Groupes Moyennables

Anatole Dedecker, encadré par Omar Mohsen

21 juin 2023

Projet de recherche de M1 à l'Université Paris-Saclay

Table des matières

Conventions et remarques préliminaires

Par convention, les produits scalaires sur le corps $\mathbb{C}$ sont supposés linéaires en le premier argument.

Conformément à la convention dans le monde anglophone, et pour éviter toute confusion, nous dirons qu'un espace topologique X est *compact* s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, sans hypothèse de séparation. Nous dirons que X est *localement compact* si, pour tout $x \in X$, le filtre $\mathcal{N}_x$ des voisinages de x admet une *base* formée d'ensembles compacts. Si X est séparé, on retrouve que X est localement compact si et seulement si tout point admet *un* voisinage compact.

Pour G un groupe et $g \in G$, nous noterons inv l'inversion et ℓ_g, r_g les applications de translation :

$$\mathrm{inv} = (-)^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \right. \quad ; \quad \ell_g = (g-) : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & gx \end{array} \right. \quad ; \quad r_g = (-g) : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & xg \end{array} \right.$$

Nous renvoyons à l'annexe B pour les résultats élémentaires concernant l'intégration sur les groupes localement compacts séparés, et en particulier le théorème d'existence et unicité des mesures de Haar qui sera utilisé tout au long de ce document.

Si (X, μ) est un espace mesuré et $p < +\infty$, on note $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ l'espace vectoriel semi-normé des fonctions mesurables complexes de puissance p-ième intégrable, muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ usuelle, et $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ l'espace normé associé. Dans le cas $p = \infty$, nous adoptons les mêmes notations, mais en utilisant une définition subtilement différente : une fonction mesurable f appartient $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ si elle est bornée μ-localement-presque-partout, et la borne optimale (en valeur absolue) est notée $\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$. Cette définition assure qu'on a $(\mathrm{L}^1)^* \simeq \mathrm{L}^\infty$ sans hypothèse supplémentaire. On renvoie à l'annexe A pour plus de détails.

Dans le cas des groupes topologiques localement compacts et séparés, l'espace et la norme L^∞ ne dépendent pas du choix de la mesure de Haar, car les mesures de Haar sont deux-à-deux absolument continues les unes. Nous notons donc $\mathscr{L}^\infty(\Gamma)$ et $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

1 Moyennes et contenus invariants

Fixons Γ un groupe topologique séparé et localement compact. Sauf mention explicite du contraire, μ désigne une mesure de Haar arbitraire sur Γ.

1.1 Définition, premiers exemples et contre-exemples

La notion qui va nous intéresser dans ce mémoire est la suivante.

Définition 1.1. *Le groupe séparé et localement compact* Γ *est* moyennable *s'il existe une forme linéaire positive* $m : \mathrm{L}^\infty(G) \to \mathbb{C}$ *vérifiant* $m(1) = 1$ *et* $\forall g \in \Gamma, m \circ \lambda_g = m = m \circ \rho_g$.

Plus généralement, nous appellerons *moyenne* sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ toute forme linéaire positive $m : \mathrm{L}^\infty(X, \mu) \to \mathbb{C}$ vérifiant $m(1) = 1$. Si de plus X est un groupe et si $\mathcal{A}$ est stable par translations à gauche (resp. à droite), nous dirons qu'une moyenne est *invariante à gauche* (resp. *à droite*) si $\forall x \in X, m \circ \lambda(x) = m$ (resp. $m \circ \rho(x) = m$). Si ces deux conditions sont vérifiées, nous dirons simplement que T est *invariante par translations* ou simplement *invariante*.

Un groupe topologique séparé et localement compact Γ est donc moyennable si et seulement si $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \mu)$ admet une moyenne invariante, pour toute mesure de Haar μ sur Γ, le choix n'ayant aucune importance car toutes les mesures de Haar définissent le même espace $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

Notons tout de suite que l'invariance bilatère n'impose pas de restriction suplémentaire.

Proposition 1.2. *Supposons qu'il existe une moyenne m sur $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma), \mu)$, invariante par translations* à gauche. *Alors Γ est un groupe moyennable.*

Commençons par prouver le lemme suivant, qui sera utile en lui-même.

Lemme 1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi : \mathrm{L}^\infty(X, \mu) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire* non nécessairement continue. *On a l'équivalence :*

$$\|\varphi\| = \varphi(1) \Leftrightarrow \forall a \geq 0, \varphi(a) \geq 0$$

Démonstration. Supposons d'abord $\|\varphi\| = \varphi(1)$, et soit $a \geq 0$ de norme 1. On a donc, pour localement presque tout $x \in X$, $\{a(x), 1 - a(x)\} \subseteq [0, 1]$, d'où enfin $\|1 - a\|_{\mathrm{L}^\infty} \leq 1$. Mais par ailleurs $\|\varphi\| = \varphi(a) + \varphi(1 - a) \leq \varphi(a) + |\varphi(1 - a)| \leq \varphi(a) + \|\varphi\| \, \|1 - a\|_{\mathrm{L}^\infty}$, et finalement $\varphi(a) \geq \|\varphi\| \left(1 - \|1 - a\|_{\mathrm{L}^\infty}\right) \geq 0$.

Supposons maintenant φ positive. Notons déjà qu'on a bien sûr $\|\varphi\| \geq |\varphi(1)| = \varphi(1)$. Soit donc $a \in \mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ quelconque, et notons que $-\|a\|_{\mathrm{L}^\infty} \cdot 1 \leq a \leq \|a\|_{\mathrm{L}^\infty} \cdot 1$, de sorte que $-\|a\|_{\mathrm{L}^\infty} \varphi(1) \leq \varphi(a) \leq \|a\|_{\mathrm{L}^\infty} \varphi(1)$, ce qui conclut. □

Démonstration de la proposition 1.2. Il s'agit donc de construire une *autre* moyenne n sur Γ qui soit cette-fois invariante des deux côtés. Posons d'abord, pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ quelconque, $\widehat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma & \to & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & m(f \circ r_g) \end{array} \right.$. Le lemme 1.3 montre que m est continue de norme $m(1) = 1$. Cela entraîne $\forall g \in \Gamma, \left|\widehat{f}(g)\right| \leq \|f \circ r_g\|_{\mathrm{L}^\infty} = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}$, donc $\widehat{f} \in B(\Gamma) \subseteq \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$. Posons alors $n(f) := m\left(\widehat{f} \circ \mathrm{inv}\right)$, qui est bien défini car $\widehat{f}$ est bornée *partout*.

Notons que, pour $f, f_1, f_2 \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ et $g, x \in \Gamma$, on a :

$$\widehat{1} = 1$$
$$\widehat{f_1 + f_2} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$$
$$\widehat{f \circ \ell_g}(x) = m(f \circ \ell_g \circ r_x) = m(f \circ r_x \circ \ell_g) = m(f \circ r_x) = \widehat{f}(x)$$
$$\widehat{f \circ r_g}(x) = m(f \circ r_g \circ r_x) = m(f \circ r_{xg}) = \widehat{f}(xg) = \left(\widehat{f} \circ r_g\right)(x)$$

En précomposant par inv et en appliquant m à ces relations, on obtient :

$$\begin{aligned} n(1) &= m(1 \circ \mathrm{inv}) = 1 \\ n(f_1 + f_2) &= m\left(\widehat{f_1} \circ \mathrm{inv} + \widehat{f_2} \circ \mathrm{inv}\right) = n(f_1) + n(f_2) \\ (n \circ \lambda(g))(f) &= m\left(\widehat{f \circ \ell_{g^{-1}}} \circ \mathrm{inv}\right) = m\left(\widehat{f} \circ \mathrm{inv}\right) = n(f) \\ (n \circ \rho(g))(f) &= m\left(\widehat{f \circ r_g} \circ \mathrm{inv}\right) = m\left(\widehat{f} \circ r_g \circ \mathrm{inv}\right) = m\left(\widehat{f} \circ \mathrm{inv} \circ \ell_{g^{-1}}\right) = n(f) \end{aligned}$$

Ce qui conlut. □

Les premiers exemples de groupes moyennables sont les groupes compacts séparés (et en particulier les groupes finis discrets). En effet, si l'on note μ la mesure de Haar normalisée d'un tel groupe, l'intégration selon μ fournit une moyenne invariante.

Donnons tout de suite un contre-exemple, qui fut fondamental dans le développement historique de la théorie.

Théorème 1.4. *Le groupe libre en deux générateurs F_2 (muni de la topologie discrète) n'est pas moyennable.*

Démonstration. Notons a, b les deux générateurs. Pour m mot réduit en $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, notons $S(m)$ l'ensemble des $g \in F_2$ dont l'écriture (unique) comme mot réduit commence par m. On a par exemple $ab \in S(a)$ mais $aa^{-1}b \notin S(a)$ car le mot réduit associé à $aa^{-1}b$ est b.

Remarquons que $a^{-1}S(a) = S(a^{-1})^c$. En effet, si m est un mot réduit ne commençant pas par a^{-1}, am est un mot réduit commençant par a. Réciproquement si am est un mot réduit alors m est réduit et ne commence pas par a^{-1}.

On montre de même que $b^{-1}S(b) = S(b^{-1})^c$. Supposons alors qu'il existe une moyenne m sur F_2 invariante par translations. On a alors :

$$\begin{aligned} m\left(\mathbb{1}_{S(a)}\right) + m\left(\mathbb{1}_{S(a^{-1})}\right) &= m\left(\lambda(a^{-1})(\mathbb{1}_{S(a)}) + \mathbb{1}_{S(a^{-1})}\right) = m\left(\mathbb{1}_{a^{-1}S(a)} + \mathbb{1}_{S(a^{-1})}\right) = 1 \\ m\left(\mathbb{1}_{S(b)}\right) + m\left(\mathbb{1}_{S(b^{-1})}\right) &= m\left(\lambda(b^{-1})(\mathbb{1}_{S(b)}) + \mathbb{1}_{S(b^{-1})}\right) = m\left(\mathbb{1}_{b^{-1}S(b)} + \mathbb{1}_{S(b^{-1})}\right) = 1 \end{aligned}$$

Mais les ensembles $S(a)$, $S(a^{-1})$, $S(b)$ et $S(b^{-1})$ sont disjoints, donc :

$$1 = m(1) \geq m\left(\mathbb{1}_{S(a)} + \mathbb{1}_{S(a^{-1})} + \mathbb{1}_{S(b)} + \mathbb{1}_{S(b^{-1})}\right) = 2$$

D'où contradiction. □

1.2 Moyennes et contenus

Il est intéressant de noter que, dans la preuve précédente, nous n'avons besoin d'évaluer la moyenne que sur des fonctions indicatrices. Cette remarque ainsi que le cas des groupes compacts suggèrent que l'on peut aussi voir une moyenne comme fonction définie sur des parties de Γ, de manière similaire à une mesure. On retrouverait alors le point de vue « forme linéaire positive » par une forme d'intégration.

Une hypothèse optimiste mais naturelle serait que toute moyenne est donnée par l'intégration pour une mesure de Radon. En fait, si c'était le cas, la notion de moyennabilité ne serait pas très intéressante : en effet, si μ est une mesure de Radon sur Γ telle que $f \mapsto \int f \, \mathrm{d}\mu$ soit une moyenne bien définie et invariante, alors μ est automatiquement une mesure de Haar de masse 1, et le théorème B.1 assure qu'une telle mesure n'existe que si Γ est compact. Les groupes moyennables seraient donc exactement les groupes compacts !

Évidemment ce n'est pas le cas, et le théorème 1.13 de moyennabilité de $\mathbb{Z}$ montrera que la classe des groupes moyennables est plus grande que celle des groupes compacts. Cependant, nous disposons bien d'un théorème de représentation des moyennes comme des « intégrales », à condition d'affaiblir la condition de σ-additivité des mesures.

Un *contenu* sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ [1] est une fonction $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant $m(\varnothing) = 0$ et $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$ pour $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjoints. Les mesures sur $(X, \mathcal{A})$ sont donc exactement les contenus σ-additifs.

Nous allons à présent développer la théorie de l'intégration des fonctions *bornées* selon un contenu *fini*. Il convient de noter que, même si nous utiliserons le symbole $\int$, cette théorie ne jouit pas des propriétés agréables de l'intégration de Lebesgue, le défaut de σ-additivité se traduisant par l'absence des théorèmes de convergence monotone et dominée.

Définition 1.5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, m et n deux contenus sur $(X, \mathcal{A})$. On dit que m est* absolument continu *par rapport à n, que l'on note $m \ll n$, si tout ensemble n-localement négligeable est m-localement négligeable, la définition de négligeabilité locale pour les contenus étant identique à celle donnée en A.2 pour les mesures.*

Dans le cas où m est fini (i.e $m(X) < +\infty$), cela revient à demander que tout $A \in \mathcal{A}$ n-localement négligeable vérifie $m(A) = 0$.

Proposition 1.6. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et m un contenu fini sur $(X, \mathcal{A})$* absolument continu par rapport à μ. *Il existe alors une unique forme linéaire positive $\int - \, \mathrm{d}m$: $\mathrm{L}^\infty(X, \mu) \to \mathbb{C}$ vérifiant $\int \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}m = m(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.*

De plus, l'application $I : m \mapsto \int - \, \mathrm{d}m$ est une bijection de l'ensemble des contenus finis absolument continus par rapport à μ sur l'ensemble des formes linéaires positives sur $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$.

Démonstration. On considère le sous-espace vectoriel $\mathscr{S}(X)$ de $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ formé des fonctions simples, c'est à dire des fonctions $f : X \to \mathbb{C}$ mesurables d'image finie, et $\mathrm{S}(X, \mu)$ son image dans $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$. Il est clair que $\mathrm{S}(X, \mu)$ est l'espace vectoriel engendré par les classes des indicatrices des éléments de $\mathcal{A}$. Autrement dit, l'application $\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{(\mathcal{A})} & \to & \mathrm{S}(X, \mu) \\ \delta_A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$ est surjective.

Montrons tout d'abord que $\mathrm{S}(X, \mu)$ est dense dans $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$. Soit donc $f \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$, que nous supposons d'abord positive, et construisons une suite $g : \mathbb{N} \to \mathscr{S}(X, m)$ de la

1. On trouve dans la littérature des définitions de *contenu* autorisant $\mathcal{A}$ à n'être qu'une algèbre d'ensembles, mais nous supposerons toujours qu'il s'agit d'une σ-algèbre.

manière suivante :

$$g_0 := 0$$
$$g_{n+1} := g_n + \frac{1}{2}\|f-g_n\|\,\mathbb{1}_{\left\{x \;\middle|\; f(x)-g_n(x)\geq\frac{1}{2}\|f-g_n\|\right\}}$$

Il est clair que chaque g_n est une fonction simple positive et inférieure à f, et que la suite g est croissante. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour presque tout $x\in X$, on est dans l'un des cas suivants :

$$f(x)-g_{n+1}(x)=f(x)-g_n(x)\leq\frac{1}{2}\|f-g_n\|$$
$$f(x)-g_{n+1}(x)=f(x)-g_n(x)-\frac{1}{2}\|f-g_n\|\leq\frac{1}{2}\|f-g_n\|$$

Il vient $\|f-g_{n+1}\|\leq\frac{1}{2}\|f-g_n\|$, d'où $\|f-g_n\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ dans $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$. Dans le cas général, il suffit alors de décomposer f en combinaison linéaire de fonctions positives et d'appliquer le résultat à chacune de ces fonctions.

Pour m contenu fini avec $m\ll\mu$, posons $\widehat{I}_m : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^{(\mathcal{A})} & \to & \mathbb{C}\\ \delta_A & \mapsto & m(A)\end{array}\right.$. Soit $\alpha\in\ker\Theta$, i.e tel que $f:=\sum_{A\in\mathcal{A}}\alpha_A\mathbb{1}_A \overset{loc}{=}_{\mu} 0$. Considérons alors l'ensemble fini $\mathcal{S}:=\alpha^{-1}\left(\{0\}^c\right)\subseteq\mathcal{A}$ des A tels que $\alpha_A\neq 0$, et la fonction $\epsilon : X\to 2^{\mathcal{S}}$ [2] dont la composante selon $A\in\mathcal{S}$ est l'indicatrice de A. Notons que chaque $A\in\mathcal{S}$ est l'union disjointe des $\epsilon^{-1}(b)$ pour $b\in 2^{\mathcal{S}}$, $b(A)=1$. On a donc :

$$\begin{aligned}\widehat{I}_m(\alpha) &= \sum_{A\in\mathcal{S}}\alpha_A m(A)\\ &= \sum_{A\in\mathcal{S}}\sum_{\substack{b\in 2^{\mathcal{S}}\\ b(A)=1}}\alpha_A m(\epsilon^{-1}(b))\\ &= \sum_{b\in 2^{\mathcal{S}}} m(\epsilon^{-1}(b))\sum_{\substack{A\in\mathcal{S}\\ b(A)=1}}\alpha_A\\ &= \sum_{b\in 2^{\mathcal{S}}} m(\epsilon^{-1}(b))\sum_{A\in\mathcal{S}}\alpha_A b(A)\end{aligned}$$

Or, pour chaque $b\in 2^{\mathcal{S}}$, la fonction f est constante de valeur $\sum_{A\in\mathcal{S}}\alpha_A b(A)$ sur l'ensemble $\epsilon^{-1}(b)$. Comme f est μ-localement presque nulle, cela implique qu'on a ou bien $\sum_{A\in\mathcal{S}}\alpha_A b(A)=0$ ou bien $\epsilon^{-1}(b)$ est μ-localement-négligeable et donc $m(\epsilon^{-1}(b))=0$. Cela assure finalement que $\widehat{I}_m(\alpha)=0$.

On a donc montré que $\ker\Theta\subseteq\ker\widehat{I}_m$. $\widehat{I}_m$ se factorise donc à travers la surjection Θ en $\widetilde{I}_m : \mathrm{S}(X,\mu)\to\mathbb{C}$ linéaire vérifiant $\forall A\in\mathcal{A}, \widetilde{I}_m(\mathbb{1}_A)=m(A)$. De plus, pour $f\in\mathscr{S}(X)$, on

2. On identifie 2 à l'ensemble $\{0,1\}$

a :

$$\left|\widetilde{I}_m(f)\right| = \left|\sum_{z\in f(X)} zm(f^{-1}(z))\right| \leq \sum_{z\in f(X)} \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} m(f^{-1}(z)) = \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} m(X)$$

Comme par ailleurs $\widetilde{I}_m(1) = m(X)$, on a donc $\widetilde{I}_m$ continue de norme exactement $m(X)$. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, elle se prolonge donc de manière unique en $\int - \,\mathrm{d}m : \mathrm{L}^\infty(X,\mu) \to \mathbb{C}$ linéaire continue de même norme $m(X) = \int 1 \,\mathrm{d}m$. Le lemme 1.3 assure alors que $\int - \,\mathrm{d}m$ est positive, et convient donc. L'unicité de $\int - \,\mathrm{d}m$ est alors immédiate, la formule $m(A) = \int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}m$ imposant la valeur sur $\mathrm{S}(X,\mu)$, puis sur $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$ par densité et continuité des formes linéaires positives.

Reste à montrer la bijectivité de $I : m \mapsto \int - \,\mathrm{d}m$. L'injectivité est immédiate, la formule $m(A) = \int \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}m$ déterminant entièrement m. Soit donc $T : \mathrm{L}^\infty(X,\mu) \to \mathbb{C}$ une forme linéaire positive quelconque, posons $m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \overline{\mathbb{R}_+} \\ A & \mapsto & T(\mathbb{1}_A) \end{array} \right.$. Il est clair que m est alors un contenu, et la définition assure que $m \ll \mu$ car l'indicatrice d'un borélien μ-localement négligeable est nulle dans $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$. Comme T est positive et $\forall A \in \mathcal{A}, m(A) = T(\mathbb{1}_A)$, l'unicité démontrée précédemment assure que $T = \int - \,\mathrm{d}m$, ce qui conclut. □

Remarque 1.7. *Dans le cas où m est une mesure finie, l'unicité assure que la forme $\int - \,\mathrm{d}m$ construite ci-dessus coïncide bien avec l'intégrale usuelle par rapport à m, ou plus précisément sa précomposition par l'application naturelle* $\mathrm{L}^\infty(X,\mu) \to \mathrm{L}^\infty(X,m) \hookrightarrow \mathrm{L}^1(X,m)$.

Il est clair que la bijection I de la proposition 1.6 fait correspondre les moyennes sur $(X,\mathcal{A})$ aux contenus de masse 1 et absolument continus par rapport à μ. On voudrait maintenant pouvoir exprimer la condition d'invariance par translations, et il nous faut pour cela aborder l'aspect fonctioriel de l'intégration.

Soient $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables, m un contenu sur $(X,\mathcal{A})$ et $\varphi : X \to Y$ mesurable. On définit alors le *contenu image* de m par φ par $\varphi_* m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \overline{\mathbb{R}_+} \\ B & \mapsto & m(\varphi^{-1}(B)) \end{array} \right.$. Il est clair qu'il s'agit encore d'un contenu. Si de plus X et Y sont munis de mesures μ et ν, et si on a $m \ll \mu$ et $\varphi_*\mu \ll \nu$ [3], alors :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \int \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\varphi_* m = m(\varphi^{-1}(B)) = \int \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} \,\mathrm{d}m = \int \mathbb{1}_B \circ \varphi \,\mathrm{d}m$$

La forme linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^\infty(Y,\nu) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \int f \circ \varphi \,\mathrm{d}m \end{array} \right.$ étant par ailleurs positive, l'unicité dans la proposition 1.6 assure qu'elle est égale à $\int - \,\mathrm{d}\varphi_* m$, de sorte que :

$$\forall f \in \mathrm{L}^\infty(Y,\nu), \int f \,\mathrm{d}\varphi_* m = \int f \circ \varphi \,\mathrm{d}m$$

3. Autrement dit, la préimage par φ de tout ensemble ν-localement négligeable est μ-localement négligeable. Cette condition assure que la précomposition par φ est une opération bien définie de $\mathrm{L}^\infty(Y,\nu)$ vers $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$.

En revenant au cas d'un groupe séparé localement compact Γ muni d'une mesure de Haar μ, cette dernière égalité montre que l'intégration par rapport à m est une moyenne invariante à gauche (resp. à droite) si et seulement si m est de masse 1 et $\forall g \in \Gamma, \ell_{g_*}m = m$ (resp. $r_{g_*}m = m$). On dira qu'un tel contenu est *invariant à gauche* (resp. *à droite*) s'il vérifie cette dernière condition, et *invariant* s'il est invariant à gauche et à droite. En prenant en compte la proposition 1.2, on vient donc de montrer le résultat suivant.

Proposition 1.8. *Un groupe localement compact séparé Γ est moyennable si et seulement si il admet un contenu de masse 1 et invariant (resp. invariant à gauche, resp. invariant à droite).*

1.3 Moyenne invariante élémentaire

Nous allons maintenant vouloir appliquer les outils de l'analyse fonctionelle à l'étude des moyennes invariantes. Pour cela, le lemme 1.3 va de nouveau s'avérer crucial.

En effet, la condition $\|\varphi\| = \varphi(1)$ qui apparaît dans ce lemme a le bon goût d'être conservée lors du prolongement de l'application φ par le théorème de Hahn-Banach, alors qu'il n'est pas clair du tout qu'on puisse prolonger une forme linéaire positive en préservant la positivité. On va donc pouvoir se restreindre à étudier les moyennes sur des sous-espaces plus concrets de $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

Plus précisément, toujours pour Γ groupe localement compact et séparé, on introduit $L_0(\Gamma) := \sum_{g\in\Gamma} \mathrm{im}(\lambda(g) - \mathrm{id})$ le sous-espace de $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ engendré par les classes de fonctions de la forme $\lambda(g)(f) - f$ pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$. Il est alors clair qu'une moyenne sur Γ est invariante à gauche si et seulement si sa restriction à $L_0(\Gamma)$ est nulle.

Lemme 1.9. $1 \notin L_0(\Gamma)$

Démonstration. Traitons d'abord le cas $1 =^{loc}_\mu \lambda(\gamma)(f) - f$ pour certains $\gamma \in \Gamma$ et $f \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$. L'ensemble $S := \{x \mid f(\gamma^{-1}x) \neq 1 + f(x)\} \cup \{x \mid |f(x)| > \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\}$ est donc μ-localement négligeable, et par conséquent $T := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma^{-n}S$ l'est aussi. T^c est donc non-vide [4], choisissons alors $t \in T^c$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \geq |f(\gamma^n t)| = |f(t) + n|$, ce qui est impossible puisque $|f(t) + n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Plus généralement, supposons maintenant $1 =^{loc}_\mu \sum_{i\in I}(\lambda(\gamma_i)(f_i) - f_i)$ pour I fini, $\gamma : I \to \Gamma$ et $f : I \to \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$, et ajoutons l'hypothèse supplémentaire que Γ est σ-compact. En particulier la mesure μ est alors σ-finie, et on peut donc munir le groupe séparé et localement compact Γ^I (dont $\gamma : i \mapsto \gamma_i$ est un élément) de la mesure produit $\nu := \mu^{\otimes I}$. Il est clair que la mesure ν ainsi formée est encore de Radon et invariante (à gauche si μ est invariante à gauche, à droite si μ est invariante à droite), et donc une mesure de Haar sur Γ^I. On considère alors la fonction :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma^I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \frac{1}{|I|}\sum_{i\in I} f_i(x_i) \end{array} \right.$$

4. On peut par exemple considérer un voisinage compact K de l'origine, qui est de mesure finie non-nulle. L'intersection $K \cap T$ étant μ-négligeable, on en déduit que $K \setminus T$ est non-vide.

F est clairement mesurable, vérifions maintenant que la majoration $|F(x)| \leq \frac{1}{|I|} \sum_i \|f_i\|_{\mathrm{L}^\infty}$ est valable pour ν-presque tout $x \in \Gamma^I$ [5].

Posons $S_i := \{x \in \Gamma \mid |f_i(x)| > \|f\|_{\mathrm{L}^\infty}\}$ et $T := \left\{x \in \Gamma^I \,\middle|\, |F(x)| > \frac{1}{|I|} \sum_i \|f_i\|_{\mathrm{L}^\infty}\right\}$. On a clairement $T \subseteq \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(S_i)$, où $\pi_i : \Gamma^I \to \Gamma$ désigne la i-ème projection. Or $\mu^{\otimes I}(\pi_i^{-1}(S_i)) = \mu^{\otimes I}(\Gamma \times \cdots \times S_i \times \cdots \times \Gamma) = \mu(\Gamma) \times \cdots \times \mu(S_i) \times \cdots \times \mu(\Gamma) = 0$ puisque $\mu(S_i) = 0$. Donc T est bien $\mu^{\otimes I}$-négligeable. Cela assure que $F \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma^I)$. On montre similairement que $1 =_\nu \lambda(\gamma)(F) - F$, ce qui nous ramène au cas déjà traité.

Pour conclure, il reste à montrer qu'on peut toujours se ramener à Γ σ-compact. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 1.10. *Soit Γ un groupe topologique séparé et localement compact. Toute partie compacte de Γ est contenue dans un sous-groupe ouvert Γ' de Γ qui est σ-compact. De plus, la restriction à un tel Γ' de toute mesure de Haar μ sur Γ est une mesure de Haar sur Γ'.*

Une fois ce lemme acquis, supposons encore $1 =_\mu^{loc} \sum_{i \in I}(\lambda(\gamma_i)(f_i) - f_i)$ pour I fini, $\gamma : I \to \Gamma$ et $f : I \to \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$. Donnons nous un sous-groupe ouvert et σ-compact Γ' contenant tous les γ_i, μ' la restriction de μ à Γ', et $\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathscr{L}^\infty(\Gamma') \\ i & \mapsto & f_{i|\Gamma'} \end{array} \right.$. Comme la trace sur Γ' d'un ensemble μ-localement négligeable est μ'-localement négligeable, on a que chaque $\widetilde{f_i}$ est bien un élément de $\mathscr{L}^\infty(\Gamma')$, ainsi que l'égalité $1 =_{\mu'}^{loc} \sum_{i \in I}(\lambda(\gamma_i)(\widetilde{f_i}) - \widetilde{f_i})$, ce qui nous ramène au cas précédemment traité. Cela conclut la preuve. □

Démonstration du lemme 1.10. Soit K une partie compacte quelconque de Γ. Choisissons T un voisinage compact de l'origine, et posons $S := (K \cup T) \cup (K \cup T)^{-1}$, qui est un voisinage symétrique compact de l'origine contenant K. Vérifions que $\Gamma' := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S^n$ convient. Tout d'abord, la suite de compact S^n est croissante, car S contient 1, donc tout $x \in S^n$ vérifie aussi $x = x \cdot 1 \in S^{n+1}$. Cela assure que Γ' est σ-compact. De plus, il est clair qu'il s'agit d'un sous-groupe de Γ' : chaque S^n est symmétrique ce qui assure la stabilité par inverse, et si $x \in S^p, y \in S^q$ on a $xy \in S^{p+q}$. L'inclusion $S \subseteq \Gamma'$ montre que Γ' est un voisinage de l'origine donc ouvert, et également que $T \subseteq \Gamma'$.

Soit maintenant un sous-groupe ouvert Γ' de Γ quelconque. Notons tout d'abord que Γ' est borélien, donc la restriction de μ à Γ' est bien définie, et Γ est localement compact (séparé) comme ouvert d'un espace localement compact. Notons d'abord que μ' est bien de Radon. La finitude sur les compacts est acquise, ainsi que la régularité intérieure puisque les ouverts de Γ' sont ouverts dans Γ. Pour la régularité supérieure, il suffit de remarquer que si $B \subseteq \Gamma'$ est borélien (dans Γ' donc dans Γ) et si $U \supseteq A$ est un ouvert de Γ tel que $\mu(U)$ soit proche de $\mu(A)$, alors $U \cap \Gamma' \supseteq A$ est un ouvert de Γ' tel que $\mu'(U)$ est encore plus proche de $\mu'(A) = \mu(A)$. Enfin l'invariance par translation de μ' (du même côté que μ bien sûr) est évidente, ce qui conclut. □

5. On travaille avec des espaces mesurés σ-finis, donc les ensembles localement négligeables sont exactement les ensembles négligeables.

Le lemme 1.9 nous permet de considérer l'espace $L(\Gamma) := \mathbb{C}\cdot 1 \oplus L_0(\Gamma)$, qui est intéressant en ce qu'il permet de caractériser entièrement les moyennes à gauche sur Γ, au sens du théorème suivant.

Théorème 1.11. *Considérons l'application linéaire $\widetilde{T} : L(\Gamma) \to \mathbb{C}$ définie par $\widetilde{T}(1) = 1$ et $\widetilde{T}_{|L_0(\Gamma)} = 0$.*

Le groupe Γ est moyennable si et seulement si l'application $\widetilde{T}$ est continue et de norme 1. Si c'est le cas, les moyennes à gauche sur Γ sont exactement les prolongements de $\widetilde{T}$ à $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ qui préservent la norme.

Nous appellerons cette application $\widetilde{T}$ la *moyenne invariante élémentaire* du groupe Γ. En remarquant que $\forall c \in \mathbb{C}, \forall f \in L_0(\Gamma), \widetilde{T}(c+f) = c$, et qu'on a toujours $\left\|\widetilde{T}\right\| \geq 1$ par $\widetilde{T}(1) = 1$, on obtient le critère de moyennabilité suivant :

Corollaire 1.12. *Γ est moyennable si et seulement si $\forall c \in \mathbb{C}, \forall f \in L_0(\Gamma), |c| \leq \|c+f\|_{\mathrm{L}^\infty}$.*

Démonstration du théorème 1.11. Supposons d'abord Γ moyennable, et soit T une moyenne à gauche sur Γ. On sait déjà que T prolonge $\widetilde{T}$, puisque T est nulle sur $L_0(\Gamma)$ et $T(1) = 1$. On a donc $\left\|\widetilde{T}\right\| \leq \|T\| = 1$ par restriction, et en fait $\left\|\widetilde{T}\right\| = 1$ puique $\widetilde{T}(1) = 1$.

Supposons maintenant $\left\|\widetilde{T}\right\| = 1$, et soit T un prolongement linéaire continu de $\widetilde{T}$ de norme 1. On a alors $T(1) = 1 = \|T\|$ et $T_{|L_0(\Gamma)} = 0$, donc T est une moyenne à gauche sur Γ. Le théorème de Hahn-Banach garantissant l'existence d'un tel prolongement, cela termine la preuve. □

Illustrons ce critère sur le cas du groupe libre F_2. Dans ce cas, on peut montrer que $\left\|\widetilde{T}\right\| \geq 3$. Reprenons pour cela les notations de la preuve du théorème 1.4, et posons $f := (\lambda(a^{-1}) - \mathrm{id})(\mathbb{1}_{S(a)})$ et $g := (\lambda(b^{-1}) - \mathrm{id})(\mathbb{1}_{S(b)})$, qui sont deux éléments de $L_0(F_2)$. L'égalité $a^{-1}S(a) = S(a^{-1})^c$ donne que $f = \mathbb{1}_{a^{-1}S(a)} - \mathbb{1}_{S(a)} = \mathbb{1}_{\{1\}\cup S(b)\cup S(b^{-1})}$, et de même $g = \mathbb{1}_{\{1\}\cup S(a)\cup S(a^{-1})}$, de sorte que $f + g = \mathbb{1} + \delta_1$. Mais alors $-\frac{2}{3}(\mathbb{1} + \delta_1) \in L_0(F_2)$, donc $\widetilde{T}(\mathbb{1} - \frac{2}{3}(\mathbb{1} + \delta_1)) = 1$, et d'autre part $\left\|\mathbb{1} - \frac{2}{3}(\mathbb{1} + \delta_1)\right\|_{\mathrm{L}^\infty} = \frac{1}{3}$. On a donc bien $\left\|\widetilde{T}\right\| \geq 3$.

1.4 Moyennabilité de $\mathbb{Z}$

Donnons maintenant, toujours à l'aide du critère 1.12, notre premier exemple de groupe moyennable non-compact.

Théorème 1.13. *$\mathbb{Z}$ est moyennable.*

Démonstration. Commençons par simplifier un peu notre description de $L_0(\mathbb{Z})$. Un simple argument de somme télescopique montre que, pour $n > 0$ et $u \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{Z}) = \ell^\infty(\mathbb{Z})$:

$$(\lambda(n) - \mathrm{id})(u) = \left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda(i+1) - \lambda(i)\right)(u) = (\lambda(1) - \mathrm{id})\left(\sum_{1\leq i\leq n} \lambda(i)(u)\right)$$

Comme de plus $\lambda(0) - \mathrm{id} = 0$ et $\lambda(-n) - \mathrm{id} = -(\lambda(n) - \mathrm{id}) \circ \lambda(-n)$, on en déduit que $\mathrm{im}(\lambda(n) - \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{im}(\lambda(1) - \mathrm{id})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc $L_0(\mathbb{Z}) = \mathrm{im}(\lambda(1) - \mathrm{id})$.

Soient maintenant $c \in \mathbb{C}$ et $v \in L_0(\mathbb{Z})$. On peut donc écrire $v = \lambda(1)(u) - u$ pour un certain $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$. On veut montrer $|c| \leq \|c + \lambda(1)(u) - u\|_\infty =: M$.

Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{Z}, -M \leq c + u_{n-1} - u_n \leq M$. En moyennant ces inégalités pour $n \in]\!]N-k, N]\!]$, on obtient, encore par un argument de somme télescopique :

$$\forall N \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad -M \leq c - \frac{u_N - u_{N-k}}{k} \leq M \tag{1}$$

Mais u est bornée, donc il existe une suite strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u \circ \varphi$ soit convergente. En particulier $\frac{\left|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right|}{\varphi(n+1) - \varphi(n)} \leq \left|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $c - \frac{u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}}{\varphi(n+1) - \varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$. En passant à la limite dans l'inégalité (1), on obtient donc $-M \leq c \leq M$, ce qui conclut. □

Présentée ainsi, la preuve précédente peut sembler très spécifique à $\mathbb{Z}$ et peu généralisable. Pourtant, l'idée clé est simplement de considérer une « moyenne » d'inégalités de la forme $-M \leq c + u(\gamma^{-1}x) - u(x) \leq M$, ce qui peut tout à fait se généraliser, *a minima* pour un groupe discret quelconque.

Les obstacles sont donc la forme spécifique de $L_0(\mathbb{Z})$ et le recours à une suite extraite pour forcer la convergence des $u_{n+1} - u_n$. Nous allons voir qu'il est possible de les contourner.

Deuxième démonstration du théorème 1.13. Soient $c \in \mathbb{C}$ et $v \in L_0(\mathbb{Z})$, que l'on peut bien sûr décomposer en $v = \sum_{i \in I}(\lambda(n_i)(f_i) - f_i)$ pour certains I fini, $n : I \to \mathbb{Z}$ et $f : I \to \ell^\infty(\mathbb{Z})$. Posons toujours $M := \|c + v\|_\infty$.

Par définition, on a $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$-M \leq c + \sum_i (f_i(k - n_i) - f_i(k)) \leq M$$

En moyennant ces inégalités pour $k \in F_N := [\![-N, N]\!]$, on obient $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$-M \leq c + \sum_i \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} (f_i(k - n_i) - f_i(k)) \leq M \tag{2}$$

Étudions donc, pour i fixé, les moyennes de la forme $\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} (f_i(k - n_i) - f_i(k))$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=-N}^{N}(f_i(k-n_i)-f_i(k))\right| &= \left|\sum_{k\in F_N-n_i} f_i(k)-\sum_{k\in F_N} f_i(k)\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{k\in F_N-n_i\\ k\notin F_N}} f_i(k)-\sum_{\substack{k\in F_N\\ k\notin F_N-n_i}} f_i(k)\right| \\
&\leq \sum_{k\in(F_N-n_i)\triangle F_N} \|f_i\|_\infty \\
&= \|f_i\|_\infty\cdot|(F_N-n_i)\triangle F_N|
\end{aligned}$$

Or, pour $N>n_i$, l'ensemble $(F_N-n_i)\triangle F_N = [\![-N-n_i,-N[\![\amalg]\!]N-n_i,N]\!]$ est de cardinal $2n_i$ constant. On a donc :

$$\frac{|(F_N-n_i)\triangle F_N|}{2N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(f_i(k-n_i)-f_i(k))\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

En passant à la limite dans l'inégalité (2), on obtient donc $-M\leq c\leq M$, ce qui conclut. □

Notons que, dans cette deuxième démonstration, l'hypothèse $\Gamma=\mathbb{Z}$ n'a été utilisée que pour établir l'existence d'une suite F de parties finies non-vides de $\mathbb{Z}$ telle que $\frac{|(F_N-n)\triangle F_N|}{|F_N|}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Dans le cas général, la mesure de Haar μ va remplacer le cardinal, et on va donc s'intéresser aux réels $\frac{\mu(\gamma F\triangle F)}{\mu(F)}$ pour F partie borélienne de Γ de mesure finie et $\gamma\in\Gamma$, et à leur comportement asymptotique lorsque F est grand. C'est l'objet de la partie suivante.

2 Conditions de Følner et de Reiter

Dans cette section, Γ est un groupe topologique séparé et localement compact, et on fixe μ une mesure de Haar *à gauche* sur Γ. On prendra garde à ce que, contrairement au chapitre précédent, nous travaillerons à partir de maintenant avec des espaces et des objets dépendants du choix de la mesure de Haar, notamment pour des questions de normalisation. Évidemment cela nous soulève pas de difficulté majeure et le lecteur pourra aisément deviner comment se comportent ces objets par changement de la mesure.

Pour X un ensemble quelconque, notons $\mathfrak{P}(X)$ (resp. $\mathfrak{P}^*(X)$) l'ensemble des parties (resp. parties non-vides) de X, et $\mathfrak{P}_{\text{fin}}(X)$ (resp $\mathfrak{P}^*_{\text{fin}}(X)$) l'ensemble des parties finies (resp. parties finies non-vides) de X. Si maintenant X est un espace topologique, on note aussi $\mathfrak{K}(X)$ l'ensemble des parties compactes de X, et si μ est une mesure borélienne sur X on note $\mathcal{B}_+(X,\mu)$ l'ensemble des boréliens de X de mesure finie non-nulle.

2.1 Filtres et conditions de Følner

On s'intéresse à l'*application de Følner* $\mathfrak{f} : \mathcal{B}K_+(\Gamma, \mu) \to \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$, définie sur l'ensemble $\mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ par $\mathfrak{f}(K)(\gamma) = \frac{\mu(\gamma K \triangle K)}{\mu(K)}$. Il est clair que cette application ne dépend pas de la normalisation choisie pour la mesure de Haar.

Un filtre $\mathscr{F}$ sur $\mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ est dit *faiblement de Følner* s'il est non-trivial[6] et si le filtre $\mathfrak{f}_*\mathscr{F}$ image directe de $\mathscr{F}$ par l'application de Følner converge vers 0 pour la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$. Si la convergence est uniforme sur les compacts, on parle de filtre *fortement de Følner.* Une suite $K : \mathbb{N} \to \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ est *faiblement (resp. fortement) de Følner* si le filtre $K_*\mathcal{N}^{\mathbb{N}}_{+\infty}$, image directe par K du filtre des voisinages de l'infini dans $\mathbb{N}$, est faiblement (resp. fortement) de Følner. Comme $\mathfrak{f}_*K_*\mathcal{N}^{\mathbb{N}}_{+\infty} = (\mathfrak{f} \circ K)_*\mathcal{N}^{\mathbb{N}}_{+\infty}$, une suite $K : \mathbb{N} \to \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ est donc faiblement (resp. fortement) de Følner si et seulement si la suite de fonctions $n \mapsto \left(\gamma \mapsto \frac{\mu(\gamma K_n \triangle K_n)}{\mu(K_n)}\right)$ converge vers 0 simplement (resp. uniformément sur tout compact).

Notons que si Γ est discret, la topologie de la convergence compacte coïncide avec celle de la convergence simple, de sorte que tout filtre faiblement de Følner est automatiquement fortement de Følner. De plus, les éléments de $\mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ sont exactement les parties finies non-vides, et la mesure de Haar s'identifie (à un scalaire près) à la mesure de comptage. Dans ce cas, un filtre non-trivial $\mathscr{F}$ est donc de Følner si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Gamma$, la fonction $F \mapsto \frac{|\gamma F \triangle F|}{|F|}$ converge vers 0 selon le filtre $\mathscr{F}$. De même, une suite $F : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}^*_{\text{fin}}(\Gamma)$ est de Følner si et seulement si pour tout $\gamma \in \Gamma$, la suite $n \mapsto \frac{|\gamma F_n \triangle F_n|}{|F_n|}$ converge vers 0.

Avant d'aller plus loin, donnons un critère plus simple pour l'existence de filtres de Følner (faibles ou forts) sur Γ.

Lemme 2.1. *Γ admet un filtre faiblement de Følner si et seulement si il satisfait la* condition de Følner faible *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall S \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\Gamma), \exists K \in \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu), \forall \gamma \in S, \frac{\mu(\gamma K \triangle K)}{\mu(K)} < \varepsilon \qquad \text{(WF)}$$

Si de plus Γ est dénombrable, cette condition est équivalente à l'existence d'une suite *faiblement de Følner.*

Γ admet un filtre fortement de Følner si et seulement si il satisfait la condition de Følner forte *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathfrak{K}(\Gamma), \exists K \in \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu), \forall \gamma \in A, \frac{\mu(\gamma K \triangle K)}{\mu(K)} < \varepsilon \qquad \text{(SF)}$$

Si de plus Γ est σ-compact, cette condition est équivalente à l'existence s'une suite *fortement de Følner.*

Démonstration. Les ensembles de la forme $\{f \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+) \mid \forall \gamma \in S, f(\gamma) < \varepsilon\}$, pour S fini et $\varepsilon > 0$, forment une base de voisinage de la fonction nulle dans $\mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$ muni de la

6. Cela signifie que $\varnothing \notin \mathscr{F}$, ou encore que $\mathscr{F} \neq \mathfrak{P}(X)$.

topologie produit. (WF) exprime donc le fait que 0 est adhérent à l'image de $\mathfrak{f}$ pour cette topologie, ce qui est équivalent avec l'existence d'un filtre $\mathscr{F}$ non-trivial sur $\mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ tel que $\mathfrak{f}_*\mathscr{F}$ converge vers 0 simplement. C'est précisément la définition d'un filtre de Følner faible. De plus, si Γ est dénombrable, la topologie produit sur $\mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$ est à base dénombrable de voisinages, donc l'adhérence séquentielle de l'image de $\mathfrak{f}$ égale son adhérence, ce qui fournit la caractérisation séquentielle recherchée.

La deuxième partie du théorème se prouve similairement, en observant que les ensembles de la forme $\{f \in \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+) \mid \forall \gamma \in A, f(\gamma) < \varepsilon\}$, pour A compact et $\varepsilon > 0$, forment une base de voisinage de la fonction nulle pour la topologie de la convergence compacte, et en notant que cette topologie est à base dénombrable de voisinages lorsque Γ est σ-compact. $\square$

Remarque 2.2. *On verra au théorème 2.5 que les conditions* (WF) *et* (SF) *sont en fait équivalentes. Cela donne un critère plus intéressant pour l'existence d'une suite de Følner faible : si Γ est σ-compact et vérifie* (WF)*, il vérifie aussi* (SF) *et admet donc une suite de Følner forte, qui est automatiquement une suite de Følner faible.*

Comme anoncé, on peut alors généraliser le théorème 1.13 à tout groupe muni d'un filtre faiblement de Følner, en adaptant directement la deuxième preuve de ce théorème.

Théorème 2.3. *Si Γ admet un filtre faiblement de Følner, alors Γ est moyennable.*

Démonstration. On utilise toujours le critère 1.12. Soient donc $c \in \mathbb{C}$ et $v \in L_0(\Gamma)$, que l'on écrit encore sous la forme $v = \sum_{i \in I}(\lambda(\gamma_i)(f_i) - f_i)$ pour certains I fini, $\gamma : I \to \Gamma$ et $f : I \to \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$. Posons aussi $M := \|c + v\|_{\mathrm{L}^\infty}$.

Par définition, on a $\forall x \in \Gamma$:

$$-M \leq c + \sum_i (f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x)) \leq M \tag{3}$$

En moyennant ces inégalités sur un $K \in \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$ quelconque, on obtient :

$$-M \leq c + \sum_i \frac{1}{\mu(K)} \int_K \left(f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x)\right) \,\mathrm{d}\mu(x) \leq M \tag{4}$$

Or, pour i fixé, l'invariance par translation de μ donne :

$$\begin{aligned}
\left|\int_K (f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x)) \,\mathrm{d}\mu(x)\right| &= \left|\int_{\gamma_i^{-1}K} f_i \,\mathrm{d}\mu - \int_K f_i \,\mathrm{d}\mu\right| \\
&= \left|\int_{\gamma_i^{-1}K \setminus K} f_i \,\mathrm{d}\mu - \int_{K \setminus \gamma_i^{-1}K} f_i \,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leq \int_{\gamma_i^{-1}K \triangle K} \|f_i\|_{\mathrm{L}^\infty} \,\mathrm{d}\mu \\
&= \|f_i\|_{\mathrm{L}^\infty} \cdot \mu(\gamma_i^{-1}K \triangle K)
\end{aligned}$$

Soit finalement $\mathscr{F}$ un filtre faiblement de Følner pour Γ. L'estimation précédente assure alors que la fonction $K \mapsto \frac{1}{\mu(K)} \int_K (f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x))\ \mathrm{d}\mu(x)$ converge vers 0 selon $\mathscr{F}$, et ce pour chaque $i \in I$. Il suffit enfin de prendre la limite selon $\mathscr{F}$ des inégalités 4 pour obtenir $-M \leq c \leq M$. □

La condition de Følner est très intéressante pour exprimer la moyennabilité de groupes discrets en termes combinatoires. Elle permet ainsi de lier la moyennabilité à la *croissance* d'un groupe finiment engendré.

Cependant, pour établir la théorie, il sera utile de travailler avec une condition un peu plus flexible. Pour voir cela, reprenons une dernière fois la preuve précédente. Plutôt que de prendre une moyenne uniforme des inégalités 3 sur un borélien de mesure finie, observons ce qui se passe lorsqu'on considère une moyenne pondérée par une fonction $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$, positive et de masse 1 (le cas déjà traité correspondant à $\varphi = \frac{1}{\mu(K)} \mathbb{1}_K$). On obtient alors :

$$-M \leq c + \sum_i \int \varphi(x) \left(f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x)\right)\ \mathrm{d}\mu(x) \leq M$$

Pour i fixé, on a alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int \varphi(x)(f_i(\gamma_i^{-1}x) - f_i(x))\ \mathrm{d}\mu(x) \right| &= \left| \int \varphi(\gamma_i x) f_i(x)\ \mathrm{d}\mu(x) - \int \varphi(x) f_i(x)\ \mathrm{d}\mu(x) \right| \\
&= \left| \int f_i \cdot \left(\lambda(\gamma_i^{-1})(\varphi) - \varphi\right)\ \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \left\| f_i \cdot \left(\lambda(\gamma_i^{-1})(\varphi) - \varphi\right) \right\|_{\mathrm{L}^1} \\
&\leq \|f_i\|_{\mathrm{L}^\infty} \left\| \lambda(\gamma_i^{-1})(\varphi) - \varphi \right\|_{\mathrm{L}^1}
\end{aligned}$$

Pour pouvoir conclure, il faudrait donc cette fois pouvoir faire tendre $\left\|\lambda(\gamma_i^{-1})(\varphi) - \varphi\right\|_{\mathrm{L}^1}$ vers 0, ce qui motive les définitions suivantes.

2.2 Filtres et conditions de Reiter

Notons $\mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ l'ensemble convexe des $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$ positives et de masse 1, et $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ son image dans $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$. On s'intéresse désormais à l'*application de Reiter* $\mathfrak{r} : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+} \to \mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$, définie par par $\mathfrak{r}(\varphi)(\gamma) = \|\lambda(\gamma^{-1})(\varphi) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1}$.

Un filtre $\mathscr{F}$ sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ est dit *faiblement de Reiter* (resp. *fortement de Reiter*) s'il est non-trivial et si le filtre $\mathfrak{r}_* \mathscr{F}$ converge vers 0 pour la topologie de la convergence simple (resp. uniforme sur les compacts) sur $\mathcal{F}(\Gamma, \mathbb{R}_+)$. Une suite $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ est *faiblement de Reiter* (resp *fortement de Reiter*) si le filtre $\varphi_* \mathcal{N}_{+\infty}^{\mathbb{N}}$ est faiblement (resp. fortement) de Reiter. Comme $\mathfrak{r}_* \varphi_* \mathcal{N}_{+\infty}^{\mathbb{N}} = (\mathfrak{r} \circ \varphi)_* \mathcal{N}_{+\infty}^{\mathbb{N}}$, une suite $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ est donc faiblement (resp. fortement) de Reiter si et seulement si la suite de fonctions $n \mapsto \left(\gamma \mapsto \left\|\lambda(\gamma_i^{-1})(\varphi) - \varphi\right\|_{\mathrm{L}^1}\right)$ converge vers 0 simplement (resp. uniformément sur tout compact).

On a aussi un analogue du lemme 2.1, qui se prouve de manière similaire.

Lemme 2.4. Γ *admet un filtre faiblement de Reiter si et seulement si il satisfait la* condition de Reiter faible *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall S \in \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\Gamma), \exists \varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, \forall \gamma \in S, \left\|\lambda(\gamma^{-1})(\varphi) - \varphi\right\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon \tag{WR}$$

Si de plus Γ *est dénombrable, cette condition est équivalente à l'existence d'une* suite *faiblement de Reiter.*

Γ *admet un filtre fortement de Reiter si et seulement si il satisfait la* condition de Reiter forte *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A \in \mathfrak{K}(\Gamma), \exists \varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, \forall \gamma \in A, \left\|\lambda(\gamma^{-1})(\varphi) - \varphi\right\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon \tag{SR}$$

Si de plus Γ *est* σ*-compact, cette condition est équivalente à l'existence s'une* suite *fortement de Reiter.*

Comme prévu, tout filtre de Følner fort (resp. faible) induit un filtre de Reiter fort (resp. faible). En effet, pour $K \in \mathcal{B}_+(\Gamma, \mu)$, l'application $\chi_K := \frac{1}{\mu(K)} \mathbb{1}_K$ appartient à $\mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, et on a $\mathfrak{r}(\chi_K) = \mathfrak{f}(K)$. Si $\mathscr{F}$ est un filtre de Følner fort (resp. faible), $\chi_*\mathscr{F}$ est donc un filtre de Reiter fort (resp. faible).

Avant d'en arriver au résultat crucial de cette partie, introduisons une dernière notion. Une moyenne m sur Γ est dite *topologiquement invariante (à gauche)* si :

$$\forall f \in \mathrm{L}^\infty(\Gamma), \forall \varphi \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, m(\varphi * f) = m(f)$$

On renvoie à l'annexe B pour les propriétés de la convolution sur les groupes localement compacts, et notamment à l'inégalité de Young B.4 qui assure que la définition ci-dessus est bien formée.

Le théorème suivant assure que toutes les notions définies dans cette partie sont en fait équivalentes à la moyennabilité ! À travers la condition de Reiter, il nous permettra de caractériser la moyennabilité par la théorie des représentations dans la partie suivante.

Théorème 2.5. *Soit* Γ *un groupe topologique séparé et localement compact. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Γ *est moyennable*

(ii) Il existe une moyenne topologiquement invariante sur Γ

(iii) Γ *satisfait la condition de Reiter forte* (SR)

(iv) Γ *satisfait la condition de Følner forte* (SF)

(v) Γ *satisfait la condition de Følner faible* (WF)

(vi) Γ *satisfait la condition de Reiter faible* (WR)

La preuve nécessite un certain nombre de résultats et définitions préliminaires, que nous détaillons maintenant.

2.3 L'espace $UC_b(\Gamma_d)$

Nous notons $UC_b(\Gamma_d)$ l'ensemble des fonctions $f : \Gamma_d \to \mathbb{C}$ qui sont bornées et uniformément continues, muni de la norme uniforme. Dans cette définition et dans toute la suite, Γ_d désigne l'espace uniforme obtenu en munissant le groupe topologique Γ de sa structure uniforme *droite* [7] [8]. Rappelons que cette structure uniforme, dont nous noterons $\mathcal{U}\Gamma_d$ le filtre des entourages, est définie par l'égalité $\mathcal{U}\Gamma_d = (\mathrm{div}_d)^*\mathcal{N}_1^\Gamma$, pour $\mathrm{div}_d : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (x,y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array} \right.$ [9].
Rappelons aussi que la structure uniforme associée à l'espace métrique (X, d) est définie par $\mathcal{U}X = d^*\mathcal{N}_0$. Pour $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ bornée, on a donc :

$$\begin{aligned} f \in UC_b(\Gamma_d) &\Leftrightarrow \mathcal{U}\Gamma_d \leq {}^{10}\ (f \times f)^*\mathcal{U}\mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{div}_d)^*\mathcal{N}_1^\Gamma \leq (f \times f)^* d^*\mathcal{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{N}_0, \exists V \in \mathcal{N}_1^\Gamma, \left\{(x,y) \;\middle|\; xy^{-1} \in V\right\} \subseteq \{(x,y) \mid |f(x) - f(y)| \in W\} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{N}_1^\Gamma, \forall y \in \Gamma, \forall g \in V, |f(gy) - f(y)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{N}_1^\Gamma, \forall g \in V, \|\lambda(g)(f) - f\|_\infty < \varepsilon \end{aligned} \tag{5}$$

Où on a pu remplacer $\lambda(g^{-1})$ par $\lambda(g)$ en remplaçant V par son symétrique. Cela permet de donner la caractérisation suivante de $UC_b(\Gamma_d)$.

Lemme 2.6. *Soit $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ [11]. f appartient à $UC_b(\Gamma_d)$ si et seulement si l'application* $\mathrm{ev}_f \circ \lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma & \to & \ell^\infty(\Gamma) \\ g & \mapsto & \lambda(g)(f) \end{array} \right.$ *est continue.*

On donne une démonstration directe en se basant sur la caractérisation (5), mais on pourrait aussi utiliser le théorème C.1, plus général, démontré en annexe.

Démonstration. Remarquons d'abord que $\mathrm{ev}_f \circ \lambda$ est continue si et seulement si elle est continue en 1. Le sens direct est immédiat, supposons donc la continuité en 1, et montrons la continuité en $x \in \Gamma$ quelconque. Soit donc $\varepsilon > 0$. La continuité en 1 fournit $V \in \mathcal{N}_1$ tel que $\forall g \in V, \|\lambda(g)(f) - f\|_\infty < \varepsilon$. Notons alors que :

$$\forall g \in V, \|\lambda(xg)(f) - \lambda(x)(f)\|_\infty = \|\lambda(x)(\lambda(g)(f) - f)\|_\infty = \|\lambda(g)(f) - f\|_\infty < \varepsilon$$

Comme $xV \in \mathcal{N}_x$ cela conclut, puisqu'on a $\forall y \in xV, \|\lambda(y)(f) - \lambda(x)(f)\|_\infty < \varepsilon$.

Or, on remarque que la caractérisation 5 de $UC_b(\Gamma_d)$ exprime précisément la continuité en 1 de l'application $\mathrm{ev}_f \circ \lambda$. Cela conclut la preuve du lemme. □

---

7. On noterait de même Γ_s le groupe topologique Γ muni de sa structure uniforme *gauche*.
8. La convention « gauche/droite » dans cette définition est parfois renversée. Nous adoptons la convention de [3, Bourbaki, *Topologie Générale*]
9. Dans le cas de la structure uniforme gauche, on remplaçerait div_d par $\mathrm{div}_s : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma & \to & \Gamma \\ (x,y) & \mapsto & x^{-1}y \end{array} \right.$.
10. Si $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ sont deux filtres sur un ensemble X, on note $\mathscr{F} \leq \mathscr{G}$ si $\mathscr{F}$ est *plus fin que* $\mathscr{G}$, c'est à dire si $\mathscr{G} \subseteq \mathscr{F}$.
11. i.e f est bornée *partout*

Maintenant qu'on dispose de plusieurs caractérisations agréables, vérifions que $UC_b(\Gamma_d)$ est bien un espace de Banach.

Proposition 2.7. *$UC_b(\Gamma_d)$ est fermé dans $\ell^\infty(\Gamma)$, donc complet.*

Encore une fois, on donne une preuve concrète basée sur le lemme 2.6.

Démonstration. Soit $F : \mathbb{N} \to UC_b(\Gamma_d)$ une suite convergente dans $\ell^\infty(\Gamma)$, de limite f. Il s'agit de montrer que f est uniformément continue. Notons que, pour tout $g \in \Gamma$, on a $\|\lambda(g)(f) - \lambda(g)(F_n)\|_\infty = \|f - F_n\|_\infty$. Or $\|f - F_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc on a montré que la suite de fonctions $\mathrm{ev}_{F_n} \circ \lambda$ converge uniformément vers $\mathrm{ev}_f \circ \lambda$. Chaque $\mathrm{ev}_{F_n} \circ \lambda$ étant continue en vertu du lemme 2.6, sa limite l'est également, et une deuxième application du lemme 2.6 conclut. □

Terminons par le résultat suivant, qui justifie que l'on s'intéresse à cet espace.

Proposition 2.8. *La convolée $\varphi * f$ de $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$ et $f \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$, qui existe et appartient à $\ell^\infty(\Gamma)$ par l'inégalité de Young B.4, appartient en fait à $UC_b(\Gamma_d)$.*

Par conséquent, l'opérateur de convolution $* : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \times \mathrm{L}^\infty(\Gamma) \to \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ se factorise à travers $UC_b(\Gamma_d) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ en $* : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \times \mathrm{L}^\infty(\Gamma) \to UC_b(\Gamma_d)$ encore bilinéaire continue de norme inférieure à 1.

Il est clair que le deuxième point découle du premier puisque les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty}$ coïncident sur $UC_b(\Gamma_d)$, de sorte que la composée $UC_b(\Gamma_d) \hookrightarrow \mathscr{L}^\infty(\Gamma) \twoheadrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ est encore un plongement isométrique. Dorénavant, on identifiera d'ailleurs $UC_b(\Gamma_d)$ à son image dans $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$.

Il s'agit donc de montrer le premier point.

Démonstration. On utilise la caractérisation (5). Soit donc $\varepsilon > 0$. La continuité de la représentation régulière λ de Γ sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$ assure que $\mathrm{ev}_\varphi \circ \lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma & \to & \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \\ g & \mapsto & \lambda(g)(\varphi) \end{array} \right.$ est continue, ce qui fournit un voisinage $V \in \mathcal{N}_1^\Gamma$ tel que $\forall g \in V, \|\lambda(g)(\varphi) - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathrm{L}^\infty}}$. Or, pour $g, x \in \Gamma$ quelconques, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(g)(\varphi * f)(x) &= (\varphi * f)(g^{-1}x) \\ &= \int \varphi(h) f(h^{-1}g^{-1}x) \, \mathrm{d}\mu(h) \\ &= \int \varphi(g^{-1}h) f(h^{-1}x) \, \mathrm{d}\mu(h) \\ &= (\lambda(g)(\varphi) * f)(x) \end{aligned}$$

Pour $g \in V$, on a finalement :

$$\begin{aligned} \|\lambda(g)(\varphi * f) - \varphi * f\|_\infty &= \|(\lambda(g)(\varphi) - \varphi) * f\|_\infty \\ &\leq \|\lambda(g)(\varphi) - \varphi\|_1 \|f\|_{\mathrm{L}^\infty} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Cela conclut. □

2.4 Moyennes provenant de fonctions intégrables

Rappelons que, sauf mention explicite du contraire, tous les espaces L^p sont complexes, et si E est un espace vectoriel topologique, E^* désigne son dual topologique *sur le corps* $\mathbb{C}$. Si E est un espace vectoriel complexe, nous noterons $\lfloor E \rfloor$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.

Rappelons aussi que, grâce à la définition choisie de L^∞, l'isomorphisme $(\mathrm{L}^1)^* \simeq \mathrm{L}^\infty$ est valable sur *tout* espace mesuré, et non plus seulement dans le cas σ-fini.

Notons $\mathcal{M}(X,\mu)$ l'ensemble des moyennes sur un espaces mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$, telles que définies après la définition 1.1. Dans le cas d'un groupe localement compact et séparé Γ muni d'une mesure de Haar μ, nous noterons $\mathcal{M}(\Gamma) := \mathcal{M}(\Gamma,\mu)$ [12]. Notons déjà que cet ensemble est $*$-faiblement compact. En effet, le théorème de Banach-Alaoglu assure que la boule unité fermée $\mathbb{B}$ de $(\mathrm{L}^\infty(X,\mu))^*$ est compacte pour la topologie faible-$*$ $\sigma(\mathrm{L}^{\infty*},\mathrm{L}^\infty)$, et $\mathcal{M}(X,\mu)$ n'est autre que l'ensemble des $m \in \mathbb{B}$ telles que $m(1) = 1$ (lemme 1.3), qui est $*$-faiblement fermé dans $\mathbb{B}$ et donc $*$-faiblement compact.

Considérons désormais X un espace topologique séparé et localement compact muni d'une mesure de Radon μ, et étudions désormais le sous-ensemble des moyennes provenant de fonctions intégrables *via* le plongement isométrique usuel $\mathrm{L}^1(X,\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^*$. Notons déjà que ce plongement se restreint en $\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+} \hookrightarrow \mathcal{M}(X,\mu)$. En effet, il est clair que, pour $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)_{1,+}$, la forme linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathscr{L}^\infty(X,\mu) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \int f\varphi \,\mathrm{d}\mu \end{array}\right.$ est une moyenne, car elle est positive et $\int f \cdot 1 \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu = 1$.

Le résultat principal quant au plongement $\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+} \hookrightarrow \mathcal{M}(X,\mu)$ est que son image est $*$-faiblement dense.

Théorème 2.9. *Soit X espace topologique séparé et localement compact muni d'une mesure de Radon μ.*

Munissons l'espace $\mathrm{L}^1(X,\mu)$ de la topologie faible $\sigma(\mathrm{L}^1,\mathrm{L}^\infty) = \sigma\left(\mathrm{L}^1,\mathrm{L}^{1*}\right)$ [13], l'espace $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)^*$ de la topologie faible-$*$ $\sigma(\mathrm{L}^{\infty*},\mathrm{L}^\infty)$, et les parties $\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+}$, $\mathcal{M}(X,\mu)$ des topologies induites respectives.

L'application $\iota : \mathrm{L}^1(X,\mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^*$ est alors un plongement d'espaces vectoriels topologiques, et le plongement topologique induit $\widetilde{\iota} : \mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+} \hookrightarrow \mathcal{M}(X,\mu)$ est d'image dense.

Démonstration. Notons que, pour toutes $f \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$, $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(X,\mu)$, on a, pour les dualités usuelles $(\mathrm{L}^{\infty*},\mathrm{L}^\infty)$ et $(\mathrm{L}^1,\mathrm{L}^\infty)$:

$$\langle \iota(f), \varphi \rangle = \iota(f)(\varphi) = \int f\varphi \,\mathrm{d}\mu = \langle f, \varphi \rangle$$

Cela assure que ι est effectivement un plongement topologique pour les topologies faibles associées à ces dualités, et donc un plongement d'espaces vectoriels topologiques par linéarité.

12. Rappelons que cet ensemble ne dépend pas du choix de μ.
13. Cette égalité provient de ce que $\mathrm{L}^{1*} \simeq \mathrm{L}^\infty$

La partie importante est donc la densité, qui va reposer crucialement sur la convexité de $\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+}$ et sur le théorème de séparation de Hahn-Banach. Notre objectif est de montrer l'inclusion $\mathcal{M}(X,\mu) \subseteq \overline{\iota(\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+})}$ (l'adhérence étant prise dans $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)^*$ pour la topologie faible-$*$). On suppose donc que ce n'est pas le cas, ce qui fournit $m \in \mathcal{M}(X,\mu)$ tel que $m \notin \overline{\iota(\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+})}$. Appliquons alors le théorème de séparation de Hahn-Banach au compact (séparé) convexe $\{m\}$ et au fermé convexe $\overline{\iota(\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+})}$ de l'espace localement convexe *réel* $\lfloor \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^* \rfloor$ [14] sous-jacent à l'espace localement convexe *complexe* $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)^*$ [15]. Cela fournit une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $f : \lfloor \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^* \rfloor \to \mathbb{R}$ et un réel a tel que $f(m) < a$ et $\forall x \in \overline{\iota(\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+})}, f(x) > a$.

Écrivons alors $f = \Re g$ où $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^* & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) - \mathrm{i}f(\mathrm{i}x) \end{array} \right.$ est $\mathbb{C}$-linéaire et continue, et supposons que g est de la forme ev_φ pour $\varphi \in \mathrm{L}^\infty(X,\mu)$. On a alors, pour $u \in \mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+}$:

$$\begin{aligned} \langle u, \Re\varphi - a \rangle &= \Re \langle u, \varphi - a \rangle \text{ [16]} \\ &= \Re \langle \iota(u), \varphi \rangle - \langle u, a \rangle \\ &= \Re g(\iota(u)) - a \langle u, 1 \rangle \\ &= f(\iota(u)) - a \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Tout élément positif de $\mathrm{L}^1(X,\mu)$ étant nul ou multiple positif d'un élément de $\mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+}$ [17], cette inégalité s'étend à tout $u \in \mathrm{L}^1(X,\mu)$ positif. Autrement dit, $\Re\varphi - a$ est positive *lorsqu'elle est vue comme forme linéaire sur* $\mathrm{L}^1(X,\mu)$. Si l'on admet que $\Re\varphi - a$ est en fait positive en tant qu'élément de $\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$, on obtient directement une contradiction avec la positivité de m, puisque :

$$\begin{aligned} m(\Re\varphi - a) &= m(\varphi - a) - \mathrm{i}m(\Im\varphi) \\ &= \Re m(\varphi - a) \text{ [18]} \\ &= \Re g(m) - a \\ &= f(m) - a \\ &< 0 \end{aligned}$$

Pour conclure, il s'agit de montrer que les deux hypothèses que nous avons faites au cours de la preuve sont vérifiées. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

14. L'espace vectoriel réel sous-jacent à un espace localement convexe complexe est par définition localement convexe.

15. Toute topologie faible est localement convexe, comme topologie initiale pour une famille d'applications linéaires à valeurs dans l'espace localement convexe $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ désigne le corps des scalaires.

16. Cette égalité provient de ce que u est à valeurs réelles.

17. Plus précisément, si $u \in \mathrm{L}^1(X,\mu)$ est positif et non nul, on a $\int u \,\mathrm{d}\mu = \|u\|_{\mathrm{L}^1} \neq 0$. On peut alors poser $\widetilde{u} := \frac{1}{\int u \,\mathrm{d}\mu} \cdot u \in \mathrm{L}^1(X,\mu)_{1,+}$, de sorte que $u = \left(\int u \,\mathrm{d}\mu\right) \cdot \widetilde{u}$.

18. Comme $\Im\varphi$ est à valeurs réelles, la positivité de m assure que $\mathrm{i}m(\Im\varphi) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Lemme 2.10. *Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) en dualité, et supposons E muni de la topologie faible $\sigma(E, F)$ associée à cette dualité. Alors toute forme linéaire continue sur E est de la forme $x \mapsto \langle x, y\rangle$ pour un certain $y \in F$.*

Lemme 2.11. *Soit $\varphi \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$. Si l'intégrale $\int f\varphi \, \mathrm{d}\mu$ est positive pour toute fonction $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$ positive μ-localement-presque-partout, alors φ est positive μ-localement-presque-partout.*

Le lemme 2.10 assure ainsi que l'on peut toujours écrire $g = \mathrm{ev}_\varphi$, tandis que le lemme 2.11 assure la positivité de $\Re\varphi - a$, ce qui conclut la preuve. □

Démonstration du lemme 2.10. Soit φ une forme linéaire continue sur E. La continuité assure que l'ensemble $\mathbf{U} := \varphi^{-1}(B(0, 1))$ est un voisinage de 0 pour $\sigma(E, F)$, ce qui fournit [19] $\varepsilon > 0$, I fini et $f : I \to F$ tels que $\mathbf{V} := \bigcap_{i\in I} \{x \in E \mid |\langle x, f_i\rangle| < \varepsilon\} \subseteq \mathbf{U}$.

Pour chaque $i \in I$, notons donc ψ_i la forme linéaire $\langle -, f_i\rangle$. Si $x \in \bigcap_{i\in I} \ker \psi_i$, on a bien sûr $x \in \mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$ donc $|\varphi(x)| < 1$. Mais on a aussi $\forall t \in \mathbb{R}_+, tx \in \bigcap_{i\in I} \ker \psi_i$, d'où $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, |\varphi(x)| < \frac{1}{t}$, d'où $x \in \ker \varphi$ en faisant tendre t vers 0. On a donc montré $\bigcap_{i\in I} \ker \psi_i \subseteq \ker \varphi$. Pour conclure, on va s'appuyer sur un lemme usuel d'algèbre linéaire, dont nous redonnons une preuve ci-dessous.

Lemme 2.12. *Soient k un corps, E un k-espace vectoriel, I un ensemble fini et $\psi : I \to E^\sharp$* [20] *une famille de formes linéaires sur E. Alors le sous-espace vectoriel de $E^\sharp$ engendré par l'image de ψ est exactement l'ensemble des formes linéaires φ telles que* $\ker \varphi \supseteq \bigcap_{i\in I} \ker \psi_i$.

Ce lemme fournit $a : I \to \mathbb{K}$ telle que $\varphi = \sum_{i\in I} a_i\psi_i = \left\langle -, \sum_{i\in I} a_i f_i\right\rangle$, ce qui achève la preuve du lemme 2.10. □

Démonstration. Il est clair que toute combinaison linéaire des ψ_i est nulle sur l'ensemble $\bigcap_{i\in I} \ker \psi_i$. Il s'agit donc de montrer que toute forme linéaire φ vérifiant $\ker \varphi \supseteq \bigcap_{i\in I} \ker \psi_i$ est effectivement combinaison linéaire des ψ_i.

Soit donc une telle forme φ. On considère l'application linéaire $\Psi : E \to k^I$ dont les composantes sont les ψ_i, $F \subseteq k^I$ son image, et $\widetilde{\Psi} : E \to F$ l'application surjective induite. On a $\ker \widetilde{\Psi} = \ker \Psi = \bigcap_{i\in I} \ker \psi_i \subseteq \ker \varphi$, donc φ se factorise par $\widetilde{\Psi}$ en $\widetilde{\varphi} : F \to k$, que l'on prolonge en $\widehat{\varphi} : k^I \to k$ de manière arbitraire. En notant $e : I \to \mathbb{C}^I$ la base canonique et e^* sa base duale, on a donc $\widehat{\varphi} = \sum_{i\in I} a_i e_i^*$ pour une certaine famille $a : I \to \mathbb{C}$. Il vient enfin $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\Psi} = \widehat{\varphi} \circ \Psi = \sum_{i\in I} a_i(e_i^* \circ \Psi) = \sum_{i\in I} a_i\psi_i$, ce qui conclut. □

Démonstration du lemme 2.11. Supposons que l'ensemble $\mathbf{S} := \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ n'est *pas* μ-localement-négligeable. Par définition, cela fournit $\mathbf{T} \in \mathcal{B}(X)$ de mesure finie tel que $0 < \mu(\mathbf{T} \cap \mathbf{S}) < +\infty$, de sorte que $\mathbb{1}_{\mathbf{T}\cap\mathbf{S}}$ est positive et intégrable. L'intégrale $\int \mathbb{1}_{\mathbf{T}\cap\mathbf{S}}\varphi \, \mathrm{d}\mu$ est donc positive par hypothèse, et négative comme intégrale d'une fonction négative, donc nulle. La fonction positive $-\mathbb{1}_{\mathbf{T}\cap\mathbf{S}}\varphi$ est d'intégrale nulle, l'inégalité de Markov A.1 assure

19. Car la topologie $\sigma(E, F)$ est initiale pour la famille des applications $\langle -, y\rangle$, où y parcourt F.
20. On note $E^\sharp$ le dual algébrique de E.

donc qu'elle est nulle presque partout, ce qui contredit le fait qu'elle est non-nulle sur l'ensemble $\mathbf{T} \cap \mathbf{S}$ de mesure non-nulle. $\square$

Pour conclure cette partie, nous allons donner une autre conséquence du lemme 2.10 qui servira à montrer le théorème 2.5.

Proposition 2.13. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique localement convexe, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Les ensembles convexes fermés pour la topologie $\sigma(E, E^*)$ sont exactement les ensembles convexes fermés pour $\mathcal{T}$.*

Démonstration. On dit qu'une partie de E est un *demi-espace fermé* si elle s'écrit sous la forme $\{x \in E \mid \Re f(x) \leq a\}$ pour $f \in E^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Le lemme 2.10 assure que $\sigma(E^*, E)$ et $\mathcal{T}$ définissent le même ensemble de formes linéaires continues, et donc les mêmes demi-espaces fermés. Ces deux topologies étant localement convexes, la proposition découle donc du lemme suivant. $\square$

Lemme 2.14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel topologique localement convexe, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Toute partie convexe fermée de E est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Démonstration. Soit F un convexe fermé, il est clair que F est contenu dans l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. Soit donc $x \notin F$, et montrons qu'il existe au moins un demi-espace fermé contenant F mais pas x. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est une conséquence immédiate du théorème de séparation de Hahn-Banach. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ c'est le cas aussi, mais il faut un petit argument supplémentaire [21]. Le théorème de séparation *réel* fournit toujours une forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $f : \lfloor E \rfloor \to \mathbb{R}$ et un réel a tel que $f(x) > a$ et $\forall y \in F, f(y) < a$. Il suffit alors d'écrire $f = \Re g$ où $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^\infty(X,\mu)^* & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) - \mathrm{i} f(\mathrm{i}x) \end{array} \right.$ est $\mathbb{C}$-linéaire et continue, et le demi-espace fermé associé à g et a contient bien F mais pas x. $\square$

2.5 Un lemme d'intégration

Terminons cette présentation des prérequis du théorème 2.5 par un petit lemme d'intégration, qui permettra de montrer l'implication (SR) $\Rightarrow$ (SF).

Lemme 2.15. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, f' : X \to \mathbb{R}_+$ des fonctions intégrables positives. Pour tout $t \geq 0$, on note $E_t := \{x \mid f(x) \geq t\}$ et $E'_t := \{x \mid f'(x) \geq t\}$.*

On a alors $\|f - f'\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(E_t \triangle E'_t)\, \mathrm{d}t$. En particulier, pour $f' = 0$ on obtient le résultat classique $\|f\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(E_t)\, \mathrm{d}t$.

21. Sauf si on utilise les versions complexes du théorème de séparation, mais on préfère ici se cantonner au cas réel, plus standard.

Démonstration. Notons déjà qu'on peut supposer que l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini. On peut en effet se restreindre à l'ensemble mesurable $Y := \{x \mid f(x) \neq 0\} \cup \{x \mid f'(x) \neq 0\}$ muni de la tribu et la mesure induite, qui est bien σ-fini en vertu du lemme A.3. Il est alors clair que les deux membres de l'égalité peuvent se calculer indifféremment sur X ou sur Y.

Supposons donc $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-fini, et notons $\mathbb{1}_t := \mathbb{1}_{[t,+\infty[}$ pour chaque $t \geq 0$. Notons que, pour tous $s, s' \geq 0$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\mathbb{1}_t(s) - \mathbb{1}_t(s')| \ \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} |\mathbb{1}_s(t) - \mathbb{1}'_s(t)| \ \mathrm{d}\mu(t) = |s - s'|$$

En particulier, pour tout $x \in X$, on a :

$$|f(x) - f'(x)| = \int_{\mathbb{R}_+} |\mathbb{1}_t(f(x)) - \mathbb{1}_t(f'(x))| \ \mathrm{d}t$$

Le théorème de Fubini donne alors :

$$\begin{aligned}
\|f - f'\|_{\mathrm{L}^1} &= \int_X |f(x) - f'(x)| \ \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_X \int_{\mathbb{R}_+} |\mathbb{1}_t(f(x)) - \mathbb{1}_t(f'(x))| \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \|\mathbb{1}_t \circ f - \mathbb{1}_t \circ f'\|_{\mathrm{L}^1} \ \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mu(E_t \triangle E'_t) \ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

2.6 Démonstration du théorème 2.5

Démonstration. Commençons par montrer $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$. Soit donc m une moyenne invariante sur Γ. La première étape est de remarquer que, sans avoir à modifier la moyenne m, on a déjà $m(\varphi * f) = m(f)$ pour $f \in UC_b(\Gamma_d)$ et $\varphi \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$. Notons donc $\widetilde{m}$ la restriction de m à $UC_b(\Gamma_d)$.

Pour voir cela, fixons $f \in UC_b(\Gamma_d)$ et $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$, que nous ne supposons pas encore positive normalisée. Supposons dans un premier temps que φ est continue à support compact. Le lemme 2.6 assure alors que la fonction $\mathrm{ev}_f \circ \lambda : \Gamma \to UC_b(\Gamma_d) \hookrightarrow \ell^\infty(\Gamma)$ est continue, de sorte que la fonction $\varphi \cdot (\mathrm{ev}_f \circ \lambda)$, à valeurs dans l'espace de Banach $UC_b(\Gamma_d)$, est continue à support compact. Le théorème A.7 et la remarque qui suit assurent donc que cette fonction est fortement mesurable et intégrable. Notons que les applications $\mathrm{ev}_x : UC_b(\Gamma_d) \to \mathbb{C}$ pour $x \in \Gamma$ sont bien sûr des formes linéaires continues, de sorte que

$\forall x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}\left(\int \varphi(g)\lambda(g)(f)\ \mathrm{d}\mu(g)\right)(x) &= \mathrm{ev}_x\left(\int \varphi(g)\lambda(g)(f)\ \mathrm{d}\mu(g)\right)\\ &= \int \mathrm{ev}_x(\varphi(g)\lambda(g)(f))\ \mathrm{d}\mu(g)\\ &= \int \varphi(g)f(g^{-1}x)\ \mathrm{d}\mu(g)\\ &= (\varphi * f)(x)\end{aligned}$$

De plus $\varphi * f \in UC_b(\Gamma_d)$, et $\widetilde{m}$ est une forme linéaire continue sur cet espace, d'où :

$$\begin{aligned}\widetilde{m}(\varphi * f) &= \widetilde{m}\left(\int \varphi(g)\lambda(g)(f)\ \mathrm{d}\mu(g)\right)\\ &= \int \widetilde{m}(\varphi(g)\lambda(g)(f))\ \mathrm{d}\mu(g)\\ &= \int \varphi(g)\widetilde{m}(f)\ \mathrm{d}\mu(g)\\ &= \widetilde{m}(f)\int \varphi\ \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Cette égalité étant valable pour tout $\varphi \in C_c(\Gamma)$, le lemme A.5 entraîne, par continuité de la convolution (théorème B.4), de $\widetilde{m}$ et de l'intégration, que l'égalité $\widetilde{m}(\varphi * f) = \widetilde{m}(f)\int \varphi\ \mathrm{d}\mu$ est valable pour toute $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$. En particulier, pour $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ (et toujours pour $f \in UC_b(\Gamma_d)$), on a $\widetilde{m}(\varphi * f) = \widetilde{m}(f)$.

Revenons maintenant au cas général, et fixons $\mathscr{F}$ un filtre d'approximation de l'unité dans $\mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, de sorte que pour tout $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, la fonction $\psi \mapsto \varphi * \psi$ converge selon $\mathscr{F}$ vers φ en norme L^1. Si on se donne de plus $f \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$, on a donc que la fonction $\psi \mapsto (\varphi * \psi) * f = \varphi * (\psi * f)$ (proposition B.5) converge selon $\mathscr{F}$ vers $\varphi * f$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)$. Mais pour tout $\psi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, on a $\psi * f \in UC_b(\Gamma_d)$ (proposition 2.8), donc $\widetilde{m}(\varphi*\psi*f) = \widetilde{m}(\psi*f)$, de sorte que le nombre $\widetilde{m}(\varphi*f)$ est limite selon $\mathscr{F}$ de $\psi \mapsto \widetilde{m}(\psi*f)$ et ne dépend donc pas de φ. On a ainsi montré que $\forall \varphi, \varphi' \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, \widetilde{m}(\varphi*f) = \widetilde{m}(\varphi'*f)$.

Choisissons alors $\varphi_0 \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, par exemple en posant $\varphi_0 := \chi_U = \frac{1}{\mu(U)}\mathbb{1}_U$ pour U voisinage compact de 1, et posons $n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{L}^\infty(\Gamma) & \to & \mathbb{C} \\ f & \mapsto & \widetilde{m}(\varphi_0 * f)\end{array}\right.$. Il s'agit bien d'une forme linéaire continue et positive car la convolée de fonctions positives est positive, et on a $n(1) = \widetilde{m}(\varphi_0 * 1) = \widetilde{m}\left(\left(\int \varphi_0\ \mathrm{d}\mu\right) \cdot 1\right) = \widetilde{m}(1) = 1$. Reste à vérifier que la moyenne n est bien topologiquement invariante. Soit donc $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ quelconque, et calculons :

$$\begin{aligned}n(\varphi * f) &= \widetilde{m}(\varphi_0 * \varphi * f)\\ &= \widetilde{m}(\varphi * f) \quad \text{car } \varphi * f \in UC_b(\Gamma_d)\\ &= \widetilde{m}(\varphi_0 * f) \quad \text{par l'indépendance en } \varphi \text{ de } \widetilde{m}(\varphi * f)\\ &= n(f)\end{aligned}$$

Cela conclut cette première implication.

Montrons maintenant $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$. Soit donc m une moyenne topologiquement invariante. Le théorème 2.9 fournit un filtre $\mathscr{F}$ non-trivial sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ tel que $\widetilde{\iota}_*\mathscr{F}$ converge vers m pour la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}(\Gamma)$. L'invariance topologique de m assure donc que, pour toutes $\varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ et $f \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma)$, la fonction $\langle -, \varphi * f - f\rangle$ converge vers 0 selon $\mathscr{F}$. Or, pour toute $\psi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, on a $\langle \psi, \varphi * f - f\rangle = \langle \varphi^* * \psi - \psi, f\rangle$ (lemme B.6), donc :

$$\forall \varphi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, \forall f \in \mathscr{L}^\infty(\Gamma), \langle \varphi * \psi - \psi, f\rangle \xrightarrow[\psi \to \mathscr{F}]{} 0 \tag{6}$$

Considérons maintenant l'espace vectoriel $E := \mathcal{F}(\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}, \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu))$ muni de la topologie produit des topologies normiques. E est alors localement convexe, et la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ sur E coïncide avec le produit des topologies faibles sur chaque $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$. Notons $\Sigma \subseteq E$ l'ensemble convexe formé des fonctions de la forme

$$A_\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+} & \to & \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \\ \varphi & \mapsto & \varphi * \psi - \psi \end{array} \right.$$

pour $\psi \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$. (6) montre que 0 est adhérent à Σ pour le produit des topologies faibles, donc pour la topologie faible sur E, et donc aussi pour la topologie originale de E d'après la proposition 2.13. Mais nous avons en plus que chaque A_ψ est 1-lipschitzienne par l'inégalité de Young, donc l'ensemble Σ est équicontinu, donc son adhérence simple coïncide avec son adhérence pour la convergence compacte. 0 est donc limite uniforme sur les compacts d'éléments de Σ, ce qui fournit un nouveau filtre $\mathscr{G}$ non-trivial sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ tel que $A : \psi \mapsto A_\psi$ converge vers 0 selon $\mathscr{G}$ uniformément sur les compacts. Autrement dit :

$$\forall K \in \mathfrak{K}(\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}), \sup_{\varphi \in K} \|\varphi * \psi - \psi\|_{\mathrm{L}^1} \xrightarrow[\psi \to \mathscr{G}]{} 0 \tag{7}$$

Nous avons désormais tous les outils nécessaires pour montrer (iii). Soient $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathfrak{K}(\Gamma)$. Posons alors $Q := A \cup \{1\}$, qui est toujours compact, et choisissons $\varphi_0 \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$. La continuité de la représentation régulière λ sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$ assure que l'application $\mathrm{ev}_{\varphi_0} \circ \lambda$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma & \to & \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+} \\ g & \mapsto & \lambda(g)(\varphi) \end{array} \right.$ est continue. L'ensemble $K := (\mathrm{ev}_{\varphi_0} \circ \lambda)(Q)$ est donc un compact de $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$. (7) donne donc que $\sup_{g \in Q} \|\lambda(g)(\varphi_0) * \psi - \psi\|_{\mathrm{L}^1} \xrightarrow[\psi \to \mathscr{G}]{} 0$, ce qui fournit, par nontrivialité de $\mathscr{G}$, un $\psi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ tel que $\sup_{g \in Q} \|\lambda(g)(\varphi_0) * \psi - \psi\|_{\mathrm{L}^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons enfin $\varphi := \varphi_0 * \psi$. On a alors $\lambda(g)(\varphi) = \lambda(g)(\varphi_0) * \psi$ pour tout $g \in \Gamma$ (lemme B.3). Il vient finalement, pour tout $g \in A \subseteq Q$:

$$\|\lambda(g)(\varphi) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|\lambda(g)(\varphi_0) * \psi - \psi\|_{\mathrm{L}^1} + \|\lambda(1)(\varphi_0) * \psi - \psi\|_{\mathrm{L}^1} < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cela montre bien que Γ satisfait la condition de Reiter forte (SR).

Montrons désormais $\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $A \subseteq \Gamma$ un compact. Soit aussi B un voisinage compact de l'origine, de sorte que $Q := A \cup B$ et $K := Q \cdot Q$ sont encore des voisinages compacts de l'origine. (iii) fournit alors $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\mu)$ tel que $\forall g \in K, \|\lambda(g)(f)-f\|_{\mathrm{L}^1} < \frac{\varepsilon\mu(Q)}{4\mu(K)}$. En particulier, on a $\int_K \|\lambda(g)(f)-f\|_{\mathrm{L}^1} \, \mathrm{d}\mu(g) \leq \frac{\varepsilon}{4}\mu(Q)$.

Posons alors $E_t := \{x \mid f(x) \geq t\}$ pour chaque $t \geq 0$, et remarquons que $\forall g \in \Gamma, gE_t = \{x \mid \lambda(g)(f)(x) \geq t\}$. Par le lemme 2.15, on a donc :

$$\forall g \in \Gamma, \|\lambda(g)(f)-f\|_{\mathrm{L}^1} = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(gE_t \triangle E_t) \, \mathrm{d}t$$

Par le théorème de Fubini, on a alors :

$$\frac{\varepsilon}{4}\mu(Q) \geq \int_K \int_{\mathbb{R}_+} \mu(gE_t \triangle E_t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\mu(g) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(E_t) \int_K \frac{\mu(gE_t \triangle E_t)}{\mu(E_t)} \, \mathrm{d}\mu(g) \, \mathrm{d}t$$

Montrons alors qu'il existe $t > 0$ tel que $\mu(E_t) > 0$ et $\int_K \frac{\mu(gE_t \triangle E_t)}{\mu(E_t)} \, \mathrm{d}\mu(g) \leq \frac{\varepsilon}{3}\mu(Q)$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\int_K \frac{\mu(gE_t \triangle E_t)}{\mu(E_t)} \, \mathrm{d}\mu(g) > \frac{\varepsilon}{3}\mu(Q)$ dès que $\mu(E_t) > 0$ (et $t > 0$). Comme $\int_{\mathbb{R}_+^*} \mu(E_t) \, \mathrm{d}t = \|f\|_{\mathrm{L}^1} = 1$, on aurait alors :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \mu(E_t) \int_K \frac{\mu(gE_t \triangle E_t)}{\mu(E_t)} \, \mathrm{d}\mu(g) \, \mathrm{d}t \geq \frac{\varepsilon}{3}\mu(Q) > \frac{\varepsilon}{4}\mu(Q)$$

Ce qui est une contradiction.

Soit donc un tel $t > 0$. Notons que, par l'inégalité de Markov A.1, l'intégrabilité de f entraîne aussi $\mu(E_t) < +\infty$. Montrons que $E_t \in \mathcal{B}_+(\Gamma,\mu)$ convient. Considérons pour cela l'ensemble $C := \left\{g \in K \;\middle|\; \frac{\mu(gE_t \triangle E_t)}{\mu(E_t)} \leq \varepsilon\right\}$. Toujours par l'inégalité de Markov, on a $\mu(K \setminus C) \leq \frac{\mu(Q)}{3} < \frac{\mu(Q)}{2}$.

Soient maintenant $x_1, x_2 \in C$. On a $x_1x_2^{-1}E_t \triangle E_t \subseteq (x_1x_2^{-1}E_t \triangle x_1E_t) \cup (x_1E_t \triangle E_t)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mu(x_1x_2^{-1}E_t \triangle E_t) &\leq \mu(x_2^{-1}E_t \triangle E_t) + \mu(x_1E_t \triangle E_t) \\
&= \mu(x_2E_t \triangle E_t) + \mu(x_1E_t \triangle E_t) \\
&\leq 2\varepsilon\mu(E_t)
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $A \subseteq Q \subseteq C \cdot C^{-1}$. La première inclusion est claire, soit donc $x \in Q$. Clairement $xQ \subseteq xK \cap K$, d'où $\mu(xK \cap K) \geq \mu(Q)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mu(Q) &\leq \mu(xK \cap K) \\
&\leq \mu(xC \cap C) + \mu(K \setminus C) + \mu(x(K \setminus C)) \\
&= \mu(xC \cap C) + 2\mu(K \setminus C) \\
&< \mu(xC \cap C) + \mu(Q)
\end{aligned}$$

On a donc $\mu(xC \cap C) > 0$, i.e $x \in C \cdot C^{-1}$. Ceci conclut.

L'implication $\boxed{(iv) \Rightarrow (v)}$ est évidente. De plus, on a déjà vu que tout filtre de Reiter faible permet de définir un filtre de Følner faible. Au vu des lemmes 2.1 et 2.4, cela entraîne l'implication $\boxed{(v) \Rightarrow (vi)}$.

Il reste donc à montrer $\boxed{(vi) \Rightarrow (i)}$. On a déjà vu comment adapter la preuve du théorème 2.3 pour montrer la moyennabilité d'un groupe muni d'un filtre de Reiter faible, mais on va en profiter pour donner une autre construction. Supposons donc que Γ satisfait la condition de Reiter faible, et soit $\mathscr{F}$ un filtre faiblement de Reiter sur $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, dont l'existence est assurée par le lemme 2.4. Comme $\mathscr{F}$ est non-trivial, il est plus grossier qu'un certain ultrafiltre $\mathscr{U}$.

Comme au théorème 2.9, on munit les espaces $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$ et $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)^*$ des topologies faible et faible-$*$, les parties $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$, $\mathcal{M}(\Gamma)$ des topologies induites respectives, et on note alors $\iota : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \hookrightarrow \mathrm{L}^\infty(\Gamma)^*$ et $\widetilde{\iota} : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+} \hookrightarrow \mathcal{M}(\Gamma)$ les plongements topologiques usuels. L'espace topologique $\mathcal{M}(\Gamma)$ étant alors compact, l'ultrafiltre $\widetilde{\iota}_*\mathscr{U}$ sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ converge vers une certaine moyenne m. Il s'agit de montrer que m est invariante, soit donc $\gamma \in \Gamma$. Par définition d'un filtre de Reiter faible, la fonction $\mathrm{ev}_\gamma \circ \mathfrak{r} : \varphi \mapsto \|\lambda(\gamma^{-1})(\varphi) - \varphi\|_{\mathrm{L}^1}$ converge vers 0 selon $\mathscr{F}$, et donc selon $\mathscr{U}$. Autrement dit la fonction $(\lambda(\gamma^{-1}) - \mathrm{id})_{|\mathrm{L}^1(\Gamma,\mu)_{1,+}}$ converge vers 0 selon $\mathscr{U}$ en norme L^1, donc pour la topologie faible, et par conséquent $(\iota \circ \lambda(\gamma^{-1}) - \iota)_{|\mathrm{L}^1(\Gamma,\mu)_{1,+}}$ converge aussi vers 0 selon $\mathscr{U}$ dans $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)^*$. Or, pour tout $\varphi \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$, on a $\iota(\lambda(\gamma^{-1})(\varphi)) = \iota(\varphi) \circ \lambda(\gamma)$, de sorte que $\iota \circ \lambda(\gamma^{-1}) = {}^t(\lambda(\gamma)) \circ \iota$. La transposée de l'isométrie $\lambda(\gamma) : \mathrm{L}^\infty(\Gamma) \to \mathrm{L}^\infty(\Gamma)$ est continue pour la topologie faible-$*$, donc l'application $(\iota \circ \lambda(\gamma^{-1}) - \iota)_{|\mathrm{L}^1(\Gamma,\mu)_{1,+}} = {}^t(\lambda(\gamma)) \circ \widetilde{\iota} - \widetilde{\iota}$ converge aussi vers $m \circ \lambda(\gamma) - m$ selon $\mathscr{U}$. $\mathscr{U}$ étant non-trivial et $\mathrm{L}^\infty(\Gamma)^*$ séparé, on a $m \circ \lambda(\gamma) - m = 0$ par unicité de la limite, ce qui conclut. □

3 Contenance faible et moyennabilité

Dans cette section, on désigne par « représentation de Γ » une représentation continue d'un groupe topologique Γ dans un espace vectoriel topologique complet sur $\mathbb{C}$, et on utilise le terme de « morphisme de représentations » pour les morphismes associés, c'est à dire les morphismes de représentations abstraites qui sont de plus linéaires et continus. Pour une représentation π, on note V_π l'espace vectoriel topologique sous-jacent, et on note encore $\pi : \Gamma \to \mathcal{GL}(V_\pi)$ le morphisme de groupes [22] associé. Enfin, une *représentation unitaire* de Γ est la donnée d'une représentation π et d'une structure d'espace hilbertien sur V_π, induisant bien-sûr la topologie originale sur V_π. Les morphismes de représentations unitaires sont les morphismes de représentations continues entre représentations unitaires.

Rappelons que, pour deux représentations continues π_1, π_2 de Γ, on note $\pi_1 \leq \pi_2$ s'il existe un morphisme de représentations de π_1 vers π_2 qui soit un plongement d'espaces vectoriels topologiques, de sorte que π_1 s'identifie à une sous-représentation de π_2. On note $f : \pi_1 \hookrightarrow \pi_2$ pour un tel morphisme.

22. Rappelons qu'il ne s'agit *pas* d'un morphisme de groupes topologiques en général.

3.1 Représentations de $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$, contenance faible

On veut maintenant caractériser la moyennabilité d'un groupe localement compact (séparé) en termes de la théorie des représentations unitaires de ce groupe. Pour cela, on va commencer par associer à toute représentation *unitaire* $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(V_\pi)$ du *groupe* Γ une représentation, notée $\mathrm{L}^1(\pi)$ ou encore π, de l'*algèbre involutive* $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$.

Pour $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$ et $x \in V_\pi$, on définit une forme linéaire $\underline{\pi}(f)(x)$ sur V_π^* par $\underline{\pi}(f)(x)(\varphi) := \int f(g) \cdot \varphi(\pi(g)(x)) \, \mathrm{d}\mu(g)$, cette intégrale étant finie car f est intégrable et $\forall g, |\varphi(\pi(g)(x))| \leq \|\varphi\| \, \|x\|$. Par l'inégalité de Hölder, on a donc

$$\forall \varphi \in V_\pi^*, \|\underline{\pi}(f)(x)(\varphi)\| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|\varphi\| \, \|x\|$$

Cela assure que la forme linéaire $\underline{\pi}(f)(x)$ est continue, on a ainsi défini un élément de V_π^{**}. Comme V_π est un espace de Hilbert, l'isométrie $\mathrm{ev} : V_\pi \to V_\pi^{**}$ est surjective, et on pose alors $\pi(f)(x) := \mathrm{ev}^{-1}(\underline{\pi}(f)(x))$. Autrement dit, en exploitant l'isomorphisme semi-linéaire $V_\pi \simeq V_\pi^*$ fourni par le théorème de représentation de Riesz, $\pi(f)(x)$ est l'unique élément de V_π tel que :

$$\forall y \in V_\pi, \langle \pi(f)(x), y \rangle = \int f(g) \langle \pi(g)(x), y \rangle \, \mathrm{d}\mu(g)$$

De plus, on a vu que $\|\pi(f)(x)\| = \|\underline{\pi}(f)(x)\| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^1} \|x\|$. On a donc $\pi(f) \in \mathcal{L}(V_\pi)$ et $\pi : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \to \mathcal{L}(V_\pi)$ est continue de norme inférieure à 1.

Remarque 3.1. *Pour $f \in C_c(\Gamma)$ et $x \in V_\pi$, la fonction $g \mapsto f(g)\pi(g)(x) \in V_\pi$ est continue à support compact, donc fortement intégrable en vertu du théorème A.7 et de la remarque qui l'accompagne. Par continuité du produit scalaire, on a alors $\forall y \in V_\pi$:*

$$\left\langle \int f(g)\pi(g)(x) \, \mathrm{d}\mu(g), y \right\rangle = \int f(g) \langle \pi(g)(x), y \rangle \, \mathrm{d}\mu(g) = \langle \pi(f)(x), y \rangle$$

Autrement dit, $\pi(f)(x) = \int f(g)\pi(g)(x) \, \mathrm{d}\mu(g)$. Enfin, par densité, cette relation caractérise complètement l'application $\pi : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \to \mathcal{L}(V_\pi)$.

Lemme 3.2. $\pi : \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu) \to \mathcal{L}(V_\pi)$ *est un morphisme d'algèbres involutives, et donc une représentation de* $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$.

Démonstration. Par continuité, on peut se restreindre à la sous-algèbre involutive $C_c(\Gamma)$. Soient donc $f, f_1, f_2 \in C_c(\Gamma)$ et $x, y \in V_\pi$. Par des arguments déjà utilisés, le lemme 1.10

nous permet alors de supposer que G est σ-compact. On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f_1 * f_2)(x), y\rangle &= \int (f_1 * f_2)(g) \, \langle \pi(g)(x), y\rangle \; \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int f_1(h) f_2(h^{-1}g) \, \langle \pi(g)(x), y\rangle \; \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)(g,h) \\
&= \int f_1(h) f_2(g) \, \left\langle \pi(g)(x), \pi(h^{-1})(y)\right\rangle \; \mathrm{d}(\mu \otimes \mu)(g,h) \\
&= \int f_1(h) \, \left\langle \pi(f_2)(x), \pi(h^{-1})(y)\right\rangle \; \mathrm{d}\mu(h) \\
&= \int f_1(h) \, \langle \pi(h)(\pi(f_2)(x)), y\rangle \; \mathrm{d}\mu(h) \\
&= \langle \pi(f_1)(\pi(f_2)(x)), y\rangle
\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f^*)(x), y\rangle &= \int f^*(g) \, \langle \pi(g)(x), y\rangle \; \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int \overline{f(g)} \, \left\langle \pi(g^{-1})(x), y\right\rangle \; \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int \overline{f(g)} \, \left\langle \pi(g^{-1})(x), y\right\rangle \; \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \overline{\int f(g) \, \langle \pi(g)(y), x\rangle \; \mathrm{d}\mu(g)} \\
&= \langle x, \pi(f)(y)\rangle
\end{aligned}$$

Cela conclut. □

Nous aurons besoin d'étendre l'égalité $\pi(f_1 * f_2) = \pi(f_1) \circ \pi(f_2)$ au cas où f_1 est remplacé par une mesure de Dirac. C'est ce que permet le lemme suivant.

Lemme 3.3. *Soient $g \in \Gamma$ et $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$. On a $\pi(\lambda(g)(f)) = \pi(g) \circ \pi(f)$.*

Démonstration. Encore une fois on peut supposer $f \in C_c(\Gamma)$. Pour $x \in V_\pi$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\pi(\lambda(g)(f))(x) &= \int f(g^{-1}h) \pi(h)(x) \; \mathrm{d}\mu(h) \\
&= \int f(h) \pi(gh)(x) \; \mathrm{d}\mu(h) \\
&= \pi(g)(\pi(f)(x))
\end{aligned}$$

□

Définition 3.4. *Soient π_1, π_2 deux représentations unitaires de G. On dit que π_1 est* faiblement contenue *dans π_2, ce que l'on note $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$, si pour toute $f \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$, on a $\|\pi_1(f)\| \leq \|\pi_2(f)\|$.*

Par densité, on a donc $\pi_1 \preccurlyeq \pi_2$ si et seulement si l'inégalité $\|\pi_1(f)\| \leq \|\pi_2(f)\|$ est valable pour toute $f \in C_c(\Gamma)$.

Le théorème suivant permet caractérise la moyennabilité en termes de la contenance faible de certaines représentations. Sa démonstration occupera la fin de cette section.

Théorème 3.5. *On note $\mathbb{1}_\Gamma : \Gamma \to \mathbb{S}_1$ et $\lambda_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu))$ les représentations triviales et régulières gauches de Γ. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Γ *est moyennable*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall F \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\Gamma), \exists \xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma, \mu), \forall \gamma \in F, \|\xi\|_{\mathrm{L}^2} = 1 \wedge \|\lambda(\gamma)(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0, \forall K \in \mathfrak{K}(\Gamma), \exists \xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma, \mu), \|\xi\|_{\mathrm{L}^2} = 1 \wedge \forall \gamma \in K, \|\lambda(\gamma)(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$

(iv) $\mathbb{1}_\Gamma \preccurlyeq \lambda_\Gamma$

(v) $\forall F \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\Gamma), \left\|\sum_{\gamma \in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})\right\| = 2\,|F|$

3.2 Quelques résultats de théorie spectrale

Nous aurons besoin de la notion standard de *spectre approché* d'un opérateur.

Définition 3.6. *Soit E un espace de Banach complexe et $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle* spectre approché *de T l'ensemble $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall \varepsilon > 0, \exists \xi \in E, \|\xi\| = 1 \wedge \|T(\xi) - \lambda\xi\| < \varepsilon\}$.*

Notons en particulier que l'assertion $\lambda \notin \sigma(T)$ s'écrit encore :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \xi \in E, \|\xi\| = 1 \Rightarrow \|T(\xi) - \lambda\xi\| \geq \varepsilon$$

Or, cet énoncé traduit des propriétés analytiques fondamentales de l'opérateur $T - \lambda$, comme l'exprime le lemme suivant :

Lemme 3.7. *Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est un isomorphisme sur son image, i.e un plongement d'espaces vectoriels topologiques

(ii) T est injectif et d'image complète

(iii) $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \|T(x)\| \geq \varepsilon \|x\|$

(iv) $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow \|T(x)\| \geq \varepsilon$

De plus, ces conditions sont toujours vérifiées si $E = F$ est un espace de Hilbert et T vérifie $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow |\langle T(x), x\rangle| \geq \varepsilon$.

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ découle de ce que les isomorphismes linéaires continus entre espaces vectoriels normés sont bi-lipschitziens, et préservent donc la complétude[23]. L'implication réciproque $(ii) \Rightarrow (i)$ est alors une conséquence immédiate du

23. On peut aussi donner un argument plus général, valable pour un isomorphisme linéaire L entre des espaces vectoriels topologiques métrisables A et B. En effet, cette hypothèse assure que les structures uniformes sur A et B provenant de leur structure métrique coïncident avec les structures uniformes (gauche ou droite) associées aux groupes topologiques sous-jacents, et l'isomorphisme de groupes topologiques L est automatiquement un isomorphisme entre ces structures uniformes, qui préserve donc la complétude.

théorème d'isomorphisme de Banach, qui assure que la co-restriction de T à son image est un isomorphisme car bijective, linéaire et continue entre espaces de Banach.

Il est clair que $(iii) \Leftrightarrow (iv)$, montrons donc $(i) \Leftrightarrow (iii)$. Notons que (iii) implique immédiatement que T est injectif, et donc une bijection sur son image. En notant $S : \operatorname{im} T \to E$ l'inverse (a priori seulement linéaire) de T co-restreint à son image, il s'agit donc de montrer que la continuité de S équivaut à (iii). Or :

$$\begin{aligned} S \text{ est continu } &\Leftrightarrow \exists C > 0, \forall y \in \operatorname{im} T, \|S(y)\| \leq C \|y\| \\ &\Leftrightarrow \exists C > 0, \forall x \in E, C^{-1} \|x\| \leq \|T(x)\| \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall x \in E, \varepsilon \|x\| \leq \|T(x)\| \end{aligned}$$

Enfin, supposons que $E = F$ est un espace de Hilbert, et que, pour un certain $\varepsilon > 0$, on a $\forall x \in E, \|x\| = 1 \Rightarrow |\langle T(x), x\rangle| \geq \varepsilon$. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout ξ unitaire, on a $\varepsilon \leq |\langle T(x), x\rangle| \leq \|T(x)\|$. La condition (iv) est donc vérifiée. □

Le lemme 3.7 permet de caractériser le spectre approché d'un opérateur T, puisque son complémentaire $\sigma(T)^c$ est précisément l'ensemble des λ tels que $T - \lambda$ vérifie les conditions équivalentes de ce lemme. En particulier, cela nous permet de démontrer le résultat fondamental suivant :

Lemme 3.8. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(i) Pour T quelconque, on a $\sigma(T) \subseteq \mathrm{Sp}(T)$

(ii) Si T est unitaire, $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{R}$

(iii) Si T est autoadjoint, $\sigma(T) = \mathrm{Sp}(T)$

Démonstration. Si $\lambda \in \sigma(T)$, le lemme 3.7 assure que $T - \lambda$ n'est *pas* un isomorphisme sur son image, et donc que $T - \lambda$ n'est pas inversible. Ceci montre le point (i).

Pour montrer (ii) et (iii), remarquons que dans les deux cas on a $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \sigma(T^*) \cap \mathbb{R}$. Si T est autoadjoint c'est immédiat, vérifions le pour T unitaire. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ que l'on suppose appartenir à $\sigma(T)$, et $\varepsilon > 0$. Par hypothèse on a $\|T(\xi) - \lambda\xi\| < \varepsilon$ pour un certain ξ de norme 1, ce qui entraîne $\|\xi - T^*(\lambda\xi)\| < \varepsilon$, et donc $\|T^*(\xi) - \lambda^{-1}\xi\| < \varepsilon |\lambda|^{-1}$. Or $\lambda \in \sigma(T) \subseteq \mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{S}_1$ car T est unitaire, et $\lambda \in \mathbb{R}$ donc $\lambda \in \{-1, 1\}$. On a donc en fait $\|T^*(\xi) - \lambda\xi\| < \varepsilon$, ce qui assure que $\lambda \in \sigma(T^*)$. Cela montre $\sigma(T) \cap \mathbb{R} \subseteq \sigma(T^*) \cap \mathbb{R}$, et l'inclusion réciproque vient en appliquant ce résultat à l'opérateur unitaire T^*.

Montrons alors, toujours pour T unitaire ou autoadjoint, que $\sigma(T) \cap \mathbb{R} \supseteq \mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{R}$. Soit pour cela un réel λ n'appartenant *pas* à $\sigma(T)$, de sorte que $T - \lambda$ soit injectif et d'image fermée (lemme 3.7). Comme $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \sigma(T^*) \cap \mathbb{R}$, on a aussi $\lambda \notin \sigma(T^*)$, d'où le même résultat pour $T^* - \lambda = (T - \lambda)^*$. Or, l'injectivité de $(T - \lambda)^*$ assure que l'image de $T - \lambda$ est dense. Cette image étant fermée, on a $T - \lambda$ surjectif et injectif, donc inversible par le théorème d'isomorphisme de Banach, d'où $\lambda \notin \mathrm{Sp}(T)$.

On a donc montré $\sigma(T) \cap \mathbb{R} = \mathrm{Sp}(T) \cap \mathbb{R}$. Cela conclut la preuve de (ii), et pour conclure celle de (iii) il suffit de se rappeler que pour T autoadjoint on a $\sigma(T) \subseteq \mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$. □

3.3 Preuve du théorème 3.5

Commençons par un petit lemme qui sera crucial.

Lemme 3.9. *Soient* $\xi \in \mathscr{L}^2(\Gamma, \mu)$ *et* $c \in \mathbb{S}_1$. *La fonction* $|\xi| := |\cdot| \circ \xi \in \mathscr{L}^2(\Gamma, \mu)$ *est de même norme que* ξ, *et on a* $\forall \gamma \in \Gamma, \|\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\lambda(\gamma)(\xi) - c\xi\|_{\mathrm{L}^2}$

Démonstration. Il est clair que $\||\xi|\|_{\mathrm{L}^2} = \|\xi\|_{\mathrm{L}^2}$. Pour $x \in \Gamma$ quelconque, la petite inégalité triangulaire donne $||\xi|(\gamma^{-1}x) - |\xi|(x)| = ||\xi(\gamma^{-1}x)| - |c\xi(x)|| \leq |\xi(\gamma^{-1}x) - c\xi(x)|$. En intégrant le carré de ces inégalités, on obtient $\|\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\lambda(\gamma)(\xi) - c\xi\|_{\mathrm{L}^2}$. $\square$

Démonstration du théorème 3.5. On va montrer $(ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii)$.

Commençons donc par montrer $\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ en s'appuyant sur le critère de Reiter faible (WR). Soient donc $\varepsilon > 0$ et $F \subseteq \Gamma$ fini, ainsi qu'un $\xi \in \mathscr{L}^2(\Gamma, \mu)$ unitaire vérifiant $\forall \gamma \in F, \|\lambda(\gamma^{-1})(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2} < \varepsilon$ tel que fourni par (ii). Le lemme 3.9 assure alors que $\forall \gamma \in F\ \|\lambda(\gamma^{-1})(|\xi|) - |\xi|\| < \varepsilon$. Posons alors $f := |\cdot|^2 \circ \xi \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$. On a alors, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\lambda(\gamma)(f) - f = (\lambda(\gamma)(|\xi|) + |\xi|)(\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|)$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors, pour tout $\gamma \in F$:

$$\|\lambda(\gamma)(f) - f\|_{\mathrm{L}^1} \leq \|\lambda(\gamma)(|\xi|) + |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \|\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \leq 2\|\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} < 2\varepsilon$$

Ceci conclut.

On montre similairement $\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ en s'appuyant sur le critère de Reiter fort (SR). Soient donc $\varepsilon > 0$ et $K \subseteq \Gamma$ compact, ainsi qu'une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ vérifiant $\forall \gamma \in K, \|\lambda(\gamma^{-1})(f) - f\|_{\mathrm{L}^1}$, telle que fournie par (SR). Posons alors $\xi := \sqrt{f} \in \mathscr{L}^2(\Gamma, \mu)$, qui vérifie $\|\xi\|_{\mathrm{L}^2} = 1$. En utilisant le fait que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, |a - b|^2 \leq |a^2 - b^2|$, il vient, pour tout $\gamma \in Q$, $\|\lambda(\gamma)(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leq \|\lambda(\gamma)(f) - f\|_{\mathrm{L}^1} < \varepsilon$. Ceci conclut.

Montrons maintenant $\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$. Soit donc $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$, et montrons $\|\mathbb{1}_\Gamma(f)\| \leq \|\lambda_\Gamma(f)\|$. C'est trivial pour $f \overset{loc}{=}_\mu 0$, donc on suppose $\|f\|_{\mathrm{L}^1} \neq 0$. Par continuité des représentations $\mathbb{1}_\Gamma$ et λ_Γ de $\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu)$ [24], il suffit en fait de montrer le résultat pour $f \in C_c(\Gamma)$, ce que nous supposons désormais. Nous allons montrer $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right|^2 \in \mathrm{Sp}\left(\lambda_\Gamma(f)^* \circ \lambda_\Gamma(f)\right)$, ce qui entraîne bien :

$$\|\mathbb{1}_\Gamma(f)\|^2 = \left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right|^2 \leq \|\lambda_\Gamma(f)^* \circ \lambda_\Gamma(f)\| = \|\lambda_\Gamma(f)\|^2$$

Par l'absurde, on suppose donc $T := \left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right|^2 - \lambda_\Gamma(f)^* \circ \lambda_\Gamma(f)$ inversible, ce qui fournit

24. Contrairement au cas des représentations de groupes topologiques, les représentation continues d'algèbres de Banach involutives sont exactement les représentations algébriques telles que le morphisme sous-jacent est continu

$\varepsilon > 0$ tel que $\forall \xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma,\mu), \|T(\xi)\| \geq \varepsilon \|\xi\|$. Pour $\xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma,\mu)$, la remarque 3.1 donne :

$$\begin{aligned}
\lambda_\Gamma(f)^* \left(\lambda_\Gamma(f)(\xi)\right) &= \lambda_\Gamma(f^*) \left(\int f(g)\lambda_\Gamma(g)(\xi) \ \mathrm{d}\mu(g)\right) \\
&= \int f(g)\lambda_\Gamma(f^*)\Big(\lambda_\Gamma(g)(\xi)\Big) \ \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int f(g) \int f^*(h)\lambda_\Gamma(hg)(\xi) \ \mathrm{d}\mu(h) \ \mathrm{d}\mu(g) \\
&= \int \int f(g)\overline{f(h)}\lambda_\Gamma(h^{-1}g)(\xi) \ \mathrm{d}\mu(h) \ \mathrm{d}\mu(g)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int f \ \mathrm{d}\mu\right|^2 &= \left(\int f \ \mathrm{d}\mu\right)\left(\int \overline{f} \ \mathrm{d}\mu\right) \\
&= \int \int f(g)\overline{f(h)} \ \mathrm{d}\mu(g) \ \mathrm{d}\mu(h)
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $\xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma,\mu)$ unitaire :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \left\|\int \int f(g)\overline{f(h)}(\xi - \lambda_\Gamma(h^{-1}g)(\xi)) \ \mathrm{d}\mu(h) \ \mathrm{d}\mu(g)\right\|_{\mathrm{L}^2} \\
&\leq \int \int |f(g)|\,|f(h)| \left\|\xi - \lambda_\Gamma(h^{-1}g)(\xi)\right\|_{\mathrm{L}^2} \ \mathrm{d}\mu(h) \ \mathrm{d}\mu(g)
\end{aligned}$$

Mais, si l'on note K le support de f et que l'on applique (iii) au réel $\frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathrm{L}^1}^2}$ et au compact $K^{-1}K$, on obtient $\xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma,\mu)$ unitaire tel que $\sup_{\gamma\in K^{-1}K} \|\lambda_\Gamma(\gamma)(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2} < \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\mathrm{L}^1}^2}$, d'où :

$$\varepsilon \leq \int \int |f(g)|\,|f(h)| \left\|\xi - \lambda_\Gamma(h^{-1}g)(\xi)\right\|_{\mathrm{L}^2} \ \mathrm{d}\mu(h) \ \mathrm{d}\mu(g) < \varepsilon$$

D'où la contradiction recherchée.

Pour montrer l'implication $\boxed{(iv) \Rightarrow (v)}$, donnons nous $F \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\Gamma)$ quelconque, et commençons par remarquer que l'inégalité $\left\|\sum_{\gamma\in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})\right\| \leq 2\,|F|$ est automatiquement vérifée, il s'agit donc de montrer l'inégalité inverse. Commençons par donner une preuve pour Γ discret, qui nous éclairera pour la suite, et pour simplifier supposons que μ donne masse 1 aux singletons. Il suffit alors d'appliquer (iv) à la fonction $f := \sum_{\gamma\in F} \delta_\gamma + \delta_{\gamma^{-1}} \in \mathscr{L}^1(\Gamma,\mu)_+$ pour obtenir :

$$2\,|F| = \left|\int f \ \mathrm{d}\mu\right| = |\mathbb{1}_\Gamma(f)| \leq \|\lambda_\Gamma(f)\| = \left\|\sum_{\gamma\in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})\right\| \leq 2\,|F|$$

Revenons maintenant au cas général. On pourrait être tenté de se ramener au raisonnement précédent en approchant la *mesure* $\sum_{\gamma\in F} \delta_\gamma + \delta_{\gamma^{-1}}$ par des fonctions intégrables, une telle approximation s'obtenant aisément à partir d'une approximation de l'unité. Cependant, on se heurte alors au fait que la fonction $\lambda_\Gamma : \Gamma \to \mathcal{U}(\mathrm{L}^2(\Gamma, \mu))$ n'est *a priori* pas continue, ce qui rend inutilisable l'hypothèse de concentration de la masse : même si $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$ a sa masse concentrée autour des points de $F \cup F^{-1}$, rien ne dit que $\lambda_\Gamma(f)$ sera proche de $\sum_{\gamma \in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})$. [25]

La solution que nous proposons est d'étudier ce qui se passe lorsqu'on itère notre opérateur $\sum_{\gamma \in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})$. Fixons pour cela une fonction $f_0 \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)_{1,+}$ [26] qui représente une distribution de masse initiale, et considérons les opérateurs :

$$T := \sum_{\gamma \in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Gamma, \mu))$$
$$S := \sum_{\gamma \in F} \lambda(\gamma) + \lambda(\gamma^{-1}) \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^1(\Gamma, \mu))$$

Le lemme 3.3 donne alors que $\forall f \in \mathrm{L}^1(\Gamma, \mu), \lambda_\Gamma(S(f)) = T \circ \lambda_\Gamma(f)$.

Notons que, pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\Gamma, \mu)$ positive, la fonction $S(f)$ est encore positive, et vérifie $\int S(f) \, \mathrm{d}\mu = 2 |F| \int f \, \mathrm{d}\mu$. Par récurrence, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S^n(f_0) \geq 0 \wedge \int S^n(f_0) \, \mathrm{d}\mu = (2|F|)^n$$

Or, *(iv)* assure que l'on a, toujours pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$(2|F|)^n = \int S^n(f_0) \, \mathrm{d}\mu = \|\mathbb{1}_\Gamma(S^n(f_0))\| \leq \|\lambda_\Gamma(S^n(f_0))\| = \|T^n \circ \lambda_\Gamma(f_0)\| \leq \|T\|^n \|\lambda_\Gamma(f_0)\|$$

La suite géométrique positive $n \mapsto \left(\frac{2|F|}{\|T\|}\right)^n$ est donc bornée supérieurement par $\|\lambda_\Gamma(f_0)\|$, ce qui assure que $\frac{2|F|}{\|T\|} \leq 1$, et donc $2|F| \leq \|T\|$ comme attendu.

Montrons enfin $\boxed{(v) \Rightarrow (ii)}$. Soient donc $\varepsilon > 0, F \in \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(\Gamma)$, et raisonnons par l'absurde en supposant :

$$\forall \xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma, \mu), \|\xi\|_{\mathrm{L}^2} = 1 \Rightarrow \exists \gamma \in F, \|\lambda_\Gamma(\gamma)(\xi) - \xi\|_{\mathrm{L}^2} \geq \varepsilon \tag{8}$$

Notons que cette hypothèse entraîne également :

$$\forall \xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma, \mu), \|\xi\|_{\mathrm{L}^2} = 1 \Rightarrow \exists \gamma \in F, \|\lambda_\Gamma(\gamma)(\xi) + \xi\|_{\mathrm{L}^2} \geq \varepsilon \tag{9}$$

En effet, pour $\xi \in \mathscr{L}^2(\Gamma, \mu)$ unitaire, on peut appliquer (8) à $|\xi|$ pour obtenir un $\gamma \in F$ tel que $\|\lambda_\Gamma(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \geq \varepsilon$. Mais on a $\|\lambda(\gamma)(|\xi|) - |\xi|\|_{\mathrm{L}^2} \leq \|\lambda(\gamma)(\xi) + \xi\|_{\mathrm{L}^2}$ par le lemme 3.9 pour $c = -1$, ce qui achève de montrer (9).

25. Il est d'ailleurs intéressant que de remarquer que le morphisme λ_Γ est bien continu si Γ est discret, ce qui explique pourquoi la preuve fonctionne dans ce cas.

26. On a déjà vu qu'une telle fonction existe toujours, par exemple en posant $f_0 := \chi_U = \frac{1}{\mu(U)} \mathbb{1}_U$ pour un voisinage compact U de 1.

Pour $s \in \{\pm 1\}$, considérons $U_s := \sum_{\gamma \in F} (\lambda_\Gamma(\gamma) - s\,\mathrm{id})^*(\lambda_\Gamma(\gamma) - s\,\mathrm{id}) = 2s\,|F| - T$, où l'on note toujours $T = \sum_{\gamma \in F} \lambda_\Gamma(\gamma) + \lambda_\Gamma(\gamma^{-1})$. Notons que chaque U_s est inversible. En effet, (8) et (9) montrent que, quelle que soit la valeur de s, on a pour tout $\xi \in \mathrm{L}^2(\Gamma, \mu)$ unitaire :

$$\varepsilon^2 \leq \sum_{\gamma \in F} \|\lambda_\Gamma(\gamma)(\xi) - s\xi\|^2_{\mathrm{L}^2} = \langle U_s(\xi), \xi \rangle$$

Le lemme 3.7 assure alors que U_s est injectif et d'image complète. Mais U_s est autoadjoint, donc son injectivité implique qu'il est d'image dense. Il vient que U_s est bijectif, donc inversible par le théorème d'isomorphisme de Banach, et ce toujours pour $s \in \{\pm 1\}$ quelconque.

Or $U_s = 2s\,|F| - T$, donc par définition du spectre on a $\mathrm{Sp}(T) \cap \{\pm 2\,|F|\} = \varnothing$. Mais T est autoadjoint, et de norme $2\,|F|$ d'après (v). Donc $\rho(T) = 2\,|F|$, d'où $\mathrm{Sp}(T) \cap \{\pm 2\,|F|\} \neq \varnothing$ puisque $\mathrm{Sp}(T) \subseteq \mathbb{R}$. Cela nous donne la contradiction recherchée.

□

A Résultats usuels de théorie de la mesure

Cette section regroupe, avec ou sans démonstration, des résultats de théorie de la mesure utilisés au cours du document. Nous nous cantonnons ici strictement aux mesures usuelles (σ-additives), le cas moins usuel des contenu et de l'intégration associée étant traitée dans le corps du texte. Si $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, on note $\mathscr{S}(X, \mathcal{A})$ l'ensemble des *fonctions simples* sur X, c'est à dire des fonctions mesurables $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ d'image finie.

Avant toute chose, rappelons l'inégalité de Markov et une de ses conséquences élémentaires, qui nous servira à de nombreuses reprises.

Proposition A.1. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable positive. On a $\forall a > 0, a \cdot \mu\left(f^{-1}([a, +\infty])\right) \leq \int f \, \mathrm{d}\mu$.*
Par conséquent, si $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$, on a $f =_\mu 0$, où $=_\mu$ désigne la relation d'égalité μ-presque-partout.

Démonstration. L'inégalité de Markov est une conséquence directe de la croissance de l'intégrale appliquée à l'inégalité $a \cdot \mathbb{1}_{\{x \mid f(x) \leq a\}} \leq f$. Pour sa conséquence, notons que le petit théorème de convergence monotone donne :

$$\mu(f^{-1}([2^{-n}, +\infty])) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}([2^{-i}, +\infty])\right) = \mu(f^{-1}(\{0\}^c))$$

Mais l'hypothèse $\int f \, \mathrm{d}\mu = 0$ implique, *via* l'inégalité de Markov, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(f^{-1}([2^{-n}, +\infty])) = 0$, ce qui entraîne $f =_\mu 0$. $\square$

Espaces L^p

Nous allons maintenant énoncer les résultats fondamentaux sur les espaces L^p. Nous allons en fait considérer une variante subtile de la définition, qui est plus adaptée à l'analyse fonctionelle en ce que l'isométrie $\mathrm{L}^\infty \simeq (\mathrm{L}^1)^*$ sera valable *sans hypothèse de σ-finitude.* Pour cela, on introduit la notion suivante.

Définition A.2. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $A \in \mathfrak{P}X$. On dit que A est* μ-localement-négligeable *si, pour tout $B \in \mathcal{A}$* de mesure finie, *$B \cap A$ est μ-négligeable.*
Par analogie avec le cas des ensembles négligeables, on dit qu'un prédicat P est valable μ-localement-presque-partout *si l'ensemble associé est μ-localement-négligeable, et on note $f =^{loc}_\mu g$ si les fonctions f et g sont égales μ-localement-presque-partout. Enfin, on définit le* supremum μ-localement-essentiel *d'une fonction mesurable $f : (X, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ par $\sup \mathrm{ess}^{loc}_\mu f := \inf \{y \mid f \leq y$ μ-localement-presque-partout$\}$.*

Remarquons directement que, si l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini, tout ensemble μ-localement-négligeable est en fait μ-négligeable. Cela garantit en particulier que, pour des fonctions intégrables, les relations $=_\mu$ et $=^{loc}_\mu$ coïncident, en vertu du lemme suivant.

Lemme A.3. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ intégrable. L'ensemble $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ est σ-fini*[27].

27. C'est à dire qu'il est σ-fini comme espace mesuré, lorsqu'on le munit de la mesure restreinte

Démonstration. Chaque $\{x \mid |f(x)| \geq 2^{-n}\}$ est de mesure finie par l'inégalité de Markov, et l'union de ces ensembles pour $n \in \mathbb{N}$ recouvre $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. $\square$

Si (X, μ) est un espace mesuré et $p < +\infty$, on note $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ l'espace vectoriel semi-normé des fonctions mesurables complexes de puissance p-ième intégrable, muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ usuelle, et $\mathrm{L}^p(X, \mu)$ l'espace normé associé. Le lemme A.3 s'étendant de manière immédiate aux fonctions $\mathscr{L}^p$, le quotient $\mathscr{L}^p \twoheadrightarrow \mathrm{L}^p$ correspond encore à l'identification des fonctions modulo $=_\mu^{loc}$.

Traitons maintenant le cas $p = \infty$, pour lequel notre définition diffère de la définition habituelle. On note $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ l'espace vectoriel semi-normé des fonctions f mesurables complexes telles que $\sup \mathrm{ess}_\mu^{loc} |f| < +\infty$, muni de la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^\infty} \sup \mathrm{ess}_\mu^{loc} |f|$. On note encore $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$ l'espace normé associé, de sorte que le quotient $\mathscr{L}^\infty \twoheadrightarrow \mathrm{L}^\infty$ correspond toujours à l'identification des fonctions modulo $=_\mu^{loc}$.

Nous admettons que l'inégalité de Hölder généralisée et le théorème de dualité sont encore vérifiés pour cette définition de $\mathrm{L}^\infty(X, \mu)$, et ce sans aucune hypothèse de σ-finitude.

Mesures de Radon

Définition A.4. *Soit X un espace topologique localement compact et séparé. Une* mesure de Radon *sur X est une mesure μ sur l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}(X))$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

— *Pour tout $K \subseteq X$ compact, $\mu(X) < +\infty$.*

— *Régularité extérieure :*

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) = \inf \{\mu(U) \mid U \textit{ ouvert}, A \subseteq U\}$$

— *Régularité intérieure pour les ouverts :*

$$\forall U \textit{ ouvert}, \mu(U) = \sup \{\mu(K) \mid K \textit{ compact}, K \subseteq U\}$$

La conjonction des deux conditions de régularité donne, pour tout borélien A de mesure finie et tout $\varepsilon > 0$, un ouvert $U \supseteq A$ de mesure finie et un compact $K \subseteq U$ tels que $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$ et $\mu(U) < \mu(K) + \varepsilon$. Bien sûr, on ne peut ici pas supposer $K \subseteq A$, mais cela permet tout de même d'obtenir des résultats intéressants.

On peut notamment appliquer le lemme d'Urysohn, pour obtenir $f : X \to [0, 1]$ continue à support compact vérifiant $\forall x \in K, f(x) = 1$ et $\operatorname{supp} f \subseteq U$. On a alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\int |f - \mathbb{1}_A|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_A |f - 1|^p \, \mathrm{d}\mu + \int_{U \setminus A} |f|^p \, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_U (1 - f)^p \, \mathrm{d}\mu + \int_{U \setminus A} f^p \, \mathrm{d}\mu \\
&= \mu(U \setminus K) + \mu(U \setminus A) \\
&< 2\varepsilon
\end{aligned}$$

On est donc capable d'approcher en norme L^p l'indicatrice de tout ensemble A de mesure finie par des fonctions continues à support compact. Ces indicatrices engendrant un sous-espace dense de $\mathrm{L}^p(X,\mu)$, on vient de montrer le résultat suivant.

Proposition A.5. *Si μ est de Radon, l'espace $C_c(X)$ est dense dans $\mathrm{L}^p(X,\mu)$ pour tout $p \in [1,+\infty[$.*

Un petit peu d'intégration vectorielle

Nous aurons besoin à plusieurs reprises de donner un sens à l'intégrale d'une fonction à valeur dans un espace de Banach E. Plusieurs théories non-équivalentes existent, mais nous nous cantonnerons à l'intégration au sens de Bochner, appelée parfois *intégration forte*, qui jouit de la plupart des propriétés de l'intégration de Lebesgue usuelle. Nous donnons ci-dessous un aperçu de sa construction, ainsi qu'un critère d'intégrabilité forte qui nous suffira.

Soient donc (X,μ) un espace mesuré et E un espace de Banach. Une fonction $f : X \to E$ est dite *simple* si elle est mesurable d'image finie, et *fortement mesurable* si elle est mesurable et limite simple de fonctions simples. On considère alors l'espace $\mathscr{L}^1(X,\mu;E)$ des fonctions *fortement intégrables*, c'est à dire les fonctions $f : X \to E$ fortement mesurables telles que $\|\cdot\| \circ f$ est intégrable au sens de Lebesgue. On munit cette espace de la semi-norme $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1} : f \mapsto \int \|f(x)\| \, \mathrm{d}\mu(x)$, et on note $\mathrm{L}^1(X,\mu;E)$ l'espace normé associé. On peut alors démontrer que l'espace des (classes de) fonctions simples intégrables est dense dans $\mathrm{L}^1(X,\mu;E)$, et on construit donc l'intégrale sur $\mathrm{L}^1(X,\mu;E)$ en prolongeant l'application d'intégration des fonctions simples, qui est continue pour la norme L^1.

Avec cette définition, on obtient immédiatement le lemme suivant en se ramenant aux fonctions simples.

Lemme A.6. *Soient (X,μ) un espace mesuré, E, F deux espaces de Banach, $f : X \to E$ une application fortement intégrable, et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Alors $T \circ f$ est fortement intégrable, et $\int T \circ f \, \mathrm{d}\mu = T\left(\int f \, \mathrm{d}\mu\right)$.*

En pratique, nous utiliserons le critère suivant pour montrer la mesurabilité forte.

Théorème A.7. *Soit X un espace topologique séparé et localement compact muni d'une mesure de Radon μ, E un $\mathbb{K}$-espace de Banach, pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Toute fonction $f : X \to E$ continue à support compact est fortement mesurable.*

Notons d'ailleurs que l'intégrabilité est immédiate une fois la mesurabilité forte établie, puisque la fonction scalaire $\|\cdot\| \circ f$ est encore continue à support compact donc intégrable.

Démonstration. Notons $K := \operatorname{supp} f$. La (pré)compacité de l'espace métrique $f(K)$ fournit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un ensemble fini $S_n \subseteq K$ tel que $f(K) \subseteq \bigcup_{x \in S_n} B(f(x), 2^{-n})$.

Pour n fixé, choisissons une bijection $\alpha_n : |S_n| \to S_n$, où l'on identifie $|S_n|$ à l'ensemble $[\![0, |S_n| - 1]\!]$. On définit alors $\chi_n : K \to S_n$ par

$$\forall x \in K, \chi_n(x) = \alpha_n\left(\min\left\{k \in |S_n| \;\middle|\; f(x) \in B(f(\alpha_n(k)), 2^{-n})\right\}\right)$$

Autrement dit, χ_n est l'unique fonction vérifiant

$$\forall k \in |S_n|, \chi_n^{-1}(\alpha_n(k)) = f^{-1}\left(B(f(\alpha_n(k)), 2^{-n}) \setminus \left(\bigcup_{i<k} B(f(\alpha_n(i)), 2^{-n})\right)\right)$$

Cela montre que les fibres de χ_n sont boréliennes, donc que χ_n est mesurable, et que :

$$\forall x \in S_n, \forall y \in \chi_n^{-1}(x), \|f(x) - f(y)\| < 2^{-n}$$

On peut donc définir $\psi_n : X \to E$ par $\psi_{n|K^c} = 0$ et $\psi_{n|K} = f \circ \chi_n$, qui est bien une fonction mesurable (par mesurabilité de l'ensemble K, et des fonctions f et χ_n) et d'image finie inclue dans $\{0\} \cup f(S_n)$. On a enfin $\forall n \in \mathbb{N}, \|\psi_n - f\|_\infty \leq 2^{-n}$, ce qui assure que la suite ψ converge vers f uniformément, et donc en particulier simplement. Cela conclut. $\square$

Remarque A.8. *On aurait aussi pu remarquer que l'espace métrique $f(X) = \{0\} \cup f(K)$ est compact donc séparable, et conclure en appliquant le théorème de mesurabilité de Pettis, qui assure qu'une fonction à valeurs dans un Banach qui est mesurable et d'image séparable est automatiquement fortement mesurable.*

B Intégration sur les groupes localement compacts

On fixe un groupe topologique G séparé et localement compact.

Mesures de Haar

Une *mesure de Haar à gauche (resp. à droite)* sur G est une mesure de Radon μ non nulle vérifiant $\forall g \in G, \ell_{g*}\mu = \mu$ (resp. $r_{g*}\mu = \mu$).

Le théorème fondamental concernant ces mesures, que nous utilisons tout au long de ce document, est le suivant :

Théorème B.1. *Tout groupe topologique G séparé et localement compact admet une mesure de Haar à gauche, unique à multiplication par un réel strictement positif près.*

Si μ est une telle mesure, tout ouvert U non-vide de G est de mesure strictement positive, et $\mu(G) < +\infty$ si et seulement si G est compact.

Enfin, si G est compact, les mesures de Haar à gauche sont exactement les mesures de Haar à droite.

Caractère modulaire

Soit μ une mesure de Haar à gauche sur G. On vérifie aisément que, pour tout $g \in G$, la mesure de Radon $r_{g*}\mu$ est encore de Haar à gauche, ce qui fournit un un réel positif $\Delta(g)$ tel que $r_{g*}\mu = \Delta(g)\mu$. La fonction Δ ainsi définie est le *caractère modulaire* de G, et ses propriétés sont résumées par la propriété suivante :

Proposition B.2. *Soit G un groupe topologique séparé et localement compact, et μ une mesure de Haar à gauche.*

(i) Par définition, on a $\forall g \in G, r_{g*}\mu = \Delta(g)\mu$.

(ii) Δ est indépendant du choix de la mesure de Haar μ.

(iii) $\Delta : G \to \mathbb{R}_+^*$ est un morphisme de groupes topologiques.

(iv) $\frac{1}{\Delta}\mu$ est de Haar à droite.

(v) $\mathrm{inv}_*\mu = \frac{1}{\Delta}\mu$

Nous utilisons la propriété (v) à de nombreuses reprises pour effectuer des changements de variables de la forme $g \mapsto g^{-1}$.

Convolution

Fixons μ une mesure de Haar à gauche sur G. Étant données deux fonctions $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ mesurables, on introduit leur convolution $(f_1 * f_2)(x) := \int f_1(g) f_2(g^{-1}x)\, \mathrm{d}\mu(g)$, du moins lorsque cela a du sens. Plus précisément, on dit que f_1 et f_2 sont *convolables en $x \in G$* lorsque $(f_1 * f_2)(x)$ est bien défini, et qu'elles sont *convolables* si elles sont convolables en μ-localement-presque-tout $x \in G$. On prolonge alors la fonction partielle $f_1 * f_2$ en posant $(f_1 * f_2)(x) := 0$ si f_1 et f_2 ne sont pas convolables en x. Commençons par énoncer un résultat élémentaire.

Lemme B.3. *Soient $f_1, f_2 : G \to \mathbb{C}$ deux fonctions mesurables convolables, et $g \in G$. Alors $\lambda(g)(f_1)$ est convolable avec f_2, et on a $\lambda(g)(f_1 * f_2) =_\mu^{loc} \lambda(g)(f_1) * f_2$.*

Démonstration. Si $x \in G$ est tel que f_1 et f_2 sont convolables en x, on a :

$$\begin{aligned}\lambda(g)(f_1 * f_2)(x) &= \int f_1(h) f_2(h^{-1}g^{-1}x)\, \mathrm{d}\mu(h) \\ &= \int f_1(g^{-1}h) f_2(h^{-1}x)\, \mathrm{d}\mu(h)\end{aligned}$$

$\lambda(g)(f_1)$ et f_2 sont donc convolables en x, avec $(\lambda(g)(f_1) * f_2)(x) = \lambda(g)(f_1 * f_2)(x)$. □

Les deux résultats suivants se prouvent de manière analogue au cas $G = \mathbb{R}^d$, à condition toutefois que G soit σ-compact pour disposer du théorème de Fubini. Ils restent vrais sans cette hypothèse, à l'aide de résultats tels que 1.10 qui permettent de se ramener au cas σ-compact, mais nous ne le ferons pas ici.

Théorème B.4 (Inégalité de Young)**.** *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f_1 \in \mathscr{L}^p(G, \mu)$, $f_2 \in \mathscr{L}^q(G, \mu)$. Alors f_1 et f_2 sont convolables, $f_1 * f_2 \in \mathscr{L}^r(G, \mu)$, et $\|f_1 * f_2\|_{\mathrm{L}^r} \le \|f_1\|_{\mathrm{L}^p} \|f_2\|_{\mathrm{L}^q}$. En particulier, la convolution descend en $* : \mathrm{L}^p \times \mathrm{L}^q \to \mathrm{L}^r$ bilinéaire continue de norme inférieure à 1.*

De plus, pour $r = +\infty$, f_1 et f_2 sont en fait convolables partout*, et leur convolée est bornée* partout*, avec $\|f_1 * f_2\|_{\ell^\infty} \le \|f_1\|_{\mathrm{L}^p} \|f_2\|_{\mathrm{L}^q}$.*

Proposition B.5 (Associativité). *Soient $p \in [1,+\infty]$, $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$ et $f \in \mathscr{L}^p(G,\mu)$. On a $(\varphi * \psi) * f =_\mu^{loc} \varphi * (\psi * f)$.*

Ces deux résultats assurent notamment que, muni de la convolution, l'espace $\mathrm{L}^1(G,\mu)$ est une algèbre de Banach associative. Vérifions maintenant que l'involution $f \mapsto (\Delta\overline{f})\circ\mathrm{inv}$, qui est bien définie car $\mathrm{inv}_*\mu \ll \mu$, fait de $\mathrm{L}^1(G,\mu)$ une algèbre de Banach involutive. Tout d'abord, pour $f \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_{\mathrm{L}^1} &= \int \left|\Delta(g)\overline{f(g)}\right| \,\mathrm{d}(\mathrm{inv}_*\mu)(g) \\
&= \int \frac{\Delta(g)}{\Delta(g)} |f(g)| \,\mathrm{d}(\mu)(g) \quad \text{(proposition B.2 \textit{(v)})} \\
&= \|f\|_{\mathrm{L}^1}
\end{aligned}$$

La semi-linéarité étant évidente, il reste à montrer, pour toutes $f_1, f_2 \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$, l'égalité $f_1^* * f_2^* = (f_2 * f_1)^*$. Soit donc $x \in \Gamma$, et vérifions :

$$\begin{aligned}
(f_1^* * f_2^*)(x) &= \int \Delta(g^{-1})\Delta(x^{-1}g)\overline{f_1(g^{-1})f_2(x^{-1}g)} \,\mathrm{d}\mu(g) \\
&= \Delta(x^{-1})\overline{\int f_1(g^{-1}x^{-1})f_2(g) \,\mathrm{d}\mu(g)} \quad \text{(proposition B.2 \textit{(iii)})} \\
&= \Delta(x^{-1})\overline{(f_2 * f_2)(x^{-1})} \\
&= (f_2 * f_1)^*(x)
\end{aligned}$$

Terminons par un petit lemme utile dans le corps de ce document.

Lemme B.6. *Soient $\varphi, \psi \in \mathscr{L}^1(G,\mu)$ et $f \in \mathscr{L}^\infty(G)$. On a $\langle \psi, \overline{\varphi} * f\rangle = \langle \varphi^* * \psi, f\rangle$.*

Démonstration. On vérifie directement, et *sans utiliser le théorème de Fubini* :

$$\begin{aligned}
\langle \psi, \overline{\varphi} * f\rangle &= \int \psi(x) \int \overline{\varphi(g)} f(g^{-1}x) \,\mathrm{d}\mu(g) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \int \psi(x)\varphi^*(g)f(gx) \,\mathrm{d}\mu(g) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int \int \psi(g^{-1}x)\varphi^*(g)f(x) \,\mathrm{d}\mu(g) \,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \langle \varphi^* * \psi, f\rangle
\end{aligned}$$

□

C Sur la convergence uniforme des translatées d'une fonction

Soient X un ensemble et Y un espace uniforme. On note $\mathcal{F}_u(X,Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y muni de la structure uniforme de la convergence uniforme, dont le filtre des entourages $\mathcal{U}(\mathcal{F}_u(X,Y))$ admet pour base les ensembles de la forme $\mathbf{S}_X(V) := \{(f,g) \mid \forall x \in X, (f(x), g(x)) \in V\}$ lorsque V parcourt (une base de) $\mathcal{U}Y$.

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivante.

Théorème C.1. *Soient G un groupe topologique, X un espace uniforme, et $f : G \to X$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f : G_d \to X$ *est uniformément continue* pour la structure uniforme droite.

(ii) L'application $\mathrm{ev}_f \circ \lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} G_s & \to & \mathcal{F}_u(G,X) \\ g & \mapsto & \lambda(g)(f) \end{array} \right.$ *est uniformément continue* pour la structure uniforme gauche.

(iii) L'application $\mathrm{ev}_f \circ \lambda : G \to \mathcal{F}_u(G,X)$ *est continue.*

Lemme C.2. *Soit G un groupe topologique. L'application $\ell : G_d \mapsto \mathcal{F}_u(G, G_d)$* [28] *est un plongement d'espaces uniformes.*

Démonstration. Il est évident que ℓ est injective, puisque $\ell(g)(1) = g$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{U}G_d = (\ell \times \ell)^* \mathcal{U}(\mathcal{F}_u(G, G_d))$, et on va pour cela remarquer que la famille $\mathcal{B} := \left\{\mathrm{div}_d^{-1}(V)\right\}_{V \in \mathcal{N}_1^G}$ est une base commune pour ces deux filtres.

L'égalité $\mathcal{U}G_d = (\mathrm{div}_d)^* \mathcal{N}_1^G$ garantit que $\mathcal{B}$ est effectivement une base de $\mathcal{U}G_d$, et donc que $\mathcal{C} := \left\{(\ell \times \ell)^{-1}\left(\mathbf{S}_G(\mathrm{div}_d^{-1}(V))\right)\right\}_{V \in \mathcal{N}_1^G}$ est une base de $(\ell \times \ell)^* \mathcal{U}(\mathcal{F}_u(G, G_d))$. Or, pour $V \in \mathcal{N}_1^G$ et $g, h \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
(g,h) \in (\ell \times \ell)^{-1}\left(\mathbf{S}_G(\mathrm{div}_d^{-1}(V))\right) &\Leftrightarrow (\ell_g, \ell_h) \in \mathbf{S}_G(\mathrm{div}_d^{-1}(V)) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in G, (\ell_g(x), \ell_h(x)) \in \mathrm{div}_d^{-1}(V) \\
&\Leftrightarrow \forall x \in G, gxx^{-1}h^{-1} \in V \\
&\Leftrightarrow gh^{-1} \in V \\
&\Leftrightarrow (g,h) \in \mathrm{div}_d^{-1}(V)
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ est bien une base de $(\ell \times \ell)^* \mathcal{U}(\mathcal{F}_u(G, G_d))$, ce qui conclut. ☐

Remarquons que l'application $\mathrm{ev}_f \circ \lambda$ peut encore s'écrire comme la composition suivante :

$$G_s \xrightarrow[\sim]{\mathrm{inv}} G_d \xhookrightarrow{\ \ell\ } \mathcal{F}_u(G, G_d) \xrightarrow{(f \circ -)} \mathcal{F}_u(G, X)$$

Or, inv et ℓ étant respectivement un isomorphisme et un plongement d'espaces uniformes (et donc d'espaces topologiques), la continuité (resp. la continuité uniforme) de $\mathrm{ev}_f \circ \lambda$ équivaut à la continuité (resp. la continuité uniforme) de $(f \circ -) : \mathcal{F}_u(G, G_d) \to \mathcal{F}_u(G, X)$. Le théorème C.1 découle donc du lemme suivant.

Lemme C.3. *Soient X, Y deux espaces uniformes et $f : X \to Y$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

28. On écrit $\mathcal{F}_u(G, G_d)$ au lieu de $\mathcal{F}_u(G_d, G_d)$ car l'espace ne dépend pas de la structure uniforme du premier facteur (en fait, on devrait même écrire l'ensemble G à la place du groupe topologique G).

(i) f *est uniformément continue*

(ii) $(f \circ -) : \mathcal{F}_u(X, X) \to \mathcal{F}_u(X, Y)$ *est uniformément continue*

(iii) $(f \circ -)$ *est continue*

(iv) $(f \circ -)$ *est continue en* id_X

Démonstration. Montrons $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$. On suppose donc f uniformément continue, et on se donne $V \in \mathcal{U}Y$. On a alors :

$$\begin{aligned}((f \circ -) \times (f \circ -))^{-1}(\mathbf{S}_X(V)) &= \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \forall x, (f(\varphi_1(x)), f(\varphi_2(x))) \in V\} \\ &= \mathbf{S}_X((f \times f)^{-1}(V))\end{aligned}$$

L'uniforme continuité de f garantit que $(f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U}X$, ce qui entraîne :

$$\mathbf{S}_X((f \times f)^{-1}(V)) \in \mathcal{U}(\mathcal{F}_u(X, X))$$

Ceci montre que $(f \circ -)$ est uniformément continue.

Les implications $\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ et $\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ étant claires, montrons $\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$. On suppose donc $(f \circ -)$ continue en id_X, et on se donne $V \in \mathcal{U}Y$. La définition de la convergence uniforme assure que $\mathbf{T} := \{h : X \to Y \mid \forall x, (h(x), f(x)) \in V\}$ est un voisinage de $f = (f \circ -)(\mathrm{id}_X)$ dans $\mathcal{F}_u(X, Y)$. Par continuité, $(f \circ -)^{-1}(\mathbf{T})$ est donc un voisinage de id_X dans $\mathcal{F}_u(X, X)$, ce qui signifie qu'il contient un ensemble de la forme $\mathbf{U} := \{\varphi : X \to X \mid \forall x, (\varphi(x), x) \in W\}$ pour un $W \in \mathcal{U}X$.

Or, pour $(x_1, x_2) \in W$, il est clair qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathbf{U}$ telle que $\varphi(x_2) = x_1$ [29]. Mais alors $f \circ \varphi \in \mathbf{T}$, d'où, en évaluant en x_2, $(f(x_1), f(x_2)) \in V$. On a donc montré que $W \subseteq (f \times f)^{-1}(W)$, ce qui garantit l'uniforme continuité de f.

Ceci conclut la preuve du lemme, ainsi que celle du théorème C.1. $\square$

29. On peut par exemple poser $\varphi(x_2) = x_1$ et $\varphi(x) = x$ pour $x \neq x_2$.

Références

[1] J. Avigad, K. Buzzard, R. Y. Lewis, and P. Massot. *Mathematics in Lean*. 2023.

[2] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2008.

[3] N. Bourbaki. *Topologie générale : Chapitres 1 à 4*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.