Tips for Math learning

ADL

April 2023

1 第二型曲面积分

若 S 由以下参数方程刻画

$$
\begin{aligned}
x &= x(u,v) \\
y &= y(u,v) \\
z &= z(u,v)
\end{aligned} \tag{1}
$$

令

$$
A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} \quad B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} \quad C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \tag{2}
$$

则

$$
\iint_{S^{\pm}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \pm \iint_{D_{uv}} (PA + QB + RC) d\sigma_{uv} \tag{3}
$$

2 常微分方程的积分因子

若 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ 中 $\frac{M}{N}$ 是 x, y 齐次，则 $\mu = \frac{1}{Mx+Ny}$ 是一个积分因子

3 朗斯基行列式

若 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 存在两个特解 ϕ_1 和 ϕ_2
则 $W(x)' = (\phi_1\phi_2' - \phi_1'\phi_2) = p(x)W(x)$
即 $W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$

$f(x)$	$g(x)$
$f(x)'$	$\int g(x)dx$
$f(x)''$	$\iint g(x)dt^2$
$\cdots$	$\cdots$
0	$\iint\cdots\int g(x)dx^n$

表 1: Caption

4 分部积分法

若求 $f(x)g(x)$ 的积分，其中 $f(x)$ 为多项式函数，可以将左边求导、右边积分，逐级写出，重复进行 n 次，直至 $f(x)$ 求导至 0(见 1)，然后向右降次相乘，结果如下：

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x) =&f(x)\int g(x)dx - f(x)'\iint g(x)dx^2 + f(x)''\iiint g(x)dx^3\\&-\cdots+(-1)^{n-1}f(x)^{(n-1)}\iint\cdots\int g(x)dx^n\end{aligned} \tag{4}$$

5 带阶乘的级数判定

方法一 运用达朗贝尔判别法，同时结合重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

方法二 或者运用柯西判别法结合斯特林公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}{n!} = 1$$

或写作：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

6 带双阶乘的级数判定

方法一 运用拉阿伯判别法

方法二 运用 Wallis 公式：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{n} = \pi$$

7 带对数的级数判定

Step1 利用对数恒等式 $x = e^{lnx}$ 进行变换如果形式过于复杂，考虑用泰勒展开将式子化简得到多项式形式的级数

Step2 与

$$\frac{1}{n^p}, \frac{1}{n\ln n^{\alpha}}, \frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^{\alpha}}$$

进行比较，通过比较判别法说明敛散性

8 记忆阿贝尔引理的方法

将阿贝尔引理看作离散的分部积分法：

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k = \alpha_n B_n - \sum_{k=1}^{m-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)$$

9 数列的证明题

数列的拆分 考虑序列 $\{a_n\}$，有关其证明可以将其按照奇偶项进行拆分，或者通过构造序列 $\{\frac{1}{2}|a_n| + \frac{1}{2}a_n\}$ 和 $\{\frac{1}{2}|a_n| - \frac{1}{2}a_n\}$ 得到只包含其正项和负项的序列的拆分。

存在极限 利用序列极限的保号性和判别法进行连用

10 一致收敛判定的特殊技巧

带有正余弦函数，且相中有 $n\pi$ 结构的 在相内部进行加减 π 的运算，利用三角函数的和差运算进行转换，从而达到换相的目的。

形似交错级数但不能莱布尼茨的 对于 $\sum a_n$ 形似收敛的交错级数 $\sum b_n$，但其自身不能用莱布尼茨判别法判断的，考虑构造

$$\sum a_n = \sum (a_n - b_n) + \sum b_n$$

反证法 若 f 在 (a,b) 上一致收敛，则在 $[a,b]$ 上一致收敛，则 f 在 $[a,b]$ 上连续

不容易一眼丁真的 考虑把函数求导求极值的方法，结合柯西收敛准则或者强级数判别法，求出和自变量无关的量，从而判断级数是否收敛。

11 泰勒公式的四类余项

皮亚诺余项 $o((x-x_0)^2)$

拉格朗日余项 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1}[x_0+\theta(x-x_0)](x-x_0)^n$

积分余项 $\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$

柯西余项 $\frac{1}{n!}f^{(n+1)}[x_0+\theta(x-x_0)](1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$

12 构造含参变量的广义积分

巧用 $e^{-f(t)x}$ 或者 $\sin f(t)x$ 对原来的积分进行改造。然后再通过积分和求导的先后变换使得式子更加简单，最后再对 t 赋值，使得 $f(t)=0$，达到计算的目的。
如：

$$\begin{aligned}
\text{求}: S(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x} dx \\
\text{令}: f(t) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x\cos\beta x}{x}\cdot e^{-tx} dx \\
f'(t) &= \int_0^{\infty} \sin\alpha x\cos\beta x\cdot e^{-tx} dx \\
S(x) &= \int f'(0) dt
\end{aligned} \tag{5}$$

13 Γ 函数和 β 函数的计算技巧

简单公式

$$\Gamma(1)=1,\quad \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\quad \Gamma(1-z)\Gamma(z)=\beta(1-z,z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \tag{6}$$

变形转换 形如 $x^{\alpha}(1+x^t)^{\beta}$ 的可以通过 $y=\frac{1}{1+x^t}$ 转换为 B 函数的形式。

14 积分的计算技巧

区间拆分 形如 $\int_a^b f(x+h)dx$ 的积分的计算（尤其当存在它和 $\int_c^d f(x)dx$ 的加减运算时），可以通过改变积分上下限，转换为 $\int_{a+h}^{b+h} f(x)dx$ 来进行计算，以达到部分相抵消的目的。

出现 ϕ 当求解的式子中出现了非 π 的元素时，考虑构造分段函数

$$f(x) = \begin{cases} \phi & \text{if } |x| \leq \phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

然后再对该函数进行傅里叶展开