]$	Transformée X	ROC
Linéarité	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Décalage temporel	$x_1[n - n_0]$	$z^{-n_0} X_1(z)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$, év. $\cup \{0\}$ ou $\cap \{0\}$
Changement d'échelle fréquentielle	$z_0^n x_1[n]$	$X_1(\frac{z}{z_0})$	$z \in \text{ROC}_X$ si $\frac{z}{z_0} \in \text{ROC}_1$
Inversion temporelle	$x_1[-n]$	$X_1(z^{-1})$	$z \in \text{ROC}_X$ si $z^{-1} \in \text{ROC}_1$
Dilatation temporelle	$x_1[\frac{n}{k}], n \in k\mathbb{Z}$ 0, sinon	$X_1(z^k)$	$z \in \text{ROC}_X$ si $z^k \in \text{ROC}_1$
Complexe conjugué	$\overline{x_1}$	$\overline{X_1(\overline{z})}$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Convolution	$x_1 * x_2$	$X_1 X_2$	$\text{ROC}_1 \cap \text{ROC}_2 \subseteq \text{ROC}_X$
Dérivée fréquentielle	$-n x_1[n]$	$z \dot{X}_1(z)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$
Somme	$\sum_{k=-\infty}^n x_1[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X_1(z)$	$\text{ROC}_X = \text{ROC}_1$, év. $\cap \{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$

A.1.4 Transformées en z bilatérales élémentaires

Signal	Transformée	ROC
$\delta[n]$	1	\mathbb{C}
$\mathbb{I}[n]$	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-\mathbb{I}[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	\mathbb{C} sauf 0 si $m > 0$
$a^n \mathbb{I}[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$-a^n \mathbb{I}[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$na^n \mathbb{I}[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$-na^n \mathbb{I}[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $
$\cos(\omega_0 n) \mathbb{I}[n]$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1}$	$ z > 1$
$\sin(\omega_0 n) \mathbb{I}[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\omega_0)z + 1}$	$ z > 1$

A.2 Transformées unilatérales

A.2.1 Propriétés de la transformée de Laplace unilatérale

On considère les signaux $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ de transformées respectives X_1 et X_2 . Les régions de convergence associées se situent toujours à droite du pôle le plus à droite. La notation $x(0^-)$ désigne la condition initiale de x comme sa valeur limite à gauche en $t = 0$.

	Propriété	Signal $x(\cdot)$	Transformée
	Linéarité	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$
	Décalage fréquentiel	$e^{s_0 t} x_1(t)$	$X_1(s - s_0)$
	Changement d'échelle temporelle	$x_1(at), a > 0$	$\frac{1}{a} X_1(\frac{s}{a})$
	Complexe conjugué	$\overline{x_1}$	$\overline{X_1}(\overline{s})$
	Convolution (on suppose $x_1(t) = x_2(t) = 0$ pour $t < 0$)	$x_1 * x_2$	$X_1 X_2$
	Dérivée temporelle	\dot{x}_1	$sX_1(s) - x_1(0^-)$
	Dérivée fréquentielle	$-tx_1(t)$	$\dot{X}_1(s)$
	Intégration temporelle	$\int_0^t x_1(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X_1(s)$

A.2.2 Transformées de Laplace unilatérales élémentaires

Les transformées de Laplace unilatérales et bilatérales sont égales pour les signaux qui s'annulent pour $t < 0$. Les signaux non-singuliers en 0 et qui s'annulent pour $t > 0$ ont quant à eux une transformée de Laplace unilatérale nulle. Ces deux cas couvrent tous les signaux élémentaires considérés dans le tableau des transformées de Laplace bilatérales.

A.2.3 Propriétés de la transformée en z unilatérale

On considère les signaux $x_1[n]$ et $x_2[n]$ de transformées respectives $X_1(z)$ et $X_2(z)$. Les régions de convergence associées sont toujours le complément dans le plan complexe du cercle dont le rayon est égal à la norme du plus grand pôle.

	Propriété	Signal $x[\cdot]$	Transformée
	Linéarité	$ax_1 + bx_2$	$aX_1 + bX_2$
	Retard unitaire	$x_1[n-1]$	$z^{-1}X_1(z) + x_1[-1]$
	Avance unitaire	$x_1[n+1]$	$zX_1(z) - zx_1[0]$
	Changement d'échelle fréquentielle	$z_0^n x_1[n]$	$X_1(\frac{z}{z_0})$
	Dilatation temporelle	$x_1[\frac{n}{k}], n \in k\mathbb{Z}$ 0, sinon	$X_1(z^k)$
	Complexe conjugué	$\overline{x_1}$	$\overline{X_1(\overline{z})}$
	Convolution (on suppose $x_1[n] = x_2[n] = 0$ pour $n < 0$)	$x_1 * x_2$	$X_1 X_2$
	Dérivée fréquentielle	$-nx_1[n]$	$z\dot{X}_1(z)$
	Somme	$\sum_{k=0}^n x_1[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X_1(z)$

A.2.4 Transformées en z unilatérales élémentaires

Similairement aux transformées de Laplace, les transformées en z unilatérales et bilatérales sont égales pour les signaux qui s'annulent pour $n < 0$. Les signaux qui s'annulent pour $n \geq 0$ ont quant à eux une transformée de Laplace unilatérale nulle. Ces deux cas couvrent tous les signaux élémentaires considérés dans le tableau des transformées en z bilatérales.