第八周习题课　　题目

1. 设 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，对函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

（I）确定 a 值使 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续；

（II）对（I）中确定的 a 值，证明 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的一阶导数连续。

一．不等式证明

2. 设 $x>0$，证明不等式 $\dfrac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{2}$。

3. 证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

4. $e<a<b$，求证：$a^b>b^a$。

证明：$F(x)=x\ln a-a\ln x$，$e<a<x$，

$$F'(x)>0,\quad F(a)=0$$

$$F(x)>0,\quad x>a$$

$$F(b)>0$$

$a^b>b^a$。

二．中值定理证明题

5. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内，存在 $\xi\in\mathrm{R}$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

6. 证明：若 $f\in C(-\infty,+\infty)$，$f(f(x))=x$，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$。

7. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$为连续函数， $f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$。证明：

（I） $f(x)$是单调函数；

（II） $f(x)=x$。

8. 在$\left[0,1\right]$上， $0<f(x)<1$， $f(x)$可微，且 $f'(x)\neq 1$，证明在$\left(0,1\right)$存在唯一的ξ使 $f(\xi)=\xi$。

9. $f(x)$在$\left[0,1\right]$连续，在$\left(0,1\right)$可微，且 $f(1)=0$，则$\exists\xi\in\left(0,1\right)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

10. 设 $f\in C[0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$可导， $f(0)=0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，求证：存在$\xi\in(0,+\infty)$使 $f'(\xi)=0$。

11. 设 $f(x)$ $[0,+\infty)$ 内可导，且在 $0\le f(x)\le \ln\dfrac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}}$， $\forall x\in[0,+\infty)$ 。证明： $\exists\xi\in(0,+\infty),\quad f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。

12. 设函数 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

13. 函数 $f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，且$g''(x)\neq 0$，
$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。 求证

（1） $g(x)\neq 0$， $\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；

（2） $\exists c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$。

14. 对任意正整数n，证明方程$e^x - x^n = 0$至多有三个不同的零点。

三．泰勒公式

15. 确定a, b的值，使当$x \to 0$时，$f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$与$x^5$为同阶无穷小。

16. 若$f(x)$导数连续且$f'(1) = 1$，求$f(\cos x) - f(\frac{2}{2 + x^2})$当$x \to 0$时等价无穷小量的阶。

17. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$在$x_0 = 1$处带 Peano 的 Taylor 公式为 ______________。

18. 设$f(x) = x^2 \cos x$，则$f^{(30)}(0)$ = _____________ 。

19. 求函数$f(x) = x^2 \ln(1 + x)$在$x = 0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)$ $(n \geq 3)$。