LEHRPROBE ZUM THEMA BOOSTING

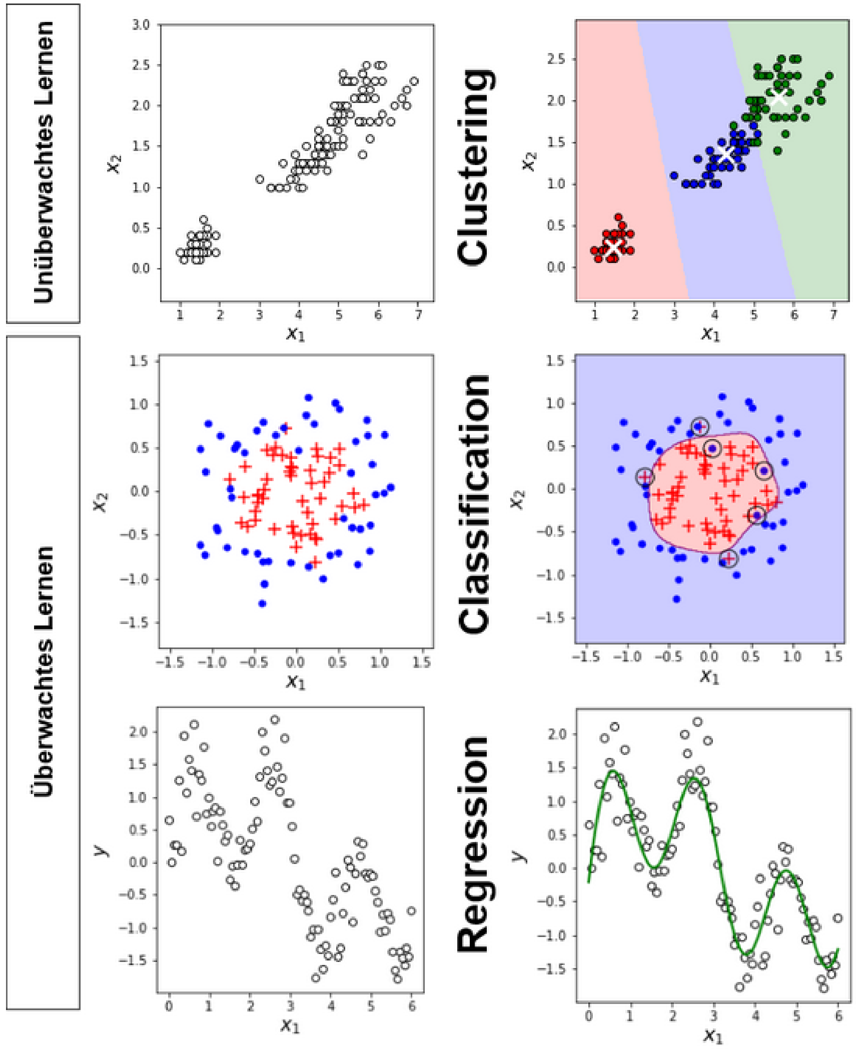
DR.-ING. ALEXANDER DOCKHORN

Postdoctoral Research Associate,
School of Electronic Engineering and Computer Science,
Queen Mary University of London

a.dockhorn@qmul.ac.uk

EINBETTUNG DIESES VORTRAGS IN EINE LEHRVERANSTALTUNG

Modellklassen	Grundlegende Modelle	Erweiterte Techniken



Grundlegende Modelle

- Partitionierendes Clustering, z.B. K-means
- Dichtebasiertes Clustering, z.B. DBSCAN
- Hierarchiches Clustering, z.B. Agglomeratives Clustering
- Entscheidungsbäume
- Support Vector Machines
- Neuronale Netze
- Lineare Regression
- Logistische Regression
- ANOVA

Erweiterte Techniken

- Parameterauswahl / -optimierung
- Erlernbarkeit
- Ensemble Algorithmen
- Evaluierung

Queen Mary
University of London

EINBETTUNG DIESES VORTRAGS IN EINE LEHRVERANSTALTUNG

Vorlesungsblock
Ensemble Algorithmen

Einführung in die Thematik
Ensemble Algorithmen

Boosting
z.B. Adaboost

Bagging
z.B. Random Forests

Stacking

Vergleich von
Ensemble Algorithmen

Underfitting vs. Overfitting

Anwendungsbeispiele

WELCHER JOKER IST BESSER?

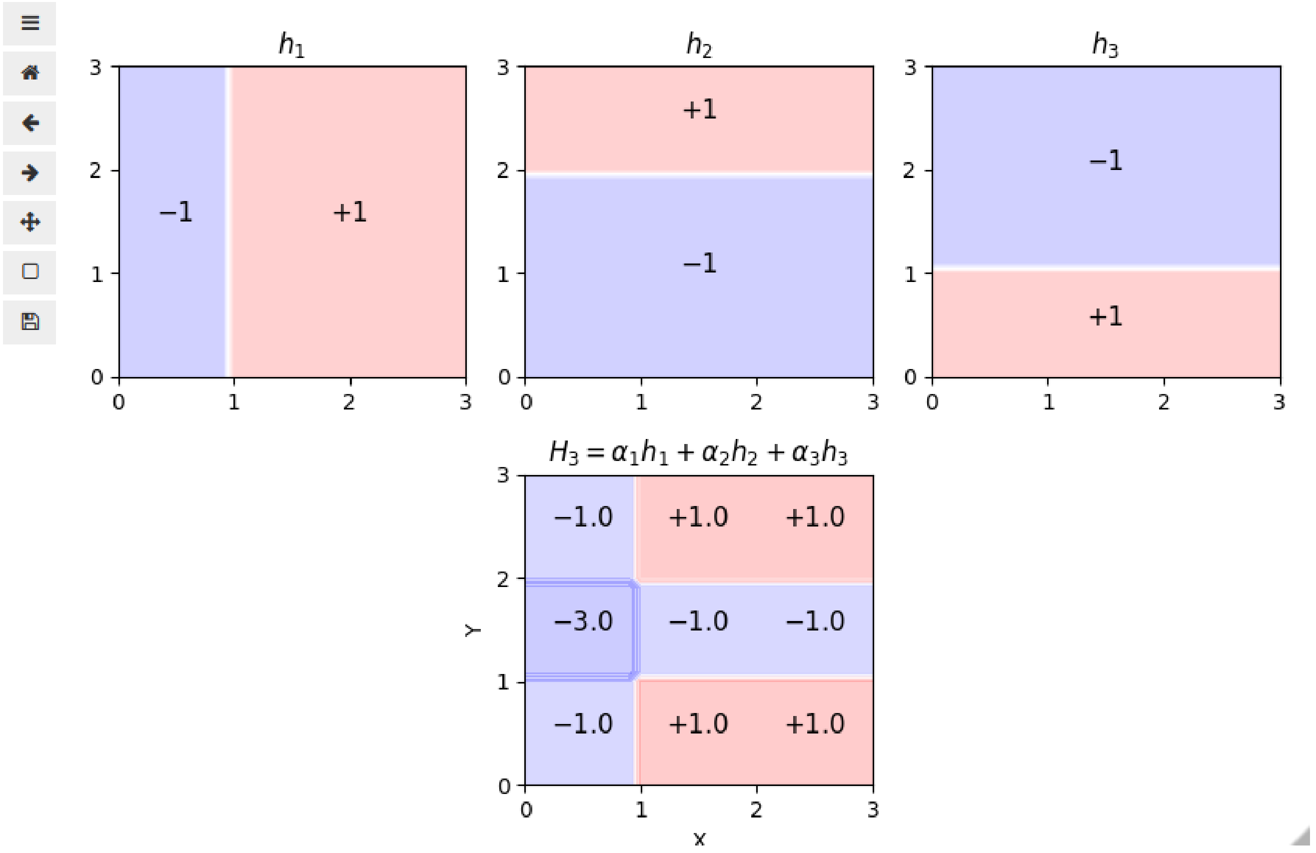
Telefonjoker: 65% richtig

Publikumsjoker: 90% richtig

GILT DAS AUCH FÜR KLASSIFIKATOREN?

BOOSTING - AGGREGATION VON KLASSIFIKATOREN

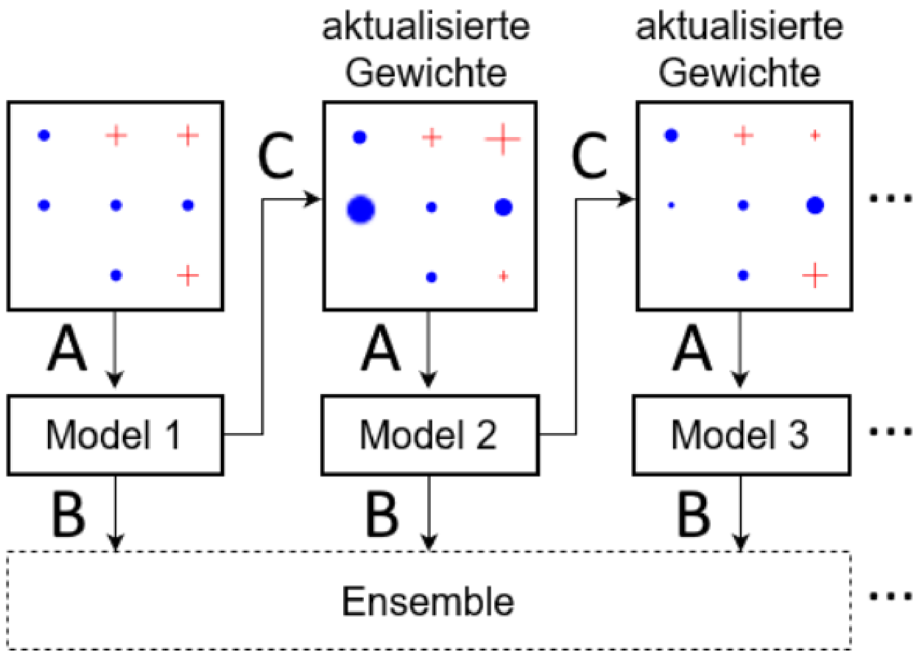
Ausgabe des Ensembles: $H_t(x) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i(x);$ Ausgabe als Label: $H_t(x) = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i(x) \right)$



α_1 1.0 α_2 1.0 α_3 1.0

BOOSTING - ITERATIVES LERNEN VON KLASSIFIKATOREN

- **A) Wahl des optimalen Klassifikators**
- **B) Wahl des optimalen Klassifikatorgewichts**
- **C) Anpassung der Trainingsdatengewichte**



ADAPTIVE BOOSTING (ADABOOST)

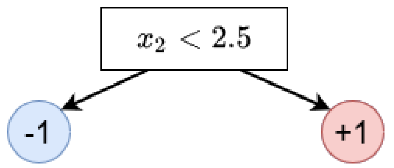
- **Basisklassifikator:** Entscheidungsstümpfe
- Zu jedem Zeitpunkt t wird dem Ensemble H ein Entscheidungsstumpf h_t hinzugefügt.

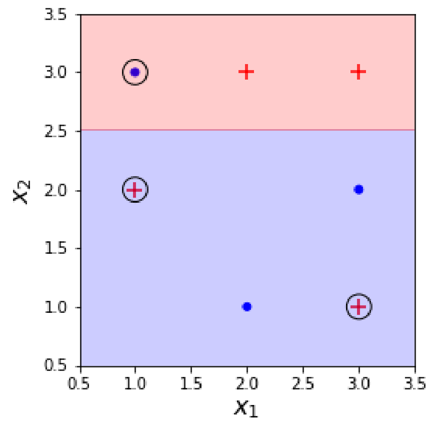
- Wähle den Klassifikator, welcher den Gesamtfehler bestmöglich reduziert:

$$h_{t+1} = \underset{h_{t+1} \in \mathbb{H}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(H_{t+1}) = \underset{h_{t+1} \in \mathbb{H}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(H_t + \alpha_{t+1} h_{t+1})$$

- exponentieller Fehler über die gewichteten Trainingsdaten D:

$$\mathcal{L}(H_t|y) = \sum_{i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{1}{2} y_i H_t(x_i)}$$





A) WAHL DES OPTIMALEN KLASSIFIKATORS

$$\mathcal{L}(H_{t+1}|y) = \sum_{i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)} \qquad \Big| \sum_{alle} = \sum_{falsch} + \sum_{richtig}$$

$$= \underbrace{\sum_{i:h_{t+1}(x_i)\neq y_i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)}}_{\text{falsch klassifizierte Punkte}} + \underbrace{\sum_{i:h_{t+1}(x_i)= y_i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)}}_{\text{richtig klassifizierte Punkte}} \qquad \Big| y_i, h(x_i) \in \{-1, +1\}$$

$$= \sum_{i:h_{t+1}(x_i)\neq y_i}^{|D|} w_i^t e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} + \sum_{i:h_{t+1}(x_i)= y_i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \qquad \Big| I(x \neq y) = \begin{cases} 1 & , x \neq y \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$= e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i) + e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \underbrace{\sum_{i}^{|D|} w_i^t}_{\text{alle Punkte}} - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \underbrace{\sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i)}_{\text{falsch klassifizierte Punkte}} \qquad \Big| \sum_{richtig} = \sum_{alle} - \sum_{falsch}$$

$$= (e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}}) \sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i) + e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \sum_{i}^{|D|} w_i^t$$

Resultat: wähle den Klassifikator zur Minimierung des gewichteten Fehlers

B) WAHL DES OPTIMALEN KLASSIFIKATORGEWICHTS

$$\mathcal{L}(H_{t+1}|y) = (e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}}) \sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i) - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \underbrace{\sum_{i}^{|D|} w_i^t}_{=1}$$

$$\frac{d\mathcal{L}(H_{t+1}|y)}{d\alpha} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} + e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}}) \sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i) - \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \qquad \Big| \; \varepsilon = \sum_{i}^{|D|} w_i^t I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i)$$

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon + e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} &= 0 && \Big| - (e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}}) \\
e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon &= e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} - e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon \\
e^{\frac{\alpha_{t+1}}{2}} \varepsilon &= e^{-\frac{\alpha_{t+1}}{2}} (1 - \varepsilon) && \Big| \ln; \qquad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\
\frac{\alpha_{t+1}}{2} + \ln(\varepsilon) &= -\frac{\alpha_{t+1}}{2} + \ln(1 - \varepsilon) && \Big| + \frac{\alpha_{t+1}}{2} - \ln \varepsilon \\
\alpha_{t+1} &= \ln(1 - \varepsilon) - \ln(\varepsilon) && \Big| \ln(x) - \ln(y) = \ln(\tfrac{x}{y}) \\
\alpha_{t+1} &= \ln\left(\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

Resultat: die Schrittweite ist abhängig von dem gewichteten Fehler des Klassifikators

C) ANPASSUNG DER TRAININGSDATENGEWICHTE

$$\mathcal{L}(H_{t+1}|y) = \sum_{i}^{|D|} e^{-\frac{1}{2} y_i H_{t+1}(x_i)} \qquad \Big| \; H_{t+1}(x_i) = H_t(x_i) + \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)$$

$$= \sum_{i}^{|D|} e^{-\frac{1}{2} y_i H_t(x_i) - \frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)} \qquad \Big| \; e^{a+b} = e^a e^b$$

$$= \sum_{i}^{|D|} e^{-\frac{1}{2} y_i H_t(x_i)} e^{-\frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)} \qquad \Big| \; w_i^t = e^{-\frac{1}{2} y_i H_t(x_i)}$$

$$= \sum_{i}^{|D|} w_i^t e^{-\frac{1}{2} y_i \alpha_{t+1} h_{t+1}(x_i)} \qquad \Big| \; \Rightarrow w_i^0 = \frac{1}{|D|}; \quad w_i^{t+1} = w_i^t \cdot e^{-\frac{1}{2} \alpha_t y_i h_t(x_i)}$$

Resultat: das Gewicht eines Datenpunktes ist proportional zum Fehler des aktuellen Ensembles

FORMELVERZEICHNIS ADABOOST

Initialisieren der Gewichte	$w_i^0 = \frac{1}{\lvert D \rvert}$
Lernen einen Klassifikator zur Minimierung des Fehlers	$\underset{h_{t+1} \in \mathbb{H}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{L}(H_{t+1}) = \underset{h_{t+1} \in \mathbb{H}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{\lvert D \rvert} w_i^t \, I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i)$
Bestimmung der Gewichtung des Klassifikators	$a_t = \ln\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right); \qquad \varepsilon = \sum_{i=1}^{\lvert D \rvert} w_i^t \, I(h_{t+1}(x_i) \neq y_i)$
Aktualisieren und Normalisieren der Gewichte	$w_i^{t+1} = w_i^t \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha_t y_i h_t(x_i)} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i^{t+1} = 1$
Klassifiziere Punkte anhand des Ensembles	$H_t(x) = \operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i h_i(x)\right)$

ADABOOST BEISPIEL

Initialisierung der Gewichte:

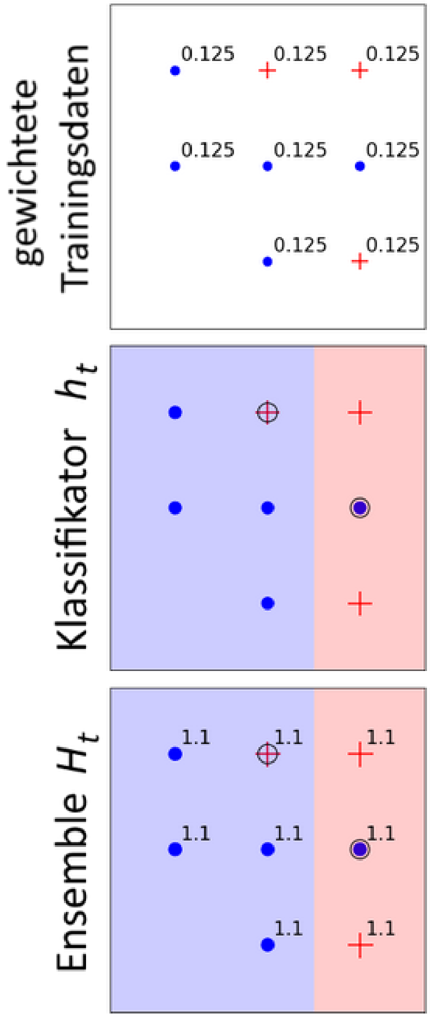
$$w_i^0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Fehler des Klassifikators:

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{|D|} w_i^0 \, I[h_1(x_i) \neq y_i] = 0.25$$

Schrittweite:

$$a_1 = \ln\left(\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right) = \ln\left(\frac{1-0.25}{0.25}\right) = \ln(3) \approx 1.1$$



ADABOOST BEISPIEL

Gewichtsänderung:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha_1 y_i h_1(x_i)}$$

korrekt klassifiziert:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha_1} = 0.125 \cdot e^{-0.55} \approx 0.072$$

falsch klassifiziert:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha_1} = 0.125 \cdot e^{+0.55} \approx 0.217$$

Normalisierungsfaktor:

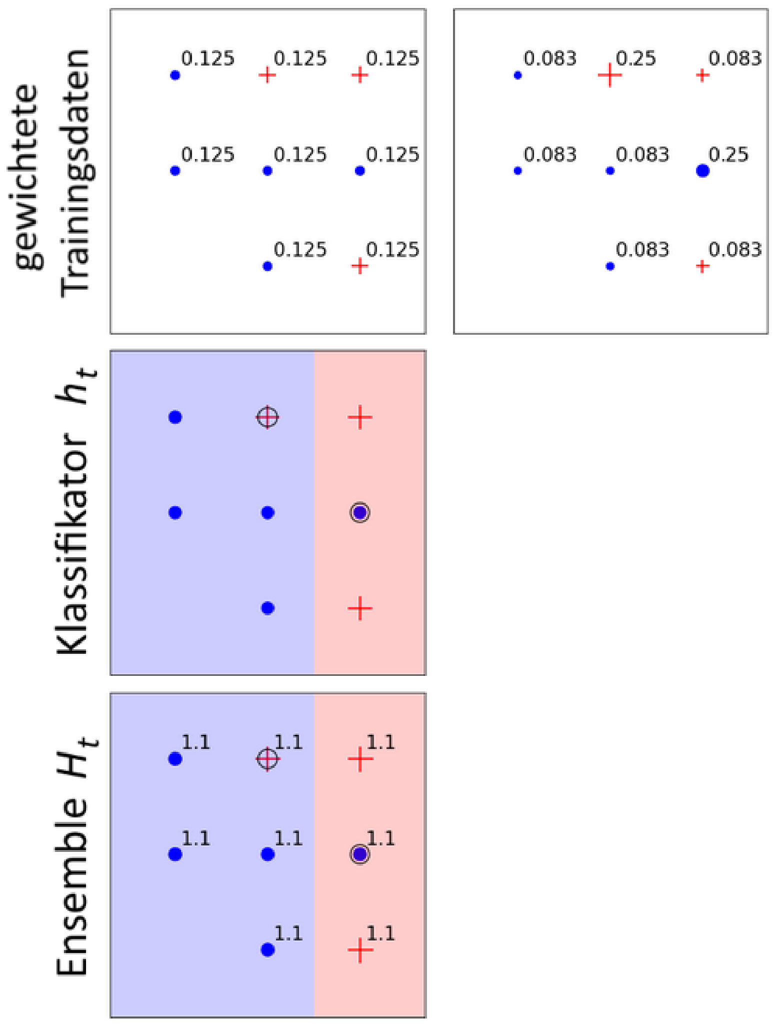
$$\sum_{i=1}^{|D|} w_i^1 = 0.217 \cdot 2 + 0.072 \cdot 6 = 0.866$$

korrekt klassifiziert (normalisiertes Gewicht):

$$w'^1_i = \frac{0.072}{0.866} \approx 0.083$$

falsch klassifiziert (normalisiertes Gewicht):

$$w'^1_i = \frac{0.217}{0.866} \approx 0.25$$



ADABOOST BEISPIEL

Gewichtsänderung:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha_1 y_i h_1(x_i)}$$

korrekt klassifiziert:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\alpha_1} = 0.125 \cdot e^{-0.55} \approx 0.072$$

falsch klassifiziert:

$$w_i^1 = w_i^0 \cdot e^{\frac{1}{2}\alpha_1} = 0.125 \cdot e^{+0.55} \approx 0.217$$

Normalisierungsfaktor:

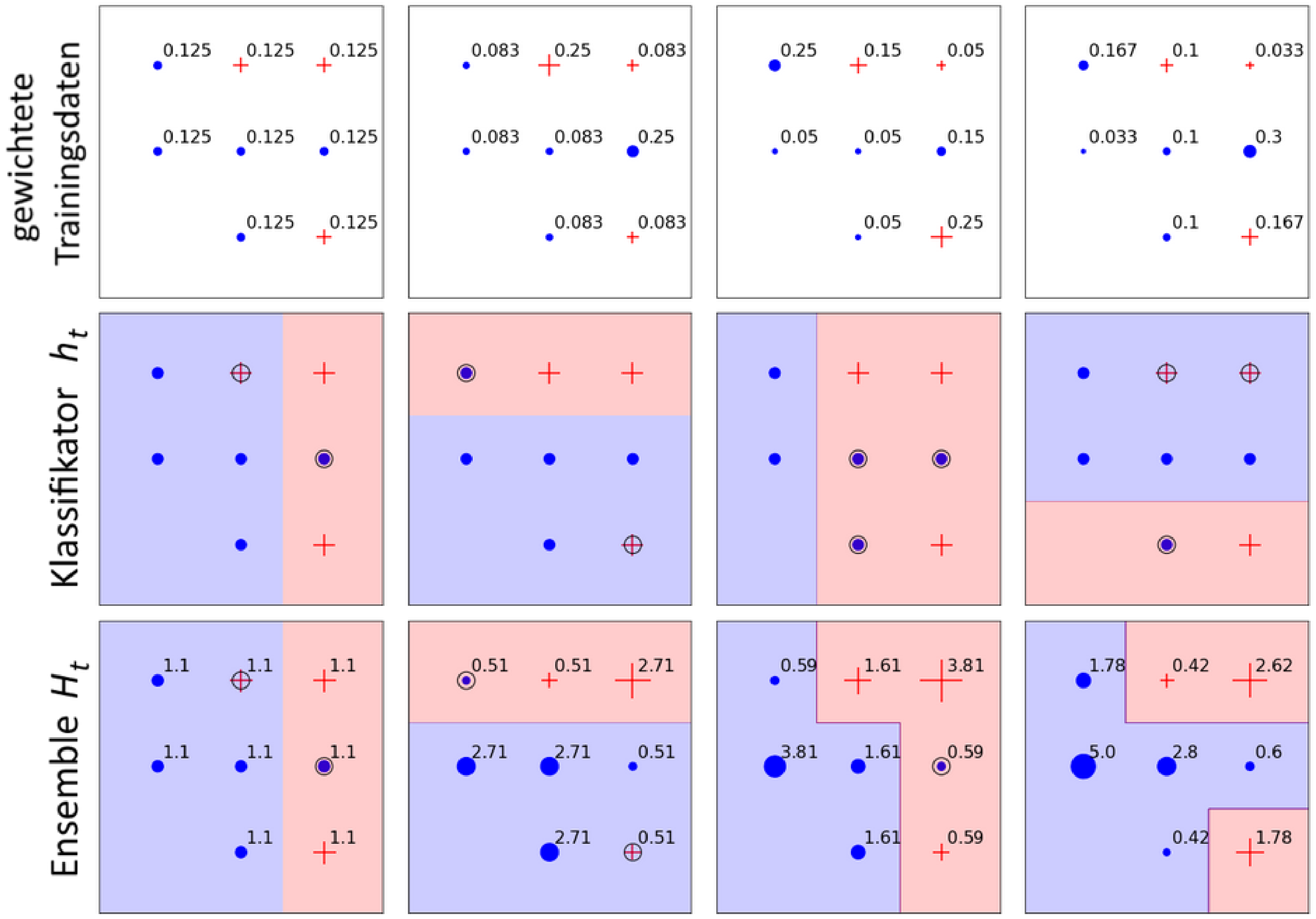
$$\sum_{i=1}^{|D|} w_i^1 = 0.217 \cdot 2 + 0.072 \cdot 6 = 0.866$$

korrekt klassifiziert (normalisiertes Gewicht):

$$w'^1_i = \frac{0.072}{0.866} \approx 0.083$$

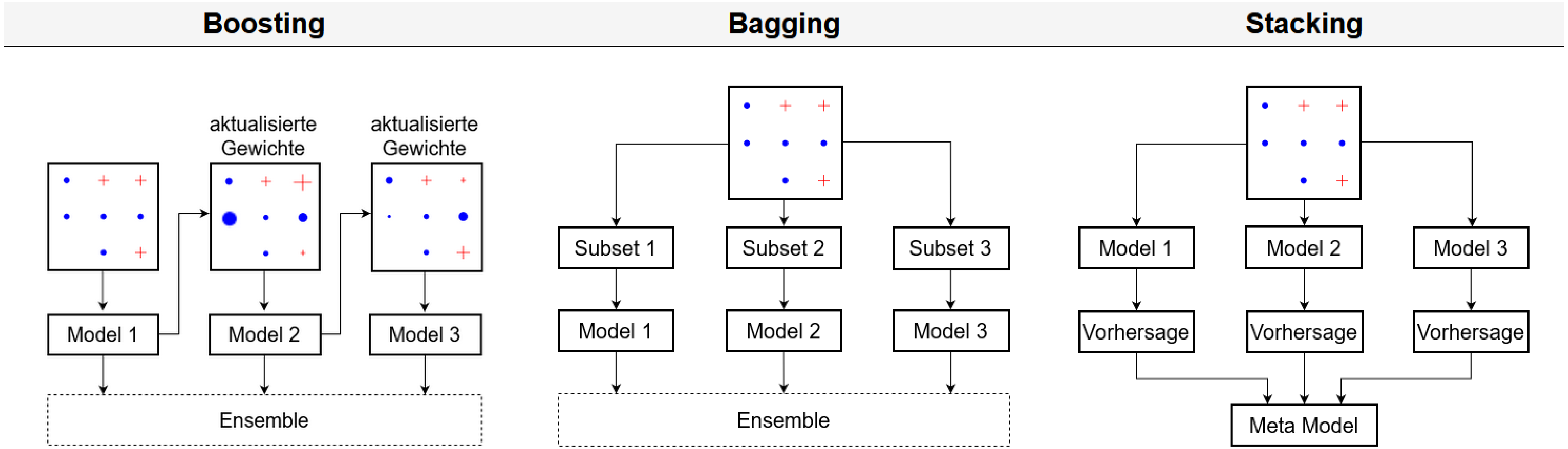
falsch klassifiziert (normalisiertes Gewicht):

$$w'^1_i = \frac{0.217}{0.866} \approx 0.25$$



AUSBLICK

- weitere Varianten von Boosting, z.B. Gradient Boosting
- Vergleich mit alternativen Ensemble Verfahren:



QUELLENVERZEICHNIS

- Surowiecki, J. (2004). The wisdom of crowds. Why the many are smarter than the few and how collective wisdom shapes business, economies, societies and nations. Abacus
    - das vorgestellte Beispiel und zahlreiche weitere Vergleiche von Gruppen- und Expertenentscheidungen
- Kearns, M. and Valiant, L.G. (1989). Cryptographic limitations on learning Boolean formulae and finite automata. Proceedings of the Twenty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing (pp. 433-444). New York, NY: ACM Press.
    - https://www.cis.upenn.edu/~mkearns/papers/cryptojacm.pdf
    - Sind Weak und Strong Learnability unterschiedliche Klassen?
- Schapire, R. E. (1990). *The strength of weak learnability*. Machine learning, 5(2), 197-227.
    - https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00116037.pdf
    - erste Nachweis von effektiven Ensemblen aus "Weak learnern"
- Freund, Y., & Schapire, R. E. (1997). *A decision-theoretic generalization of on-line learning and an application to boosting*. Journal of computer and system sciences, 55(1), 119-139.
    - https://www.face-rec.org/algorithms/Boosting-Ensemble/decision-theoretic_generalization.pdf
    - Vorstellung des AdaBoost Algorithmus, Gewichtung eines Weak Learners basierend auf seiner Korrektheit
- Llew Mason, Jonathan Baxter, Peter Bartlett, and Marcus Frean (2000); Boosting Algorithms as Gradient Descent, in S. A. Solla, T. K. Leen, and K.-R. Muller, editors, Advances in Neural Information Processing Systems 12, pp. 512-518, MIT Press
    - https://papers.nips.cc/paper/1999/file/96a93ba89a5b5c6c226e49b88973f46e-Paper.pdf
    - Boosting als Gradientenabstieg im Funktionsraum

LERNMATERIALIEN

Weitere Materialien zu diesem Vortrag gibt es auf https://adockhorn.github.io/Boosting/:

- interaktive Inhalte zum Thema des Vortrags
- eine Formelübersicht
- Links und Quellen zu diesen und verwandten Themen