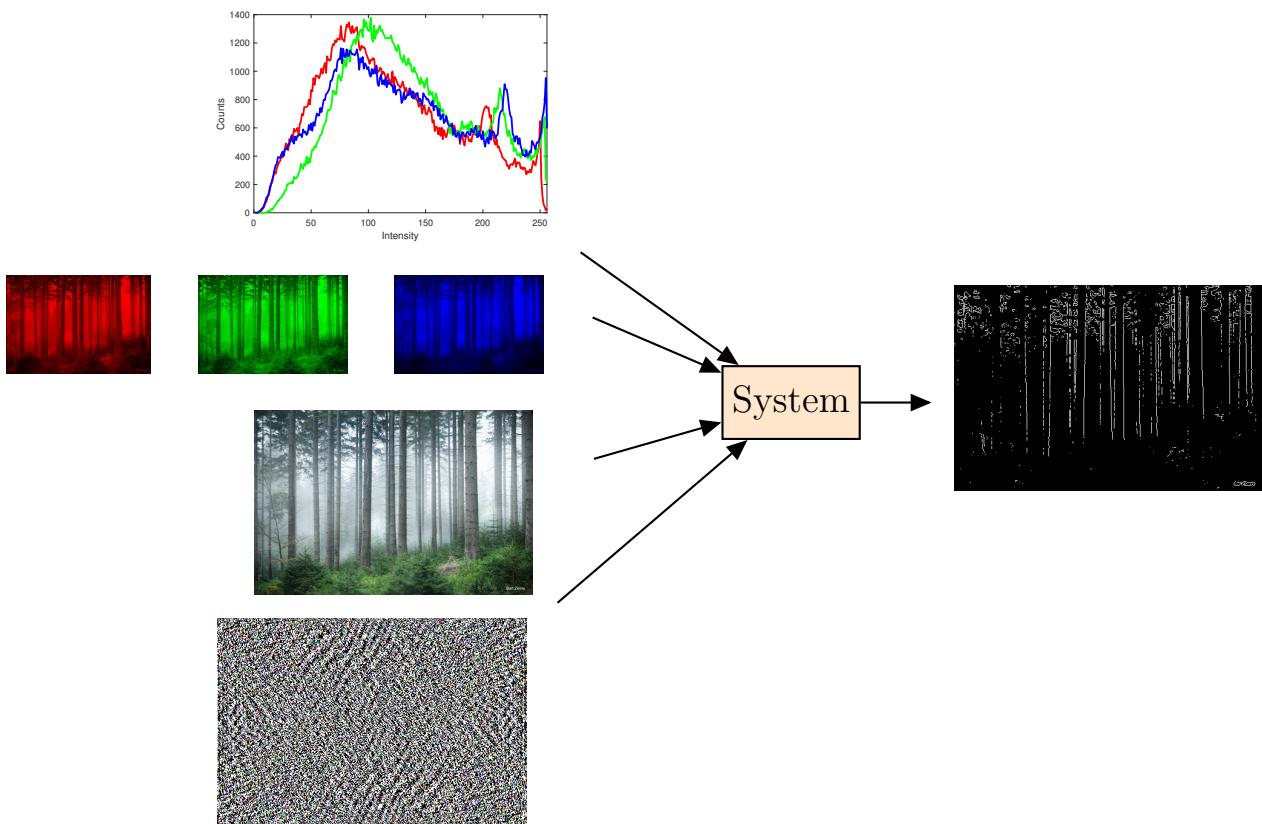


SYST0002 - Introduction aux signaux et systèmes

Fascicule d'exercices



Professeur	Guillaume Drion
Assistants	Caroline Dejace & Antoine Debord
Auteurs	Kathleen Jacquerie, Caroline Dejace & Antoine Debord

Avant-propos

Ce fascicule a été rédigé dans le cadre du cours de signaux et systèmes (SYST0002) pour les étudiant·es de l'Université de Liège. Il suit un format systématique afin de permettre une bonne compréhension des différents concepts du cours et de pouvoir les appliquer à des exercices.

Chaque TP est divisé en cinq parties :

- Concept : cette section résume les notions abordées durant les deux heures de cours théoriques.
- Exercices résolus au tableau : cette section reprend les énoncés et des schémas de résolution. Les réponses complètes sont expliquées en classe.
- Exercices à faire : les étudiant·es sont amené·es à pratiquer les notions théoriques avec les explications pratiques sur des nouveaux exercices. Ils/elles seront guidé·es par des schémas de résolution et encadré·es durant la séance de TP.
- Pour s'exercer : en dehors des deux heures de TP, nous proposons une série d'exercices supplémentaires pour s'entraîner d'avantage.
- Sources supplémentaires : nous proposons une série de vidéos, de références pour découvrir d'autres manières d'apprendre les concepts du cours.

Ce fascicule a été rédigé majoritairement par Kathleen Jacquerie. En septembre 2023, les nouveaux assistants pour le cours deviennent Caroline Dejace et Antoine Debord. Depuis lors, ceux-ci éditent et revoient le manuscrit de manière continue. N'hésitez pas à leur envoyer des remarques pour les typos ou autres coquilles à cdejace@uliege.be ou adebord@uliege.be. Ce manuscrit n'est pas peer-reviewed.

Légende



Schéma de résolution : piste pour guider dans la résolution d'un exercice



Section faite au tableau par l'étudiant·e-moniteur·rice



[XXX] Source de l'exercice

Sources

La section "Algèbre linéaire : concepts à maîtriser" se base sur le cours "Introduction of Linear Models" de Mark Goldman dans le cadre de la summer school Methods in Computational Neuroscience.

[TXB] Livre d'exercices des années précédentes (disponible en ligne) (uniquement temps-continu) : http://www.montefiore.ulg.ac.be/systems/SYST002/exercices2014_2015.pdf

[STR] Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, ... by Steven H. Strogatz.

[Online] Enoncé disponible sur la page du cours : <https://sites.google.com/site/gdrion25/teaching/syst0002> ou sur ecampus.

Photo de couverture : ©Bart Zimny.

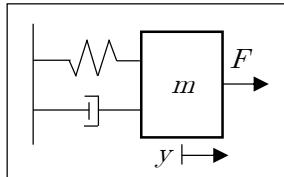
Table des matières

Signaux & Systèmes : résumé graphique du cours	4
Algèbre linéaire : concepts à maîtriser	7
1 Rappels sur les matrices	7
2 Vecteurs propres et valeurs propres	9
3 Résolution d'équations différentielles linéaires	10
4 Exercices à faire	14
TP1 : Notions signaux, systèmes et leurs propriétés	15
1 Concept	15
1.1 Distinction entre système et signal	15
1.2 Transformations de signaux	16
1.3 Propriétés des signaux	19
1.4 Propriétés des systèmes	19
2 Exercices résolus au tableau	22
3 Exercices à faire	23
4 Pour s'exercer	24
TP2 : Systèmes non-linéaires (1D)	26
1 Concept	26
1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires	26
1.2 Linéarisation et étude de stabilité	27
2 Exercices résolus au tableau	29
3 Exercices à faire	29
4 Pour s'exercer	31
TP3 : Systèmes non-linéaires (2D)	32
1 Concept	32
1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires à deux dimensions	32
1.2 Linéarisation d'un système à 2D autour des points fixes	34
1.3 ♡ Rappel Algèbre Linéaire : valeurs propres & vecteurs propres	36
1.4 Linéarisation et stabilité des points fixes	36
2 Exercices résolus au tableau	39
3 Exercices à faire	39
4 Pour s'exercer	40
5 Sources supplémentaires	42

SIGNALS & SYSTEMES: RÉSUMÉ

Problème réel

= mise en situation d'un système



TP1

Résolution ODE
 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$
 $x(t) = \dots$

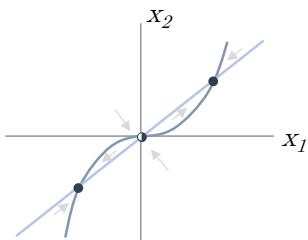
Propriétés des signaux et des systèmes:
causalité, linéarité, temps-invariance, ...

BAC]

Représentation 'Modèle d'état'

TP2,3

Comment étudier des systèmes + non linéaires 1D ou 2D



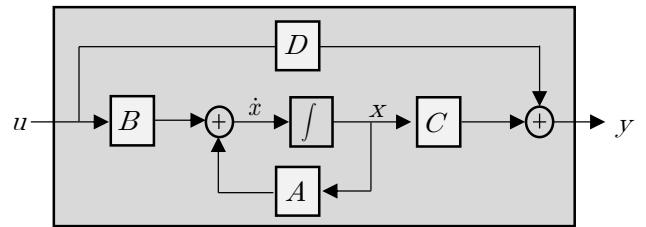
TP4

Comment trouver la représentation modèle d'état d'un problème réel ?
Est-ce que la représentation ABCD est possible? Comment faire le bloc diagramme?

- u
- y
- x
- $\dot{x} = f(x, u)$
- $y = g(x, u)$

TP2,3,5

· Linéarisation d'un système
· Représentation matricielle du système linéarisé



Représentation entrée-sortie

TP4-5 Équation entrée-sortie

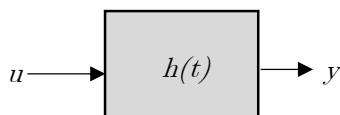
$$\alpha\ddot{y} + \beta\dot{y} + \gamma y = \delta\dot{u} + \epsilon u$$

- identification des variables d'état
- ou méthode des variables axillaires
- ou mise en bloc diagramme puis extraire les variables d'état

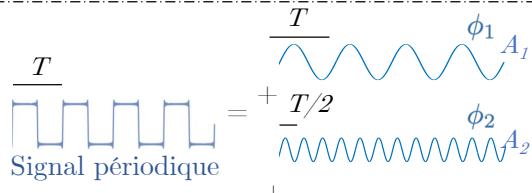
TP6

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

La convolution permet d'obtenir la sortie sur base de l'entrée u et de la réponse impulsionnelle h



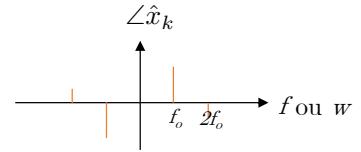
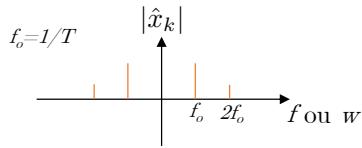
Série de Fourier



$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{x}_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$\hat{x}_k = \int_0^T x(t) e^{-jk\frac{2\pi}{T}t} dt, k \in \mathbb{Z}$$

Les coefficients de Fourier sont complexes: $\hat{x}_k = |\hat{x}_k| e^{j\angle \hat{x}_k}$
On peut dessiner le spectre en amplitude et en phase des coefficients.



TP7

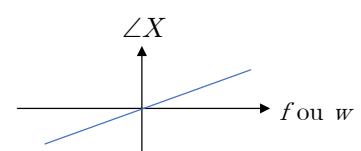
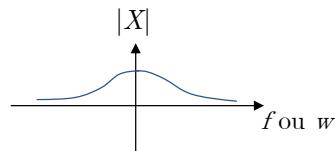
Transformée de Fourier

Signal non-périodique

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

La transformée de Fourier $X(jw)$ est une fonction complexe qui dépend de w .
On peut dessiner l'amplitude et la phase de la transformée en fonction de w .



TP8

Condition d'existence:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt < \infty$$

Transformée de Laplace

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

ROC: l'ensemble des valeurs complexes de la variable $s = \sigma + j\omega$ pour lesquelles l'intégrale existe.

Pour calculer $X(s)$, on essaye de repartir des transformées de Laplace usuelles et d'utiliser les propriétés.

TP9

Fonction de transfert

= transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle $h(t)$

DOMAINE FRÉQUENTIEL

TP10

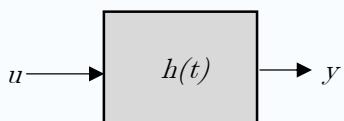
Description d'un système

Modèle d'état

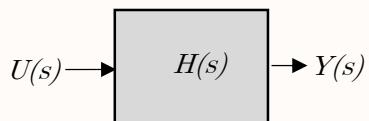
Équation entrée-sortie

Convolution

DOMAINE TEMPOREL



DOMAINE FRÉQUENTIEL



$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$H = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\alpha \ddot{y} + \beta \dot{y} + \gamma y = \delta \dot{u} + \epsilon u$$

$$H(s) = \frac{\delta s + \epsilon}{\alpha s^2 + \beta s + \gamma}$$

$$y(t) = h(t)*u(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

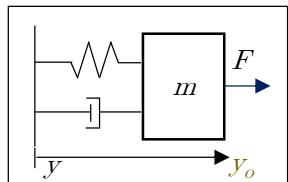
Obtenir $h(t)$ depuis $H(s)$

- en effectuant la décomposition en fractions simples
- puis, en appliquant les propriétés des transformées de Laplace

$$h(t) = e^{-at} I(t) \xrightarrow[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} H(s) = \frac{1}{s+a}$$

! ROC

Calcul de la réponse d'un système TP10



Calcul de la réponse forcée (U)

- $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$
- $Y_f(s) = H(s) U(s)$
- $Y_f(s) \xrightarrow{\mathcal{L}} y_f(t)$

Calcul de la réponse libre (C_l)

- $\cdot Y_l(s) = C(sI - A)^{-1}x[0]$
- $\cdot Y_l(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_l(t)$

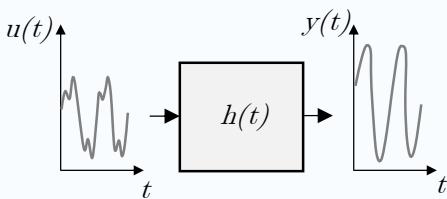
Transformée de Laplace unilatérale

Diagrammes de Bode TP11

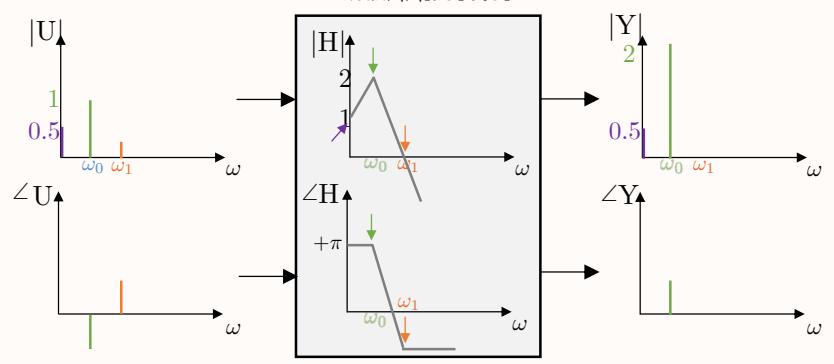
Décomposition en amplitude et en phase de la fonction de transfert (pour $\sigma = 0$)

$$H(jw) = \operatorname{Re}(H(jw)) + j \operatorname{Im}(H(jw)) = |H(jw)| e^{\angle H(jw)}$$

DOMAINE TEMPOREL



DOMAINE FRÉQUENTIEL



Utilisation des transformées

Algèbre linéaire : concepts à maîtriser

Ce chapitre est inspiré du cours théorique du Professeur Mark Goldman, de UC Davis, lors de la summer school "Methods in Computational Neuroscience". Le podcast est disponible via ce lien.

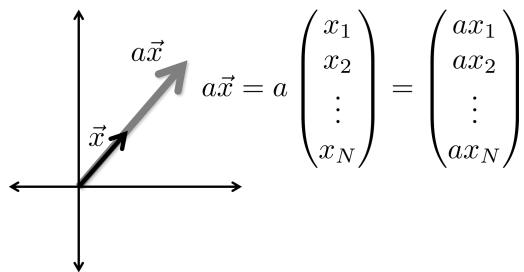
1 Rappels sur les matrices

- Addition de matrices :

On additionne les éléments un à un.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- Multiplication d'un vecteur par un scalaire $a\vec{x}$: chaque élément est multiplié par le scalaire. Sur le dessin, le vecteur reste dans la même direction mais change de longueur.



- Produit de deux vecteurs :

(1) Produit élément par élément :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

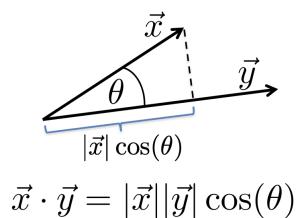
(2) "Dot product" (aussi appelé "inner product") :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N$$

Annotations below the equation:

- A blue curved arrow points from the term $x_1 y_1$ to the text "MATLAB: 'inner matrix dimensions must agree'".
- A red bracket labeled "1 X N" spans the row vector $(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N)$.
- A red bracket labeled "N X 1" spans the column vector $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$.
- A red bracket labeled "1 X 1" spans the result $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_N y_N$.
- A red arrow points from the text "Outer dimensions give size of resulting matrix" to the "1 X 1" bracket.

Intuitivement, on peut aussi représenter ce calcul en dessinant les vecteurs.



Le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs donne une indication de la superposition des deux vecteurs. Le produit est maximum quand les deux vecteurs sont superposés.

(3) "Outer product" :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}_{N \times 1} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_M \end{pmatrix}_{1 \times M} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_M \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_Ny_1 & x_Ny_2 & \cdots & x_Ny_M \end{pmatrix}_{N \times M}$$

- Multiplication d'une matrice et d'un vecteur :

(1) en utilisant le "inner product" : l'élément i du vecteur y est obtenu en calculant le dot product entre la i -ème rangée de W avec x .

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{i1} & W_{i2} & \cdots & W_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{M1} & W_{M2} & \cdots & W_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

(2) en utilisant le "outer product" :

Le produit est la somme pondérée des colonnes de W avec les entrées de x .

$$\vec{W}^{(1)} \downarrow \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1N} \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{M1} & W_{M2} & \cdots & W_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = x_1 \vec{W}^{(1)} + x_2 \vec{W}^{(2)} + \cdots + x_N \vec{W}^{(N)}$$

On peut visualiser ce calcul graphiquement :

$$\overleftarrow{\overrightarrow{M}} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- Note: different combinations of the columns of M can give you any vector in the plane**
(we say the columns of M "span" the plane)

- Produit de deux matrices :

(1) en utilisant le "inner product" :

L'élément ij s'obtient en calculant le "inner product" de la i -ème rangée de A avec la j -ième colonne de B : $C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1P} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{iP} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2j} & \cdots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{Pj} & \cdots & B_{PM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NM} \end{pmatrix}$$

(2) en utilisant le "outer product" :

La matrice C est le "outer product" entre les colonnes de A et les rangées de B .

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1P} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{iP} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1M} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{P1} & B_{P2} & \cdots & B_{PM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1M} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NM} \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} A^{c1} \\ A^{c2} \\ \vdots \\ A^{cP} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} B^{r1} \\ B^{r2} \\ \vdots \\ B^{rP} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} A^{c1} \\ A^{c2} \\ \vdots \\ A^{cP} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} B^{r1} \\ B^{r2} \\ \vdots \\ B^{rP} \end{array} \right) + \dots + \begin{pmatrix} A^{c1} \\ A^{c2} \\ \vdots \\ A^{cP} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} B^{r1} \\ B^{r2} \\ \vdots \\ B^{rP} \end{array} \right)$$

2 Vecteurs propres et valeurs propres

Introduction

Que font les matrices aux vecteurs ?

$$\overleftrightarrow{M} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- The new vector is:
- 1) **rotated**
- 2) **scaled**

Existent-ils des vecteurs "spéciaux" qui ne subissent qu'une mise à l'échelle ?
Si on utilise par exemple le vecteur colonne écrit $(1, 1)^T$:

$$\overleftrightarrow{M} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour ce vecteur "particulier", multiplier \overleftrightarrow{M} par ce vecteur donne exactement la même chose que multiplier le vecteur par un scalaire. Ce vecteur est appelé *vecteur propre* de \overleftrightarrow{M} et le facteur de multiplication est la *valeur propre* associée à ce vecteur propre. Mathématiquement, on écrit : $\overleftrightarrow{M} \vec{e} = \lambda \vec{e}$, où \vec{e} dénote un vecteur propre de \overleftrightarrow{M} . Les vecteurs propres sont définis à un scalaire près. Par convention, on indique souvent le premier élément du vecteur égal à 1.

Comment calculer les valeurs propres et les vecteurs propres ?

Il suffit de résoudre l'équation : $(\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{1}) \vec{e} = 0$ pour $\vec{e} \neq 0$, avec $\overset{\leftrightarrow}{1}$ la matrice identité de même taille que $\overset{\leftrightarrow}{M}$. Cela revient à calculer cette expression : $\det(\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{1}) = 0$. On appelle cette expression le polynôme caractéristique pour λ . Une fois les valeurs propres identifiées, les vecteurs propres associés peuvent être déterminés en remplaçant λ dans $(\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{1}) \vec{e} = 0$.

Pour plus d'informations, consultez cette vidéo (de la chaîne YouTube 3blue1brown).

Applications

On utilise souvent le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres dans le domaine de la réduction de dimensionnalité, par exemple dans la technique d' "Analyse en Composantes Principales" ("Principal Component Analysis" (PCA), en anglais). Les vecteurs propres permettent de calculer la direction de variance maximale dans les données.

Plus d'informations sur la PCA :

- lien 1
- lien 2

3 Résolution d'équations différentielles linéaires

Équation différentielle à 1D sans entrée

On démarre avec une équation différentielle à 1D (à coefficient constant) :

$$\dot{x} = -ax$$

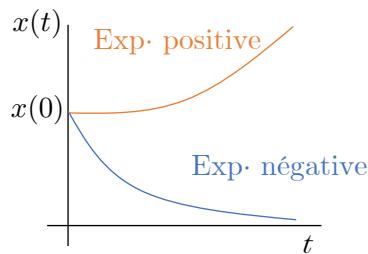
En bac 1, la résolution analytique pour cette équation a été détaillée :

$$x(t) = x(0)e^{-at}$$

Si a est positif, il s'agit d'une exponentielle décroissante car le coefficient sur l'exponentielle est négatif. La fonction démarre à la condition initiale $x(0)$ et converge vers 0 (courbe bleue sur la figure ci dessous). Dans le cas contraire, si le coefficient de l'exponentielle est positif, la fonction diverge (courbe orange). On peut également écrire cette expression à l'aide d'une constante de temps, τ_x :

$$\tau_x \dot{x} = -x$$

La constante de temps décrit la rapidité avec laquelle x tend vers 0 (quand l'exponentielle est décroissante). Plus la valeur est grande, plus la convergence est lente.



Équation différentielle à 1D avec entrée

On peut compliquer l'équation et faire intervenir une constante b (dans le reste du cours, on appellera cela une entrée au système) telle que :

$$\dot{x} = -ax + b$$

On peut réécrire : $\dot{x} = -a(x - b/a)$.

Pour résoudre facilement cette équation, on va revenir au cas précédent car on connaît la solution de cette équation. Pour cela, il suffit de poser $u = x - b/a$. L'équation devient :

$$\dot{u} = -au$$

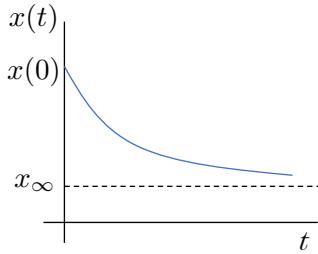
La solution est donnée par :

$$u(t) = u(0)e^{-at}$$

Il suffit de remplacer pour retrouver la solution en terme de x :

$$x(t) - b/a = (x(0) - b/a)e^{-at}$$

Graphiquement, x converge vers son état stationnaire ("steady-state" en anglais) à partir de sa condition initiale. On comprend que c'est la différence entre la condition initiale et la valeur à l'infini qui décroît au cours du temps.



On peut écrire une forme générale pour une équation différentielle de premier ordre :

$$\tau_x \dot{x} = x_\infty - x$$

♡ Cette équation se lit telle que x converge vers x_∞ avec une constante de temps τ_x .

Leurs valeurs sont données par $\tau_x = 1/a$ et $x_\infty = b/a$ (la valeur de l'entrée divisée par le facteur de l'exponentielle). La réponse du système écrit sous cette forme est donnée par :

$$x(t) = (x(0) - x_\infty)e^{-t/\tau_x} + x_\infty$$

Systèmes d'équations différentielles

On passe maintenant à un système d'équations différentielles :

$$\dot{x}_1 = M_{11}x_1 + M_{12}x_2 + I_1$$

$$\dot{x}_2 = M_{21}x_1 + M_{22}x_2 + I_2$$

On peut écrire matriciellement cette expression :

$$\dot{\vec{x}} = \overset{\leftrightarrow}{M}\vec{x} + \vec{I}$$

Les deux variables x_1 et x_2 sont couplées. Pour obtenir la solution analytique de x_1 , on a besoin de celle de x_2 et vice-versa. Pour résoudre ce système, il faut suivre une procédure en 4 parties. Le but est d'exprimer les équations dans un nouveau système de coordonnées où les deux variables sont découplées. On revient ainsi au cas simple à 1D présenté ci-dessus.

étape 1 : On calcule les valeurs propres et les vecteurs propres.

En effet, $\overset{\leftrightarrow}{M}$ est la matrice de couplage. On peut donc utiliser les vecteurs propres pour transformer cette matrice : $\overset{\leftrightarrow}{M}\vec{e} = \lambda\vec{e}$.

étape 2 : On décompose \vec{x} et \vec{I} selon les deux vecteurs propres associés à $\overset{\leftrightarrow}{M}$:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \sum_i c_i \vec{e}^{(i)} = c_1 \vec{e}^{(1)} + c_2 \vec{e}^{(2)} \\ \vec{I} &= \sum_i b_i \vec{e}^{(i)} = b_1 \vec{e}^{(1)} + b_2 \vec{e}^{(2)}\end{aligned}$$

On ne connaît pas les termes c_1 et c_2 car ils correspondent aux solutions analytiques de x_1 et x_2 dans le nouveau système de coordonnées (*i.e.* le système donné par les directions des vecteurs propres). Ce sont encore des inconnues à ce stade-ci. Les valeurs de b_1 et b_2 peuvent être estimées soit par identification des coefficients, soit en calculant analytiquement le produit $\vec{b} = \overset{\leftrightarrow}{E^{-1}} \vec{I}$, avec E^{-1} la matrice des vecteurs propres, *i.e.* chaque colonne est un vecteur propre.

étape 3 : On injecte b et c dans le système pour remplacer \vec{x}^1 .

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\sum_i^N c_i \vec{e}^{(i)} \right) &= \overset{\leftrightarrow}{M} \left(\sum_i^N c_i \vec{e}^{(i)} \right) + \sum_i^N b_i \vec{e}^{(i)} \\ \sum_i^N \frac{dc_i}{dt} \vec{e}^{(i)} &= \sum c_i \overset{\leftrightarrow}{M} \vec{e}^{(i)} + \sum_i^N b_i \vec{e}^{(i)} \\ \sum_i^N \frac{dc_i}{dt} \vec{e}^{(i)} &= \sum c_i \lambda_i \vec{e}^{(i)} + \sum_i^N b_i \vec{e}^{(i)}\end{aligned}$$

C'est ici que la "magie" s'opère car on remplace un système d'équations différentielles couplées via la matrice $\overset{\leftrightarrow}{M}$ par un système d'équation différentielle de premier ordre. Ce nouveau système découplé est facile à résoudre, en utilisant simplement les résultats obtenus aux sections précédentes. On peut faire cela car on passe du système de coordonnées (x_1, x_2) au système de coordonnées $(e^{(1)}, e^{(2)})$ dans lequel les variables ne sont plus couplées. On obtient donc deux équations différentielles simples d'ordre 1² :

$$\begin{aligned}\frac{dc_1}{dt} &= \lambda_1 c_1 + b_1 \\ \frac{dc_2}{dt} &= \lambda_2 c_2 + b_2\end{aligned}$$

La solution s'obtient facilement :

$$\begin{aligned}c_1(t) &= (c_1(0) - c_{1,\infty}) e^{\lambda_1 t} + c_{1,\infty} \\ c_2(t) &= (c_2(0) - c_{2,\infty}) e^{\lambda_2 t} + c_{2,\infty}\end{aligned}$$

avec $c_{1,\infty} = -b_1/\lambda_1$, $c_{2,\infty} = -b_2/\lambda_2$. Pour le calcul des conditions initiales, on sait que $\vec{x} = \overset{\leftrightarrow}{E} \vec{c}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}x_1(0) &= c_1(0)e_1^{(1)} + c_2(0)e_1^{(2)} \\ x_2(0) &= c_1(0)e_2^{(1)} + c_2(0)e_2^{(2)}\end{aligned}$$

Il suffit de résoudre ce système pour trouver $c_1(0)$ et $c_2(0)$ sur base des conditions initiales données en $x_1(0)$ et $x_2(0)$.

étape 4 : On écrit le système de solutions pour $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1(t)e_1^{(1)} + c_2(t)e_1^{(2)} \\ x_2(t) &= c_1(t)e_2^{(1)} + c_2(t)e_2^{(2)}\end{aligned}$$

Exemple

On considère le système d'équations différentielles suivant,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0x_1 + 3x_2 - 2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + 3,\end{aligned}$$

-
1. On laisse tomber les indices sur le symbole sommatoire pour alléger le calcul.
 2. Prendre note du changement de convention pour les signes : au lieu d'avoir $-a$ devant la variable x comme dans les paragraphes précédents on a λ .

avec les conditions initiales $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 0$. On peut déduire la matrice de couplage et la matrice d'entrée :

$$\overset{\leftrightarrow}{M} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{I} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On peut résoudre ce système à l'aide des 4 étapes détaillées ci-dessus :

étape 1 : Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres :

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda \overset{\leftrightarrow}{1}) = 0 \iff \lambda_1 = 3 \text{ et } \lambda_2 = -2.$$

Les vecteurs propres associés sont ceux donnés par :

$$\begin{cases} (\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda_1 \overset{\leftrightarrow}{1}) \overset{\rightarrow}{e^{(1)}} = 0 \\ (\overset{\leftrightarrow}{M} - \lambda_2 \overset{\leftrightarrow}{1}) \overset{\rightarrow}{e^{(2)}} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \overset{\rightarrow}{e^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \overset{\rightarrow}{e^{(2)}} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

étape 2 : On décompose l'entrée dans le nouveau système de coordonnées :

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} -1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour calculer b_1 et b_2 , on peut soit faire par inspection et trouver les coefficients qui donnent le vecteur $\overset{\leftrightarrow}{I}$ directement, soit utiliser la formule : $\vec{b} = \overset{\leftrightarrow}{E}^{-1} \overset{\leftrightarrow}{I}$. Par inspection, on trouve ici que $b_1 = 1$ et $b_2 = 2$.

étape 3 : On trouve la solution pour $c_1(t)$ et $c_2(t)$ en remplaçant dans la formule démontrée ci-dessus avec $c_{1,\infty} = -b_1/\lambda_1$, $c_{2,\infty} = -b_2/\lambda_2$ et les conditions initiales telles que $c_1(0) = 0$ et $c_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (c_1(0) - c_{1,\infty})e^{\lambda_1 t} + c_{1,\infty} = -1/3 + 1/3e^{3t} \\ c_2(t) &= (c_2(0) - c_{2,\infty})e^{\lambda_2 t} + c_{2,\infty} = 1 - 1e^{-2t}. \end{aligned}$$

étape 4 : On utilise les solutions trouvées en $c(t)$ pour décrire la réponse en $x(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1(t)1 + c_2(t)(-1.5) = -1/3 + 1/3e^{3t} + (-3/2) + (3/2)e^{-2t} \\ x_2(t) &= c_1(t)1 + c_2(t)1 = -1/3 + 1/3e^{3t} + 1 - e^{-2t} \end{aligned}$$

♡ Il est intéressant de noter que la dynamique du système est gouvernée par les valeurs propres.

Notions clés

- Calculs élémentaires avec les vecteurs et les matrices
- Comprendre géométriquement les opérations dans le plan
- Être capable de calculer les vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice
- Comprendre l'interprétation géométrique des vecteurs propres et des valeurs propres
- Avoir des notions du concept de "Principal Component Analysis" (PCA)
- Résoudre une équation différentielle simple avec et sans entrée
- Comprendre l'utilisation des vecteurs propres et valeurs propres dans le découplage d'un système d'équations différentielles
- Découpler un système d'équations différentielles et résoudre entièrement le système

4 Exercices à faire

Exercice 1 = Devoir 1 (2020)

Le système dynamique à deux dimensions est caractérisé par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculer $x(t)$ et $y(t)$ à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres et discuter la stabilité du système.

Schéma de résolution : découplage d'équation différentielle

- 1- Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres
- 2- Décomposer les variables x et y selon les vecteurs propres (directions préférentielles pour découpler le système)
- 3- Remplacer le système \dot{x}, \dot{y} par sa décomposition en considérant des conditions initiales génériques
- 4- Résoudre le système et obtenir $x(t), y(t)$
- 5- Discuter la stabilité

Remarque : Essayer de bien comprendre les différents termes qui apparaissent dans la résolution de votre système d'équations différentielles linéaires couplées.



TP1 : Signaux, systèmes et leurs propriétés

1 Concept

1.1 Distinction entre système et signal

Un système peut être vu comme une boîte noire qui transforme un certain nombre de signaux d'entrée en un certain nombre de signaux de sortie.

- But : modéliser un processus.

- Domaines d'application : biologie, chimie, électricité, mécanique, finance, ...

Le concept de système peut être schématisé comme ci-dessous : on s'intéresse à la transformation des entrées en sorties.



La Figure 1 illustre le principe de modélisation d'un neurone sous forme de système. L'expérimentateur·rice injecte du courant dans un neurone de rat et s'intéresse à la tension membranaire mesurée en sortie. La dynamique interne du neurone peut être modélisée par une "boîte noire".

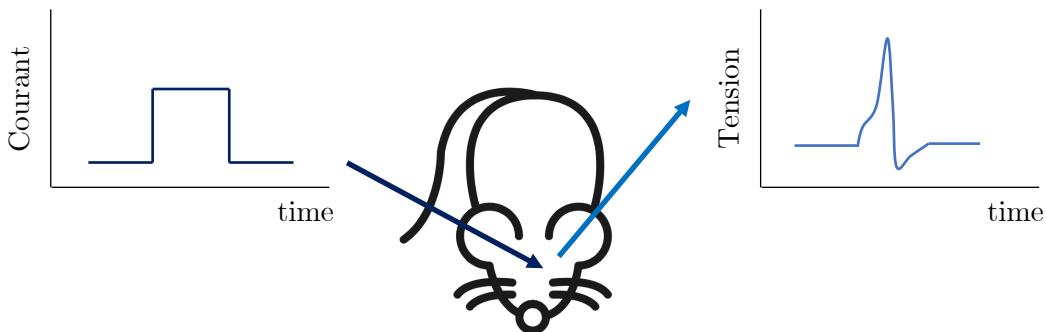


FIGURE 1 – Exemple de système : mesure de la tension au niveau d'un neurone

Un signal transporte l'information d'un point à un autre alors qu'un système agit sur le signal dit "d'entrée" pour en produire une version modifiée, dite "de sortie".

Un signal peut être continu, comme par exemple un courant électrique ou une onde acoustique, mais également discret, comme par exemple une représentation digitale d'un signal audio (MP3) ou d'une image (JPEG). On parle également de signaux analogiques et numériques. Lorsque ce signal évolue en fonction du temps, on parlera de signal temps-continu et temps-discret, respectivement.

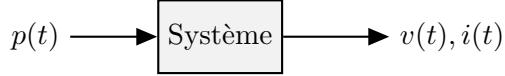
Mathématiquement, cette distinction vient de la variable indépendante, qui peut être :

- soit continue (généralement t), on écrira alors $u(\cdot)$ pour représenter le signal temps-continu u . Le domaine³ de la variable indépendante est un ensemble continu (ex : \mathbb{R}).
- soit discrète (généralement n), on écrira alors $u[\cdot]$ pour représenter le signal temps-discret u . Le domaine de la variable indépendante est un ensemble discret (ex : \mathbb{N}).

3. L'ensemble des valeurs de la variable indépendante pour lesquelles le signal est défini.

La variable indépendante continue est fréquemment le temps t mais il peut également s'agir d'une distance, de la pression, de la température, etc. Une variable indépendante discrète peut impliquer une discréétisation d'une variable continue, comme par exemple la discréétisation de l'espace en pixels discrets pour la représentation numérique d'une image.

Par exemple, considérons un microphone. Celui-ci peut être vu comme un système qui convertit une pression (due au mouvement de l'air) en un signal électrique.



Ces signaux sont continus dans le temps (la variable indépendante). On parlera d'un système continu, ou analogique. Si les signaux en sortie sont convertis en signaux discrets pour, par exemple, un traitement numérique par ordinateur du son enregistré, ce système de traitement sera alors considéré comme un système discret, ou numérique.

Un système est alors dit continu (resp. discret) s'il manipule des signaux continus (resp. discrets). Cette distinction vient du domaine des signaux.

1.2 Transformations de signaux

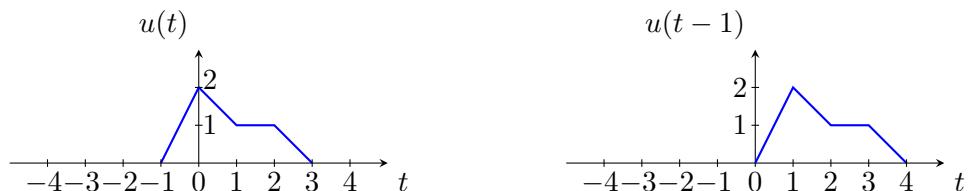
Lorsqu'un signal traverse un système, ce signal est transformé. Voici un récapitulatif des transformations affines, *i.e.* les opérations de base que peut subir un signal.

Décalage temporel

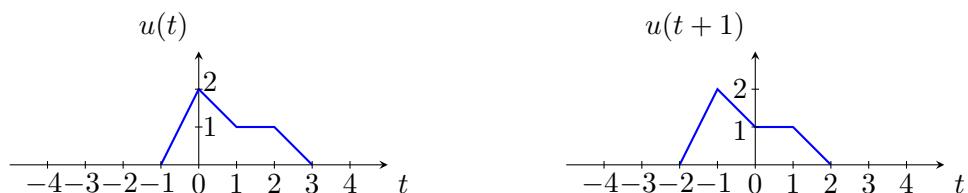


- $\sigma > 0$: décalage vers la droite. Intuitivement, $t - \sigma$ représente un *retard* de σ secondes.

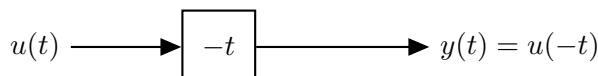
Cette transformation peut être illustrée par le schéma ci-dessous qui représente un courant qui varie au cours du temps. Au temps $t = 0$, l'expérimentateur·rice mesure initialement 2[A]. Si le signal est retardé d'une seconde par un système, l'expérimentateur·rice mesurera 0[A] au lieu de 2[A] en $t = 0$. En effet, la courbe s'est déplacée d'une unité vers la droite car elle a subi un retard.



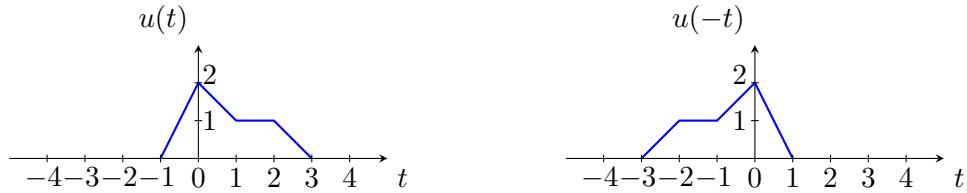
- $\sigma < 0$: décalage vers la gauche. Le signal est *avancé*.



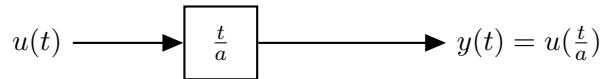
Inversion temporelle



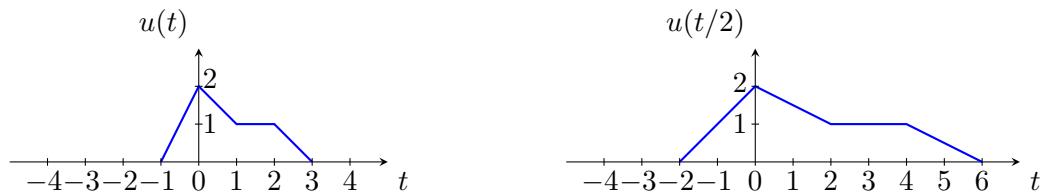
Rotation de 180° selon l'axe des ordonnées = miroir selon l'axe des y.



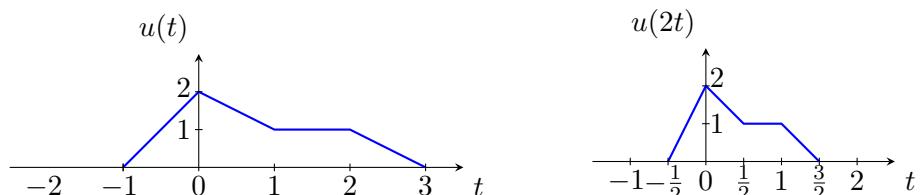
Dilatation ou contraction



- $a > 1 : t \rightarrow \frac{t}{a}$. Mathématiquement, la constante a affecte le signal selon l'axe des abscisses. Autrement dit, le signal est *dilaté*. Le temps est "divisé par a ", ce qui implique que le signal s'étale sur une durée a fois plus longue (dilatation). Cependant, l'amplitude du signal reste inchangée. Par exemple, lorsqu'une musique est jouée sur un MP3, si la vitesse d'écoute du MP3 est modifiée (vitesse $\times \frac{1}{2}$) : le signal sonore est étalé dans le temps. Les sons sont prononcés plus lentement mais l'amplitude reste la même.



- $a < 1 \implies \frac{1}{a} > 1 : (\text{ex. } \frac{1}{0.5} = 2t)$. A l'inverse du cas précédent, cette fois, le bouton $\times 2$ du MP3 est pressé, le signal sonore (ou la vidéo, dans un autre contexte) est accéléré. Les informations contenues dans le son défilent plus vite et donc ce dernier est *contracté*. Une nouvelle fois, seule la variable indépendante est modifiée par cette transformation et non l'amplitude du son (ou dans l'exemple de la vidéo, le contenu visuel est inchangé, seul le nombre d'images par seconde est affecté).



Transformation combinée :

$$y(t) = u\left(\frac{t}{a} - \sigma\right)$$

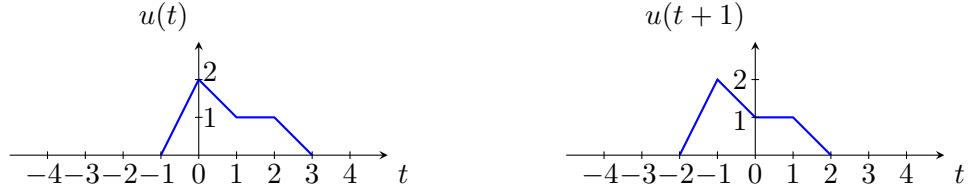
Que faire lorsque le signal subit plusieurs transformations ? Dans quel ordre faut-il appliquer les transformations ? En règle générale, il faut les appliquer dans l'*ordre inverse de la priorité des opérations*.

Une transformation combinée (par exemple avec $a = 2$ et $\sigma = -1$ tel que $y(t) = u\left(\frac{t}{2} + 1\right)$) peut être décomposée sous forme de deux sous-systèmes. La sortie du premier sous-système est notée $y_{temp}(t)$ et agit comme entrée du deuxième sous-système.

- Que se passe-t-il si le décalage (addition) a lieu avant la contraction/dilatation (multiplication) comme illustré ci-dessous par la combinaison des deux sous-systèmes ?

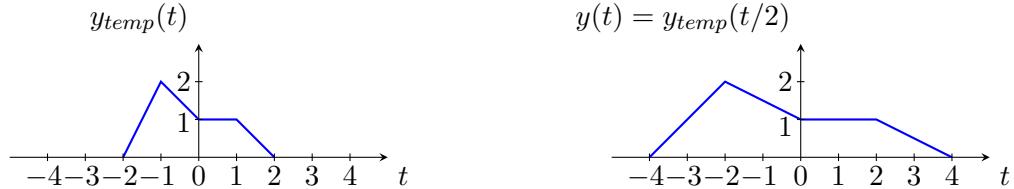


- 1er sous-système : Décalage $y_{temp}(t) = u(t - \sigma)$



Pour $\sigma = -1 < 0$ (décalage vers la gauche) ; cela correspond donc à un signal en avance de 1.

- 2ème sous-système : Contraction/Dilatation $y(t) = y_{temp}(\frac{t}{a}) = u(\frac{t}{a} - \sigma)$



Pour $a = 2 > 1$, le signal est dilaté selon l'axe des abscisses.

C'est bien dans cet ordre qu'il faut effectuer les opérations.

Si on inverse les deux étapes, on inverse les deux sous-systèmes et on obtient une autre sortie que celle attendue :

$$u(t) \longrightarrow y_{temp}(t) = u\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y_{temp}(t) \longrightarrow y(t) = y_{temp}(t+1) = u\left(\frac{t+1}{2}\right)$$

ce qui n'était pas le résultat attendu.

- Pour une autre transformation combinée :

$$y(t) = u\left(\frac{t-\sigma}{a}\right)$$

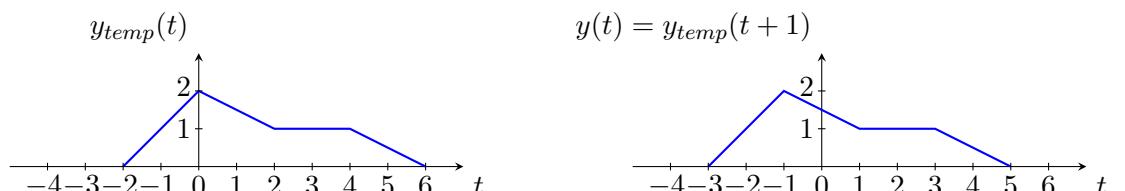
avec $u\left(\frac{t+1}{2}\right)$. La transformation combinée est décomposée en deux sous-systèmes et fait appel à un signal intermédiaire $y_{temp}(t)$.

- 1er sous-système : Contraction/Dilatation $y_{temp}(t) = u(\frac{t}{a})$



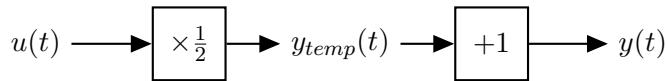
Pour $a = 2 > 1$, le signal est dilaté selon l'axe des abscisses.

- 2ème sous-système : Décalage $y(t) = y_{temp}(t - \sigma) = u(\frac{t-\sigma}{a})$



Pour $\sigma = -1 < 0$, cela correspond à un signal en avance de 1.

Au bilan, la division est effectuée AVANT l'addition car elle porte sur tout le numérateur. Cela peut être vu comme des parenthèses $(t - \sigma)/a$:



C'est bien dans cet ordre qu'il faut effectuer les opérations. Si l'addition est exécutée avant la multiplication, le signal serait modifié comme ceci :

$$u(t) \rightarrow y_{temp}(t) = u(t + 1)$$

$$y_{temp}(t) \rightarrow y(t) = y_{temp}\left(\frac{t}{2}\right) = u\left(\frac{t}{2} + 1\right)$$

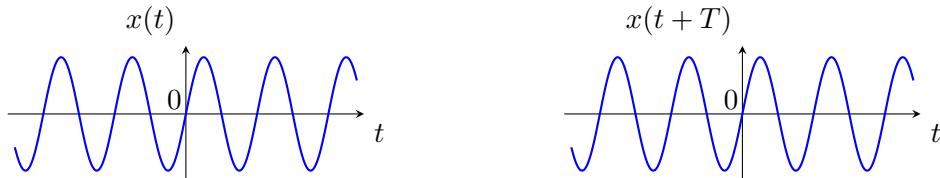
ce qui n'est pas le résultat attendu.

♡ Astuce mnémotechnique : l'opération qui est la plus "proche" de la variable indépendante est effectuée en dernier car cette opération correspond bien à l'action du dernier sous-système.

1.3 Propriétés des signaux

- **Périodique**

Mathématiquement, un signal $x(t)$ est périodique s'il $\exists T \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = x(t + T)$, $\forall t$.
Exemple : $x(t) = \sin(t)$



- **Pair ou impair**

Pair

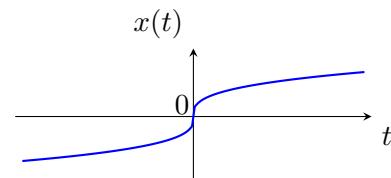
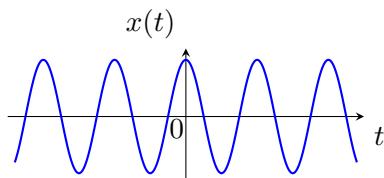
$$x(t) = x(-t), \forall t$$

Symétrie orthogonale d'axe égal à l'axe des ordonnées.
Exemple : $x(t) = \cos(t)$

Impair

$$x(t) = -x(-t), \forall t$$

Symétrie centrale par l'origine des axes.
Exemple : $x(t) = \sqrt[3]{t}$



Utilité ? Un signal peut toujours être décomposé en une somme de signaux pairs et impairs :

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} (x(t) - x(-t))}_{\text{Signal impair}} + \underbrace{\frac{1}{2} (x(t) + x(-t))}_{\text{Signal pair}}$$

1.4 Propriétés des systèmes

Continu

Un signal continu en entrée donne un signal continu en sortie.



Discret

Un signal discret en entrée donne un signal discret en sortie.



Hybride (1)

Un signal discret en entrée donne un signal continu en sortie.



Hybride (2)

Un signal continu en entrée donne un signal discret en sortie.



- **Univoque**

Un système est dit univoque si à une entrée $u(t)$ n'est associée qu'une et une seule sortie $y(t)$.

- **Statique**

Un système statique est un système dont la sortie à un instant t^* ne dépend que de l'entrée à cet instant t^* : $y(t^*) = S\{u(t^*)\}$, où on note $y(t) = S\{u(t)\}$ le fait que $y(t)$ soit la sortie du système S associée à l'entrée $u(t)$. On dira que le système ne possède pas de mémoire, qu'il n'est fonction que de l'entrée présente.

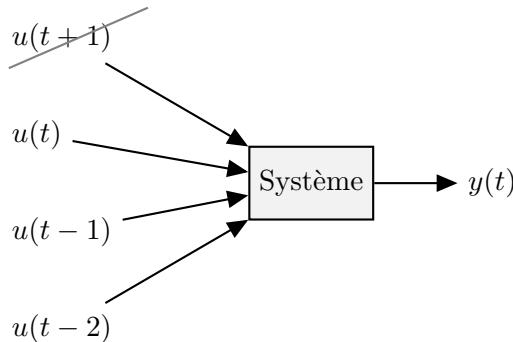
- **Dynamique**

Un système dynamique est un système dont la sortie dépend du présent, mais aussi de valeurs de l'entrée à d'autres instants.

- **Causal**

Un système est dit causal si la sortie à un instant t^* ne dépend que de l'entrée en t^* et des entrées précédentes, *i.e.* aux instants $t \leq t^*$: $y(t^*) = S\{u(t^*), u(t^* - dt), u(t^* - 2dt), \dots\} = S\{u(\tilde{t})\}$, $\tilde{t} \leq t^*$. Par convention, un système statique est causal. À noter que tout système physique est causal.

Exemple : On considère le mouvement d'un chariot, sa position est la sortie du système et l'entrée est la force exercée sur le chariot. À un instant donné, la position du chariot dépendra de la force appliquée, mais aussi des forces précédemment appliquées, déterminant sa position actuelle.

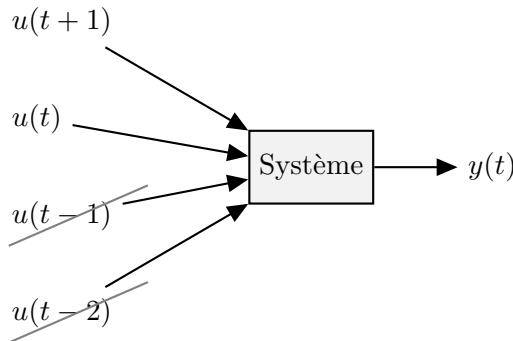


Remarque : À ce stade, la dérivée est considérée comme une opération causale : $\dot{u}(t) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{u(t) - u(t-z)}{z}$.

Pour le moment, on dira donc qu'un système décrit par une équation différentielle est causal, sans plus de détail.

- **Anticausal**

Un système est dit anticausal si la sortie à un instant t^* ne dépend que de l'entrée en t^* et des entrées futures $t \geq t^*$: $y(t^*) = S\{u(t^*), u(t^* + dt), u(t^* + 2dt), \dots\} = S\{u(\tilde{t})\}$, $\tilde{t} \geq t^*$.



- **Non causal**

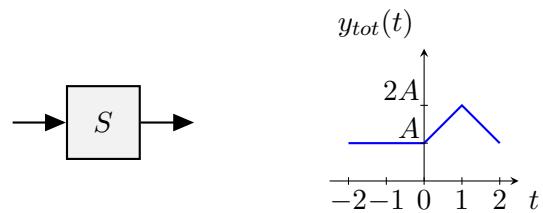
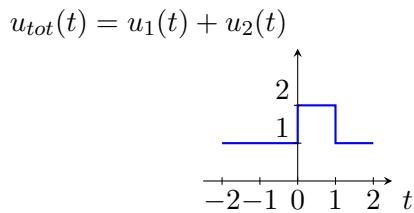
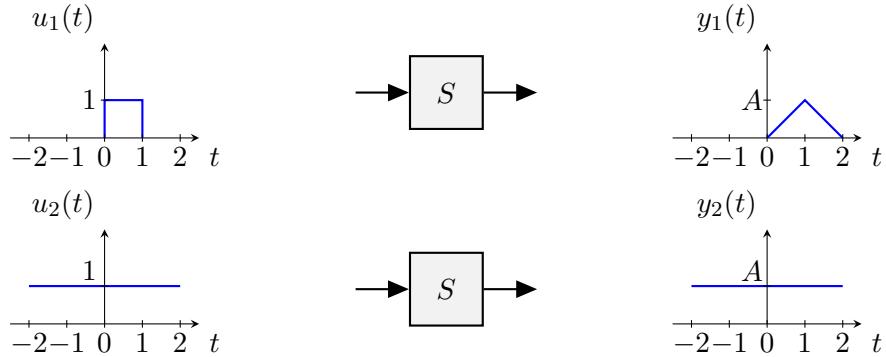
Un système est dit non causal s'il n'est ni causal, ni anti-causal.

- **Additif**

Un système est dit additif s'il vérifie la propriété suivante :

$$\begin{cases} y_1(t) = S\{u_1(t)\} \\ y_2(t) = S\{u_2(t)\} \end{cases} \Rightarrow y_{tot} = S\{u_{tot}(t)\} = S\{u_1(t)+u_2(t)\} = S\{u_1(t)\}+S\{u_2(t)\} = y_1(t)+y_2(t).$$

Cette propriété peut être facilement illustrée graphiquement :

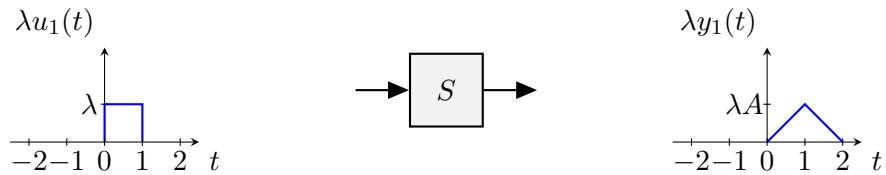


- **Homogène**

Un système est dit homogène s'il vérifie la propriété suivante :

$$y(t) = S\{u(t)\} \Rightarrow \lambda y(t) = S\{\lambda u(t)\}.$$

Cette propriété peut être facilement illustrée graphiquement :



- **Linéaire**

Un système est dit linéaire s'il est additif et homogène. Mathématiquement, il vérifie donc la propriété suivante

$$\begin{cases} y_1(t) = S\{u_1(t)\} \\ y_2(t) = S\{u_2(t)\} \end{cases} \Rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = S\{\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- **Temps-invariant**

Un système est dit invariant dans le temps lorsque la loi qu'il établit entre entrées et sorties ne change pas au cours du temps. Autrement dit, si un décalage temporel est appliqué à l'entrée, ce décalage se retrouve également à la sortie. Ainsi, on a la propriété

$$y(t) = S\{u(t)\} \Rightarrow y(t - \tau) = S\{u(t - \tau)\}$$

Remarque : Le cours portera principalement sur les systèmes linéaires temps-invariant (LTI). Nous étudierons les outils spécifiques à cette catégorie de système. Il est donc important de comprendre les différentes notions expliquées ci-dessus.

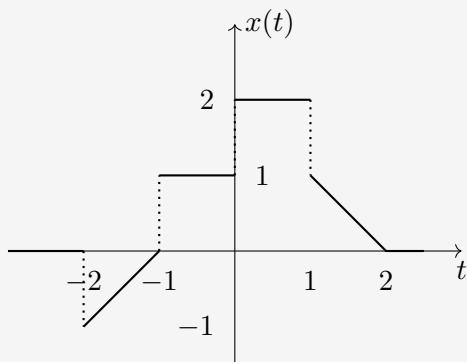
Notions clés

- Distinguer signaux et systèmes
- Maîtriser les transformations de signaux
- Identifier les propriétés des systèmes (linéarité, causalité, invariance)

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exercice 1.2 (a)-(c) [TXB]

Soit le signal continu $x(t)$ représenté ci-dessous.



Tracer les signaux suivants.

- (a) $x(t-1)$
- (c) $x(2t+1)$

Schéma de résolution : transformation affine



- Identifier la transformation : décalage temporel vers la droite/gauche ? inversion temporelle ? contraction/dilatation ? transformation affine ?
- S'il y a plusieurs transformations, identifier l'ordre des opérations INVERSES (ou utiliser l'astuce mnémotechnique)
- Dessiner les transformations

Exercice 2 = Exercice 3.1 (a)-(b) [TXB]

Déterminer si le système continu correspondant à la relation entrée-sortie donnée ci-après est

- dynamique ou statique ;
- causal, anticausal ou non causal ;
- linéaire ou non ;
- variant ou invariant.

- (a) $y(t) = u(t-2) + u(2-t)$
- (b) $y(t) = \cos(3t)u(t)$

Schéma de résolution : identifier les propriétés des systèmes

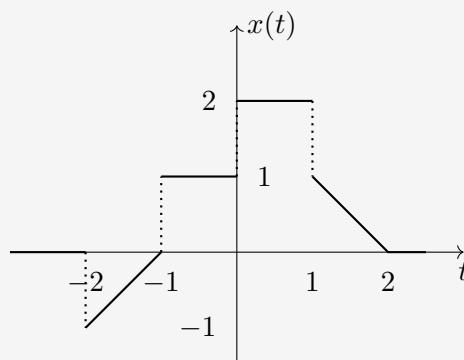
- Statique-dynamique ? Pour rappel, un système est statique si $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t = t^*$.
- Causalité ? Pour rappel, un système est causal si $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t \leq t^*$.
- Linéarité ? Pour déterminer si le système est linéaire, il suffit de démontrer que tout combinaison $\alpha u_1 + \beta u_2$ donne une sortie $\alpha y_1 + \beta y_2$.
En pratique, une autre façon de voir si un système est linéaire est de regarder si les entrées u /sorties y /signaux x (plus généralement, les variables dépendantes) sont exprimées/modifiées par une fonction non linéaire. Cela n'a donc pas de rapport avec "t" (c-à-d la variable indépendante), mais bien uniquement avec les fonctions qui sont appliquées sur les entrées/sorties/signaux.
- Temps-variant ou temps-invariant ? Pour rappel, un système est dit invariant dans le temps lorsque la loi qu'il établit entre entrées et sorties ne change pas au cours du temps, c'est-à-dire si l'équation ne dépend pas explicitement de la valeur de la variable indépendante.
En pratique, on peut d'abord regarder si le système dépend de la variable indépendante t , i.e. regarder si les coefficients de l'équation sont dépendants du temps (autrement dit, si à des instants différents, les coefficients prennent des valeurs différentes). De manière générale, il faut tester si un décalage temporel à l'entrée se retrouve également en sortie, i.e. tester si $(u(t - \tau), y(t - \tau))$ est un couple entrée-sortie valable pour le système étant donné que $(u(t), y(t))$ est valable.



3 Exercices à faire

Exercice 3 = Exercice 1.2 (d) [TXB]

Soit le signal continu $x(t)$ représenté ci-dessous.



Tracer le signal suivant :
 $x(4 - \frac{t}{2})$.

Schéma de résolution : transformation affine



- Identifier la transformation : décalage temporel vers la droite/gauche ? inversion temporelle ? contraction/dilatation ? transformation affine ?
- S'il y a plusieurs transformations, identifier l'ordre des opérations INVERSES (ou utiliser l'astuce mnémotechnique)
- Dessiner les transformations

Exercice 4 = Exercice 3.1 (f) [TXB]

Déterminer si le système continu correspondant à la relation entrée-sortie donnée ci-après est

- dynamique ou statique ;
- causal, anti-causal ou non causal ;
- linéaire ou non ;
- variant ou invariant.

(f) $y(t) = u(\frac{t}{3})$

Exercice 5 = Exercices 3.15 (a) - (c) [TXB]

Étudier la linéarité et l'invariance des systèmes suivants.

- (a) $\dot{y}(t) + 2y(t) = u(t^2)$
(c) $\dot{y}(t) + a y(t) = u(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$ constant

Schéma de résolution : identifier les propriétés d'une équation différentielle

- Linéarité : pour cet exercice, pas besoin de refaire la démonstration. Regarder si les signaux d'entrée et/ou de sortie sont exprimés au travers de fonctions non linéaires (ex : $\sqrt{y(t)}$, $\dot{y}y$, $\cos(u(t))$, ...)
- Invariance : regarder si les coefficients dépendent ou non du temps ou faire la démo.

Rappelez-vous de vos cours d'Analyse sur l'étude d'équations différentielles, des notions similaires avaient été abordées telles que les équations différentielles linéaires à coefficients constants par exemple.

Exercice 6 = Interro 2013 - Q3 cliquer ici ou sur le site ex 2 ou ex 3.7 [TXB]

Étudier la linéarité et l'invariance des deux systèmes ci-dessous. Justifier la réponse en détail : donner une démonstration explicite, e.g., par contre-exemple pour les propriétés non satisfaites.

- (i) $y(t) = \sin(u(t)) = (\sin \circ u)(t) = \sin(u(t))$
(ii) $y(t) = u(\sin(t)) = (u \circ \sin)(t) = u(\sin(t))$

4 Pour s'exercer

Exercice 7 = Exercice 3.9 [TXB]

Caractérissez

- (a) un phénomène physique susceptible de mettre en défaut l'hypothèse de linéarité d'un modèle de circuit électrique.
(b) un phénomène physique susceptible de mettre en défaut l'hypothèse d'invariance d'un modèle de circuit électrique.

Exercice 8 = Exercice 3.12 (a) [TXB]

Pour chacune des questions suivantes, sélectionner la bonne réponse sur base d'une courte justification.
Un seul des trois systèmes suivants est linéaire et statique, lequel ?

- (i) $y_1(t) = t^2 u(t)$
- (ii) $y_2(t) = u(t + 1)$
- (iii) $y_3(t) = \dot{u}(t)$

1 Concept

1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires

Les équations différentielles permettent de décrire la dynamique des systèmes⁴. Par exemple, un système masse-ressort amorti peut être décrit selon l'équation :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

En première année, le cours d'analyse a fourni des outils pour résoudre ce type d'équations, afin d'aboutir à une expression de $x(t)$.

Lorsque l'équation fait intervenir des non-linéarités, il devient cependant de plus en plus compliqué de résoudre analytiquement.

Par exemple, $\dot{x} = \sin(x)$ a pour solution (en notant x_0 la valeur de x en $t = 0$) :

$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right|.$$

Comment interpréter ce résultat ? Si $x_0 = \pi/4$, que vaut $x(t)$ pour $t \rightarrow \infty$?

L'expression analytique de la solution ne permet pas de répondre directement à ces questions. On souhaiterait donc avoir un outil plus *qualitatif* afin de comprendre la dynamique du système sans résoudre l'équation différentielle entièrement. Dit autrement, on souhaiterait pouvoir *décrire* le système par son *fonctionnement global*, ses propriétés et les sorties qu'il produit à certaines entrées, et ce en s'affranchissant le plus possible de la complexité analytique du problème.

On va donc représenter l'équation $\dot{x} = \sin(x)$ graphiquement. Il s'agit du *champ de vecteurs* qui associe un vecteur vitesse \dot{x} à chaque point x . Pour ce faire, on dessine une flèche qui pointe vers la droite (resp. gauche) si le vecteur vitesse est positif (resp. négatif), *i.e.* si $\dot{x} > 0$ (resp. $\dot{x} < 0$) comme illustré à la Figure 2.

Les vecteurs vitesses indiquent la direction selon laquelle un fluide imaginaire s'écoulerait selon l'axe x , avec une vitesse variant en fonction de la position. Lorsque $\dot{x} = 0$, la vitesse est nulle, autrement dit le fluide est statique et ne bouge plus. Il s'agit donc d'un *point fixe*. Pour déterminer la *nature du point fixe*, il suffit de regarder vers où le flux/courant "converge" ou, au contraire, comment le flux/courant éloigne la particule de fluide d'un point fixe. Un point fixe vers lequel le flux/courant converge sera considéré comme stable, alors qu'un point fixe duquel le flux/courant s'éloigne sera considéré comme instable. Dans l'exemple, il y a donc deux types de points fixes ; un point noir représente un point fixe *stable* et un point ouvert représente un point fixe *instable*.

La Figure 2 permet d'étudier la dynamique du système et les différentes solutions de l'équation $\dot{x} = \sin(x)$. Par exemple pour $x_0 = \pi/4$, il suffit d'imaginer une particule de fluide en cette abscisse et de regarder comment cette particule est transportée par le flux/courant indiqué par les flèches du champ de vecteurs. Pour $t \rightarrow \infty$, la particule approche le point fixe π par la gauche.

4. Ce TP est basé sur les chapitres 1,2,5,6 de [STR].

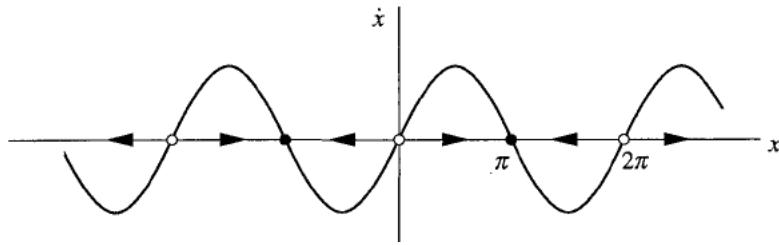


FIGURE 2 – Champ de vecteurs de $\dot{x} = \sin(x)$ [Figure 2.1.1-STR]

1.2 Linéarisation et étude de stabilité

La section précédente permet sur base d'une étude graphique de déterminer les points fixes et leur stabilité. Il est intéressant de développer une mesure plus *quantitative*. La stabilité d'un point fixe peut s'étudier en *linéarisant* le problème non-linéaire en ce point. Au lieu d'étudier le problème de manière globale à l'aide du champ de vecteurs, on étudie localement chaque point fixe à l'aide du système linéarisé autour de chacun de ces points.

Un exemple bien connu est celui du pendule : à l'aide de l'approximation des petits angles, on peut écrire $\sin(\theta) \sim \theta$, permettant de trouver une solution analytique du problème. Cependant, en appliquant cette méthode, on viole certaines lois de la physique et le domaine d'application de la solution est restreint et local. Il faut ainsi garder à l'esprit que la linéarisation ne permet pas d'étudier le problème non-linéaire dans son ensemble mais est un outil permettant d'étudier la stabilité du problème en ses points fixes avec certaines limitations.

La stabilité de la fonction $\dot{x} = f(x)$ en un point fixe x^* peut se calculer en faisant intervenir η , une petite perturbation depuis le point fixe telle que $x = x^* + \eta$. On souhaite déterminer si le système retourne à son point fixe lorsqu'il subit cette petite perturbation, autrement dit si elle grandit (le système est déstabilisé et s'éloigne de son point d'équilibre) ou diminue (malgré la perturbation, le système revient à son point d'équilibre). On applique donc le développement de Taylor à la fonction $f(x)$ en remplaçant x par la variable $x^* + \eta$, dans laquelle uniquement η varie. Le premier membre de l'équation différentielle devient :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x^* + \eta)}{dt} = \dot{\eta},$$

et le deuxième membre devient :

$$f(x) = f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Par définition, un point fixe x^* annule la fonction $f(x)$, i.e. $f(x^*) = 0$. Le développement de Taylor devient :

$$f(x^* + \eta) = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

♡ L'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ décrivant la dynamique *globale* du système peut donc être étudiée *localement* autour du point fixe x^* sous la forme :

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Il faut donc résoudre cette équation différentielle qui caractérise le système non-linéaire initial mais étudié localement autour du point fixe considéré x^* .

- Si $f'(x^*) = 0$, les termes d'ordre 2 ne sont pas négligeables et il faut continuer l'étude avec ces termes :

$$\dot{\eta} = \mathcal{O}(\eta^2).$$

- Si $f'(x^*) \neq 0$, on peut négliger les termes d'ordre supérieur :

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*)$$

Cette équation différentielle LINÉAIRE est facile à résoudre. On obtient :

$$\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$$

avec $\eta(0)$ une constante et $f'(x^*)$ la dérivée première de $f(x)$ évaluée en x^* . Il s'agit donc de la *pente* de la fonction en x^* .

Ainsi, pour savoir si le point x^* est stable ou non, il suffit de regarder si la perturbation (η) diminue ou grandit. L'analyse de l'équation $\eta(t)$ donnée par une exponentielle indique directement la réponse :

- ◊ Si $f'(x^*) < 0$, $\eta(t)$ est caractérisée par une exponentielle décroissante. Dès lors, le point fixe est stable. La perturbation va bien diminuer au cours du temps.
- ◊ Si $f'(x^*) > 0$, $\eta(t)$ est caractérisée par une exponentielle croissante. Dès lors, le point fixe est instable. Inversement, la perturbation entraîne le système loin du point fixe.

Pour conclure, l'étude de la pente de la fonction évaluée au point fixe permet immédiatement de déduire la nature du point fixe.

Pour illustrer ce concept, on repart de l'exemple utilisé à la section précédente, $\dot{x} = \sin(x)$, où on extrait la fonction $f(x) = \sin(x)$. Les points fixes sont définis par :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0..$$

On obtient : $x^* = k\pi$ où k est un entier. Pour déterminer la stabilité des points fixes, il suffit d'étudier le signe de la dérivée première $f'(x)$ évaluée aux points fixes x^* . Mathématiquement, cela donne :

$$f'(x^*) = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \text{ pair} \\ -1, & k \text{ impair.} \end{cases}$$

Les points fixes associés à k pair (resp. impair) sont instables (resp. stables) car la dérivée première évaluée en ces points est positive (resp. négative).

Cela peut facilement se visualiser en dessinant la pente du graphe (dérivée première) aux points fixes (intersections avec l'axe des x). Si la pente est positive, le point fixe est instable et inversement si la pente est négative, le point fixe est stable. Sur la Figure 2, n'hésitez pas à dessiner la droite tangente au graphe au niveau des points fixes. Si la droite décroît (resp. croît), représentant une pente négative (resp. positive), le point fixe est stable (resp. instable).

Notions clés

Approche	Globale Graphique	Locale Mathématique
Points fixes	tracer $\dot{x} = f(x)$	équation $\dot{x} = f(x)$
Stabilité	intersection(s) avec l'axe x	résoudre équation : $f(x) = 0 \rightarrow x^* = ...$
<i>stable</i>	tracer le champ de vecteurs	étudier le signe de la dérivée première
	$\dot{x} > 0 : \rightarrow$	(i) calcul de $f'(x)$
<i>instable</i>	$\dot{x} < 0 : \leftarrow$	(ii) remplacer x par x^* : $f'(x^*)$
	$\rightarrow \bullet \leftarrow$	$f'(x^*) < 0$ (pente négative)
	$\leftarrow \circ \rightarrow$	$f'(x^*) > 0$ (pente positive)

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Exemple 2.2.3 [STR]

Pour l'équation suivante : $\dot{x} = x - \cos(x)$

Dessiner le champ de vecteurs et indiquer la stabilité de chaque point fixe.



Schéma de résolution : analyse de système 1D non-linéaire décomposé en deux sous-fonctions | Stabilité 1D approche graphique

Lorsque l'expression est un peu plus compliquée à dessiner, on peut écrire l'équation $\dot{x} = f_1(x) - f_2(x)$. Les points fixes s'obtiennent alors en calculant $f_1(x) - f_2(x) = 0$, autrement dit en déterminant les intersections des deux fonctions. La dérivée/ La vitesse \dot{x} sera positive si $f_1(x)$ est supérieure à $f_2(x)$. Graphiquement, cela signifie que $f_1(x)$ est "au-dessus" de $f_2(x)$.

3 Exercices à faire

Exercice 2 = Exemple 2.2.1 [STR]

Le système est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

- 1- Dessiner \dot{x} en fonction de x .
- 2- Calculer les points fixes.
- 3- Dessiner le champ de vecteurs.
- 4- Identifier la stabilité des différents points fixes graphiquement.



Schéma de résolution : analyse de système non linéaire 1D

1- Ne pas hésiter à réaliser une étude de fonction de $x^2 - 1$. Calcul des zéros, croissance, courbure pour facilement dessiner la fonction.

2- Points fixes

- définition : $\dot{x} = 0$
- résoudre : ...

3- Stabilité graphique (étude globale) :

• définition :

$\dot{x} > 0$: champ de vecteur →

$\dot{x} < 0$: champ de vecteur ←

4- Stabilité mathématique (étude locale) :

- calcul de la dérivée : $f'(x)$
- remplacer x dans $f'(x)$ par l'expression des différents points fixes x_i^* : $f'(x_i^*)$
- donner la stabilité en fonction du signe de la dérivée $f'(x_i^*)$:

$$\begin{aligned} f'(x_i^*) &> 0 & \text{point fixe instable} \\ f'(x_i^*) &< 0 & \text{point fixe stable} \end{aligned}$$

Exercice 3 = Paragraphe 2.3 Croissance de la population [p.21-STR]

La croissance de la population d'organismes peut être simplement modélisée par l'équation suivante :

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

où $N(t)$ est la population au temps t et r est le taux de croissance de la population. Le modèle tient compte d'un certain facteur K appelé "carrying capacity" qui correspond à une croissance négative (*i.e.* lorsque le taux de décès est supérieur au taux de natalité). ($K > 0$ et $r > 0$)

Énoncé :

- 1- Dessiner approximativement \dot{N} en fonction de N (et/ou utiliser Matlab/Python/etc.) - Remarque : la population ne peut pas être négative.
- 2- Calculer mathématiquement les points fixes.
- 3- Déterminer graphiquement la stabilité du(des) point(s) fixe(s).
- 4- Déterminer mathématiquement la stabilité de chacun.

Schéma de résolution : analyse de système non-linéaire 1D avec des paramètres fixes

N'hésitez pas à noter l'équation gouvernant la dynamique du système et différencier les signaux et les constantes.

1- ...

2- Points fixes

- déf : $\dot{N} = 0$
- résoudre : ...

3- Stabilité graphique (étude globale) :

- déf :

$$\dot{N} > 0 \rightarrow$$

$$\dot{N} < 0 \leftarrow$$

4- Stabilité mathématique (étude locale) :

- calcul de la dérivée : $f'(N)$
- remplacer N dans $f'(N)$ par l'expression des différents points fixes $f'(N_i^*)$
- donner la stabilité en fonction du signe de $f'(N_i^*)$:

$$\begin{aligned} f'(N_i^*) &> 0 & \text{point fixe instable} \\ f'(N_i^*) &< 0 & \text{point fixe stable} \end{aligned}$$



Exercice 4 = Exemple 3.1.2 [STR]

Le système est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}.$$

Étudier la dynamique du système pour les différents valeurs possibles de l'entrée r (*i.e.* dessiner \dot{x} en fonction de x dans les différentes configurations possibles gouvernées par r et donner la stabilité des points fixes s'ils existent).



Schéma de résolution : analyse de système non-linéaire 1D et paramétrique

- 1- Déterminer les points fixes graphiquement pour différentes configurations dictées par r . Indice : s'inspirer de l'Exercice TP1 | n*1 [STR]
- 2- Dessiner le champ de vecteurs
- 3- Étude de stabilité (graphique uniquement)

4 Pour s'exercer

Exercice 5 = Exercice 2.3.2 [p.39-STR] "Autocatalysis"

La dynamique du système est gouvernée par l'équation suivante :

$$\dot{x} = k_1 ax - k_{-1} x^2$$

k_1 et k_{-1} sont des constantes positives. Énoncé :

- 1- Déterminer les points fixes graphiquement et analytiquement
- 2- Dessiner le champ de vecteurs
- 3- Déterminer la stabilité des points fixes

en discutant les différentes valeurs possibles de l'entrée a (avec $a \geq 0$).

1 Concept

1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires à deux dimensions

On peut également étudier des systèmes dynamiques décrits par plusieurs variables. La forme générale pour un système (fermé) à deux dimensions est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

Exemple 1

Pour aborder ce genre de systèmes d'équations différentielles, on démarre de l'exemple classique d'un système masse-ressort (voir Figure 3) défini par l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

où m est la masse, k est la constante de raideur et x est le déplacement de cette masse. Même si cette équation est facile à résoudre analytiquement, elle va servir d'illustration pour comprendre l'étude de systèmes plus complexes et non-linéaires par la suite.

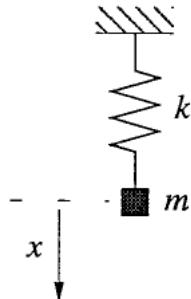


FIGURE 3 – Système masse-ressort [Figure 5.1.1-STR]

On peut décomposer cette équation différentielle d'ordre deux en deux équations différentielles d'ordre 1 en faisant intervenir la vitesse v :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, le ratio k/m sera noté ω^2 .

Ce système de deux équations assigne un vecteur $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ à chaque point (x, v) et, par conséquent, représente un *champ de vecteurs* dans le plan (x, v) . Ce plan s'appelle le *plan de phase*.

On va donc essayer de reproduire le même type d'étude graphique que celle faite pour un système à 1D mais avec deux variables. Les points fixes (x^*, v^*) s'obtiennent lorsque simultanément

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Intuitivement, la masse ayant une vitesse et une accélération nulle, elle est donc au repos.

Pour dessiner le champ de vecteurs, par analogie au système à 1D, il faudrait dessiner une flèche représentant \dot{x} qui pointe vers la droite (resp. gauche) lorsque que cette dérivée est positive (resp. négative),

mais également une flèche représentant \dot{v} qui pointe vers le haut (resp. le bas) lorsque cette dérivée est positive (resp. négative). Il faudrait ainsi évaluer les paires (\dot{x}, \dot{v}) en chaque point du plan (x, v) , et dessiner un vecteur horizontal (resp. vertical) représentant \dot{x} (resp. \dot{v}) dont la longueur est obtenue par la résolution numérique des équations donnant (\dot{x}, \dot{v}) en fonction de (x, y) (et ce en chaque point (x, v)).

Cependant, remplir le plan de phase de tous ces vecteurs est très chronophage et rendrait la lecture du graphique illisible. On dessinera donc uniquement la résultante des deux vecteurs pour certains points du plan.

Dans l'exemple du système masse-ressort, lorsque $v = 0$ (càd, dans le plan de phase, sur l'axe- x), $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -\omega^2 x)$, le vecteur est donc uniquement vertical et de longueur $-\omega^2 x$. Plus x augmente, plus la longueur augmente. Le signe " $-$ " signifie que le vecteur pointera vers le bas pour des x positifs et vers le haut pour des x négatifs. De même, lorsque $x = 0$ (càd sur l'axe- y), $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$. Pour le reste du plan de phase, les composantes des vecteurs sont données par $(v, -\omega^2 x)$ spécifié au point considéré. Le champ de vecteurs est illustré Figure 4. On peut déduire l'entièreté du champ de vecteurs comme illustré Figure 5.

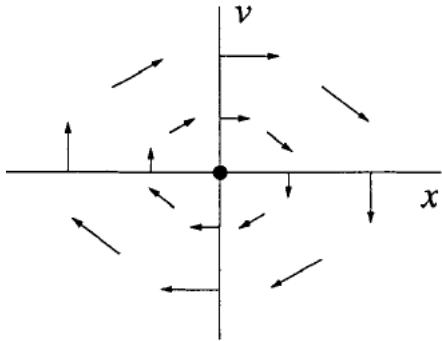


FIGURE 4 – Champ de vecteurs dessiné en quelques points [Figure 5.1.2-STR]

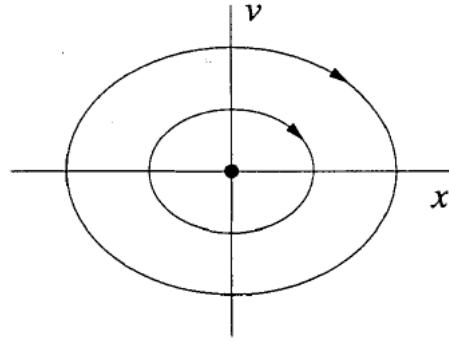


FIGURE 5 – Plan de phase [Figure 5.1.3-STR]

Le système masse-ressort est composé d'équations différentielles linéaires. Cependant, la même méthode peut être utilisée pour étudier un système d'équations différentielles non-linéaires.

Exemple 2

Considérons le système décrit par les équations suivantes [Exemple 6.1.1,p.147-STR] :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

On peut dessiner les courbes $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$. Il s'agit donc de tracer $f_1(x, y) = x + e^{-y} = 0$ et $f_2(x, y) = -y = 0$ dans le plan (x, y) . Ces courbes s'appellent *nullclines* \heartsuit . Lorsque les nullclines se croisent, on a simultanément $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$, ce qui, *graphiquement*, donne la position des points fixes. *Mathématiquement*, les points fixes s'obtiennent en résolvant simultanément $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = 0$. Dans l'exemple considéré, le seul point fixe (x^*, y^*) est égal à $(-1, 0)$.

Sur la nullcline- x , définie par $\dot{x} = 0$, on peut facilement tracer le champ de vecteurs. En effet, la flèche sera uniquement verticale (le flux horizontal est bien nul par définition de la nullcline- x). Son orientation et sa longueur seront déterminées pour différentes valeurs de x et y . De manière analogue, sur la nullcline- y , définie par $\dot{y} = 0$, on peut facilement tracer le champ de vecteurs car la flèche sera uniquement horizontale (le flux vertical est bien nul). La construction du champ de vecteurs est illustrée Figure 6.

Ensuite, on dessine le champ de vecteurs pour différents points du plan en résolvant numériquement les équations différentielles en ces points. Grâce à cette représentation graphique, on comprend la dynamique du système dans son ensemble (voir le plan de phase Figure 7).

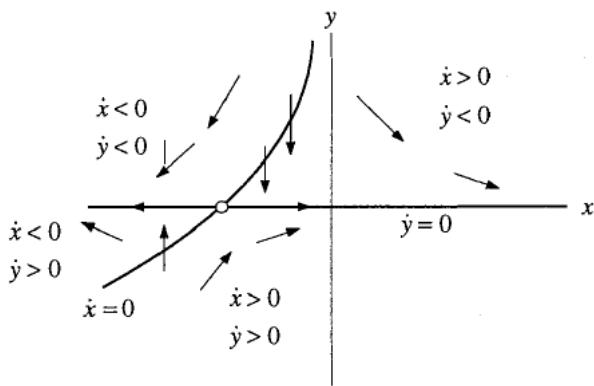


FIGURE 6 – Construction du champ de vecteurs [Figure 6.1.3-STR]

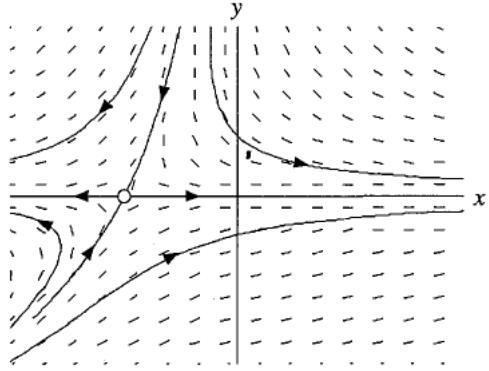


FIGURE 7 – Plan de phase complet [Figure 6.1.4-STR]

♡ Comment calculer les flèches ?

Les flèches indiquent la vitesse d'une "particule" en un point du plan. Plus la flèche est grande, plus la vitesse est grande. Ensuite, sa direction permet de savoir vers où la particule va bouger au temps suivant. Pour calculer la flèche pour le point de coordonnées (x_1, y_1) , il faut remplacer dans les équations du système les valeurs numériques connues (*i.e.* les coordonnées) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + e^{-y_1} \\ \dot{y}_1 = -y_1. \end{cases}$$

On obtient ainsi une valeur pour \dot{x}_1 qui indique la vitesse horizontale en ce point. Si la valeur est positive, la particule se déplace vers la droite. Si la valeur est négative, la particule se déplace vers la gauche. La valeur de \dot{y}_1 indique la vitesse verticale en ce point. Si la valeur est positive, la particule se déplace vers le haut. Si la valeur est négative, la particule se déplace vers le bas. Pour avoir la flèche résultante qui définit le vecteur vitesse, il suffit de calculer la résultante *i.e.* la somme des deux vecteurs. L'amplitude donne bien la vitesse de la particule et la direction indique bien vers où la particule se déplace.

1.2 Linéarisation d'un système à 2D autour des points fixes

La section précédente permet sur base d'une étude graphique de déterminer les points fixes et leur stabilité. On souhaiterait développer une mesure plus *quantitative* de la stabilité sans devoir passer à chaque fois par le dessin du champ de vecteurs.

♡ Par analogie au système à 1D, on va étendre la technique de **linéarisation** afin d'*approximer* le plan de phase et le champ de vecteurs *aux alentours des points fixes*.

Considérons le système à 2D⁵ :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Les points fixes (x^*, y^*) sont définis en résolvant $\dot{x} = \dot{y} = 0$ simultanément. Dès lors

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

On note u et v les petites perturbations selon les deux directions (horizontale et verticale), depuis le point fixe, telles que $x = x^* + u$ et $y = y^* + v$. Pour étudier la stabilité en ce point, on veut déterminer

5. On utilise (x_1, x_2) ou (x, y) pour insister sur le fait que le nom des variables n'est pas important.

ce qu'il se passe lorsque le système, se trouvant initialement au point fixe, est faiblement perturbé : va-t-il retourner en ce point ou va-t-il s'en éloigner ? Autrement dit, est-ce que la perturbation diminue (tend vers 0) ou grandit (explose) ?

On peut reproduire le développement appliqué au système à 1D mais cette fois-ci pour les deux variables u et v et les deux fonctions f et g .

La première équation différentielle du système (1) devient :

$$\dot{x} = \frac{d(x^* + u)}{dt} = \frac{dx^*}{dt} + \frac{du}{dt} = \dot{u} = f(x, y).$$

On développe le dernier terme :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^* + u, y^* + v) && \text{substitution} \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) && \text{Taylor} \\ &= u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.} && \text{définition du point fixe} \end{aligned}$$

De même pour la deuxième équation du système :

$$\dot{y} = y^* + \dot{v} = \dot{v} = g(x, y),$$

et

$$g(x, y) = u \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.}$$

Remarque : pour un système à 1D, la petite perturbation était notée η et pour un système à 2D elle est notée u (resp. v) pour la première (resp. deuxième) variable.

Le système de deux équations différentielles non-linéaires défini par (1) devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques} \\ \dot{v} = u \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.} \end{cases} \quad (2)$$

Et matriciellement, cela peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{termes quadratiques.}$$

On définit

$$A = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{(x^*, y^*)}$$

comme étant la *matrice jacobienne* \heartsuit évaluée au point fixe. Il s'agit de l'analogie pour le système 1D de la dérivée de $f(x)$ évaluée au point fixe $f'(x^*)$. L'expression plus compliquée vient de l'apparition de la deuxième variable et de la deuxième fonction g . Le déterminant de cette matrice est appelé le *jacobien*.

En supposant que les termes quadratiques sont négligeables, le système de deux équations différentielles en x et y est linéarisé en u et v aux alentours de (x^*, y^*) et on se retrouve avec l'étude d'un système linéaire à 2D noté :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3)$$

où u et v représentent les deux variables *locales* \heartsuit (du système linéarisé) associées à x et y .

1.3 ♡ Rappel Algèbre Linéaire : valeurs propres & vecteurs propres

Relire le chapitre "Algèbre linéaire : concepts à maîtriser".

ABC

- Révision des vecteurs propres, valeurs propres
- Résolution d'équations différentielles linéaires
 - premier ordre
 - deuxième ordre couplées/non couplées

1.4 Linéarisation et stabilité des points fixes

Pour un système à 1D, on a développé un outil plus quantitatif afin d'étudier facilement la stabilité du point fixe. Il suffit, en effet, d'analyser le signe de la dérivée première évaluée au point fixe.

Pour un système à 2D, la section 1.2 développe par analogie un outil similaire pour linéariser le système autour de son point fixe. On se retrouve ainsi avec l'étude de 4 dérivées premières, celles des fonctions f et g par rapport aux deux variables x et y , reprises sous la forme de la matrice jacobienne A .

Comment déterminer la stabilité des points fixes à l'aide de la matrice jacobienne ?

Reprenons l'équation (3), elle peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\eta} = A\eta. \quad (4)$$

Cela ressemble à l'équation $\dot{\eta} = f'(x^*)\eta$ pour les systèmes à 1D qui nous donnait $\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$ comme solution. La différence pour les systèmes à 2D, c'est que la matrice A couple les deux variables u et v ce qui rend l'étude de la stabilité légèrement moins immédiate que d'étudier le signe de la dérivée première ($f'(x^*)$).

Pour résoudre cette équation différentielle linéaire couplée (4) et connaître $u(t)$ et $v(t)$, on utilise les outils de découplage abordés dans le rappel (section 3) en faisant intervenir

$$A\nu = \lambda\nu$$

où ν correspond aux vecteurs propres et λ correspond aux valeurs propres.

Dès lors, on obtient comme solution :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

avec c_1, c_2 déterminés par les conditions initiales, les vecteurs propres

$$\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{pmatrix}, \nu^{(2)} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

et leurs valeurs propres associées λ_1 et λ_2 .

Par analogie au système 1D ($\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$), on peut voir que les valeurs propres vont dicter la stabilité du système. En effet, comme pour les systèmes 1D, pour un facteur positif de l'exponentielle, le système va s'éloigner du point fixe s'il subit une petite perturbation et inversement pour un facteur négatif. Dans un système 1D, ce facteur était donné par la dérivée première de f évaluée au point fixe. Dans le cas des systèmes à 2D, on va se référer également aux facteurs des exponentielles pour déterminer la stabilité. Cependant, il ne s'agit plus de la dérivée première mais bien des valeurs propres de la matrice jacobienne (évaluée au point fixe).

Il y a différents cas possibles de stabilité :

- Les deux valeurs propres ont leur partie réelle positive : $\mathcal{R}\{\lambda_1\} > 0, \mathcal{R}\{\lambda_2\} > 0$; le point fixe est instable.
- Les deux valeurs propres ont des parties réelles négatives : $\mathcal{R}\{\lambda_1\} < 0, \mathcal{R}\{\lambda_2\} < 0$; le point fixe est stable.
- Une des deux valeurs propres a une partie réelle positive et l'autre a une partie réelle négative ; le point fixe est un "saddle node" (point de selle). Dans la direction associée à la valeur propre négative, il est attractif (la trajectoire converge vers le point, ce point paraît donc stable) et dans la direction associée à la valeur propre positive, il est répulsif (la trajectoire diverge du point, ce point paraît donc instable). Si l'on prend une perturbation de composantes quelconques, càd pas uniquement dirigée dans la direction stable (*stable manifold of the saddle*), elle ne tendra pas vers 0, ce qui rend le système instable en général.
- Les deux valeurs propres sont nulles ; le point fixe est dit marginalement stable.

♡ Que se passe-t-il si les valeurs propres sont complexes ? La stabilité ne s'étudie que par la partie réelle des valeurs propres. En effet, si on décompose l'exponentielle $e^{\lambda_i t} = e^{(\mathcal{R}\{\lambda_1\} + j\mathcal{I}\{\lambda_1\})t} = e^{\mathcal{R}\{\lambda_1\}t} e^{j\mathcal{I}\{\lambda_1\}t}$, la partie réelle indique la croissance/décroissance et son signe permet de directement conclure sur la stabilité. De son côté, la partie imaginaire peut s'écrire $e^{j\mathcal{I}\{\lambda_1\}t} = \cos(\lambda_1 t) + j \sin(\lambda_1 t)$ ce qui dévoile la présence d'oscillations. Ces notions seront approfondies dans les prochains TPs. A ce stade, la partie réelle des valeurs propres indique la convergence/stabilité des points fixes et la présence d'une partie imaginaire des valeurs propres indique que la trajectoire/solution va converger vers le point en tournant dans le plan de phase. On appelle cela une *spirale*.

Notions clés

Algèbre Linéaire

- Résoudre une équation différentielle simple avec et sans entrée
 - Comprendre l'utilisation des vecteurs propres et valeurs propres dans le découplage d'un système d'équations différentielles
 - Découpler un système d'équations différentielles et résoudre entièrement le système
- ♡♡♡ Comprendre le lien entre valeurs propres et stabilité du système

Notions à maîtriser et à savoir dessiner/obtenir

champ de vecteurs, plan de phase, points fixes, nullclines.

Étude de système 2D

Approche	Globale Graphique	Locale Mathématique
	Plan de phase	$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$
Points fixes (PF)	nullcline-x : $\dot{x} = 0 \rightarrow f(x, y) = 0$ nullcline-y : $\dot{y} = 0 \rightarrow g(x, y) = 0$ intersection(s) des nullclines	résoudre : $\dot{x} = \dot{y} = 0 : (x^*, y^*) = \dots$
Stabilité	(i) calculer $\dot{x} = f(x, y)$ et $\dot{y} = g(x, y)$ $\dot{x} > 0 \rightarrow \dot{x} < 0 \leftarrow$ $\dot{y} > 0 \uparrow \quad \dot{y} < 0 \downarrow$ (ii) tracer les résultantes	(i) calculer la matrice jacobienne J (ii) évaluer J en (x^*, y^*) (iii) calculer les VaP (iv) étudier le signe des VaP

Interprétation des signes des VaP

- Valeurs propres purement réelles
 - $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: point instable
 - $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$: point stable

- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$: point de selle

- $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$: point de selle

- Valeurs propres complexes

Il faut étudier le signe de la partie réelle des deux valeurs propres ($\Re\{\lambda_1\}$? et $\Re\{\lambda_2\}$?). La partie complexe indique la présence de spirale (spirale stable/spirale instable).

- Deux valeurs propres sont nulles et réelles, il s'agit d'un point marginalement stable.

- Deux valeurs propres purement complexes, il s'agit d'un centre (la trajectoire est alors une ellipse).

Pour mieux visualiser les différents cas de figure, vous pouvez visiter cette page (en anglais, crédits : UBC) qui reprend les "portraits de phase" des systèmes linéaires. Vous y verrez comment, graphiquement et de manière animée, les valeurs propres influent sur la dynamique d'un système 2D.

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 1 = Lapin versus Mouton [Section 6.4, p.155-STR]

Les populations des lapins et des moutons sont respectivement notées $x(t)$ et $y(t)$ (avec $x, y \geq 0$). Leur dynamique est gouvernée par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - x - y). \end{cases}$$

Étudier l'évolution des deux populations sachant qu'elles sont liées et interpréter le résultat. Tracer la trajectoire en partant du point $(x, y) = (1, 0.5)$.

Schéma de résolution : analyse d'un système non-linéaire 2D

- 1- Calculer les points fixes (x^*, y^*) :
 $\dot{x} = 0$ et simultanément $\dot{y} = 0$:
- 2- Déterminer la matrice jacobienne
- 3- Évaluer la matrice jacobienne pour les différents points fixes et déterminer les valeurs propres
- 4- Déterminer la stabilité des différents points sur base des valeurs propres
- 5- Dessiner le champ de vecteurs. Pour cela, faites un tableau :



Point	x_i	y_i	\dot{x}_i	\dot{y}_i	vitesse
A	coord. en x	coord. en y	vitesse horizontale	vitesse verticale	résultante

Vous remplissez ce tableau des points que vous choisissez dans les différentes zones délimitées par les nullclines. Vous calculez numériquement les vitesses horizontale et verticale. Les signes de ces vitesses vous permettent de déterminer la direction de la vitesse résultante.

- 6- Pour tracer une trajectoire, il suffit de "relier" les flèches du champ de vecteurs entre elles. Cela permet de représenter le déplacement de la particule en commençant en un point du plan!!! La trajectoire est toujours parallèle aux champs de vecteurs!!!

3 Exercices à faire

Exercice 2

Un système à deux variables est gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 5xy \\ \dot{y} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

- 1- Calculer les points fixes.
- 2- Calculer la stabilité des points fixes.
- 3- Dessiner le plan de phase, les nullclines et le champ de vecteurs.

Exercice 3 = Exercice 6.3.6-STR

Un système à deux variables est gouverné par l'équation suivante :

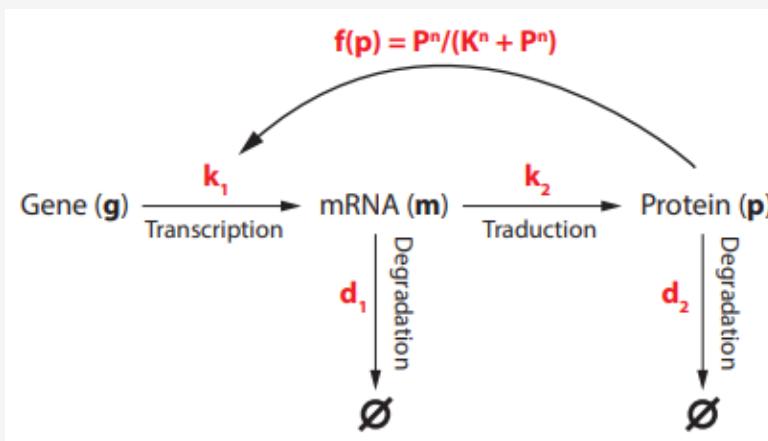
$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 1 \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

- 1- Calculer les points fixes (valeurs réelles uniquement).
- 2- Calculer la stabilité des points fixes.
- 3- Dessiner le plan de phase, les nullclines et le champ de vecteurs.

4 Pour s'exercer

Exercice 4 = Janvier 2020 - Q1 (ii) → (vii)

La dynamique de la synthèse d'une protéine à partir de son gène peut être étudiée par modélisation mathématique d'un système entrée-sortie où l'entrée est la concentration en gène actif g et la sortie la concentration en protéine p (voir figure ci-dessous). Ce processus se déroule en 2 étapes. Le gène est d'abord transcrit en ARN messager (mRNA, de concentration m) selon un taux de transcription k_1 . Le mRNA est alors soit dégradé avec un taux de dégradation d_1 , soit traduit en protéine avec un taux de traduction k_2 . La protéine peut ensuite elle-même être dégradée/utilisée avec un taux de dégradation d_2 .



Nous considérons par ailleurs le cas où la synthèse des protéines est régulée par un mécanisme appelé autoactivation : la protéine synthétisée stimule la transcription de son gène spécifique. Cela peut être modélisé par un taux de transcription qui dépend de la concentration en protéine p via une fonction $f(p) = p^n/(K^n + p^n)$, où K et n sont des paramètres régulant la dynamique de l'autoactivation. En utilisant la loi d'action des masses, le schéma proposé dans la figure ci-dessus peut être transcrit en un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \dot{m} &= gk_1 \frac{p^n}{K^n + p^n} - d_1 m \\ \dot{p} &= k_2 m - d_2 p \end{aligned}$$

où $gk_1 \frac{p^n}{K^n + p^n}$ modélise la dynamique de la transcription avec autoactivation, $d_1 m$ modélise la dégradation du mRNA, $k_2 m$ modélise la dynamique de la traduction, et $d_2 p$ modélise la dégradation de la protéine. Dans cet exercice, nous considérerons les valeurs suivantes pour les différents paramètres : $k_1 = k_2 = d_1 = d_2 = n = 1, K = 0.5$.

(ii) Le système est-il linéaire ? Temps-invariant ?

- (iii) Tracez un plan de phase qualitatif du système comprenant les isolines et identifiez le(s) point(s) d'équilibre du système graphiquement. Placez un vecteur associé au champ de vecteurs et de longueur qualitative dans les différents quadrants délimités par les isolines. Pour faciliter la construction du plan de phase, utilisez $g = 1$ et travaillez uniquement dans la région physiologique.
- (iv) Calculez analytiquement le(s) point(s) d'équilibre du système en fonction de g .
- (v) Déterminez analytiquement des critères de stabilité pour chaque point fixe en fonction de g .
- (vi) Identifiez le comportement du système global en fonction de ces critères (en terme d'évolution temporelle et de convergence de la quantité de protéines synthétisées pour différentes valeurs de g).
- (vii) Prouvez analytiquement que la convergence vers le(s) point(s) d'équilibre stable(s) sera toujours monotone.

Exercice 5 = Janvier 2021 - Q1

On considère le modèle dynamique suivant où μ est un paramètre réel.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 1 - x^2.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.)
- (iii) Esquissez le plan de phase dans la zone $x \in [-3, 3], y \in [-3, 3]$ en traçant qualitativement les champs de vecteurs autour de chaque point fixe. Reliez-les champs de vecteurs ensemble par continuité.
- (iv) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point $(x_0, y_0) = (0, 3)$? Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.
- (v) Quel est l'effet de la modification $\dot{y} = 2(1 - x^2)$ sur la dynamique du système ? Justifiez graphiquement dans le plan de phase.

Exercice 6 = Janvier 2022 - Q1

On considère le modèle dynamique suivant avec μ comme paramètre réel :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s). Discutez en fonction du paramètre μ si nécessaire.
- (iii) Calculez la nature du(des) point(s) fixe(s) (noeud stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.). Discutez en fonction du paramètre μ si nécessaire.
- (iv) Donnez l'équation des nullclines.
- (v) Dessinez le(s) plan(s) de phase complet de votre système. Tracez autant de plans de phase que de situations possibles lors de votre discussion paramétrique. Indiquez le(s) point(s) fixe(s), leur stabilité, tracez les nullclines, dessinez le champ de vecteurs. Tracez suffisamment de vecteurs pour avoir une bonne idée de la dynamique de votre système ; au minimum un vecteur dans les différents quadrants délimités par les nullclines. Expliquez comment vous trouvez ces vecteurs et montrez vos calculs pour les obtenir.
- (vi) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point $(x_0, y_0) = (0.5, 2)$ dans le plan de phase (ou les différents plans de phase en fonction du paramètre μ) ? Pour cela, tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.
- (vii) Quel est l'effet de la modification $\dot{y} = 2 - y$ sur la dynamique du système ? Expliquez en quelques phrases sans refaire l'étude complète du plan de phase.
- (viii) Dessinez un graphique x^* (l'abscisse de votre(vos) point(s) fixe(s)) en fonction de μ . Indiquez la nature du(des) point(s) fixe(s) d'abscisse x^* dans les différentes régions obtenues lors de votre discussion paramétrique. Vous pouvez utiliser une légende claire et expliquez brièvement la construction de

ce graphique.

(ix) En fonction du résultat de (iii) :

- Si vous avez obtenu un point fixe du type "noeud", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "spirale" ?
- Si vous avez obtenu un point fixe du type "spirale", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "noeud" ?

Exercice 7 = Aout 2021 - Q1

On considère le modèle dynamique suivant où les deux variables x et y sont définies entre -6 et 6.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos y \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.).
- (iii) Esquissez le plan de phase en traçant qualitativement les champs de vecteurs autour de chaque point fixe.
- (iv) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point A $(x_0, y_0) = (-1, 4)$? Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase. Tracez l'évolution temporelle de la variable $x(t)$ et $y(t)$ sur un même graphique. Il faut donc tracer deux trajectoires dans le plan de phase et dessiner deux graphiques temporels, un associé au point A et un associé au point B avec les tracés de x et y dans les deux graphiques.
- (v) Esquissez le bassin d'attraction d'un seul point fixe de votre choix. Pour cela, discutez des directions préférentielles et les vitesses associées à ces directions.
- (vi) Quel est l'effet de la modification $\dot{y} = -x$ sur la dynamique du système ? Justifiez graphiquement dans le plan de phase.

5 Sources supplémentaires

- Phase portrait of a system of ODEs (Matlab) :
<http://matlab.cheme.cmu.edu/2011/08/09/phase-portraits-of-a-system-of-odes/>
- Phase portrait of a system of ODEs (Python) :
<https://kitchingroup.cheme.cmu.edu/blog/2013/02/21/Phase-portraits-of-a-system-of-ODEs/>
- Exemple supplémentaire (Matlab) :
http://educ.jmu.edu/~strawbem/Phase_how_to.pdf
- The `phaseportrait` package (Python) :
<https://pypi.org/project/phaseportrait/>

Solutions des exercices

Algèbre linéaire : concepts à maîtriser

Exercice 1

Rappel énoncé :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 16 & 1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculer $x(t)$ et $y(t)$ à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres et discuter la stabilité du système.

Solution :

étape 1 : Les valeurs propres du système, après annulation du polynôme caractéristique (*i.e.* $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$), sont données par

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -3.$$

Les vecteurs propres associés (*i.e.* résolution de $(A - \lambda_i I)(\vec{e^{(i)}}) = 0, i \in \{1, 2\}$) sont eux donnés par

$$\vec{e^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{e^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

étape 2 : La décomposition de $x(t)$ et $y(t)$ donne

$$\begin{cases} x(t) = c_1(t)e_1^{(1)} + c_2(t)e_1^{(2)} \\ y(t) = c_1(t)e_2^{(1)} + c_2(t)e_2^{(2)}. \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} c_1(t) &= (c_1(0) - c_{1,\infty})e^{\lambda_1 t} + c_{1,\infty} \\ c_2(t) &= (c_2(0) - c_{2,\infty})e^{\lambda_2 t} + c_{2,\infty} \end{aligned}$$

où $c_{1,\infty} = -b_1/\lambda_1 = 0$ et $c_{2,\infty} = -b_2/\lambda_2 = 0$ puisqu'il n'y a aucune entrée externe appliquée ni à x ($\rightarrow b_1 = 0$), ni à y ($\rightarrow b_2 = 0$).

étape 3 : En considérant les conditions génériques $c_1(t = 0) = c_1(0)$ et $c_2(t = 0) = c_2(0)$, on obtient le nouveau système

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1(0)e^{\lambda_1 t} = c_1(0)e^{5t} \\ c_2(t) = c_2(0)e^{\lambda_2 t} = c_2(0)e^{-3t}. \end{cases}$$

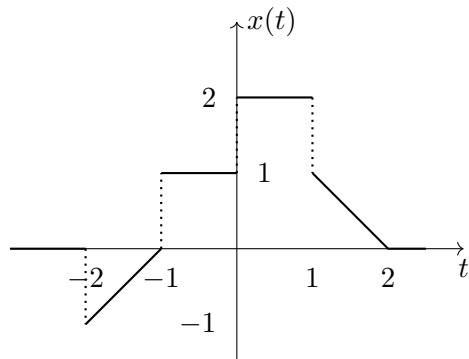
étape 4 : La solution s'écrit donc

$$\begin{cases} x(t) = c_1(0)e^{5t} + c_2(0)e^{-3t} \\ y(t) = 4c_1(0)e^{5t} - 4c_2(0)e^{-3t}. \end{cases}$$

TP1

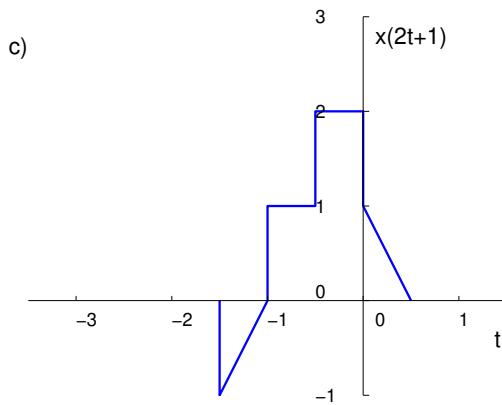
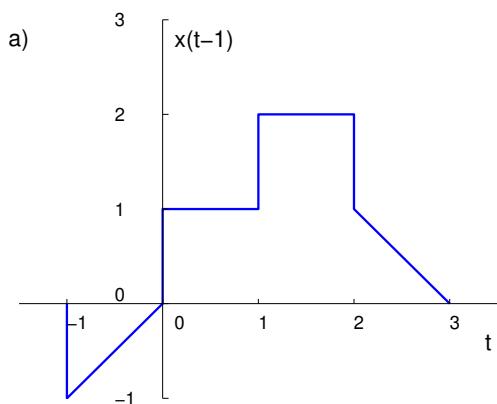
Exercice 1 = Exercice 1.2 (a)-(c)

Rappel énoncé :



Tracer les signaux suivants.

- (a) $x(t - 1)$
- (c) $x(2t + 1)$



Décalage d'une unité temporelle vers la droite

Décalage d'une unité temporelle vers la gauche
PUIS contraction du signal sur $[-1.5, 0.5]$ (*i.e.* reporte les valeurs du signal à des temps 2x plus petit)

Exercice 2 = Exercice 3.1 (a)-(b)

(a) Système dynamique, non-causal, linéaire, variant.

Résolution complète :

Système : $y(t) = u(t - 2) + u(2 - t)$

Énoncé (résumé) : Pour chaque système, identifier les différentes propriétés soit en démontrant, soit en donnant un contre-exemple.

- Statique-dynamique ?

Pour rappel, un système est statique si $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t = t^*$. Ici, $y(t^*) = u(t^* - 2) + u(2 - t^*)$ (exemple : $t^* = 4$ $y(4) = u(2) + u(-2)$). La sortie dépend donc de l'entrée en $t^* - 2$ et en $2 - t^*$. Par conséquent, le système est dynamique.

- Causalité ?

Pour rappel, un système est causal si $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t \leq t^*$. Intuitivement, on voit que $2 - t^*$ ne sera pas forcément ≤ 2 . En effet, on peut facilement trouver un contre-exemple : pour $t^* = -1$, on a en effet $y(-1) = u(-3) + u(3)$. Si on a bien $-3 \leq -1$, on a aussi que la sortie dépend du futur ($3 > -1$), de sorte que le système n'est pas causal.

Comment qualifier ce système alors ? Anticausal signifie que $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t \geq t^*$. Non-causal signifie que le système n'est ni causal, ni anti-causal. Au vu de l'équation $y(-1) = u(-3) + u(3)$, le système est donc non-causal puisqu'il existe des valeurs pour lesquelles il dépend à la fois du passé et du futur.

- Linéarité ?

Pour rappel, un système est linéaire si (u_1, y_1) et (u_2, y_2) sont des paires entrées-sortie valides du système, toute combinaison de la forme $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$ est également une paire valide. Pour déterminer si le système est linéaire, il suffit de démontrer que tout combinaison $\alpha u_1 + \beta u_2$ donne une sortie $\alpha y_1 + \beta y_2$.

Démo :

1. On écrit les paires entrées-sorties (u_1, y_1) et (u_2, y_2)

$$\begin{aligned} u_1(t) &\xrightarrow{S} y_1(t) = u_1(t-2) + u_1(2-t) \\ u_2(t) &\xrightarrow{S} y_2(t) = u_2(t-2) + u_2(2-t) \end{aligned}$$

2. On calcule la nouvelle entrée qui est une combinaison linéaire des deux entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$: $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$.

3. On fait passer cette nouvelle entrée dans le système

$$u(t) \xrightarrow{S} y(t) = u(t-2) + u(2-t)$$

On remplace alors grâce à la définition de $u(t)$ exprimée au point 2.

$$y(t) = \alpha u_1(t-2) + \beta u_2(t-2) + \alpha u_1(2-t) + \beta u_2(2-t)$$

Enfin, on associe pour retrouver $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y(t) = \underbrace{\alpha(u_1(t-2) + u_1(2-t))}_{y_1(t)} + \underbrace{\beta(u_2(t-2) + u_2(2-t))}_{y_2(t)} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Par conséquent, le système est bien linéaire.

Autre méthode : Une autre façon de voir si un système est linéaire est de regarder si les entrées/-sorties/signaux (plus généralement, les variables dépendantes) sont exprimées/modifiées par une fonction non linéaire. Cela n'a donc pas de rapport avec "t", mais bien uniquement avec les fonctions qui sont appliquées sur les entrées/sorties/signaux. Exemple : $\cos(u(t))$, $\sqrt{y(t)}$, $\ln(u(t-1))$, $u(t)y(t)$, ... Si une fonction non-linéaire est présente, on pourra conclure immédiatement que le système est non-linéaire, et, inversement, qu'il est linéaire. Le reste du cours utilisera cette deuxième méthode afin d'identifier la linéarité d'un système.

- Temps-variant ou invariant ?

Pour rappel, un système est dit invariant dans le temps lorsque la loi qu'il établit entre entrées et sorties ne change pas au cours du temps, c'est-à-dire si l'équation ne dépend pas explicitement de la valeur de la variable indépendante.

Démo :

1. L'entrée subit un décalage temporel puis cette entrée différée est modifiée par le système :

$$u(t) \xrightarrow{-\Delta} u_1(t) = u(t-\Delta) \xrightarrow{S} y_1(t) = u_1(t-2) + u_1(2-t)$$

c'est-à-dire $y_1(t) = u((t-2)-\Delta) + u((2-t)-\Delta)$ (puisque $u_1(t) = u(t-\Delta)$).

2. L'entrée est tout d'abord modifiée par le système puis cette sortie associée subit un décalage temporel.

$$u(t) \xrightarrow{S} y(t) (= u(t-2) + u(2-t)) \xrightarrow{-\Delta} y_2(t) = y(t-\Delta) = u((t-\Delta)-2) + u(2-(t-\Delta))$$

c'est-à-dire $y_2(t) = u(t-2-\Delta) + u(2-t+\Delta)$.

3. Comparer les résultats des points 1 et 2. S'ils sont identiques \rightarrow le système est temps-invariant. Ici, le système est donc temps-variant. Lorsque l'on applique un décalage temporel à l'entrée, le système n'associe pas à ce signal décalé la sortie associée au signal initial mais décalée.

Autre méthode : Dire qu'un système est invariant signifie que si l'entrée est décalée (exemple : $u(t - \Delta)$), la sortie l'est également, de la même valeur ($y(t - \Delta)$). Cela signifie en outre que le système ne dépend pas de la variable indépendante. Une équation de la forme $\sum_i a_i y(\tau_i(t)) = \sum_j b_j u(\tau'_j(t))$ sera temps-invariante si les a_i et les b_j ne sont pas fonction du temps, et si les τ_i et les τ'_j sont de la forme $t - t_0$. C'est cette simple identification que l'on utilisera par la suite en général.

(b) Système statique, causal, linéaire, variant.

Résolution complète :

Système : $y(t) = \cos(3t)u(t)$

Énoncé : idem

- Statique-dynamique ?

Pour rappel, les définitions concernant les propriétés des systèmes se focalisent sur les signaux d'entrées et de sorties uniquement. Ainsi, $y(t^*) = \cos(3t^*)u(t^*)$: le sortie en t^* ne dépend bien de l'entrée qu'en t^* . En conclusion, le système est statique. Le $\cos(3t^*)$ signifie juste que le coefficient devant le signal d'entrée n'est pas constant, mais cela reste un simple nombre et on ne considère pas une entrée à un autre moment.

- Causalité ?

Pour rappel, un système est causal si $y(t^*)$ ne dépend que de la valeur de l'entrée en $t \leq t^*$. La sortie en t^* , $y(t^*)$ ne dépend que de l'entrée qu'en t^* . Le système est donc causal.

- Linéarité ?

Pour rappel, un système est linéaire si (u_1, y_1) et (u_2, y_2) sont des paires entrées-sortie valides du système, toute combinaison de la forme $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$ est également une paire valide. Comme indiqué dans le rappel, on regarde si les signaux sont affectés par une fonction non-linéaire du type $\sqrt{u(t)}$, $\tan y(t)$. Si on observe ce type de non-linéarité, le système est bien défini comme un système non-linéaire. Dans cet énoncé, $y(t)$ et $u(t)$ ne sont pas touchés par des expressions non-linéaires. Le terme $\cos(3t)$ est simplement un coefficient multiplicatif du signal d'entrée.

→ Le système est donc linéaire.

Voici la démonstration pour s'en convaincre.

1. On écrit les paires entrées-sorties (u_1, y_1) et (u_2, y_2) (on voit que le $\cos(3t)$ est bien un simple coefficient).

$$\begin{aligned} u_1(t) &\xrightarrow{S} y_1(t) = \cos(3t)u_1(t) \\ u_2(t) &\xrightarrow{S} y_2(t) = \cos(3t)u_2(t) \end{aligned}$$

2. On calcule la nouvelle entrée qui est une combinaison linéaire des deux entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$: $u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$.
3. On fait passer cette nouvelle entrée dans le système

$$u(t) \xrightarrow{S} y(t) = \cos(3t)u(t)$$

On remplace alors grâce à la définition de $u(t)$ exprimée dans le point 2.

$$y(t) = \alpha \cos(3t)u_1(t) + \beta \cos(3t)u_2(t)$$

Enfin, on fait alors réapparaître $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

$$y(t) = \underbrace{\alpha \cos(3t)u_1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\beta \cos(3t)u_2(t)}_{y_2(t)} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Par conséquent, le système est bien linéaire. En effet, les signaux d'entrées et de sorties ne présentent aucune non-linéarité.

- Temps-variant ou temps-invariant ?

Pour rappel, un système est dit invariant dans le temps lorsque la loi qu'il établit entre entrées et sorties ne change pas au cours du temps.

Il suffit de regarder si les coefficients devant les signaux d'entrée et sortie dépendent du temps. Cela montre ainsi que le système est temps-variant. Dans cet énoncé, le terme $\cos(3t)$ multiplie l'entrée $u(t)$. Pour des instants différents, le terme prend des valeurs différentes.

→ Cela rend le système temps-variant.

Voici la démonstration pour s'en convaincre.

1. Décaler d'abord l'entrée puis appliquer cette entrée différée dans le système :

$$u(t) \xrightarrow{-\Delta} u_1(t) = u(t - \Delta) \xrightarrow{S} y_1(t) = \cos(3t)u_1(t)$$

c'est-à-dire $y_1(t) = \cos(3t)u(t - \Delta)$ (puisque $u_1(t) = u(t - \Delta)$).

2. Appliquer d'abord l'entrée dans le système puis décaler la sortie associée.

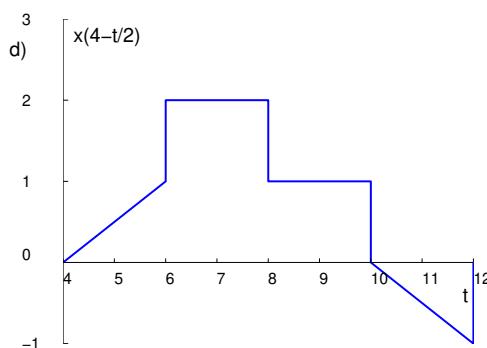
$$u(t) \xrightarrow{S} y(t) (= \cos(3t)u(t)) \xrightarrow{-\Delta} y_2(t) = y(t - \Delta) = \cos(3(t - \Delta))u(t - \Delta)$$

c'est-à-dire $y_2(t) = \cos(3(t - \Delta))u(t - \Delta)$.

3. Comparer les résultats des points 1 et 2. S'ils sont identiques → le système est temps-invariant.

Ce n'est pas le cas ici, les deux expressions diffèrent. Le système dépend de la variable t , il est bien temps-variant.

Exercice 3 = Exercice 1.2 (d)



Transformations combinées :

- 1) Décalage temporel de 4 unités vers la gauche ($t \rightarrow t + 4$) ;
- 2) Inversion temporelle, *i.e.* reporter la valeur du signal en t au temps $-t$, ($t \rightarrow -t$ donc $t+4 \rightarrow -t+4$) ;
- 3) Dilatation temporelle d'un facteur 2, *i.e.* valeurs du signal sur un domaine 2x plus grand, ($t \rightarrow t/2$ donc $-t+4 \rightarrow -t/2+4$).

Exercice 4 = Exercice 3.1 (f)-(g) [TXB]

Système dynamique, non-causal (! cas où $t > 0$ et $t < 0$!), linéaire, variant ($t \rightarrow t/3$ puis $t/3 \rightarrow (t - \Delta)/3 \neq t \rightarrow t - \Delta$ puis $t - \Delta \rightarrow t/3 - \Delta$).

Exercice 5 = Exercice 3.15 (a)-(c) [TXB]

- (a) Système linéaire, variant ($t^2 - \Delta \neq (t - \Delta)^2$)
- (c) Système linéaire et invariant.

Exercice 6 = Interro 2013

$y(t) = \sin(u(t))$: non-linéaire ($\sin(u_1 + u_2) \neq \sin(u_1) + \sin(u_2)$), causal, temps-invariant.

$y(t) = u(\sin(t))$: linéaire, non-causal, temps-variant ($u(\sin(t) - \Delta) \neq u(\sin(t - \Delta))$).

Exercice 7 = Exercice 3.9 [TXB]

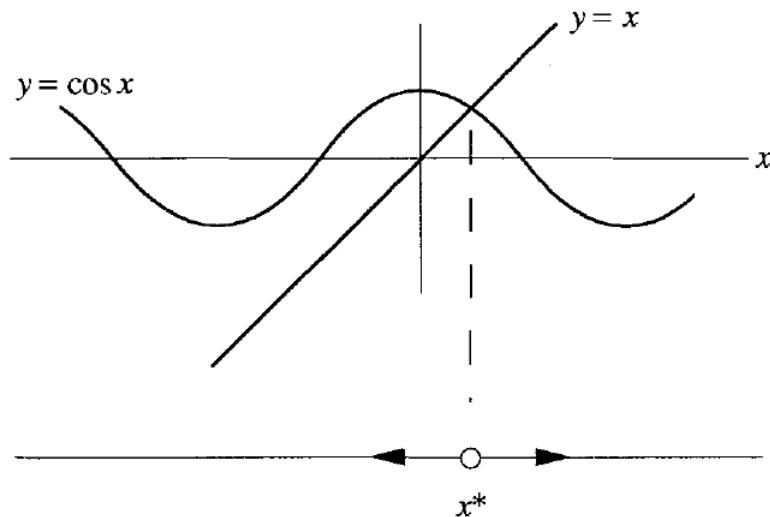
- a) Des non-linéarités peuvent apparaître de différentes manières dans les composants électriques ; citons par exemple la dépendance des paramètres R , L et C en fonction de la température (qui elle-même dépend de l'intensité de courant), le claquage des condensateurs ou l'effet de diélectriques non-linéaires. Si le circuit est couplé à un système électromécanique, des dépendances non-linéaires en fonction de la position des pièces mécaniques apparaissent lorsque l'on veut considérer les lois exactes pour le couple rotorique et la force contre-électro-motrice.
- b) L'usure des composants est inévitable. Des appareils électriques extérieurs peuvent perturber le circuit par le champ électromagnétique qu'ils créent ; ces perturbations sont en général non-constantes et donc variantes.

Exercice 8 = Exercice 3.12 (a) [TXB]

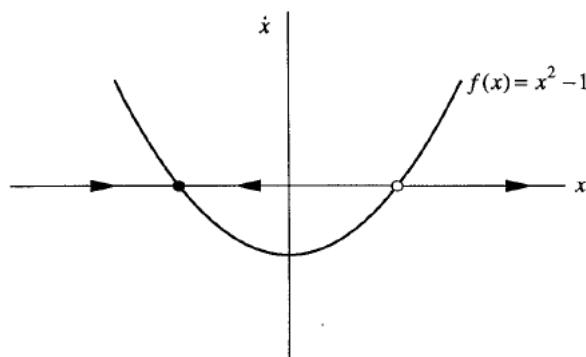
(a) Les trois systèmes sont linéaires, les systèmes (ii) et (iii) ne sont pas statiques ; la bonne réponse est donc (i) (bien que ce système soit variant et comporte une non-linéarité vis-à-vis du temps).

TP2

Exercice 1 = Exemple 2.2.3 [STR]



Exercice 2 = Exemple 2.2.1 [STR]



Point(s) fixe(s) ?

- Graphiquement : intersection de $f(x)$ avec axe des $x \Rightarrow 2$ points fixes

- Mathématiquement : résoudre $\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Stabilité ? Selon le champ de vecteurs et/ou calcul de la pente, on a $x = -1$ stable et $x = +1$ instable

Exercice 3 = Paragraphe 2.3 [STR]

Les points fixes sont donnés par

$$\dot{N} = 0 \iff rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \iff N_1^* = 0, N_2^* = K.$$

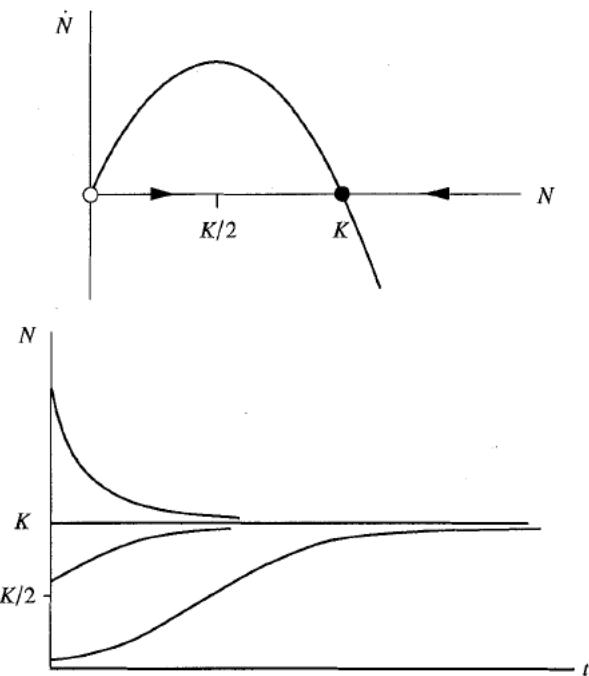
Leur stabilité s'évalue analytiquement en considérant $f(N) = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ et donc

$$f'(N_1^*) = r > 0 \rightarrow \text{instable},$$

et

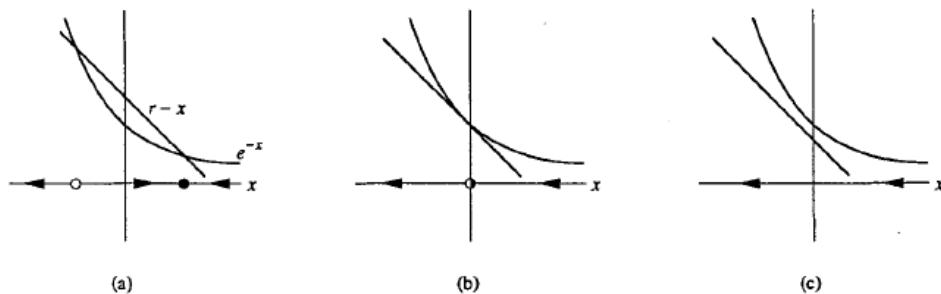
$$f'(N_2^*) = -r < 0 \rightarrow \text{stable}.$$

Graphiquement, on a :



Exercice 4 = Exemple 3.1.2 [STR]

- (a) : $r > 1$, 2 PF (celui de gauche instable et celui de droite stable) ;
- (b) : $r = 1$, 1 PF en $x = 0$, si $x(0) > 0$, alors $x(t)$ converge et stationne en $x = 0$ sinon ($x(0) < 0$) $x(t)$ diverge à $-\infty$;
- (c) : $r < 1$, pas de PF, \dot{x} toujours < 0 donc x décroît indéfiniment.



Exercice 5 = Exercice 2.3.2 [STR]

$x_1^* = 0$, instable ; $x_2^* = k_1 a / k_{-1}$ stable ; si $a = 0$, $x_1^* = x_2^* = 0$.

TP3

Exercice 1 = Lapin vs Mouton [STR]

PF? Solution(s) de $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = x(3 - x - 2y) \rightarrow x = 0 \text{ OU } 3 - 2y = x \\ \dot{y} = 0 = y(2 - x - y) \rightarrow y = 0 \text{ OU } 2 - y = x \end{cases}$$

Combinaisons possibles (x, y) : $(0, 0); (3, 0); (0, 2); (1, 1)$

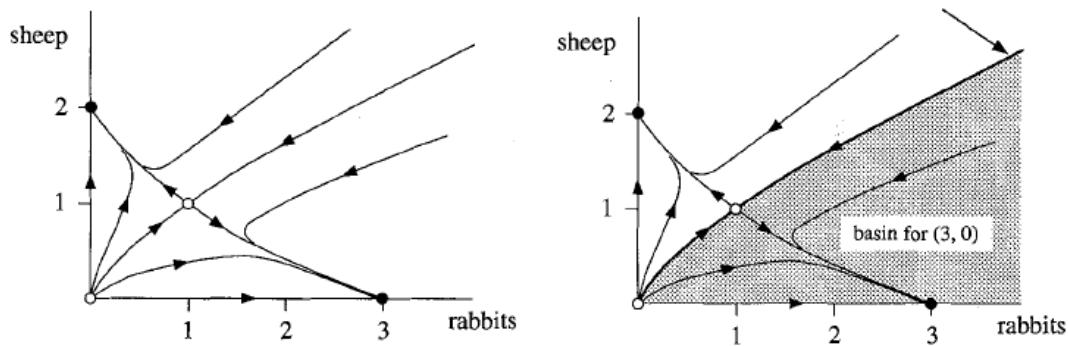
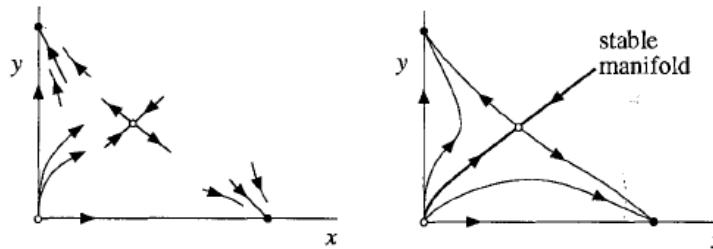
Stabilité?

- Jacobienne? $A = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$

- Valeurs propres au PF?:

- $(0, 0)$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3 > 0; \lambda_2 = 2 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ instable
- $(3, 0)$: $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 3}}{2} = \begin{cases} -1 < 0 \\ -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (3, 0)$ stable
- $(0, 2)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 2}}{2} = \begin{cases} -1 < 0 \\ -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2)$ stable
- $(1, 1)$: $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4 \cdot (-1)}}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{2} > 0 \\ -3 - \sqrt{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 1)$ point de selle

Plan de phase :



Exercice 2

1. PF? Solution(s) de $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = 10x - 5xy \rightarrow x = 0 \text{ OU } y = 2 \\ \dot{y} = 0 = 3y + xy - 3y^2 \rightarrow y = 0 \text{ OU } 3y - 3 = x \end{cases}$$

Combinaisons possibles (x, y) : $(0, 0); (0, 1); (3, 2)$

2. Stabilité ?

- Jacobienne ? $A = \begin{pmatrix} 10 - 5y & -5x \\ y & 3 + x - 6y \end{pmatrix}$

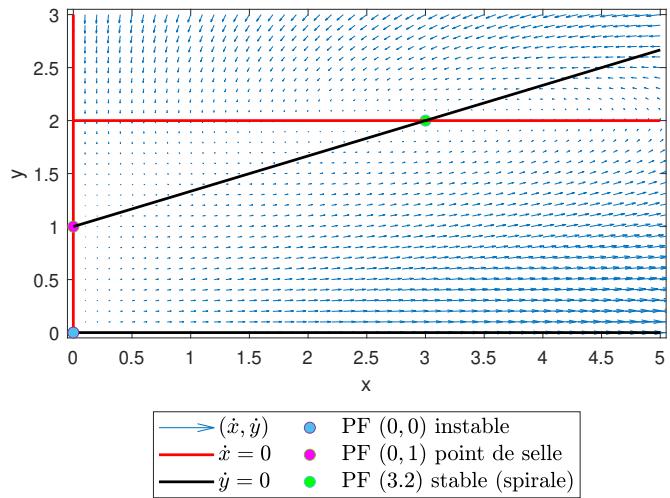
– Valeurs propres au PF ? :

- $(0, 0) : A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 10 > 0; \quad \lambda_2 = 3 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ instable

- $(0, 1) : A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-15)}}{2} = \begin{cases} 5 > 0 \\ -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 1)$ point de selle

- $(3, 2) : A = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (30)}}{2} = \begin{cases} -3 + i\sqrt{21} \\ -3 - i\sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow (3, 2)$ spirale stable

3. Plan de phase :



Exercice 3 = Exercice 6.3.6 [STR]

1. PF? Solution(s) de $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 = xy - 1 \rightarrow y = 1/x \text{ (x different from 0)} \\ \dot{y} = 0 = x - y^3 \rightarrow y = \sqrt[3]{x} \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow 1 = x \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Combinaisons possibles $(x, y) : (1, 1); (-1, -1)$

2. Stabilité ?

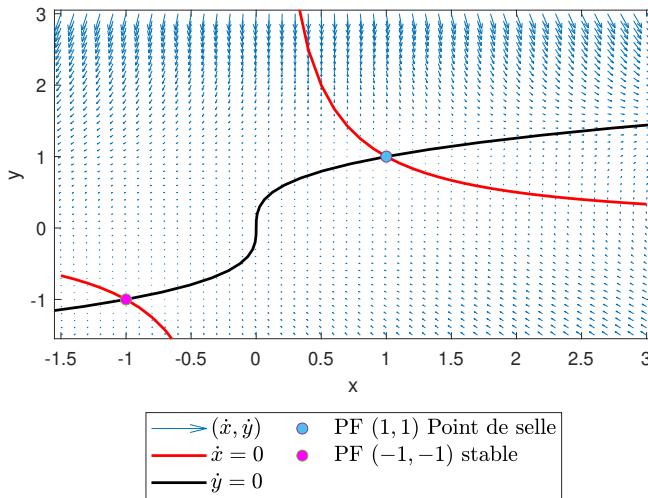
- Jacobienne ? $A = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$

– Valeurs propres au PF ? :

- $(1, 1) : A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-4)}}{2} = \begin{cases} -1 + \sqrt{5} > 0 \\ -1 - \sqrt{5} < 0 \end{cases} \Rightarrow (1, 1)$ Point de selle

- $(-1, -1) : A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (4)}}{2} = -2$ (double) $< 0 \Rightarrow (-1, -1)$ stable

3. Plan de phase :



Exercice 4 = Janvier 2020 - Q1

- (i) — Entrée : g =concentration en gène, $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.
— Sortie : p =concentration de protéines, $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.
— Variables d'état :
— m =concentration en ARN-m, $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$,
— p =concentration en protéines, $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$.
- (ii) — Le système est non-linéaire car gp est un produit du signal d'entrée et de sortie + présence du terme non-linéaire $p/(1/2 + p)$.
— Le système est temps-invariant car aucun des coefficients devant g ou p ne dépend du temps.
Les paramètres sont bien constants.
- (iii) — p -nullcline : $m = p$.
— m -nullcline : $g\frac{p}{0.5+p} - m = 0$.

Pour $g = 1$, point d'équilibre : $(m^*, p^*) = (0, 0)$. Ensuite, on dessine le champ de vecteurs dans les différents quadrants délimités par les nullclines. Par exemple en $(1, 0) : \nwarrow$, $(0, 1) : \swarrow$, $(2, 1) : \swarrow$ et $(0.1, 0.15) : \nearrow$.

- (iv) Calcul des points d'équilibre : $\text{PF1} = (g - 1/2, g - 1/2)$, $\text{PF2} = (0, 0)$.
- (v) Calcul de la matrice jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & \frac{g/2}{(0.5+p)^2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Pour le PF1, la matrice devient

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1/2g \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $s^2 + 2s + (1 - 1/2g)$.

Stable si les valeurs propres sont négatives, donc si $g > 1/2$.

- Pour le PF2, la matrice devient

$$J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2g \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Polynôme caractéristique : $s^2 + 2s + (1 - 2g)$.

Stable si les valeurs propres sont négatives, donc si $g < 1/2$.

- (vi) Ainsi, si $g < 1/2$, le système converge vers le PF2. Aucune protéine ne sera produite. Si $g > 1/2$, le système converge vers le PF1. La protéine sera produite durablement.
- (vii) Pour observer une convergence monotone vers le point stable, les valeurs propres doivent être purement réelles (en plus d'être négatives). Dans le calcul des valeurs propres, cela veut dire que l'on doit avoir $2g > 0$. C'est toujours le cas car $g > 0$.

Exercice 5 = Janvier 2021 - Q1

- (i) Le système est non-linéaire. La non-linéarité vient du terme x^2 .
- (ii) Les points fixes sont donnés par PF1 : $(x = 1, y = -1)$ et PF2 : $(x = -1, y = 1)$.
La matrice jacobienne est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est donc donné par $s^2 - s + 2x$. Le calcul des valeurs propres ($s^2 - s + 2x = 0$) donne

- PF1 : $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm j\sqrt{7}}{2}$. Cela correspond à une spirale instable.
- PF2 : $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Cela correspond à un point de selle.

- (iii) Le plan de phase obtenu avec Geogebra est donné à la figure 8.

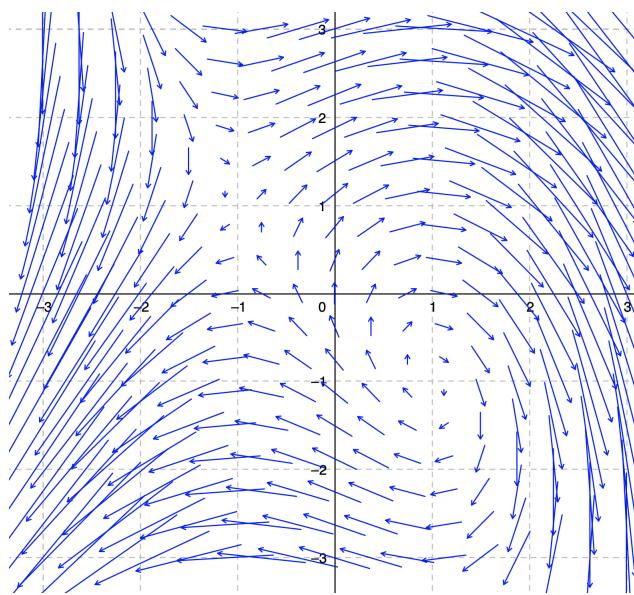


FIGURE 8 – Plan de phase dans la zone $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$.

- (iv) En se plaçant au point initial $(x_0, y_0) = (0, 3)$, le système va suivre les lignes de champ et entamer une descente vers le 4ème quadrant. En l'absence de point stable, le système diverge.
- (v) La composante vitesse selon la verticale est doublée. Les vecteurs ont donc une composante verticale deux fois plus importante.

Exercice 6 = Janvier 2022 - Q1

- (i) Le système est non-linéaire. La non-linéarité vient du terme x^3 .
- (ii)
 - Pour toutes les valeurs de μ , on a PF1 : $(x, y) = (0, 0)$.
 - Si $\mu < 0$, on a uniquement le PF1.
 - Si $\mu \geq 0$, on obtient également PF2 : $(\sqrt{\mu}, 0)$ et PF3 : $(-\sqrt{\mu}, 0)$.
- (iii) La matrice jacobienne est donnée par

$$J = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- PF1 : les valeurs propres sont $\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = -1$.
- si $\mu < 0$: les deux valeurs propres sont négatives et réelles \rightarrow point stable.

- si $\mu = 0$: $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 < 0$ et réelle \rightarrow point stable.
 - si $\mu > 0$: les deux valeurs propres sont réelles et de signes contraires \rightarrow point de selle.
 - PF2 : les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2\mu$ et $\lambda_2 = -1$.
Avec la condition sur μ pour l'existence de PF2, les deux valeurs propres sont réelles et négatives \rightarrow point stable.
 - PF3 : les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2\mu$ et $\lambda_2 = -1$.
Avec la condition sur μ pour l'existence de PF3, les deux valeurs propres sont réelles et négatives \rightarrow point stable.
- (iv) — x -nullcline : $x = 0$ et, si $\mu > 0$, $x = \pm\sqrt{\mu}$. Ces nullclines sont donc des droites verticales.
— y -nullcline : $y = 0$. Il s'agit de l'axe des abscisses.
- (v) Les plans de phase, obtenus avec Geogebra, sont donnés aux figures 9 et 10 pour la valeur de $\mu = 1$.

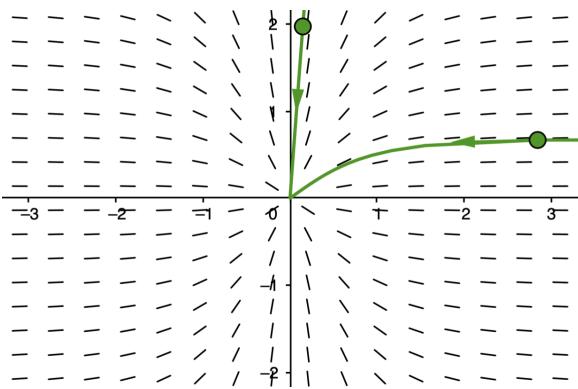


FIGURE 9 – Plan de phase pour $\mu < 0$.

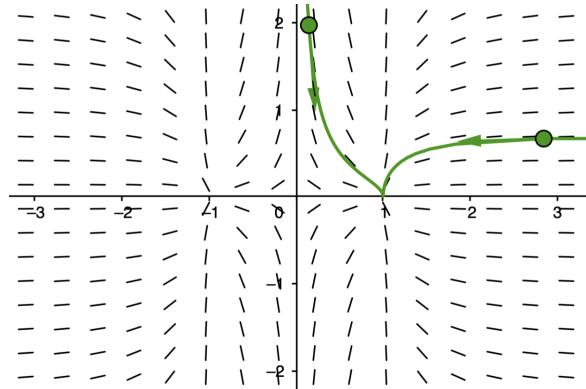


FIGURE 10 – Plan de phase pour $\mu \geq 0$.

- (vi) Il y a différentes configurations possibles :
- Si $\mu < 0$: la trajectoire converge vers le PF1.
 - Si $\mu \geq 0$:
 - Si $\mu = 0$: les points fixes se confondent, idem que pour $\mu < 0$.
 - Si $0 < \sqrt{\mu} < 0.5$, la trajectoire converge vers le PF2 par la droite.
 - Si $0.5 < \sqrt{\mu}$, la trajectoire converge vers le PF2 par la gauche.
- (vii) L'ordonnée des points fixes est augmentée de deux unités. La nature de ces points fixes n'est pas modifiée.
- (viii) Le diagramme de bifurcation est donné à la figure 11. L'abscisse du PF vaut 0 pour μ négatif. Ensuite, pour μ positif, il y a trois points fixes, l'abscisse nulle est un PF instable et les deux autres abscisses caractérisant les PF stables sont égales à $\pm\sqrt{\mu}$.
Légende : les points fixes stables sont en trait plein, les points instables en trait discontinu.

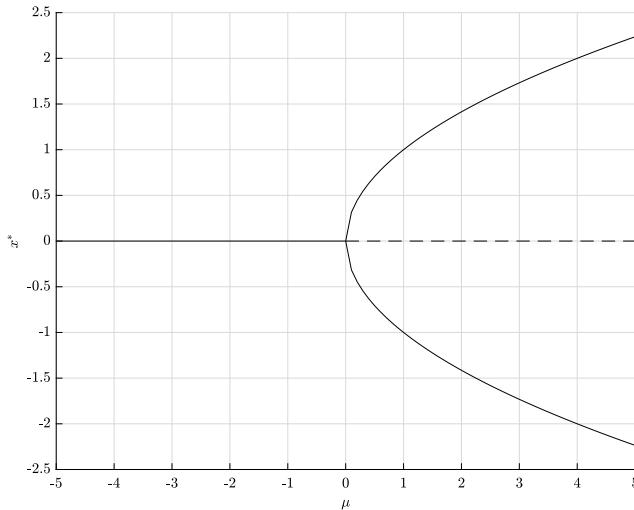


FIGURE 11 – Diagramme de bifurcation pour l'abscisse x^* en fonction du paramètre μ .

- (ix) Les points fixes obtenus étant de type "noeud", on cherche à modifier le système afin d'obtenir des points fixes de type "spirale". Cela correspond à des comportements oscillatoires qui s'observent lorsque les valeurs propres associées à la matrice jacobienne du système ne sont pas purement réelles. Dès lors, pour obtenir des valeurs propres complexes, une manière simple de faire est de s'arranger pour obtenir un déterminant négatif et ainsi obtenir des valeurs propres complexes. Par exemple, le système modifié peut être

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 + y \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$J = \begin{pmatrix} \mu - 3x^2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui amène une discussion paramétrique sur le déterminant et qui permet d'avoir des valeurs propres complexes conjuguées.

Exercice 7 = Aout 2021 - Q1

- (i) Le système est non-linéaire. La non-linéarité vient du terme $\cos(y)$.
- (ii) Les points fixes sont donnés par $\text{PF}_k : (x, y) = (0, k\pi/2)$ pour $k \in \{-3, -1, 1, 3\}$. La matrice jacobienne est donnée par
 - PF_k pour $k \in \{-3, 1\}$: valeurs propres complexes $(\pm j) \rightarrow$ centre.
 - PF_k pour $k \in \{-1, 3\}$: valeurs propres réelles $(\pm 1) \rightarrow$ point de selle.
- (iii) Le plan de phase est donné à la figure 12.
- (iv) Les graphes demandés sont donnés à la figure 13.
- (v) Pour le point fixe $(0, 3\pi/2)$; il suffit de calculer les vecteurs propres associées aux valeurs propres $\lambda = \pm 1$ en résolvant l'équation suivante

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient le vecteur propre $(1, 1)$ pour la valeur propre $\lambda = 1$ et le vecteur propre $(1, -1)$ pour la valeur propre $\lambda = -1$. Le bassin d'attraction associé à un point fixe est formé des deux droites dont les directions sont données par les vecteurs propres et passant par ce point fixe.

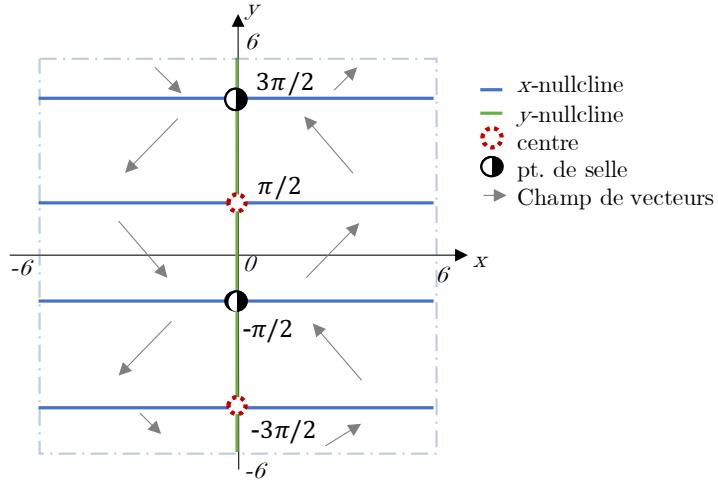


FIGURE 12 – Plan de phase.

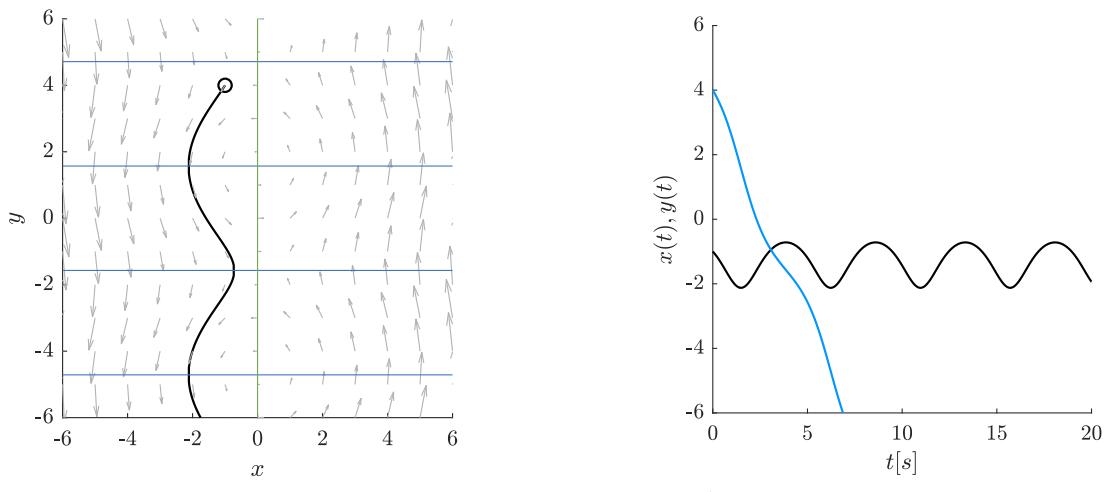


FIGURE 13 – Représentations graphiques de l'évolution du système depuis $(x_0, y_0) = (-1, 4)$.

Les deux valeurs propres donnent une indication sur la vitesse avec laquelle le point se déplace selon ces directions préférentielles. Ici, les deux valeurs propres ont la même amplitude. Une "particule" dans le plan de phase se déplace à la même vitesse selon ces deux directions.

- (vi) La composante vitesse selon la verticale est inversée. Une flèche qui pointait vers le bas à droite pointerà maintenant vers le haut à droite.