

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1 Среднее поле</b>	<b>5</b>
1.1 При каких значениях меняется динамика игры? . . . . .	6
<b>2 Квадратная решетка</b>	<b>8</b>
2.1 Результаты моделирования . . . . .	8
2.2 Распределение числа соседей и размеров кластеров на гиперболе . . . . .	10
2.3 Коротко о квадратной решетке . . . . .	10
<b>3 Треугольная решетка</b>	<b>10</b>
3.1 Результаты моделирования . . . . .	10
3.2 Persistence . . . . .	12
3.3 Коротко о треугольной решетке . . . . .	12
<b>4 Игра с двумя полями</b>	<b>14</b>
4.1 Описание игры . . . . .	14
4.2 Как считались данные . . . . .	17
4.3 Что не ожидали увидеть? . . . . .	18
4.4 Результаты моделирования . . . . .	19

4.5	Persistence . . . . .	23
4.5.1	Смена persistence . . . . .	26
4.5.2	Persistence вблизи диагонали с хаосом . . . . .	27
4.5.3	Связанные и несвязанные поля . . . . .	30
4.6	Конфигурации поля . . . . .	33
4.6.1	Еще пример изменения конфигураций . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Список литературы</b>	<b>36</b>

# ВВЕДЕНИЕ

## Парная игра

Мы изучаем пространственную игру, основанную на дилемме заключенного. Два игрока, играя друг против друга, могут либо кооперировать(кооператор,  $\mathcal{C}$ ), либо предавать(дефектар,  $\mathcal{D}$ ).

Если оба игрока — кооператоры, то каждый получает условный выигрыш 1. Если один из них дефектар, а другой кооператор, то первый получает выигрыш в  $b > 1$  раз больше, чем при игре  $\mathcal{C} - \mathcal{C}$ , а последний ничего не получает, как и при игре двух дефектаров(таблица 1).

Затем агенты выбирают тактику, принесшую наибольший выигрыш, после чего игра повторяется. При такой игре 1 на 1 оптимальной тактикой будет  $\mathcal{D}$ (если изначально хотя бы один из агентов был дефектаром, то при игре против кооператора он получает больший выигрыш( $b > 1$ ) и кооператор становится дефектаром)(объяснение можно найти в секции 2 *The prisoner's dilemma* статьи [1])

## Игра на сетке

Рассмотрим дилемму заключенного на квадратной сетке  $L \times L$  с  $L^2$  агентами. Каждый попарно взаимодействует одновременно с 8 соседями, после чего среди себя и своих соседей выбирает поведение(кооперировать

		Агент				
	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$				
Сосед	$\mathcal{D}$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>				
	$\mathcal{C}$	$b$				

Таблица 1: Таблица выигрышей при стандартной игре

или предавать), принесшее наибольший выигрыш на текущем ходу (агенты не имеют памяти, поэтому максимизируют выигрыш здесь и сейчас). Выигрыш агента является суммой выигрышей игр с соседями.

## Игра Новака-Мэя

М.Новак и Р.Мэй [2, 3] исследовали поведение пространственной игры с учётом взаимодействия агента с самим собой.<sup>1</sup> Те выигрыш игрока  $q$  может быть рассчитан как

$$P_q = n(\mathbb{1}_C(q)(1 - b) + b) + \mathbb{1}_C(q)$$

Устанавливая начальную конфигурацию игрового поля симметричной, М.Новак и Р.Мэй наблюдали за поведением системы на квадратной решётке после достижения ею стационарного состояния.

---

<sup>1</sup>Такая модификация игры позволяет каждому агенту представлять группу организмов или молекул, внутри которой могут происходить взаимодействия.

Исследование было продолжено С.Колотевым, А.Малютиным, Е.Буровским, С.Крашаковым и Л.Щуром [4]. В их статье было рассмотрено поведение игры при разных размерах поля и параметрах выигрыша. Аналогичные исследования были проведены и на треугольной решётке, и сравнительный анализ игр на двух типах решётки был опубликован в [?]. Как оказалось, поведение игры зависит от типа поля, т.е. локальная структура связей между игроками-соседями определяет всю систему.

## 1 Среднее поле

		Агент	
Сосед	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$
	$\mathcal{C}$	$0$	$0$
		$bf_c$	$f_c$

Таблица 2: Таблица выигрышей при игре против среднего поля

Мы рассматриваем случай, когда вместо игры с самим собой агент играет против “среднего поля”: он взаимодействует с кооператором, после чего выигрыш умножается на плотность кооператоров  $f_c$ .(Таблица 2) При такой модификации у агента появляется внешний источник информации о состоянии среды, в которой он находится.

## 1.1 При каких значениях меняется динамика игры?

Рассмотрим агента с некоторой стратегией. Если он и все его соседи кооператоры или дефекторы, то его поведение никак не изменится на следующем ходу и рассматривать этот случай не имеет смысла. В противном случае стратегия на следующем ходу определяется максимальным выигрышем кооператора( $P_C$ ) и дефектора( $P_D$ ), расположение которых показано на рисунке 1.

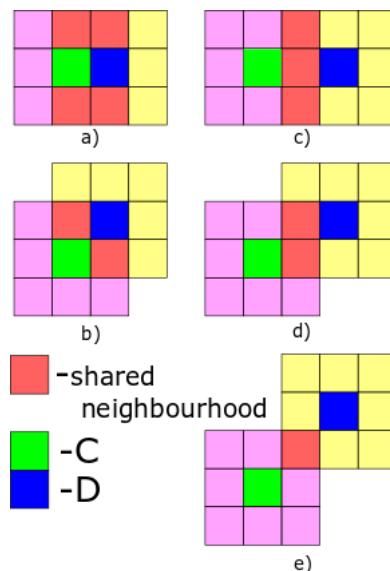


Рис. 1: Взаимное расположение кооператоров(зеленый) и дефектаров(синий).

Розовым, зеленым и желтым показаны агенты-соседи кооператора, дефектара и общие соответственно.

Выигрыш кооператора и дефектара можно рассчитать по формулам

(1) и (2)

$$P_C = n_{\text{shared}} + n_c + f_c \quad (1)$$

$$P_D = b(n_{\text{shared}} + n_d) + b f_c \quad (2)$$

где

$n_{\text{shared}}$  – количество общих кооператоров

$n_c$  – количество кооператоров-соседей кооператора

$n_d$  – количество кооператоров-соседей дефектора

$f_c$  – плотность кооператоров на данном ходе

Замечание: В случаях  $a$  и  $b$  на рис. 1 кооператор, отмеченный зеленым, учитывается в  $n_d$ .

Оба выигрыша равны нулю только в том случае, если на игровом поле нет кооператоров ( $f_c = 0$ ), но в этом случае поле не меняется, поэтому мы его не берем во внимание.

Рассмотрим максимальные  $P_C$  и  $P_D$  среди соседей и агента. Если  $P_C > P_D$ , то на следующем ходу агент будет играть как кооператор, иначе, если  $P_C < P_D$ , как дефектор. Смена стратегии, которую выбирает агент, происходит при  $P_C = P_D$ .

$$n_{\text{shared}} + n_c + f_c = b(n_{\text{shared}} + n_d) + b f_c \quad (3)$$

Так как  $P_D \neq 0$ , то из (3) получаем

$$b = \frac{n_{\text{shared}} + n_c + f_c}{n_{\text{shared}} + n_d + f_c} \quad (4)$$

Для упрощения формулы введем обозначение  $m = n_{\text{shared}} + n_c$  и  $n = n_{\text{shared}} + n_d$  и позволим им не зависеть друг от друга. Получаем

$$b = \frac{m + f_c}{n + f_c}$$

где  $m, n = 0, \dots, 8$

## 2 Квадратная решетка

### 2.1 Результаты моделирования

На рис. 2 представлена зависимость средней плотности от выигрыша. В отличие от игры Новака-Мэя, в которой плотность кооператоров меняется скачком [4], в игре со "средним полем" она может меняться непрерывно.

При  $b < 1.53$  дефекторы образуют статические структуры, напоминающие дендриты(рис. 3а,3б,3с,3д). С ростом параметра выигрыша ширина “каналов” увеличивается.

Когда  $1.53 < b < 1.6$  средняя плотность кооператоров уменьшается и "следует" за прямой, проходящей через точки 1.5 и 1.6, кластеры кооператоров начинают "перемещаться" по полу(рис. 3е). Кластеры кооператоров

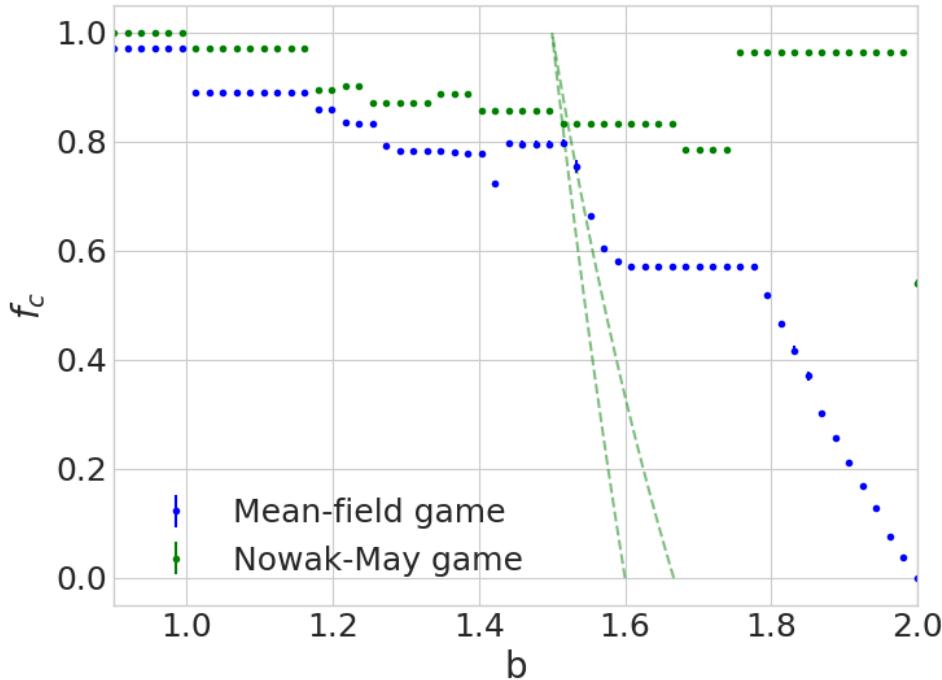


Рис. 2: Зависимость средней плотности кооператоров от выигрыша со среднеквадратичным отклонением, рассчитанная на основе 40 случайных реализаций начальных условий на поле  $200 \times 200$  с начальной плотностью 0.9. Плотность для каждой игры рассчитана как среднее 8000 шагов после отбрасывания 10000 шагов.

растут и уменьшаются непрерывно.

При  $1.6 < b < 1.62$  кооператоры начинают образовывать кластеры с прямыми линиями и прямыми углами (рис. 3f), но не могут образовать полноценные прямоугольники, так как разные кластеры сталкиваются друг с другом и "разрушаются".

При больших  $b$  кооператоры группируются в кластеры прямоугольной формы, размеры которых уменьшаются с ростом выигрыша.(рис. 3g,3h,3i)

## 2.2 Распределение числа соседей и размеров кластеров на гиперболе

Распределение при различных значениях можно посмотреть в [ноутбуке](#), так как обе анимации выходят слишком тяжелыми.

## 2.3 Коротко о квадратной решетке

В отличие от игры Новака-Мэя, в игре со "средним полем" плотность может меняться не скачками, а непрерывно и переход между различными режимами игры становится более плавным.

# 3 Треугольная решетка

## 3.1 Результаты моделирования

На рис. 5 представлена зависимость средней плотности от выигрыша. Как и при игре на квадратном поле, при игре на треугольной решетке существуют значения, при которых плотность кооператоров( $f_c$ ) зависит

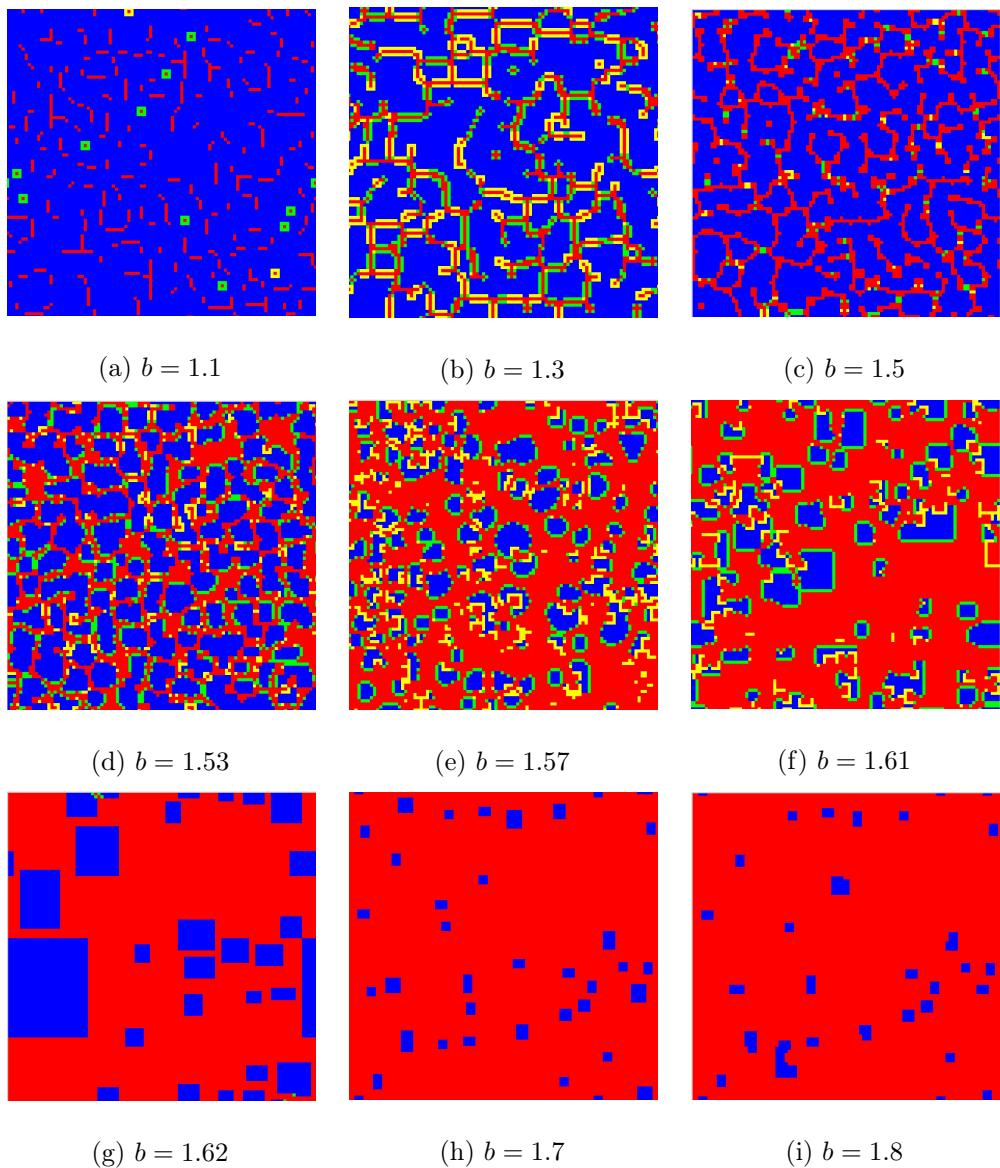


Рис. 3: Примеры полей 100 на 100 при начальной плотности 0.9 после 5000

шагов.

Синий — кооператоры

Красный — дефекторы

Желтый — кооператоры, ставшие дефекторами(на данном ходе)

Зеленый — дефекторы, ставшие кооператорами(на данном ходе)

непрерывно от выигрыша(**b**)(рис. 4 и 5).

При игре со средним полем на треугольной решетке, как и при игре Новака-Мэя( [4]), пропадает режим, в котором все агенты постоянно меняются(рис. 7)(в отличии от игры на квадратной решетке), но, как видно на рис. 5, плотность кооператоров падает быстрее, чем при игре Новака-Мэя.

### 3.2 Persistence

Рассмотрим параметр Persistence - относительное количество игроков, не поменявших стратегию за промежуток  $[t_0, t]$  На рис. 6 показан Persistence для игры на квадратной и треугольной решетках в зависимости от параметра b. При игре на квадратной решетке существуют значения b, при которых в установившемся режиме за 1000 шагов агенты поменяют стратегию( $persistence = 0$ )<sup>2</sup>, но при игре на треугольной решетке *persistence* не опускается ниже 0.2 и пропадает хаотический режим.

### 3.3 Коротко о треугольной решетке

Плотность кооператоров при игре со средним полем падает быстрее, чем при игре Новака-Мэя, но, в отличии от квадратной решетки, на треугольной решетке пропадает хаотический режим.

---

<sup>2</sup>Рассматривается persistence от 15000 до 16000

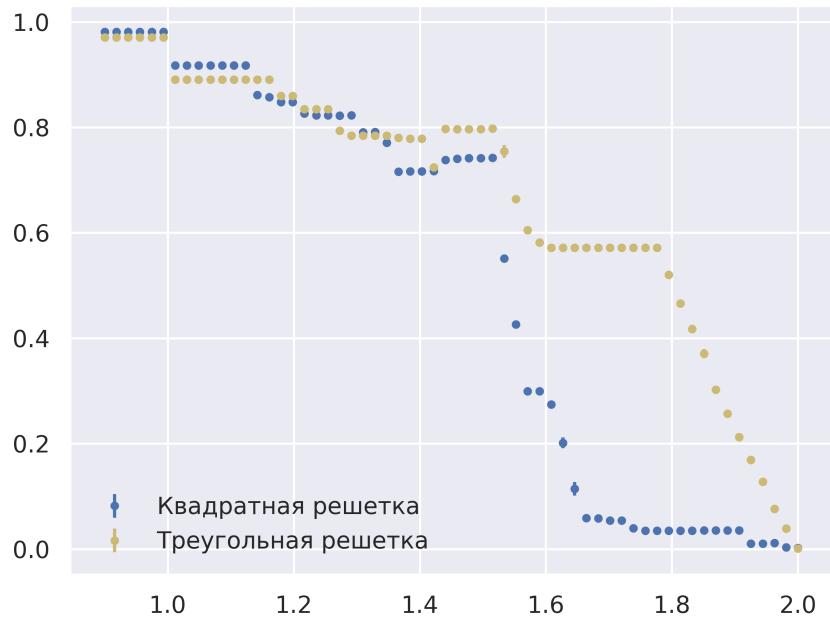


Рис. 4: Зависимость средней плотности кооператоров от выигрыша на

квадратной и треугольной решетке. Погрешности указаны.

Рассчитана на основе 40 случайных реализаций начальных условий на поле

$200 \times 200$  с начальной плотностью 0.9.

Плотность для каждой игры рассчитана как среднее 6000 шагов после

отбрасывания 10000 шагов.



Рис. 5: Зависимость средней плотности кооператоров от выигрыша на треугольной решетке и гиперболы  $5/3$ (левая) и  $4/2$ (правая). Погрешности указаны.

Рассчитана на основе 40 случайных реализаций начальных условий на поле  $200 \times 200$  с начальной плотностью 0.9.

Плотность для каждой игры рассчитана как среднее 6000 шагов после отбрасывания 10000 шагов.

## 4 Игра с двумя полями

### 4.1 Описание игры

Рассмотрим два поля размера  $L \times L$ , на которых агенты играют в модификацию игры со средним полем с играми  $b_1$  и  $b_2$  соответственно.



Рис. 6: Средний persistence на квадратной и треугольной решетке при игре со средним полем

Рассчитан на основе 40 случайных реализаций начальных условий на поле  $200 \times 200$  с начальной плотностью 0.9 от 15000 до 16000.

Плотность кооператоров на полях равна  $f_1$  и  $f_2$ . Модификация игры заключается в том, что вместо игры со средним кооператором на этом же самом поле, он играет против среднего кооператора с другого поля.(В таблице 4 представлен выигрыш агента с поля 1, при игре против агента с поля 2)

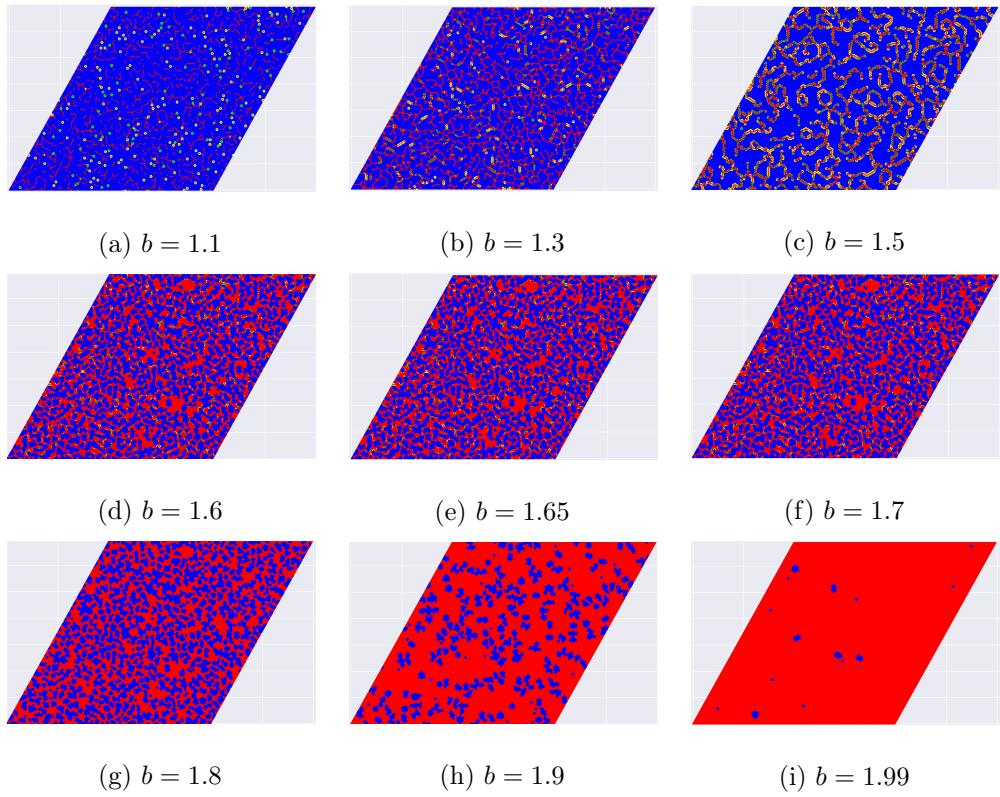


Рис. 7: Примеры полей 200 на 200 при начальной плотности 0.9 после 5000

шагов на треугольной решетке и игре со средним полем.

Синий — кооператоры

Красный — дефекторы

Желтый — кооператоры, ставшие дефекторами(на данном ходе)

Зеленый — дефекторы, ставшие кооператорами(на данном ходе)

Таблица 3: Выигрыш агента при игре с соседями

		Агент	
		$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$
		Сосед	0
Сосед	$\mathcal{C}$	$b_1$	1

Таблица 4: Выигрыш агента с первого поля при игре против среднего кооператора со второго поля

		Агент	
		$\mathcal{D}$	$\mathcal{C}$
		Сосед	0
Сосед	$\mathcal{C}$	$b_1 f_2$	$f_2$

## 4.2 Как считались данные

Для моделирования было сгенерировано 40 различных пар начальных полей  $100 \times 100$  с начальной плотностью кооператоров равной 0.9. В каждой паре полей оба поля были идентичными. Моделирование проводилось на парах  $(b_1, b_2)$ , где  $b_2 \geq b_1$  и  $b_1, b_2$  брались из интервала  $[0.9, 2.0]$ . Значение  $\frac{f_1+f_2}{2}$  рассчитывалось как средняя плотность 40 полей с 10000 до 16000 шага. Так как оба поля в начальный момент времени совпадают, то поведение на первом и втором поле при параметрах  $(b_1, b_2)$

будет совпадать с поведением на втором и первом поле соответственно при параметрах  $(b_2, b_1)$ , что было использовано при моделировании.

### 4.3 Что не ожидаем увидеть?

Для начала обсудим, какие значения  $\frac{f_1+f_2}{2}$  мы **не ожидаем** увидеть. Так как плотность кооператоров на первом поле зависит от распределения кооператоров на поле и плотности кооператоров на втором поле, то  $f_1$  должно отличаться от плотности, если бы поля "не взаимодействовали". Аналогичные рассуждения верны для  $f_2$ . Предположим что это не так, тогда  $\frac{f_1+f_2}{2}$  будет принимать значения, показанные на рис. 8

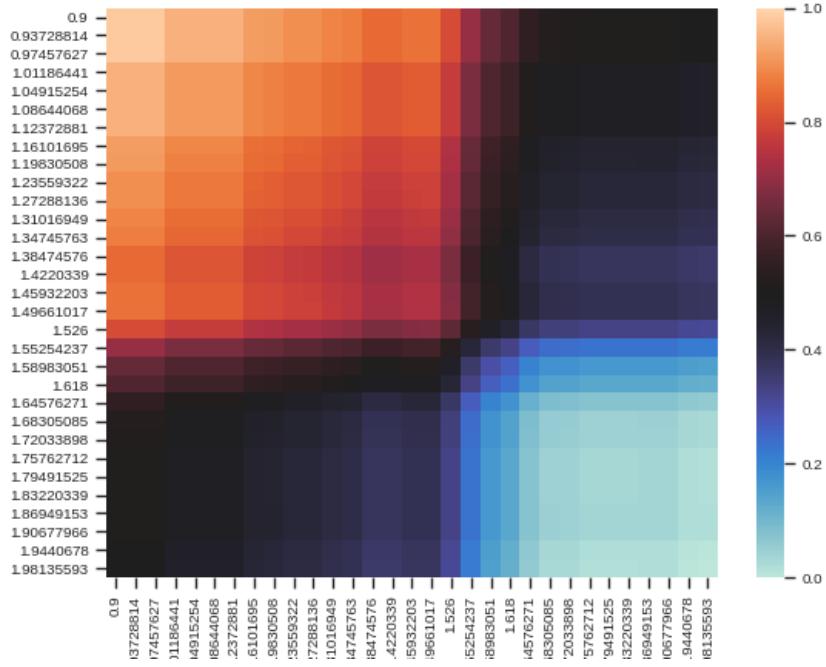


Рис. 8: Средняя плотность кооператоров на несвязанных полях. Цветом отмечена средняя плотность на двух полях. Данные показаны для точек, отличных от точек на других рисунках.

#### 4.4 Результаты моделирования

На рисунках 9, 11 и 12 показана зависимость  $\frac{f_1+f_2}{2}$  от параметра выигрыша.

При сравнении рис. 8 и 9 хорошо видно, что при игре на связанных полях происходит более резкий переход, в сравнении с игрой на несвязанных

полях. Особенно хорошо переход виден на рис. 12<sup>3</sup>. Для более конкретных выводов требуются данные из большего числа точек.

На рис. 10 показана плотность на первом и втором полях. Можно заметить, что при "больших" и "маленьких" значениях выигрыша, плотность кооператоров на соответствующем поле не зависит от выигрыша на другом. На рис. 13 показана плотность кооператоров на первом поле.

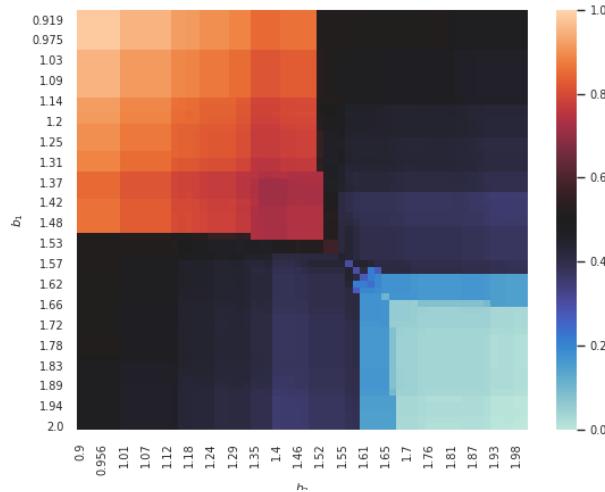


Рис. 9: Средняя плотность кооператоров на **связанных** полях. Цветом отмечена средняя плотность на двух полях.  $b_1$  по вертикали,  $b_2$  по горизонтали.

---

<sup>3</sup>Почему-то в первый раз форма графика напомнила висячие сады или фермы в горах(не помню название технологии)

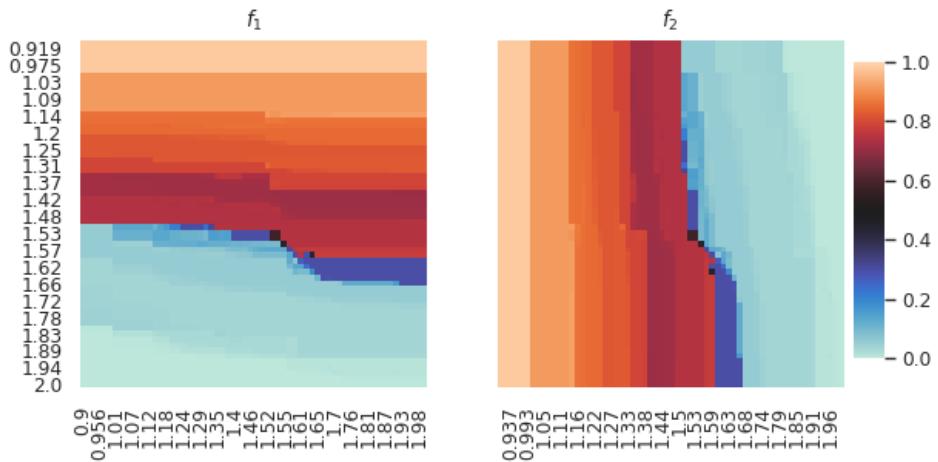


Рис. 10: Плотность кооператоров на первом и втором поле.  $b_1$  по вертикали,  $b_2$  по горизонтали.

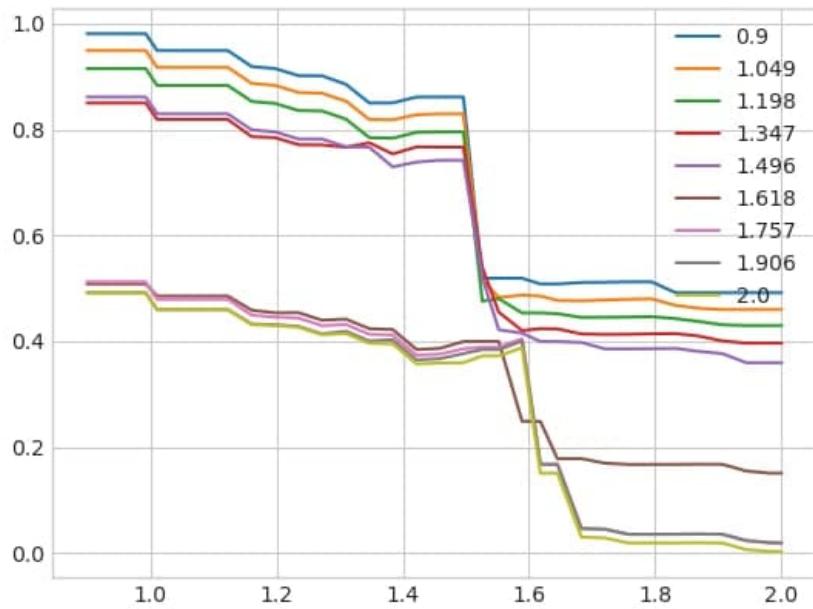


Рис. 11: Зависимость средней плотности кооператоров от  $b_2$  при фиксированном значении  $b_1$ .

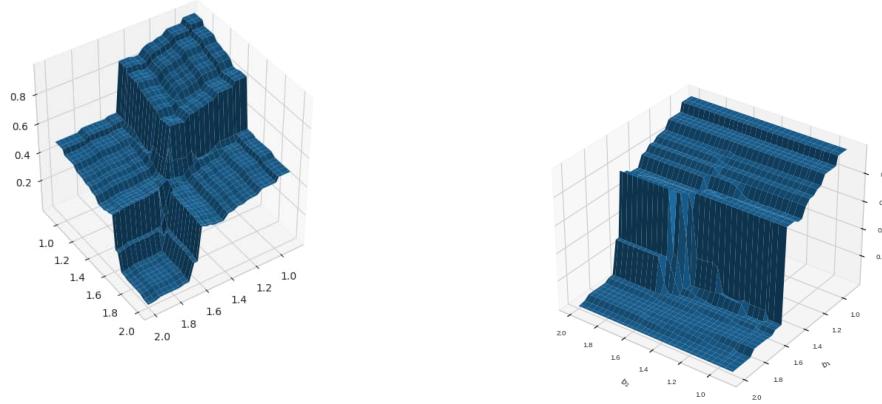


Рис. 12: Средняя плотность кооператоров на связанных полях. Тоже самое, что и рис. 9, но визуализированное по другому.

Рис. 13: Плотность кооператоров на первом поле.

## 4.5 Persistence

Чтобы посмотреть на поведение игры при различных значениях выигрыша мы посчитали persistence. Полученные данные отображены на рис. 14. Около крайних значений параметра выигрыша(0.9, 2) значение *persistence* на поле никак не зависит от выигрыша на другом поле, но при остальных значениях от параметра выигрыша на втором поле зависит наличие хаотического режима на первом поле и наоборот.

На рис. 15 показана зависимость *persistence* на втором поле от  $b_2$  при некоторых значениях  $b_1$ . При определенных значениях  $b_1$  можно

наблюдать возникновение хаотического режима в одной точке. Чтобы прояснить поведение в данной точке было взято несколько значений  $b_1$  вокруг данной точки и для них был посчитан persistence при 1000, 2000, 10000 и 15000 шагах. Я не привожу графики для последних трех, так как они полностью совпадают с 1000.(рис. 16)

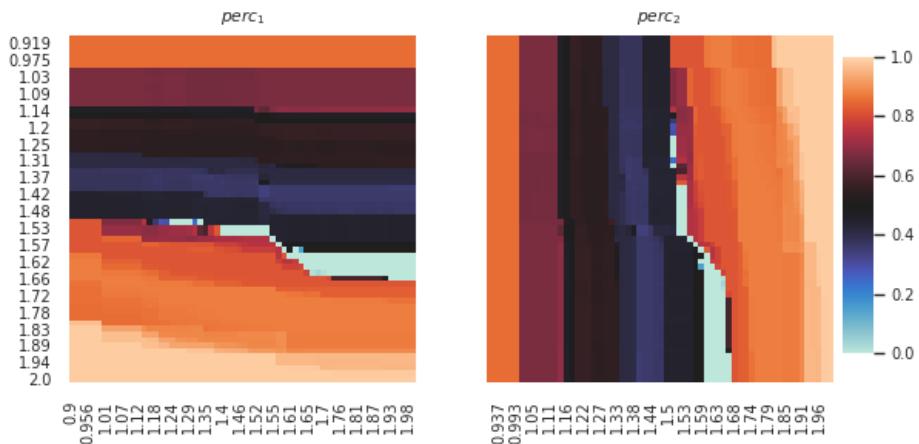


Рис. 14: persistence на первом и втором полях.

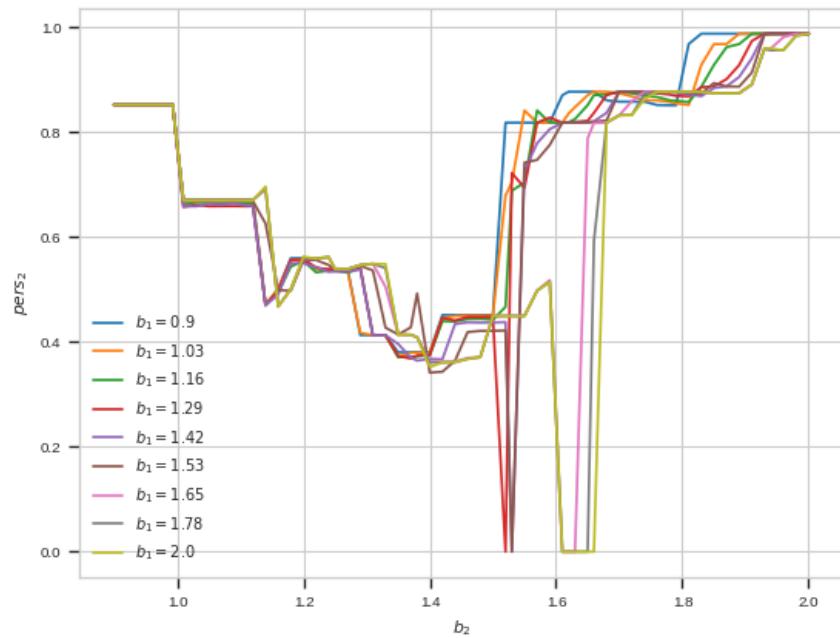


Рис. 15: persistence на втором поле при различных  $b_1$ .

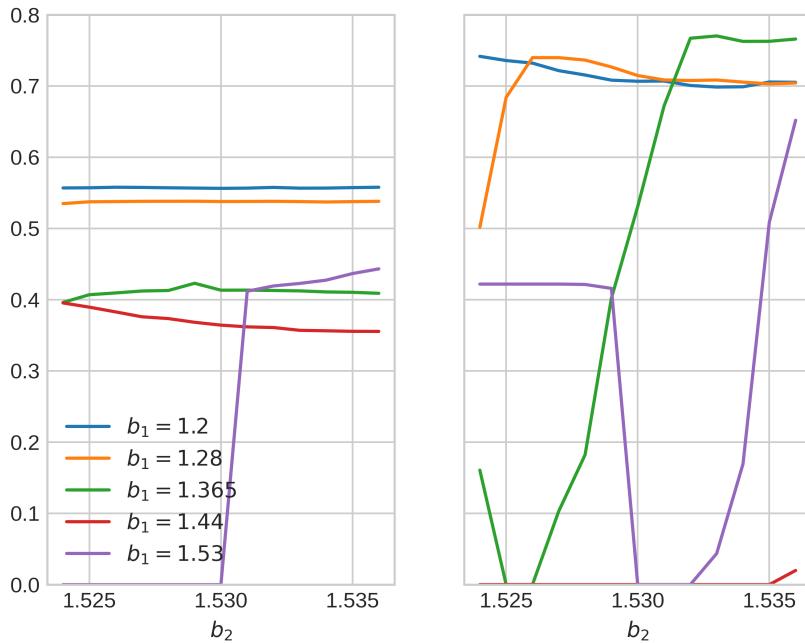


Рис. 16: persistence на первом и втором поле при различных  $b_1$  около  $b_2 = 1.53$ .

#### 4.5.1 Смена persistence

Наиболее интересным случаем для рассмотрения является  $b_1 = 1.53$ . При  $b_2 < 1.53$  на первом поле агенты находятся в "хаотическом режиме" с крупными кластерами кооператоров (синее), в то время как на втором поле дефекторы образуют сеть каналов, с крупными кластерами кооператоров. При  $b_2 = 1.53$  агенты на обоих полях находятся в хаотическом режиме с небольшими кластерами кооператоров и дефекторов. При  $b_2 > 1.53$  ситуация на полях меняется и на первом поле дефекторы образуют сеть

каналов, а на втором поле агенты находятся в хаотическом режиме с крупными кластерами кооператоров.(рис. 17)

Похожий переход для значения  $b_1 = 1.56$  представлен ниже(см. 4.6.1)

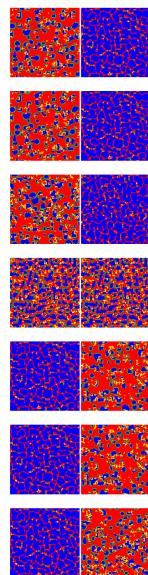


Рис. 17: Окрашенные поля при  $b_1 = 1.53$  и  $b_2 = 1.527, 1.528, 1.529, 1.53, 1.531, 1.532, 1.533$

#### 4.5.2 Persistence вблизи диагонали с хаосом

Для более подробного изучения перехода был рассмотрен *persistence* на втором поле при значениях, близких к хаотическому режиму при игре на одном поле. На рис. 18, 19 показано значение *persistence* при

смещении на  $\Delta$  перпендикулярно диагонали в точке  $(b, b)$ . Как видно из графика, при проходе через диагональ *persistence* меняется скачком. Те при  $\Delta \neq 0$ (при большинстве значений) большинство агентов не меняет свою стратегию и "стабильны но при  $\Delta = 0$  наступает режим "хаоса" и все агенты меняют свою стратегию. Существуют значения параметра выигрыша, при которых либо с одной, либо с обеих сторон сохраняется хаос, но при отдалении от диагонали он пропадает таким же резким скачком.

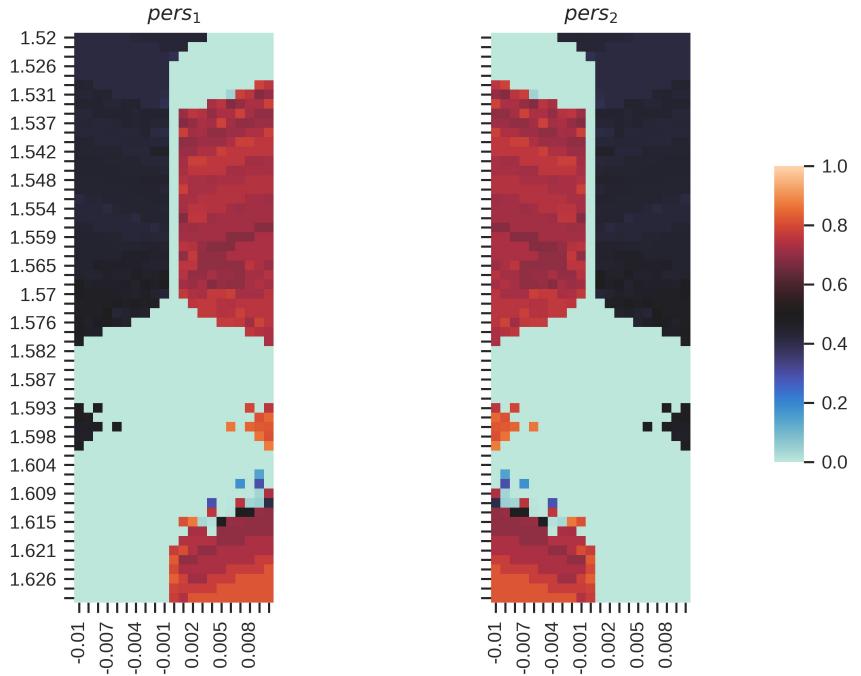


Рис. 18: Persistence на первом и втором поле вблизи диагонали  $(b, b)$ . По вертикальной оси значение  $b$ , по горизонтали расстояние от диагонали  $\Delta$   $((b_1, b_2) = (b, b) + (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\Delta)$ . Цветом обозначен *persistence*.  $\Delta$  с шагом 0.001

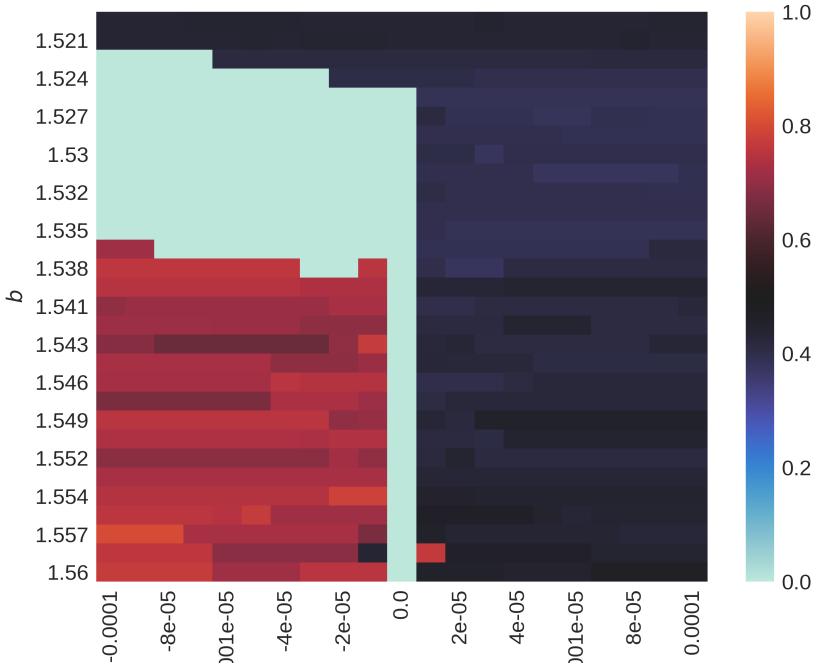


Рис. 19: Persistence вблизи диагонали  $(b, b)$ .  $\Delta$  с шагом 0.00001

#### 4.5.3 Связанные и несвязанные поля

На рис. 20 показано сравнение при игре на связанных и несвязных полях.

Как можно видеть, при взаимодействии полей режим, в котором на втором поле хаос, становится гораздо меньше. На рис. 21 разница между двумя режимами видна еще лучше. Там где при несвязных полях оба поля находятся в состоянии хаоса, на связных полях может быть "стабильное"<sup>4</sup> состояние.

---

<sup>4</sup>Условно стабильное, так как при нашем определении для него достаточно одного не изменяющегося агента.

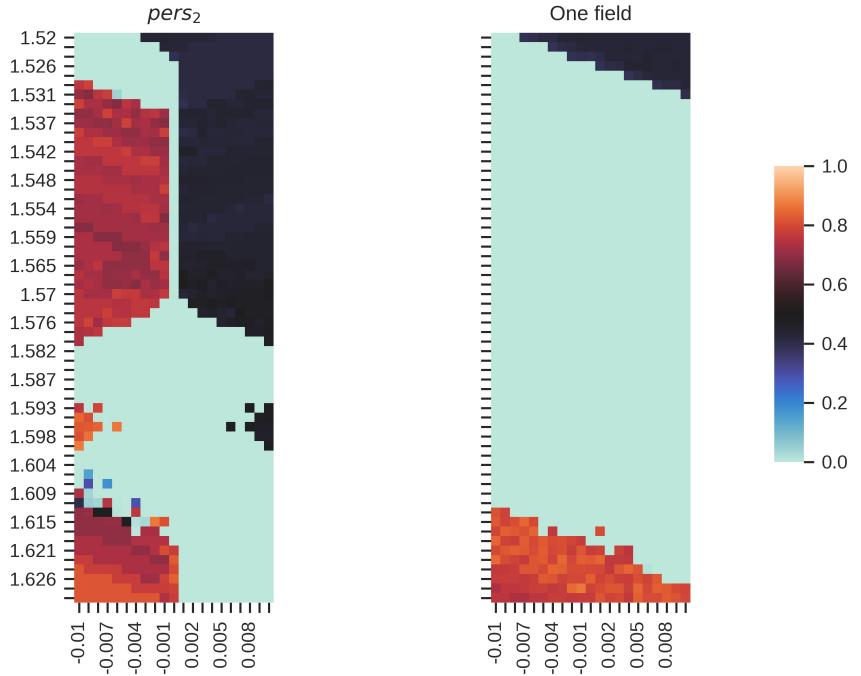


Рис. 20: Persistence на втором поле вблизи диагонали  $(b, b)$  при игре **на связанных полях и несвязанных**. По вертикальной оси значение  $b$ , по горизонтали расстояние от диагонали  $\Delta ((b_1, b_2) = (b, b) + (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\Delta)$ . Цветом обозначен  $persistence. \Delta$  с шагом 0.001

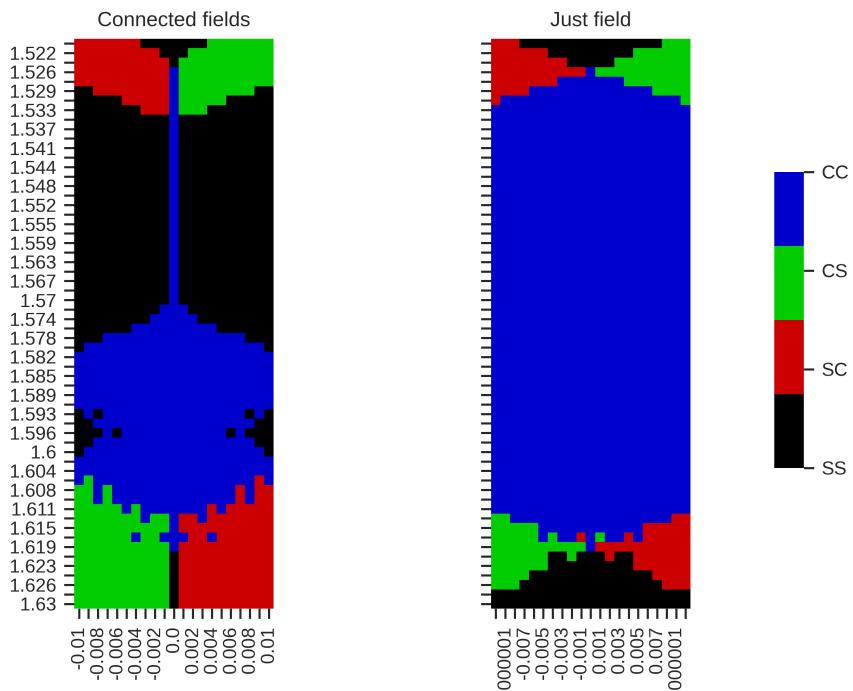


Рис. 21: Состояние полей вблизи диагонали  $(b, b)$  при игре **на связанных полях и несвязанных**.

По вертикальной оси значение  $b$ , по горизонтали расстояние от диагонали  $\Delta$   $((b_1, b_2) = (b, b) + (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\Delta)$ .  $\Delta$  с шагом 0.001

Синий - хаос на обоих полях

Зеленый - хаос на втором поле

Красный - хаос на первом поле

Черный - отсутствие хаоса на обоих полях

## 4.6 Конфигурации поля

Так как существуют значения  $(b_1, b_2)$  при которых persistence не 0 и не 1 одновременно, было интересно посмотреть на конфигурации при различных значениях выигрыша. На рис. 22 показаны конфигурации поля на большом времени при  $b_1, b_2 \in \{0.9, 1.24, 1.4, 1.55, 1.7, 1.98\}$ . Предварительно нельзя говорить о появлении каких-либо новых конфигураций по сравнению с обычной игрой со средним полем.

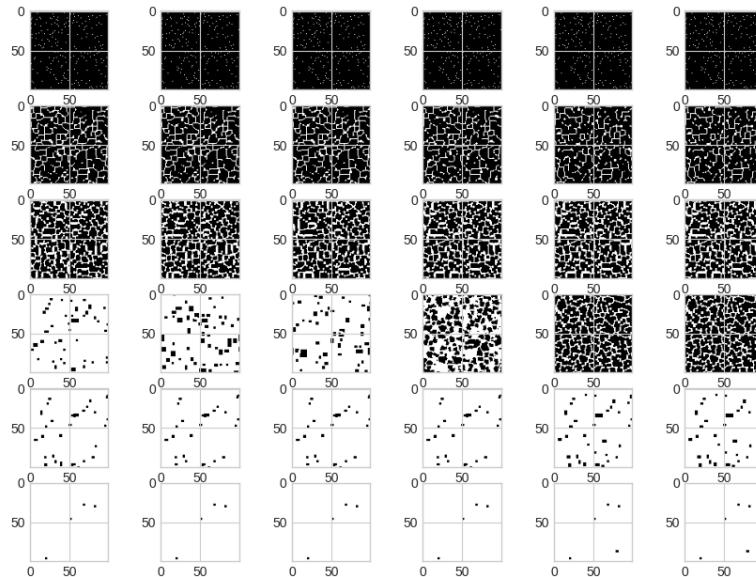


Рис. 22: Конфигурации поля.

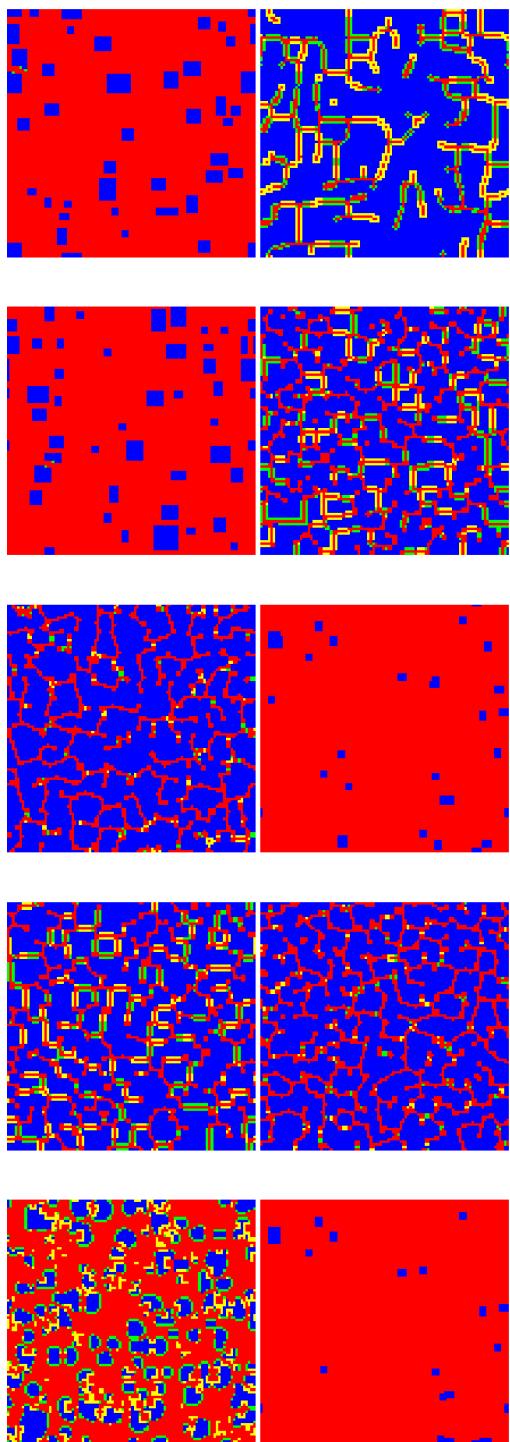


Рис. 23: Окрашенные поля при  $((1.53, 1.38), (1.56, 1.46), (1.56, 1.7), (1.37, 1.46), (1.6, 1.8))$ .

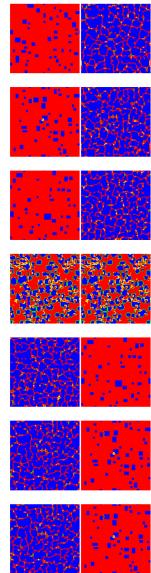


Рис. 24: Окрашенные поля при  $b_1 = 1.56$  и  $b_2 = 1.557, 1.558, 1.559, 1.56, 1.561, 1.562, 1.563$

#### 4.6.1 Еще пример изменения конфигураций

На рис. 24 показаны поле 1 и 2 при различных значениях  $b_2$ . Как видно из рисунка, при  $b_2 \neq b_1$ , на обоих полях наблюдаются устойчивые конфигурации, причем при  $b_2 < b_1$ , на первом поле кооператоры образуют прямоугольные кластеры, а на втором дефекторы образуют сеть каналов с крупными кластерами кооператоров. При  $b_2 = b_1$  на обоих полях агенты находятся в хаотическом режиме.

## 5 Список литературы

1. John H. Nachbar, *Evolution in the finitely repeated prisoner's dilemma*, Journal of Economic Behavior & Organization **19**(3), 307(1992).
2. Martin Nowak and Robert May, *Evolutionary games and spatial chaos*, Nature **359**(10), 826(1992).
3. Martin Nowak and Robert May, *The spatial dilemmas of evolution*, International Journal of Bifurcation and Chaos **03**(01), 35(1993).
4. Sergei Kolotov, Aleksandr Malyutin, Evgeni Burovski, Sergei Krashakov, and Lev Shchur, *Dynamic fractals in spatial evolutionary games*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications **499**, 142(2018).