Cálculo 2

Lucas Seco e Mauro Patrão

Agradecimentos

Agradecemos as sugestões dos colegas do MAT-UnB e dos estudantes do Cálculo 2 que utilizaram alguma das versões desse livro, o que permitiu uma considerável melhoria no conteúdo e na apresentação do texto.

Sumário

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

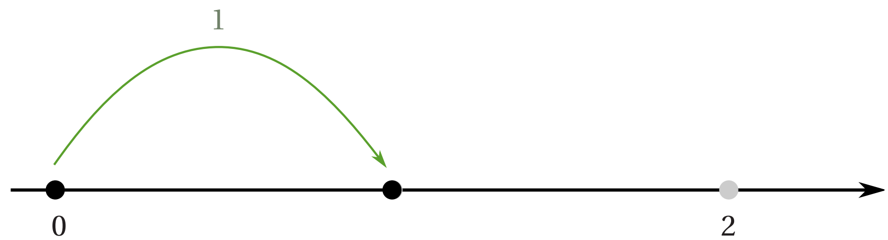
O Cálculo é a matemática do movimento. No Cálculo 1 as quantidades que se movem são dadas por funções reais, os limites de funções fornecem as tendências do movimento dessas quantidades, as derivadas de funções fornecem as taxas de variação dessas quantidades e a integral é a antiderivada: dada a taxa de variação de uma quantidade, sua integral é a quantidade original. No Cálculo 2 vamos aprofundar o estudo do movimento ampliando nosso repertório de funções e melhorando nossas técnicas de integração.

No estudo do movimento esbarramos com conceitos que à primeira vista parecem paradoxais. Por exemplo, o conceito de velocidade instantênea pode parecer paradoxal: qual o espaço percorrido num instante? O Cálculo 1 esclarece esse paradoxo aparente mostrando que a velocidade instantênea é, na verdade, um limite. Outro paradoxo aparente do movimento é o seguinte, conhecido como paradoxo de Zenão.

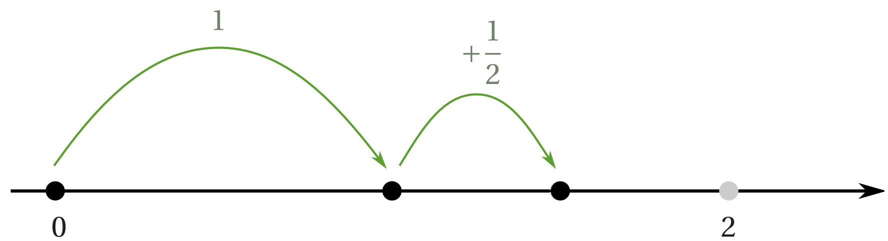
Exemplo

Aquiles aposta corrida com uma tartaruga e, para lhe dar uma vantagem, deixa a tartaruga sair 1 metro na sua frente. Andando o dobro da velocidade em que a tartaruga anda, Aquiles ultrapassa a tartaruga na marca dos 2 metros. Mas largando atrás da tartaruga, Aquiles tem mesmo como alcançá-la na marca dos 2 metros?

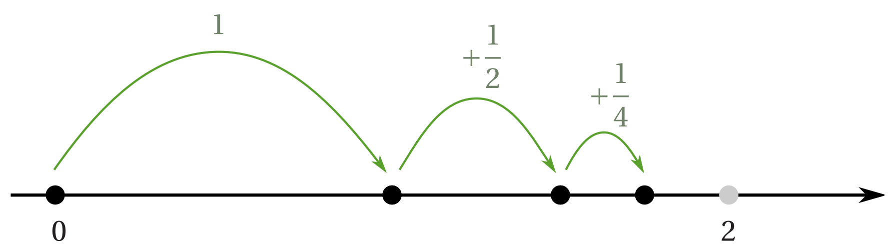
Para chegar na marca dos dois metros, Aquiles deve primeiro chegar em sua metade: na marca do 1 metro.



Para percorrer o 1 metro seguinte, Aquiles deve primeiro chegar em sua metade: na marca do $1+\frac{1}{2}$ metro.



Para percorrer o $\frac{1}{2}$ metro seguinte, Aquiles deve primeiro chegar em sua metade: na marca do $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ metro.



E assim em diante, antes de percorrer os 2 metros, Aquiles deve primeiro percorrer a distância

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$$

que é sempre menor que 2. Sendo assim, parece que Aquiles nunca chega na marca dos 2 metros.

É claro que Zenão não está negando que Aquiles ultrapassa a tartaruga na marca dos 2 metros, ele está procurando explicar como isso ocorre. Chegar na marca no 2 metros é a tendência do movimento acima, portanto, para que essa tendência se realize, devemos tomar o limite

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$$

e então o paradoxo fica esclarecido. Esse limite é o valor da soma com infinitas parcelas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots = 2$$

Observe que o limite que apareceu acima, de uma soma com cada vez mais parcelas, é bem diferente dos limites considerados no Cálculo 1 pois a variável n que tende ao infinito só assume valores inteiros e o número de parcelas da soma cresce com n. Para tal soma infinita, cujo número de parcelas cresce indefinidamente, não podemos aplicar a regra que o limite da soma é a soma dos limites, que só é válida para um número fixo de parcelas. Assim, precisamos desenvolver novas regras de limite para lidar com essas somas infinitas.

No exemplo anterior somamos todos os termos da progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

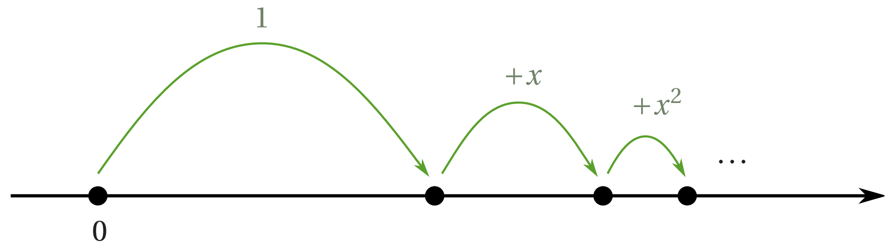
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

Podemos fazer o mesmo com uma razão qualquer.

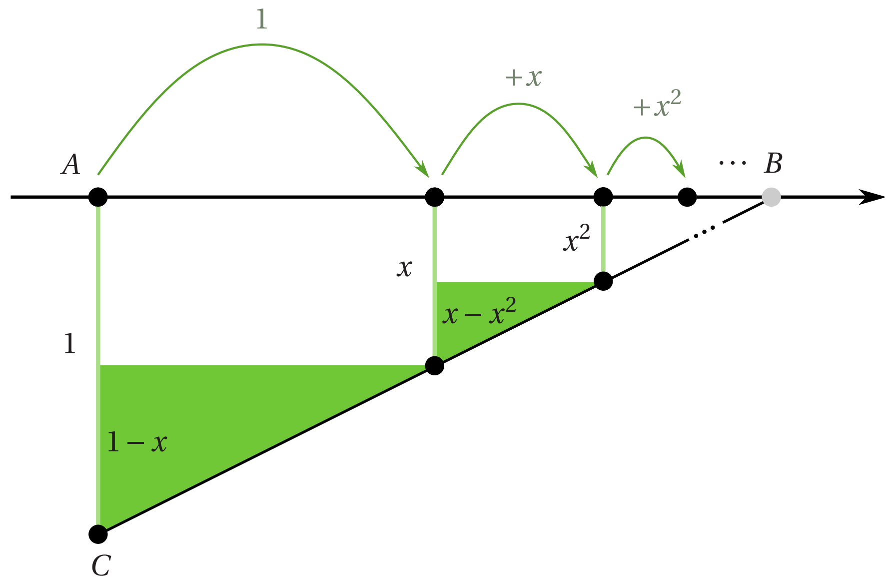
Exemplo

Considere a soma de todos os termos da progressão geométrica de razão x

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$



Se x é um número entre 0 e 1, a potência x^n fica cada vez menor à medida que n cresce. Podemos então obter uma expressão simples para essa soma infinita à partir da semelhança dos seguintes triângulos retângulos



Observe que a hipotenusa do primeiro e do segundo triângulo verde têm a mesma inclinação pois

$$\frac{1-x}{1} = \frac{x-x^2}{x}$$

e, como elas têm um ponto em comum, essas duas hipotenusas formam uma reta. Repetindo esse raciocínio obtemos uma reta de C até B e, portanto, um triângulo retângulo ABC tal que $AC = 1$ e

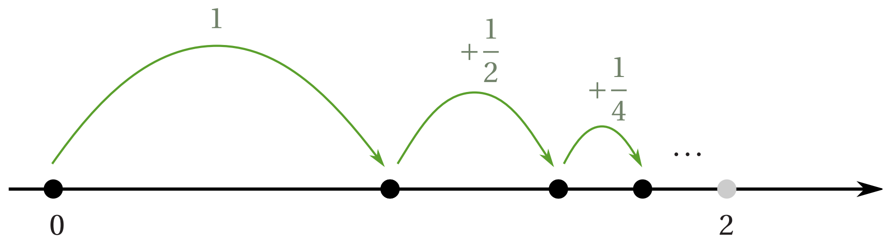
$$AB = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Como o triângulo ABC é semelhante ao primeiro triângulo verde, segue que AB está para AC assim como 1 está para $1-x$. Isso mostra que

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

para $x \in [0,1)$. Por exemplo, para $x = \frac{1}{2}$ temos

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$



como já sabíamos do exemplo anterior.

No exemplo anterior, aparece o polinômio infinito

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

É esse tipo de função que vai ampliar o nosso repertório de funções. Uma de suas vantagens é que elas se assemelham às funções mais simples de calcular, derivar e integrar no Cálculo 1: os polinômios. Uma de suas desvantagens é que para lidar com elas de forma rigorosa teremos que primeiro saber lidar com somas infinitas: porém, nesse primeiro momento, vamos manipular somas infinitas de forma não-rigorosa como se fossem somas finitas para perceber como elas podem ser úteis. Será que podemos derivar esse polinômio infinito usando as mesmas regras que usamos para derivar um polinômio finito usual?

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, será que a igualdade

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)' = 0+1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$

é válida? Desenvolvendo o lado direito dessa igualdade temos que

$$\begin{aligned}
1+2x+3x^2+4x^3+\cdots &= \quad 1+x+x^2+x^3+\cdots \\
&\quad +x+x^2+x^3+\cdots \\
&\quad +x^2+x^3+\cdots \\
&\quad +x^3+\cdots \\
&\quad +\cdots \\
&= \quad\quad 1+x+x^2+x^3+\cdots \\
&\quad +x\ \ (1+x+x^2+\cdots) \\
&\quad +x^2(1+x+\cdots) \\
&\quad +x^3(1+\cdots) \\
&\quad +\cdots \\
&= (1+x+x^2+x^3+\cdots)\times \\
&\quad (1+x+x^2+x^3+\cdots) \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right)^2
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)' &= \left(\frac{1}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} \\
&= 0+1+2x+3x^2+4x^3+\cdots
\end{aligned}$$

como queríamos.

Mais adiante, veremos que as regras de derivação e também de integração de polinômios finitos permanecem válidas para quaisquer polinômios infinitos.

Cada vez que derivamos um polinômio finito, seu grau diminui por um. Assim, depois de derivar $n+1$ vezes um polinômio de grau n temos que o polinômio se anula. Por outro lado temos que

$$(e^x)' = e^x$$

o que mostra que a exponencial e^x não é dada por um polinômio. Mas e se considerarmos polinômios infinitos?

Exemplos

1) Vimos que e^x não é um polinômio finito, porém ela é dada pelo polinômio infinito

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$$

uma vez que

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 + 0 + \frac{1}{2!}0^2 + \frac{1}{3!}0^3 + \frac{1}{4!}0^4 + \cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} (e^x)' &= \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)' \\ &= 0 + 1 + \frac{1}{2!}2x + \frac{1}{3!}3x^2 + \frac{1}{4!}4x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ &= e^x \end{aligned}$$

O polinômio infinito da exponencial pode ser usado para aproximar e^x por aproximações sucessivas

$$1$$

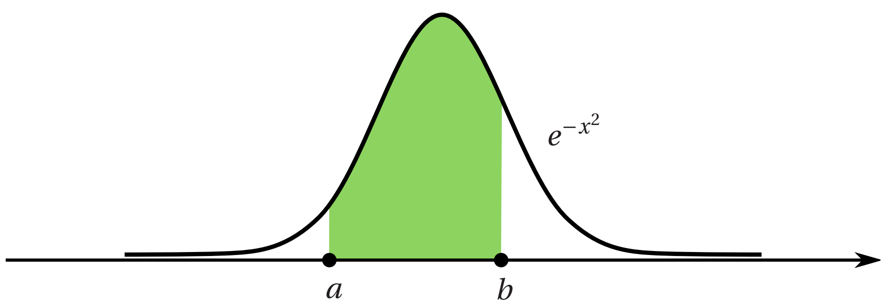
$$1 + x$$

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2$$
$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$$
$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$
$$\vdots$$

Quanto mais parcelas do polinômio infinito somamos, mais próxima a soma fica de e^x.

2) Podemos usar o polinômio infinito da exponencial para calcular as probabilidades dadas pela curva do sino de Gauss. A área abaixo da conhecida curva do sino de Gauss está relacionada ao cálculo de certas probabilidades e é um dos conceitos centrais na teoria das probabilidade e suas aplicações. Para calcular a integral definida

$$\int_a^b e^{-x^2}\,dx = ?$$



usando Cálculo 1, precisamos primeiro calcular a integral indefinida obtendo uma primitiva de e^{-x^2} (isto é, uma função cuja derivada é e^{-x^2}). Porém essa primitiva não é nenhuma das funções do Cálculo 1, e nem mesmo nenhuma combinação delas!

Porém, podemos obter o polinômio infinito para o integrando e^{-x^2} substituindo x por $-x^2$ no polinômio infinito da exponencial,

de modo que

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + (-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \cdots \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots \end{aligned}$$

Integrando essa expressão, obtemos que

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2}\,dx &= \int \left(1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots\right) dx \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!}\frac{x^7}{7} + \frac{1}{4!}\frac{x^9}{9} - \cdots + C \end{aligned}$$

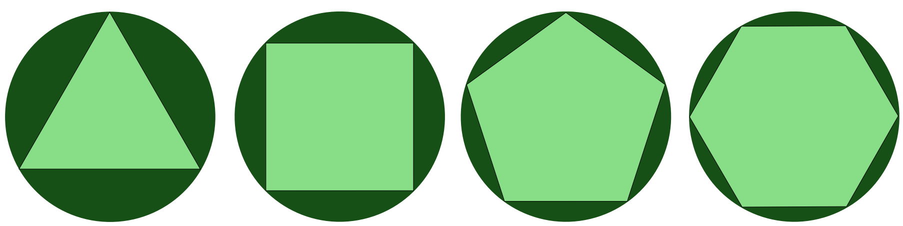
são as primitivas e^{-x^2}. Isso nos dá tanto as primitivas como também uma receita para aproximá-las por aproximações sucessivas.

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS E SÉRIES

2.1 LIMITE DE SEQUÊNCIAS

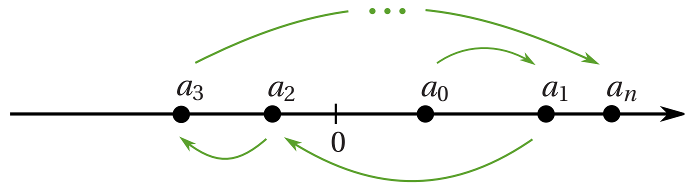
O limite de sequências expressa a ideia de aproximações sucessivas, que é uma das ideias fundamentais do Cálculo 2. Por exemplo, podemos aproximar a área de uma circunferência de raio 1 pela área a_n do polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência: quanto maior o número n de lados, mais próximo a área a_n fica da área da circunferência.



Mais geralmente, uma sequência é uma lista ordenada e infinita de números reais

$$\boxed{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots}$$

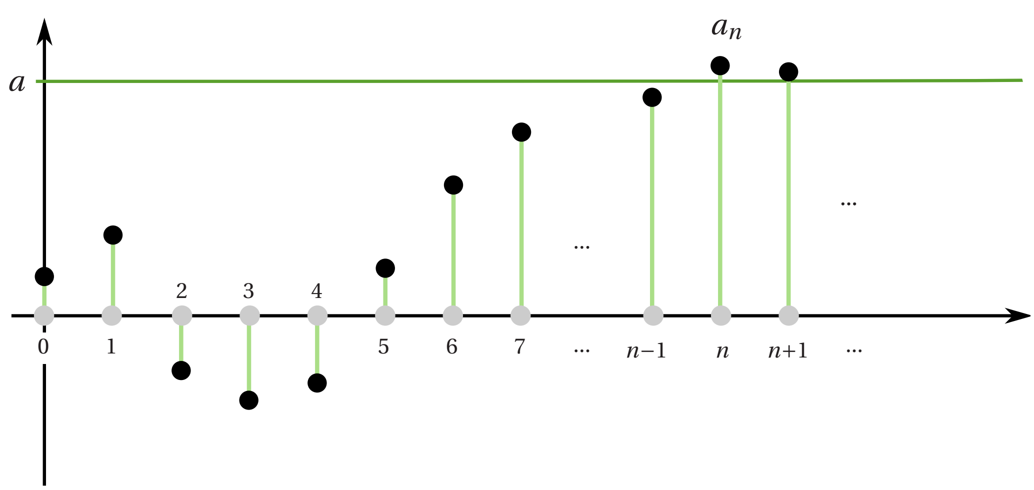
Denominamos a_0 de 0-ésimo termo da sequência, a_1 de 1-ésimo termo da sequência, a_2 de 2-ésimo termo da sequência e assim por diante. Numa posição genérica n, aparece a_n, o n-ésimo termo da sequência, denominado *termo geral da sequência.* Muita vezes, denotamos à sequência acima simplesmente pelo seu termo geral a_n. Podemos visualizar uma sequência como uma progressão infinita de pontos da reta real.



Uma sequência a_n pode começar em $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, etc: em geral não nos interessa os valores dos primeiros termos de uma sequência a_n mas sim seu valor limite: o valor do qual a sequência a_n se aproxima a medida que n cresce para o infinito. Para isso, olhamos a sequência a_n como uma função $a(n)$ que para cada natural n associa o valor real $a(n) = a_n$ e definimos o limite da sequência usando a mesma definição do limite no infinito de funções reais

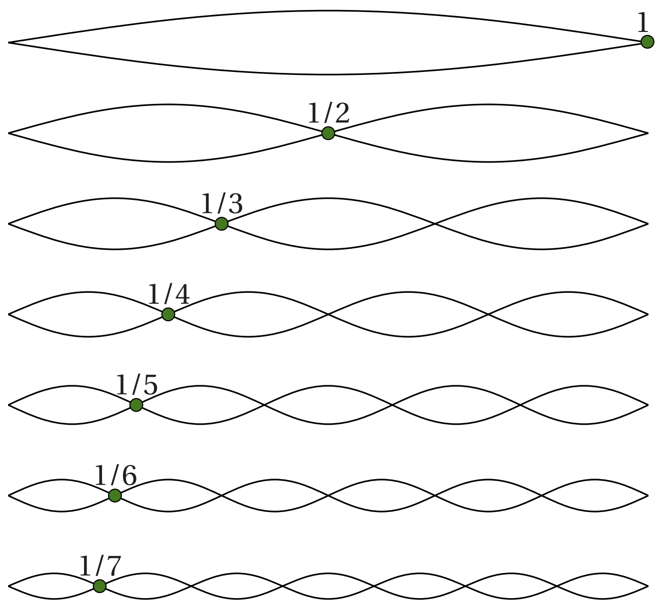
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a(n)}$$

como ilustrado na figura abaixo, onde $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.



Exemplos

1) Considere uma corda de um instrumento musical vibrando presa a duas extremidades. No primeiro harmônico dessa corda, o primeiro nó ocorre apenas na outra extremidade. No segundo harmônico dessa uma corda, o primeiro nó ocorre na metade da corda. No terceiro harmônico dessa uma corda, o primeiro nó ocorre em um terço da corda, e assim em diante.



Isso dá origem à *sequência harmônica*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Claramente, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pois é um limite do tipo limitado sobre infinito.

2) $a_n = n$, é a sequência dos números naturais

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

$b_n = 2n$, é a sequência dos números pares

$$0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

$c_n = 2n + 1$, é a sequência dos números ímpares

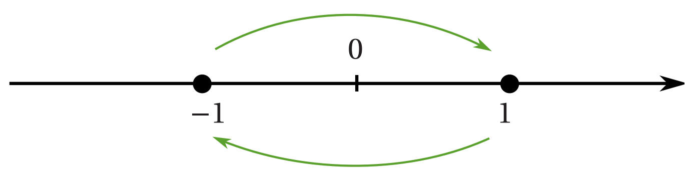
$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots$$

Claramente, temos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

3) $a_n = (-1)^n$ é a sequência alternada

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

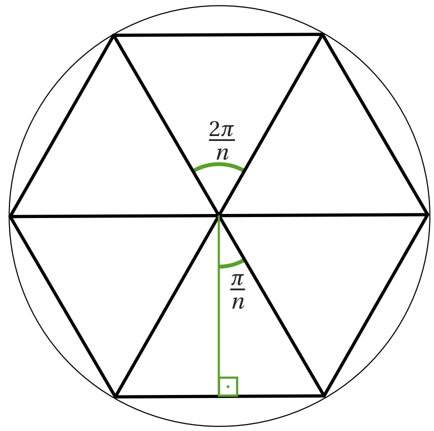


Observe que

$$a_{2n} = 1 \qquad \text{e} \qquad a_{2n+1} = -1$$

Temos que $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe, uma vez que a sequência alternada não se aproxima de nenhum valor à medida que n cresce para o infinito.

4) Seja a_n a área do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio 1, $n \geq 3$. Podemos calcular a área a_n se notarmos que ela consiste de n triângulos com lados iguais de comprimento 1 e ângulo $2\pi/n$ entre eles.



É fácil ver que cada um desses triângulos tem altura $\cos(\pi/n)$ e base $2\,\text{sen}(\pi/n)$ de modo que sua área é

$$\cos(\pi/n)\,\text{sen}(\pi/n)$$

onde usamos a fórmula da soma de arcos de seno. Somando a área desses n triângulos obtemos a área do polígono, dada por

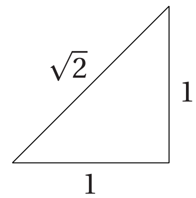
$$a_n = n\cos(\pi/n)\,\text{sen}(\pi/n)$$

Intuitivamente, devemos ter

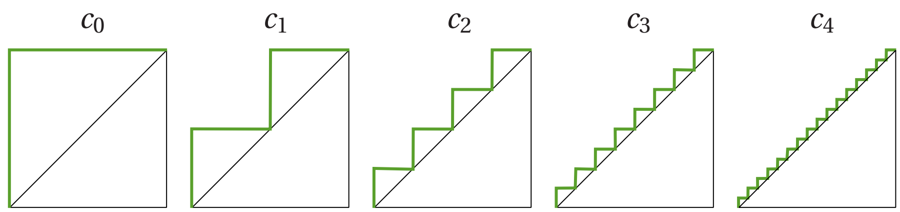
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

pois essa é a área da circunferência de raio 1. Porém, como mostrar isso rigorosamente?

5) Nesse exemplo vamos ver a importância de se ter uma noção rigorosa de limite de sequências. Considere a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos com comprimento 1. Essa hipotenusa tem, portanto, comprimento $\sqrt{2}$.



Vamos tentar aproximar sucessivamente o comprimento dessa hipotenusa com o comprimento c_n de "escadas" que vão do começo ao fim da hipotenusa, com cada vez mais degraus



Pelo desenho, temos a impressão de que, quanto maior n, mais próximo o comprimento das escadas ficam do comprimento da hipotenusa. Mas, de fato, é isso que está acontecendo?

Não! Observe que o comprimento de cada escada é sempre o mesmo $c_n = 2$ para todo n. (Por quê?) Segue que c_n é uma sequências constante e

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 2$$

Em geral, quando não houver risco de mal entendidos, o limite de a_n será denotado simplesmente por

$$\lim a_n = a$$

ficando subentendido que $n \to \infty$. Outra notação, que será menos utilizada, é

$$a_n \to a$$

que pode ser lida como a_n tende para seu limite a.

Observe que, para o limite de uma sequência, não importa onde a sequência começa mas sim onde a sequência "termina": os valores de a_n quando n tende ao infinito. Em particular, se $\lim a_n = a$ então

$$\lim a_{n+1} = a \qquad \text{e} \qquad \lim a_{n-1} = a$$

pois quando n tende ao infinito, ambos $n-1$ e $n+1$ também tendem ao infinito.

PROPRIEDADES DO LIMITE

Todas as propriedades válidas para limite no infinito de funções reais também são válidas para limite de sequências. Em particular, valem as regras do limite da soma, produto e quociente.

Proposição 2.1

Sejam $\lim a_n$ e $\lim b_n$ existem , então

$$\begin{array}{lrcl} \text{(S)} & \lim a_n + b_n & = & \lim a_n + \lim b_n \\ \text{(P)} & \lim a_n b_n & = & \lim a_n \lim b_n \\ \text{(Q)} & \lim \dfrac{a_n}{b_n} & = & \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}, \quad \text{se } \lim b_n \neq 0 \end{array}$$

Valem também a monotonicidade e o teorema do sanduíche.

Proposição 2.2

Temos que

(A) Se $a_n \le b_n$, então $\lim a_n \le \lim b_n$.

(B) Se $a_n \le c_n \le b_n$ e $\lim a_n = \lim b_n = c$, então $\lim c_n = c$.

Dizemos que uma sequência é *limitada* se ela não se afasta indefinidamente da origem, mais precisamente, se existe um $R > 0$ tal que $|a_n| < R$ para todo n. Por outro lado, se uma sequência se afasta indefinidamente para a direita da origem seu limite é infinito, e se uma sequência se afasta indefinidamente para a esquerda da origem seu limite é menos infinito. Temos as sequintes propriedades.

Proposição 2.3

Temos que

(A) Se a_n é limitada e $\lim b_n = \infty$, então $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

(B) Se $\lim a_n = 0$ e $a_n > 0$, então $\lim \dfrac{1}{a_n} = \infty$.

(C) Se $\lim a_n = \infty$ e $a_n \leq b_n$, então $\lim b_n = \infty$.

Exemplo

Vamos considerar a sequência $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$ e perceber que, para obter seu limite, só importa o que acontece para n grande. Temos que

$$a_0 = 1 < a_1 = 10 < a_2 = \frac{100}{2!} = 50 < a_3 = \frac{1000}{3!} = 166,6\ldots$$

Por outro lado, para $n > 10$ temos que

$$a_n = \frac{10^n}{n!} = \frac{10}{n} \cdot \underbrace{\frac{10}{n-1} \cdots \frac{10}{11}}_{\text{cada fator } \leq 1} \cdot \frac{10^{10}}{10!} \leq \frac{10}{n} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{10^{10}}{10!} = \frac{10}{n} \frac{10^{10}}{10!}$$

de onde segue que

$$0 \leq a_n \leq \frac{10}{n} \frac{10^{10}}{10!}$$

Como $10/n \to 0$, e $10^{10}/10!$ é uma constante, segue do teorema do Sanduíche que

$$a_n \to 0$$

SEQUÊNCIAS E FUNÇÕES

Vimos que que podemos considerar uma sequência a_n como uma função definida nos naturais $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. No Cálculo 1 estudamos funções $f(x)$ definidas para x num intervalo. Veremos que em algumas situações podemos usar limite de funções do Cálculo 1 para calcular limite de sequências.

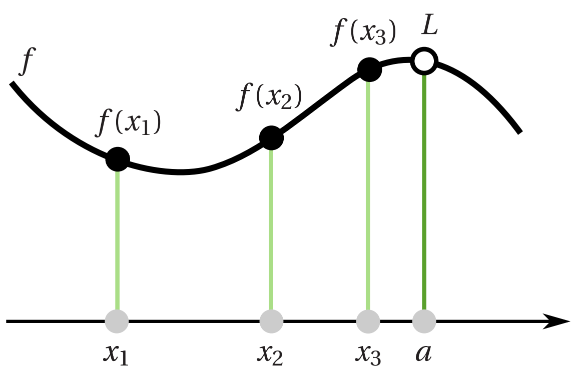
Dizemos que L é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e denotamos

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

quando para toda sequência x_n com $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$ temos

$$\lim f(x_n) = L$$

como ilustrado na figura abaixo.



Observe que nessa definição podemos ter $a = \pm\infty$ ou $L = \pm\infty$ ou ambos.

Proposição 2.4

(A) Se $\lim x_n = a$ então

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x)$$

desde que esse último limite exista.

(B) Se, além disso, $f(x)$ é contínua em $x = a$, então

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$$

Prova:

O item (A) é consequência da definição de limite de funções.

Para o item (B), se f é contínua em a, temos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Pelo item (A) temos então que

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim x_n)$$

onde trocamos a por $\lim x_n$, uma vez que $a = \lim x_n$. ■

Proposição 2.5

(A) Se $a_n = f(n)$ então

$$\lim a_n = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

desde que esse último limite exista.

(B) Se, além disso, $b_n = g(n)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existe, então

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que esse último limite exista e que tenhamos

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = \lim b_n = \pm\infty$$

Prova:

O item (A) é consequência da definição de limite de funções, uma vez que

n é uma sequência que tende ao infinito.

O item (B) é consequência do item (A) e da Regra de L'Hospital. ■

Uma maneira mais prática de escrever a regra de L'Hospital para sequências é

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{(a_n)'}{(b_n)'}}$$

onde $(a_n)'$ e $(b_n)'$ denotam as derivadas em relação a n, lembrando que a regra se aplica desde que tenhamos

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim a_n = \lim b_n = \pm\infty$$

Exemplos

1) Considere a sequência $a_n = \cos(2\pi n)$. Sabemos que

$$a_n = \cos(2\pi n) = 1$$

para todo n, de modo que essa sequência é constante e

$$\lim a_n = 1$$

Será que podemos afirmar que

$$\lim \cos(2\pi n) \stackrel{?}{=} \lim_{x\to\infty} \cos(2\pi x)$$

Não, pois o limite à direita não existe! Só podemos usar uma função real $f(x)$ para calcular o limite de uma sequência a_n quando o limite da função real existe: se o limite da função real não existe, nada podemos dizer sobre a sequência.

2) Vimos que a área do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio 1 é dada por

$$a_n = n\cos(\pi/n)\,\text{sen}(\pi/n)$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\lim a_n &= \lim_{n\to\infty} n\cos(\pi/n)\,\mathrm{sen}(\pi/n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos(\pi/n) \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(\pi/n)}{1/n} \qquad \text{L'Hospital } 0/0 \\
&= \cos\left(\lim_{n\to\infty} \pi/n\right) \lim_{n\to\infty} \frac{(\,\mathrm{sen}(\pi/n))'}{(1/n)'} \\
&= \cos(0) \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi/n)(-\pi/n^2)}{-1/n^2} \\
&= \pi \lim_{n\to\infty} \cos(\pi/n) \\
&= \pi\cos(0) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Isso prova que $\lim a_n = \pi$.

3) Escrevendo

$$e^x = \exp(x)$$

temos que

$$\sqrt[n]{e} = e^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

de modo que

$$\lim \sqrt[n]{e} = \lim \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\lim \frac{1}{n}\right) = \exp(0) = 1$$

onde podemos passamos o limite para dentro de $\exp(x)$ pois essa é uma função contínua.

4) Temos que

$$\lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{(n)'}{(e^n)'} = \lim \frac{1}{e^n} = 0,$$

uma vez que

$$\lim n = \infty = \lim e^n.$$

5) Temos que

$$\lim \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\lim \frac{n}{n+1}\right) = \log(1) = 0$$

onde passamos o limite para dentro de $\log(x)$ pois essa é uma função contínua e usamos que

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{(n)'}{(n+1)'} = \lim \frac{1}{1} = 1.$$

pois

$$\lim n = \infty = \lim n+1.$$

6) Vamos obter o limite da seguinte sequência

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2} \\
a_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \\
a_3 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
a_4 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
&\vdots \\
a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}
\end{aligned}$$

Observe que não demos uma fórmula fechada que define a_n para cada n: para calcular o termo a_n recorremos ao termo anterior a_{n-1}. Sequências definidas dessa forma são chamadas de *recorrências* e são uma família importante de sequências do Cálculo 2.

Supondo que $a_n \to a$ sabemos também que $a_{n-1} \to a$. Pela continuidade da função $\sqrt{x}$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim a_n &= \lim \sqrt{2+a_{n-1}} \\
a &= \sqrt{2+\lim a_{n-1}} \\
a &= \sqrt{2+a} \\
a^2 &= 2+a
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$a^2 - a - 2 = 0$$

e os valores possíveis para a são as raízes 2 ou -1 da equação acima. Uma vez que a sequência $a_n \geq 0$, pela monotonicidade do limite temos que $a \geq 0$, logo devemos ter $a = 2$.

Portanto, se a_n tem limite então $a_n \to 2$. Mais adiante provaremos que essa sequência de fato converge.

Sequência de Fibonacci

Agora consideramos um exemplo bastante curioso, a denominada *sequência de Fibonacci* dada por a_n da seguinte maneira: seus dois primeiros passos são iguais a um, ou seja, $a_1 = a_2 = 1$. Para obtermos os demais passos, utilizamos a seguinte recorrência

$$\boxed{a_{n+2} = a_{n+1} + a_n}$$

Os 10 primeiros passos dessa sequência são apresentados na seguinte lista

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Essa sequência é claramente crescente e possui limite infinito. Entretanto é possível mostrar que a razão de crescimento de um termo para o termo seguinte

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \ldots$$

dada pela *sequência das razões de Fibonacci*

$$\boxed{r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

é convergente. Vamos aqui obter o valor do limite de r_n supondo que r_n converge (na nossa lista de exercícios provaremos que r_n de fato converge). Em primeiro lugar observamos que

$$r_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= 1+\frac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}} \\
&= 1+\frac{1}{r_n},
\end{aligned}
$$

o que mostra que r_n satisfaz a seguinte recorrência

$$r_{n+1} = 1+\frac{1}{r_n}$$

Suponha que $r_n \to \phi$, vamos determinar qual o valor de ϕ. Pelas regras da soma e do quociente, segue que

$$\lim r_{n+1} = 1+\frac{1}{\lim r_n}$$

Por outro lado, se $n \to \infty$, então $n+1 \to \infty$, de modo que

$$\lim r_{n+1} = \lim r_n = \phi$$

e então

$$\phi = 1+\frac{1}{\phi}$$

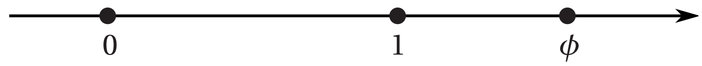
Multiplicando a igualdade acima por ϕ, temos que esse limite é solução da seguinte equação quadrática

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

cuja única solução positiva é

$$\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

denominada *razão áurea*. Esse número mágico, conhecido desde a antiguidade, é obtido geometricamente dividindo-se um dado segmento em dois pedaços, de modo que a proporção do todo ϕ sobre a maior das partes 1 coincida com a proporção entre a maior das partes 1 e a menor das partes $\phi - 1$, como ilustrado na figura abaixo.



A razão áurea ϕ é então qualquer uma destas duas proporções idênticas e satisfaz

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$$

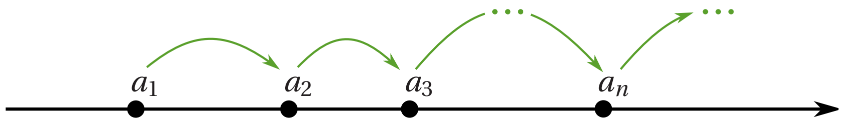
Como curiosidade, observe que obtivemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 \\
r_2 &= 1 + \frac{1}{1} \\
r_3 &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \\
r_4 &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} \\
&\downarrow \\
\phi &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}
\end{aligned}$$

Sequências monótonas

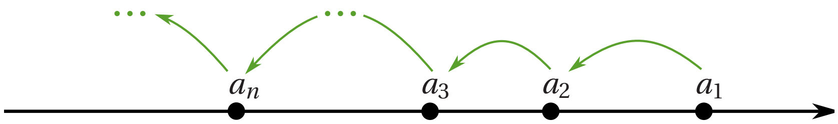
Intuitivamente um a sequência é *monótona* se ela vai sempre para a direita ou sempre para a esquerda. Mais precisamente, a_n é monótona quando é crescente

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$$



ou quando é decrescente

$$\cdots \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \cdots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$$



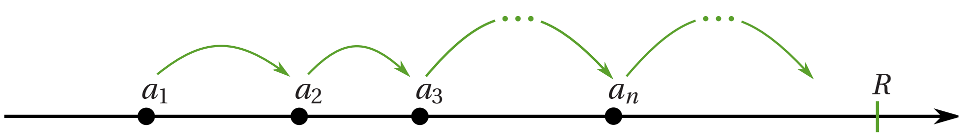
Exemplos

1) As sequências $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = n$ são monótonas.

2) A sequência $c_n = (-1)^n$ não é monótona.

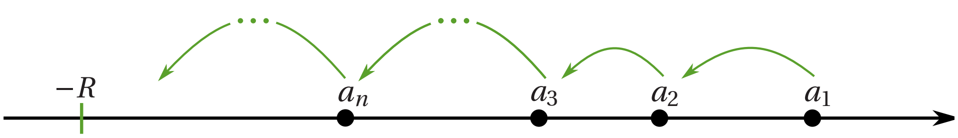
Quando uma sequência é monótona e limitada, existe uma constante positiva R que limita todos os valores da sequência por cima

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq R$$



ou tal que $-R$ limita todos os valores da sequência por baixo

$$-R \leq \cdots \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1$$



Exemplos

1) A sequência $a_n = \frac{1}{n}$ é monótona e limitada.

2) A sequência $b_n = n$ é monótona porém não é limitada.

A seguinte proposição, demonstrada no apêndice, nos dá um critério indireto para saber se uma sequência monótona tem ou não limite.

Proposição 2.6

Seja a_n uma sequência monótona. Então

(A) Se a_n é limitada, então $\lim a_n = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e

(B) Se a_n não é limitada, então $\lim a_n = \pm\infty$.

Exemplo

Vamos retornar à sequência dada por

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2} \\
a_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \\
a_3 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \\
a_4 &= \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
&\vdots \\
a_n &= \sqrt{2+a_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Vimos que, se a_n tem limite então esse limite é 2. Observe que isso não garante que a_n tem limite, nem se calcularmos mil termos $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$ e percebermos que eles estão se aproximando de 2: à partir do milésimo primeiro termo a sequência poderia se afastar de 2. Para mostrar que de fato $a_n \to 2$, vamos mostrar que a_n é limitada e crescente.

Limitada: afirmamos que $a_n \leq 2$ para todo n. É imediato que

$$a_1 = \sqrt{2} \leq 2$$

Em seguida temos $2 + a_1 \leq 4$, portanto

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} \leq 2$$

Em seguida temos $2 + a_2 \leq 4$, portanto

$$a_3 = \sqrt{2 + a_2} \leq 2$$

e assim em diante até

$$a_{n-1} \leq 2$$

em seguida temos $2 + a_{n-1} \leq 4$, portanto

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \leq 2$$

para todo n.

Crescente: afirmamos que $a_n < a_{n+1}$ para todo n. Temos

$$2 \leq 2 + \sqrt{2}$$

e como $\sqrt{x}$ é crescente, segue que

$$a_1 = \sqrt{2} < a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

em seguida temos

$$2 + \sqrt{2} < 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

de modo que

$$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

e assim em diante até

$$a_{n-1} < a_n$$

em seguida temos

$$2 + a_{n-1} < 2 + a_n$$

de modo que

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} < a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

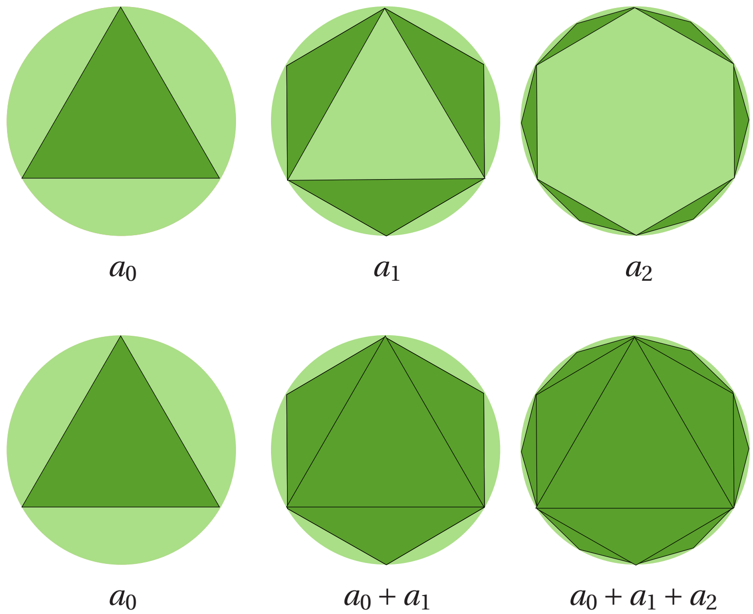
para todo n.

Possui limite: Uma vez que a_n é crescente e limitada, segue que a_n possui limite, como queríamos.

Observe que o cálculo do limite de algumas sequências do Cálculo 2 pode ser bem diferente do cálculo do limite de funções do Cálculo 1, especialmente as sequências com um número crescente de parcelas ou de fatores e as sequências definidas por recorrência.

2.2 Séries

As séries expressam a ideia de somas com infinitas parcelas, que é uma das ideias fundamentais do Cálculo 2. Por exemplo, uma maneira de aproximar a área de uma circunferência de raio 1 usando apenas a área de triângulos é começar com a área a_0 do triângulo inscrito, a essa área somar a área a_1 de três triângulos apoiados nos lados do triângulo anterior, a essas duas áreas somar a área a_2 de seis triângulos apoiados nos lados dos triângulos anteriores, e assim em diante.



Quanto maior n, mais próximo a soma $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ fica da área da circunferência. Assim, a soma das infinitas parcelas $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ seria a área da circunferência: mas o que é uma soma de infinitas parcelas?

Mais geralmente, dada uma sequência a_n, queremos analisar a soma dos seus infinitos termos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

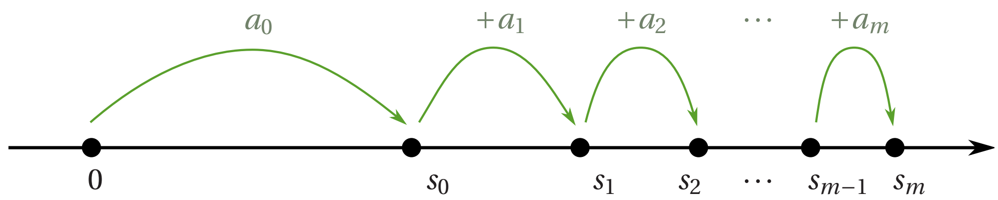
denominada de *série de* a_n. Para isso, a partir da lista horizontal original

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

denominada agora *sequência das parcelas* da série de a_n, consideramos a seguinte lista vertical

$$\begin{array}{rcl} s_0 & = & a_0 \\ s_1 & = & a_0 + a_1 \\ s_2 & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ & \vdots & \\ s_m & = & a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\ & \vdots & \end{array}$$

denominada *sequência das somas parciais* da série de a_n, cujo termo geral s_m é denominado *m-ésima soma parcial de a_n*.



A série de a_n é definida pelo limite das somas parciais de a_n

$$\lim_{m\to\infty} s_m = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Observe que fazemos essa soma infinita de modo seriado: somando primeiro a_0, depois somando a_1, depois somando a_2 e assim em diante, por isso damos a essa soma infinita o nome de série. Muitas vezes, será conveniente utilizarmos a seguinte notação de somatório.

Notação

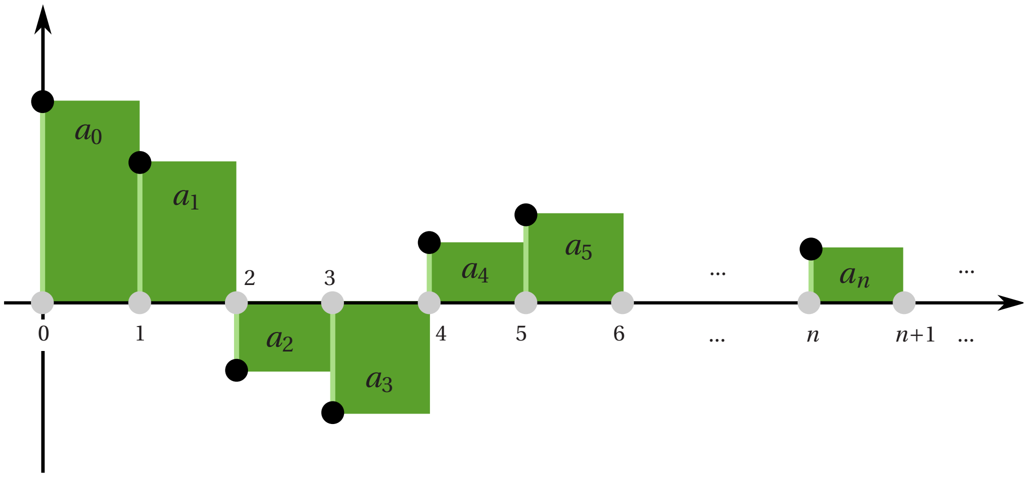
1) A m-ésima soma parcial de a_n é denotada por

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

2) A série de a_n é denotada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Uma maneira de visualizar uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é visualizar a sequência das parcelas a_n como uma função de n, e observar que o valor de cada parcela a_n pode ser visualizado como a área de um retângulo de altura a_n e base 1. Assim, a série pode ser visualizada como a soma da área de todos esses retângulos.



Temos as seguintes definições básicas sobre séries numéricas.

Definições

Dizemos que a série numérica

1) Converge: Quando $\lim s_m = s \in \mathbb{R}$ e escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$$

2) Diverge: Quando $\lim s_m$ não existe ou quando $\lim s_m = \pm\infty$. Nesse último caso escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$$

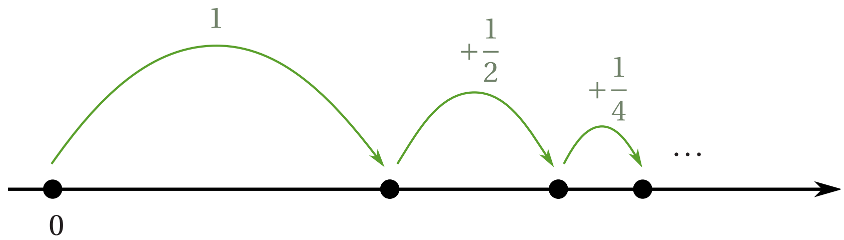
e dizemos que a série *diverge para* $\pm\infty$.

Exemplos

1) A série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

é a soma de *todos* os termos da progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.



A sequência das suas parcelas é dada por

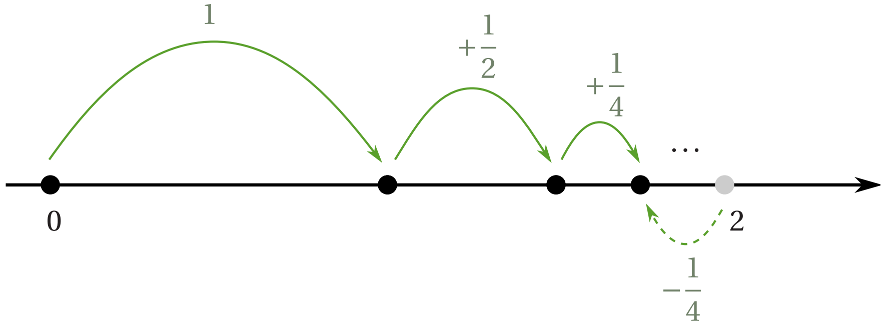
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\ &\vdots \end{aligned}$$

É possível observar geometricamente que

$$s_m = 2 - \frac{1}{2^m}$$



o que será provado mais adiante. Segue que

$$\lim s_m = 2$$

de modo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2.$$

converge.

2) Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 1 \\ s_2 & = & 1+1 \\ s_3 & = & 1+1+1 \\ & \vdots & \\ s_m & = & \overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{m \text{ vezes}} \\ & \vdots & \end{array}$$

Segue que

$$\lim s_m = \lim m = \infty$$

de modo que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots+1+\cdots = \infty.$$

diverge para ∞.

3) Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{array}{rcl} s_0 & = & 1 \\ s_1 & = & 1-1=0 \\ s_2 & = & 1-1+1=1 \\ s_2 & = & 1-1+1-1=0 \\ & \vdots & \\ s_m & = & \begin{cases} 1, & m \text{ par} \\ 0, & m \text{ ímpar} \end{cases} \\ & \vdots & \end{array}$$

Segue que $\lim s_m$ não existe, de modo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

apenas diverge.

Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, é intuitivo que as parcelas a_n da soma se tornam cada vez menores. De fato, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim a_n = 0$$

Prova:

Como a série converge, temos que $\lim s_m = s \in \mathbb{R}$. Temos que as somas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} s_{n-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

Subtraindo, obtemos que

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

de modo que

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0.$$

uma vez que

$$\lim s_n = s = \lim s_{n-1}$$

■

Teste da divergência

Lendo o resultado anterior anterior de uma outra maneira temos o seguinte critério para divergência de uma série numérica.

Proposição 2.8: Teste da divergência

$$\lim a_n \begin{cases} \neq 0 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ = 0 & \Longrightarrow \text{inconclusivo} \end{cases}$$

Prova:

Se a série convergisse, pelo resultado anterior, deveríamos ter $\lim a_n = 0$. Logo, se $\lim a_n \neq 0$, a série não pode convergir e portanto a série diverge. Quando $\lim a_n = 0$, tanto a série pode convergir, como no caso da série geométrica de razão $\frac{1}{2}$, quanto a série pode divergir, como no caso da série harmônica, que será analisada na próxima seção. ■

Exemplos

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+\cdots$ diverge, pelo Teste da Divergência, pois o limite de suas parcelas é $\lim 1 \neq 0$.

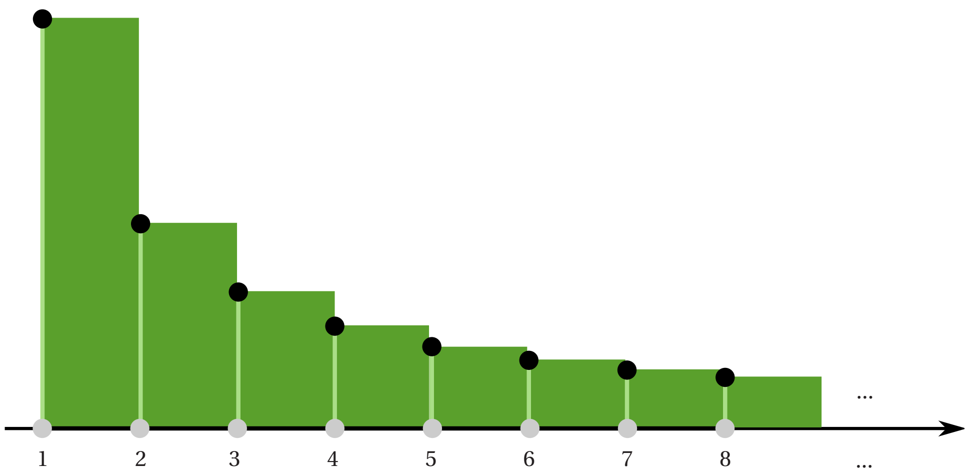
2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots$ diverge, pelo Teste da Divergência, pois o limite de suas parcelas é $\lim(-1)^n \neq 0$.

Observe que nos exemplos acima pudemos concluir que as séries em questão divergem sem olhar para suas somas parciais: olhamos apenas para o termo geral e, como ele não tende a zero, a série diverge. Porém, o Teste da Divergência é inconclusivo quando as parcelas tendem a zero.

SÉRIE HARMÔNICA

A *série harmônica* é dada pela soma dos termos da sequência harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$



A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 \\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
s_m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Suas parcelas são tais que

$$\lim \frac{1}{n} = 0$$

mas, ainda assim, vale o seguinte resultado.

Proposição 2.9

A série harmônica diverge, mais precisamente

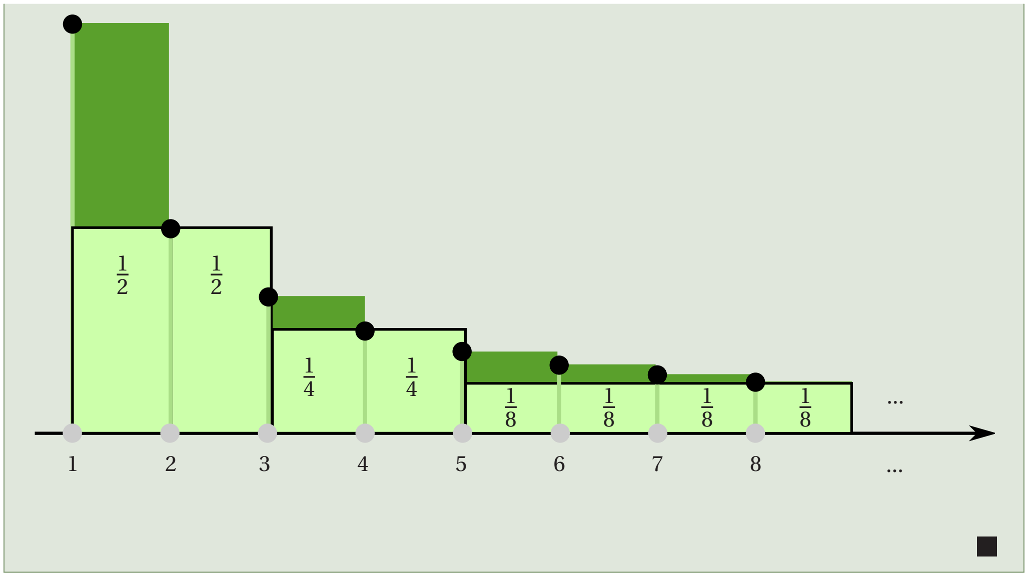
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Prova:

Vamos dar uma idéia da demonstração: uma maneira mais rigorosa de provar isso será vista mais adiante. A idéia é organizar os termos da soma infinita da série da seguinte maneira (veja figura abaixo)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \quad & 1 && \geq \tfrac{1}{2} \\
& + \frac{1}{2} && \geq \tfrac{1}{2} \\
& + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \\
& + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{2} \\
& + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{16} && \geq \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{2} \\
& + \cdots
\end{aligned}$$

de modo que, somando um número suficiente de termos, as somas parciais da série crescem de meio em meio e assim tendem ao infinito. Segue que a série harmônica diverge para o infinito.



SÉRIES TELESCÓPICAS

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é denominada *telescópica* quando seu termo geral é da forma

$$a_n = r_n - r_{n+1}$$

A sequência das suas parcelas é dada por

$$r_0 - r_1, \quad r_1 - r_2, \quad r_2 - r_3, \cdots, r_n - r_{n+1}, \cdots$$

Nesse tipo de série, há o cancelamento da segunda parte de cada termo com a primeira parte do termo seguinte, de modo que nas somas parciais sobram apenas a primeira parte do primeiro termo e a segunda parte do último termo.

$$\begin{aligned}
s_0 &= r_0 - r_1 \\
s_1 &= (r_0 - \cancel{r_1}) + (\cancel{r_1} - r_2) = r_0 - r_2 \\
s_2 &= (r_0 - \cancel{r_1}) + (\cancel{r_1} - \cancel{r_2}) + (\cancel{r_2} - r_3) = r_0 - r_3 \\
&\vdots \\
s_m &= (r_0 - \cancel{r_1}) + (\cancel{r_1} - \cancel{r_2}) + (\cancel{r_2} - \cancel{r_3}) + \cdots + (\cancel{r_m} - r_{m+1}) = r_0 - r_{m+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = r_0 - \lim r_{m+1}$$

quando esse limite existe. As séries telescópicas são um dos raros casos onde conseguimos determinar o valor da série, quando ela converge.

Exemplos

1) A série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 4} + \cdots$$

converge ou diverge?

Temos que

$$\lim \frac{1}{n(n-1)} = 0$$

de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Suas m-ésima soma parcial é dada por

$$s_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)}$$

Uma vez que o termo geral se decompõe em duas partes (verifique!)

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

segue que em cada soma parcial

$$\begin{aligned} s_m &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cdots - \cancel{\frac{1}{m-1}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{m-1}} - \frac{1}{m}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{m} \end{aligned}$$

sobram apenas a primeira parte do primeiro termo e a segunda parte do último termo. Segue que

$$\lim s_m = \lim 1 - \frac{1}{m} = 1$$

de modo que a série converge e, mais ainda, que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

2) A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) + \log\left(\frac{4}{5}\right) + \cdots$$

converge ou diverge?

Temos que

$$\lim \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0$$

de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Suas m-ésima soma parcial é dada por

$$s_m = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{m}{m+1}\right)$$

Uma vez que o termo geral se decompõe em duas partes

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \log(n) - \log(n+1)$$

segue que em cada soma parcial

$$\begin{aligned} s_m &= \big(\log(1) - \cancel{\log(2)}\big) + \big(\cancel{\log(2)} - \cancel{\log(3)}\big) + \big(\cancel{\log(3)} - \cdots \\ &\quad \cdots - \cancel{\log(m)}\big) + \big(\cancel{\log(m)} - \log(m+1)\big) \\ &= -\log(m+1) \end{aligned}$$

sobra apenas a segunda parte do último termo. Segue que

$$\lim s_m = \lim -\log(m+1) = -\infty$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\infty$$

SÉRIES GEOMÉTRICAS

A soma de *todos* os termos da progressão geométrica de razão x fornece a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

conhecida como *série geométrica de razão* x. A sequência das suas parcelas é dada por

$$1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots$$

enquanto a sequência das suas somas parciais é dada por

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= 1 + x \\ s_2 &= 1 + x + x^2 \\ &\vdots \\ s_m &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^m \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para que valores da razão x a série converge?

Primeiro vamos investigar para que valores de x as parcelas tendem a zero.

Proposição 2.10

Temos que

$$\boxed{\begin{array}{lcl} |x| < 1 & \Longrightarrow & \lim_{n\to\infty} x^n = 0 \\ |x| \geq 1 & \Longrightarrow & \lim_{n\to\infty} x^n \neq 0 \end{array}}$$

Prova:

Se $x = 0$ então $x^n = 0$ para todo n e então $\lim x^n = 0$. Logo, podemos supor que $x \neq 0$. Temos que

$$\begin{aligned} |x^n| &= |x|^n \\ &= e^{\log|x|^n} \\ &= e^{n\log|x|} \end{aligned}$$

Segue que

$$\lim_{n\to\infty} |x^n| = \lim_{n\to\infty} e^{n\log|x|} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

uma vez que

$$\begin{cases} \log|x| < 0, & |x| < 1 \\ \log|x| = 0, & |x| = 1 \\ \log|x| > 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

O resultado segue, pois

$$\lim_{n\to\infty} |x^n| = 0$$

se e só se

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

■

Agora vamos determinas para quais razões x a série geométrica converge.

Proposição 2.11

Temos que

$$|x| < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$|x| \geq 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ diverge}$$

Prova:

Se $|x| \geq 1$, temos que $\lim x^n \neq 0$, de modo que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge, pelo Teste da Divergência.

Se $|x| < 1$, temos que $\lim x^n = 0$, de modo que o Teste da Divergência é inconclusivo. Consideramos então as somas parciais

$$s_m = 1 + x + x^2 + \cdots + x^m$$

e observamos que

$$x s_m = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{m+1}$$

se parece muito com s_m. De fato, subtraindo um do outro,

$$(1-x)s_m = 1 - x^{m+1}$$

Como $1 - x \neq 0$, podemos isolar s_m e obter

$$s_m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

Pelas regras de limite, segue que

$$\lim s_m = \frac{1}{1-x}.$$

onde usamos que $\lim\limits_{m\to\infty} x^{m+1} = 0$. Isso mostra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

quando $|x| < 1$, como queríamos. ■

As séries geométricas são mais um dos raros casos onde conseguimos determinar o valor da série, quando ela converge.

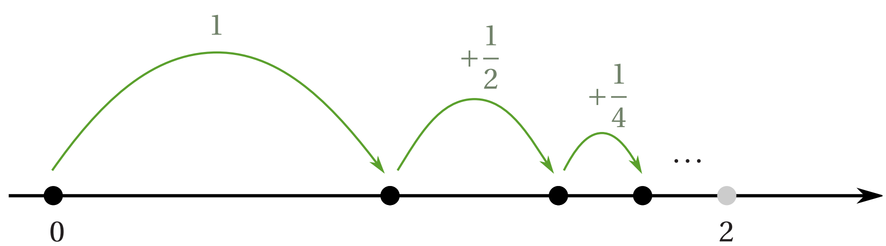
Exemplos

1) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

é a série geométrica de razão $1/2$, portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

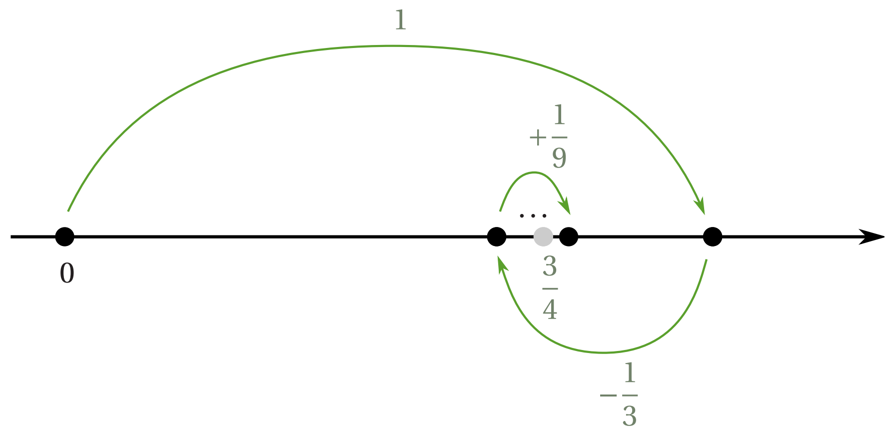


2) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n} + \cdots$$

é a série geométrica de razão $-1/3$, portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$$



3) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n = 1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots$$

é a série geométrica de razão 2, portanto diverge, uma vez que $|2| \geq 1$.

4) Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots$$

é a série geométrica de razão -1, portanto diverge, uma vez que $|-1| = 1 \geq 1$.

Operações com séries

Quando as séries são convergentes, a soma de duas séries e o produto de uma série por uma constante sempre podem ser escritas como uma nova série.

Proposição 2.12

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem, então

(S) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

(C) $\sum_{n=0}^{\infty} c a_n$ converge e

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n = c\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)$$

onde c é uma constante.

Prova:

Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergem, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

são números reais.

(S) Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}(a_n+b_n) &= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_m+b_m)\\ &= (a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m)+(b_0+b_1+b_2+\cdots+b_m)\\ &= \sum_{n=0}^{m}a_n+\sum_{n=0}^{m}b_n\end{aligned}$$

Usando a regra do limite da soma, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(a_n+b_n)\\ &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}b_n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\end{aligned}$$

Para $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)$, a prova é a mesma.

(C) Temos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}ca_n &= ca_0+ca_1+ca_2+\cdots+ca_m\\ &= c(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_m)\\ &= c\sum_{n=0}^{m}a_n\end{aligned}$$

Usando a regra do limite do produto, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}ca_n &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}ca_n\\ &= c\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}a_n\\ &= c\sum_{n=0}^{\infty}a_n\end{aligned}$$

■

Exemplos

1) Combinando duas séries geométricas que convergem temos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{(-1)^n}{3^n}\right) \overset{(S)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

2) A seguinte série se parece com uma geométrica de razão $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\overset{(C)}{=} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2}2=1$$

logo ela converge para 1. De outro modo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{2^n}$$

$$\overset{(C)}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$= \frac{1}{2}2=1$$

3) A seguinte série se parece com uma geométrica de razão $\frac{1}{3}$, mas começa dois termos adiante

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots \\ &\overset{(C)}{=} \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{9}\frac{3}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

logo ela converge para $\frac{1}{6}$. De outro modo

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^2}\frac{1}{3^n} \\ &\overset{(C)}{=} \frac{1}{3^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = \\ &= \frac{1}{9}\frac{3}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Séries de potências

Agora podemos definir rigorosamente um polinômio infinito como a série de potências

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Mais precisamente, fixando um valor para x, consideramos as parcelas

$$c_0,\ c_1 x,\ c_2 x^2, \ldots,\ c_n x^n, \ldots$$

e as somas parciais

$$\begin{aligned}
s_0 &= c_0 \\
s_1 &= c_0 + c_1 x \\
s_2 &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\
&\vdots \\
s_m &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim, uma série de potências é o somatório infinito de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

com infinitos *coeficientes*

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$$

Para cada valor fixado de x obtemos uma série numérica: dizemos que a série de potências converge em x quando essa série numérica converge. Em $x = 0$ a série de potências converge para seu coeficiente constante (de grau zero) uma vez que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0 + c_1 0 + c_2 0^2 + \cdots + c_n 0^n + \cdots = c_0$$

Em quais outros valores de x a série de potências converge?

Exemplos

1) Todo polinômio é uma série de potências. Por exemplo, o polinômio

$$1 - x + 7x^3$$

de grau 3 é uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, com coeficientes dados por

$$c_0 = 1, \quad c_1 = -1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 7 \quad \text{e} \quad c_n = 0 \quad \text{para } n > 3.$$

Mais geralmente, um polinômio

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_k x^k$$

de grau k é uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com coeficientes dados por

$$c_0 = b_0, \quad c_1 = b_1, \quad \ldots, \quad c_k = b_k \quad \text{e} \quad c_n = 0 \quad \text{para } n > k.$$

2) A série geométrica de razão x pode ser vista como uma série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

com coeficientes

$$1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

Já vimos que a série geométrica converge se, e só se, $x \in (-1, 1)$.

3) Considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots + \frac{1}{n} x^n + \cdots$$

com coeficientes

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Note que o termo constante é nulo e por isso $c_0 = 0$. Para que valores de x ela converge?

Por exemplo, para $x = 1$ obtemos a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

que diverge.

4) Na introdução vimos a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} x^n + \cdots$$

com coeficientes

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\ \frac{1}{n!},\ \ldots$$

Para que valores de x ela converge?

Por exemplo, para $x = 1$ obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

ela converge?

Cada série de potências dá origem a diversas séries numéricas, uma para cada valor de x fixado. Portanto, precisamos de mais ferramentas para decidir quando uma série numérica converge ou diverge.

Operações com séries de potências

Assim como os polinômios, a soma de duas séries de potências é uma série de potência, assim como o produto de uma série de potências por uma potência também é uma série de potências.

Proposição 2.13

Se, para x, a séries $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ convergem, então

(S)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$$

(P)

$$x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k}$$

Prova:

Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n + d_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$$

e também que

$$x^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^k c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+k}$$

■

É importante observar que, para escrever a soma de duas séries de potências como uma única série de potências, devemos observar se os limites dos somatórios são os mesmos e se podemos colocar x^n em evidência, como na demonstração acima. Por exemplo, considere a seguinte expressão

$$x^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

A expressão pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Se somarmos essas duas séries de potências, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} x^{n+3} + \frac{1}{n} x^n \right) \tag{2.1}$$

e não conseguimos escrever a expressão acima como uma série de potências, uma vez que não podemos colocar x^{n+3} em evidência, pois aparece apenas na primeira parcela dentro dos parênteses, e também não podemos colocar x^n em evidência, pois aparece apenas na segunda parcela dentros do parênteses. O que devemos fazer, antes de tentarmos somar as duas séries de potências, é reescrevermos a primeira série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3}$$

de modo que o fator x^{n+3} seja substituido pelo o fator x^n. Isso pode ser feito através de uma substituição no índice do somatório. Definimos $m = n+3$, de modo $n = m-3$. Quando $n = 1$, temos que $m = 4$, e quando $n \to \infty$, temos que $m \to \infty$. Efetuando essa substituição na série acima obtemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} = \sum_{m=4}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} x^m \tag{2.2}$$

Substituindo a expressão 2.2 na expressão 2.1, obtemos a expressão

$$\sum_{m=4}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} x^m + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Se tentarmos somar as duas séries de potências, encontramos agora dois obstáculos. Primeiro as letras usadas como índices dos somatório são diferentes. Como a letra usada para o índice do somatório é indiferente, podemos trocar uma delas, de modo que as duas letras voltem a coincidir. Como estamos acostumados com a letra n, vamos volar a utilizar essa letra no primeiro somatório, de modo que a expressão acima se torna igual a

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

O segundo obstáculo é que os limites dos somatórios não são os mesmos. Para isso, podemos separar as primeiras parcelas da série cujo limite inferiror começa antes, nesse caso a segunda série na expressão acima, de modo que

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Podemos então transformar a expressão acima na série de potências

$$x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{n} \right) x^n$$

cujos coeficientes são

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3}, \quad c_n = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{1}{n}$$

para $n \geq 4$.

Exemplo

Temos que

$$\begin{aligned} x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^3 x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n+3} \\ &= \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} x^m \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^n \end{aligned}$$

Ou seja, temos que

$$x^3\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots\right) = x^3 + x^4 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots$$

2.3 Testes de convergência

Vamos desenvolver critérios indiretos que, em algumas situações, vão nos permitir decidir se uma dada série numérica converge ou diverge sem precisarmos manipular suas somas parciais. O lado ruim desses critérios indiretos é que não vamos saber o valor para o qual série converge ou diverge, mas apenas se ela converge ou diverge.

Teste da cauda

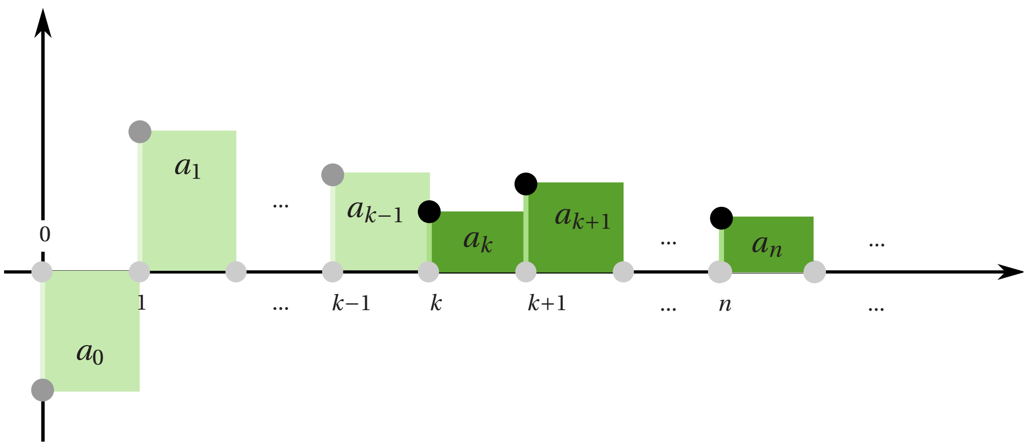
Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

$$\begin{aligned} &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots) \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

onde a primeira soma é finita e a segunda soma é infinita. Essa segunda soma é a k-*ésima cauda* da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, dada por

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n + \cdots$$



Proposição 2.14: Teste da Cauda

$$\text{A cauda } \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \text{a série } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$\text{A cauda } \sum_{n=k}^{\infty} a_n \text{ diverge} \iff \text{a série } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge}$$

Prova:

Para $m \geq k$, temos que a soma parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ fica

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m) \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} a_n + \sum_{n=k}^{m} a_n\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

é uma quantidade finita que não depende de m, o resultado segue. ■

TESTE DA COMPARAÇÃO

Temos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ é tal que suas somas parciais s_m formam uma sequência crescente

$$\begin{aligned} s_0 &= |a_0| \\ s_1 &= |a_0| + |a_1| \\ s_2 &= |a_0| + |a_1| + |a_2| \\ &\vdots \\ s_m &= |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| \\ s_{m+1} &= |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| + |a_{m+1}| \\ &\vdots \end{aligned}$$

Neste caso, o limite $\lim s_m$ sempre existe e temos então apenas duas possibilidades

Propriedades

1) Converge: se o limite $\lim s_m$ é finito e, nesse caso, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

2) Diverge pro infinito: se o limite $\lim s_m$ é infinito e, nesse caso, escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \infty$$

A mesma análise acima também vale para as caudas, de modo que sempre podemos escrever

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \infty.$$

Proposição 2.15: Teste da comparação

Se

$$0 \leq |a_n| \leq |b_n| \qquad \text{para } n \geq k$$

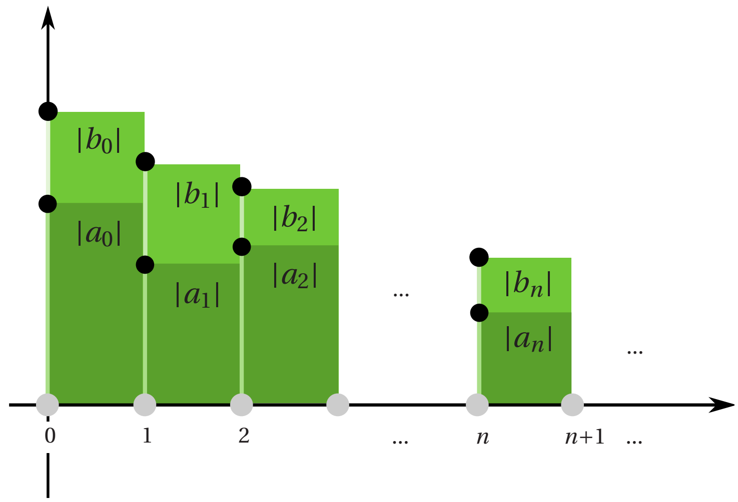
então

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |b_n|$$

de modo que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| = \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} |b_n| = \infty$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \infty$$



Prova:

Se

$$0 \leq |a_n| \leq |b_n| \qquad \text{para } n \geq k$$

então

$$\sum_{n=k}^{m} |a_n| \leq \sum_{n=k}^{m} |b_n|$$

Pela monotonicidade do limite de sequências, segue que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |b_n|$$

Se $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| = \infty$ então a desigualdade acima "empurra" a outra cauda para que $\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| = \infty$.

Se $\sum_{n=k}^{\infty} |b_n| < \infty$ então a desigualdade acima "empurra" a outra cauda para que $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n| < \infty$. ■

Exemplo

A *série 2-harmônica* é a série dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Ela converge ou diverge?

Observe que ela tem termos positivos, e também que seu termo geral é tal que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$$

para todo $n \geq 2$. Por comparação, segue que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n} = 1 < \infty$$

Pelo Teste da cauda, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Assim, enquanto a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, a série 2-harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Teste da convergência absoluta

Vamos ver a seguir que a convergência da *série dos valores absolutos* implica na convergência da série original.

Proposição 2.16

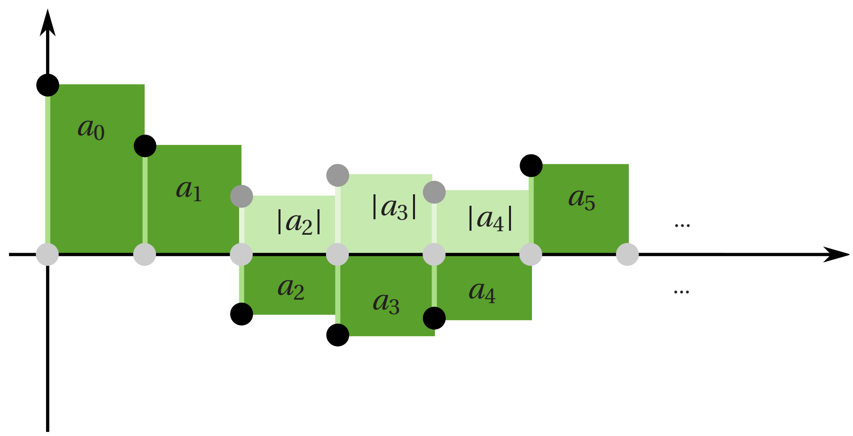
Se

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots < \infty}$$

então

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots}$$

converge.



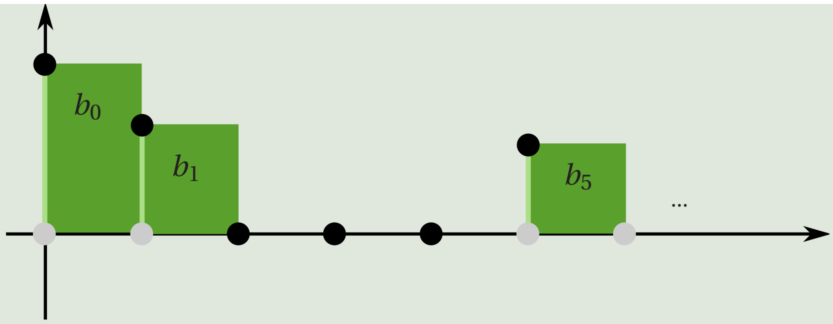
Prova:

Separamos as partes positiva e negativa de a_n, escrevendo

$$a_n = b_n + c_n$$

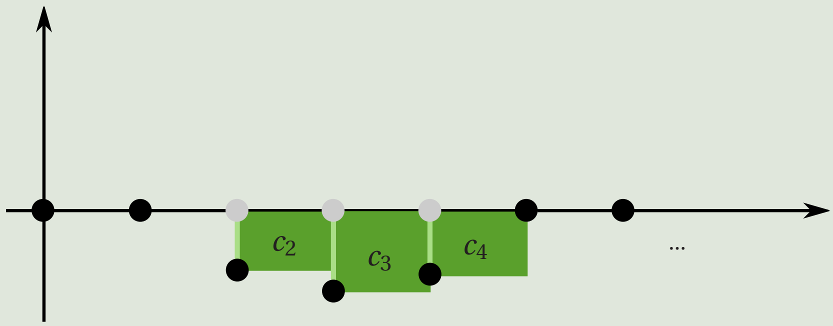
onde

$$b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}$$



e

$$c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ a_n, & a_n < 0 \end{cases}$$



Temos que

$$0 \leq b_n = |b_n| \leq |a_n|$$

e também que

$$0 \leq -c_n = |c_n| \leq |a_n|.$$

Pelo teste da comparação, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

e também que

$$\sum_{n=0}^{\infty} -c_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Pela regra da multiplicação por constantes, temos que

$$(-1)\sum_{n=0}^{\infty} -c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

converge. Pela regra da soma, segue que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} b_n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n + c_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\end{aligned}$$

converge. ■

Quando a série dos valores absolutos converge, dizemos que a série original *converge absolutamente*. O resultado acima mostra que toda série que converge absolutamente de fato converge. Mas existem séries que convergem, mas *não* convergem absolutamente.

Exemplos

1) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

2) Vamos ver a seguir que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge. Entretanto ela não converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.$$

Uma série que converge, mas não converge absolutamente, é chamada de série *condicionalmente convergente*.

TESTE DA SÉRIE ALTERNADA

A proposição a seguir, denominada *teste da série alternada*, afirma que são sempre convergentes as séries cujos termos alternam o sinal e cujo valor absoluto desses termos decresce para zero.

Proposição 2.17

Se $a_n = |(-1)^n a_n|$ é decrescente e $\lim a_n = 0$, então

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots}$$

converge.

Prova:

Considere

$$s_{2k} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{2k-3} + a_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k}$$

Como $a_n > 0$ e $a_n - a_{n+1} > 0$ para todo n, temos que $s_{2k} > 0$. Temos também que

$$s_{2k} = s_{2k-2} - a_{2k-1} + a_{2k} < s_{2k-2}$$

de modo que

$$0 < s_{2k} < s_{2k-2} < \cdots < s_2 < s_0$$

Segue que s_{2k} é uma sequência decrescente e limitada, de modo que existe s tal que

$$\lim s_{2k} = s.$$

Além disso, temos que

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$$

de modo que

$$\lim s_{2k+1} = \lim s_{2k} - \lim a_{2k+1} = s$$

uma vez que, pelo teorema do sanduíche, $\lim a_{2k+1} = 0$, já que $0 < a_{2k+1} < a_k$. Como a sequência dos s_m com m par e com m ímpar convergem para o mesmo s, não é difícil mostrar que a $\lim s_m = s$, mostrando que a série converge. ■

Exemplos

1) Temos que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

converge, uma vez que é uma série alternada e que

$$\left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

decresce para zero. Mas não converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

2) O que aconteceria se na série harmônica alternada tentássemos somar primeiro as parcelas positivas e depois as parcelas negativas?

A soma de suas parcelas positivas é dada por

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

Como podemos colocar o fator $\frac{1}{2}$ em evidência, segue que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

pois apareceu $\frac{1}{2}$ vezes a série harmônica, que diverge para o infinito. Por que isso aconteceu? Porque, apesar da série harmônica alternada convergir, ela não converge absolutamente. Sua convergência depende da ordem que somamos os termos. Se somarmos alternadamente as parcelas positivas e negativas, a série converge pois há cancelamentos. Se somarmos primeiro as parcelas positivas e depois as parcelas negativas, a série diverge. É por essa razão que, nesse caso, dizemos que a śerie *converge condicionalmente*, pois a convergência depende da ordem que as parcelas são somadas.

3) Temos que

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log(n)}$$

converge, uma vez que é uma série alternada e que

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n\log(n)}\right|=\frac{1}{n\log(n)}$$

decresce para zero. Mas não converge absolutamente, uma vez que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n\log(n)}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log(n)}=\infty$$

4) Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n}$$

não converge, pois apesar de ser uma série alternada e de

$$\left|(-1)^n \frac{n+1}{n}\right| = \frac{n+1}{n}$$

ser decrescente, este não decresce pra zero, portanto o Teste da série alternada não se aplica. Porém, como o termo geral não tende a zero, a série diverge pelo Teste da divergência.

TESTE DA RAIZ

Se tomamos o termo geral x^n de uma série geométrica com razão x e extraímos a raiz n-ésima do seu módulo, obtemos de volta o módulo da razão

$$\sqrt[n]{|x^n|} = |x|$$

Como a convergência de uma série de uma série geométrica depende do módulo de sua razão ser menor ou maior que um, definimos para uma série numérica qualquer o módulo de sua razão no infinito pelo seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

e obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.18: Teste da raiz

Temos que

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ > 1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ = 1 & \Longrightarrow \text{inconclusivo} \end{cases}$$

Prova:

A idéia é comparar a série dos módulos com uma série geométrica.

1) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, então $\sqrt[n]{|a_n|}$ fica abaixo de 1 para n grande e, portanto, abaixo de algum $x < 1$ positivo para n maior que algum k, isto é

$$\sqrt[n]{|a_n|} < x < 1 \qquad \text{para } n \geq k$$

Elevando ambos os lados a n-ésima potência temos

$$|a_n| < x^n \qquad \text{para } n \geq k$$

e então as caudas das respectivas séries satifazem

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} |a_n| &< \sum_{n=k}^{\infty} x^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} < \infty \end{aligned}$$

onde a série geométrica converge pois sua razão satisfaz $0 < x < 1$. Pelo Teste da cauda, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$. Pelo Teste da convergência absoluta, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

2) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, então, existe k, tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \qquad \text{para } n \geq k$$

Elevando ambos os lados a n-ésima potência, temos

$$|a_n| > 1 \qquad \text{para } n \geq k$$

o que mostra que $\lim |a_n| \neq 0$ e, portanto, que $\lim a_n \neq 0$. Pelo Teste da divergência, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

3) Para mostrar que o caso $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ é inconclusivo, vamos dar um exemplo em que essa conta é satisfeita mas a série diverge e dar um outro exemplo em que essa conta é satisfeita mas a série converge.

A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e é tal que

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

A série 2-harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e é tal que

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

■

Exemplos

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge?

Pelo Teste da raiz

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \frac{(\lim \sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

segue então que a série converge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$ converge?

Pelo Teste da raiz

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{n^3}\right|} = \frac{3}{(\lim \sqrt[n]{n})^3} = 3 > 1$$

segue então que a série diverge.

3) Para quais valores de x a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge?

O Teste da raiz permite que testemos diversos valores de x ao mesmo tempo: pelo Teste da raiz

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n} x^n\right|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|$$

segue então que a série converge se $|x| < 1$, e diverge se $|x| > 1$. Para $|x| = 1$, isto é, para $x = 1$ ou $x = -1$ o teste da raiz não se aplica e temos que substituir esses valores diretamente na série de potências.

Para $x = 1$ a série de potências fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que diverge pois é a série harmônica.

Para $x = -1$ a série de potências fica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que converge pois é a série harmônica alternada.

Concluímos que a série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge se $x \in [-1, 1)$ e diverge para x fora desse intervalo.

TESTE DA RAZÃO

Se tomamos o termo geral x^n de uma série geométrica com razão x e extraímos a raiz n-ésima do seu módulo, obtemos de volta o módulo da razão

$$\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|$$

Como a convergência de uma série de uma série geométrica depende do módulo de sua razão ser menor ou maior que um, definimos para uma série numérica qualquer o módulo de sua razão no infinito pelo seguinte limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

e obtemos o seguinte resultado.

Proposição 2.19: Teste da razão

Temos que

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} <1 & \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \\ >1 & \Longrightarrow \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \\ =1 & \Longrightarrow \quad \text{inconclusivo} \end{cases}$$

Prova:

A idéia é, novamente, comparar a série dos módulos com uma série geométrica.

1) Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, então $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ fica abaixo de 1 para n grande e, portanto, abaixo de algum $x < 1$ positivo para n maior que algum k, isto

é
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < x < 1 \qquad \text{para } n \geq k$$
Segue que
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|, \quad \cdots \quad , \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|, \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < x$$
Escrevendo
$$\begin{aligned}
|a_n| &= |a_k|\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|\cdots\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \\
&= |a_k|\underbrace{\overbrace{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}^{<x}\overbrace{\left|\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right|}^{<x}\cdots\overbrace{\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|}^{<x}\overbrace{\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|}^{<x}}_{n-k \text{ fatores}} \\
&< |a_k|x^{n-k} \qquad \text{para } n \geq k
\end{aligned}$$
Logo
$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty}|a_n| &< |a_k|\sum_{n=k}^{\infty}x^{n-k} \\
&= |a_k|\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) \\
&= |a_k|\frac{1}{1-x} < \infty
\end{aligned}$$
onde a série geométrica converge pois sua razão satisfaz $0 < x < 1$. Pelo Teste da cauda, segue que $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty$. Pelo Teste da convergência absoluta, segue que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge.

2) Se $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ então, existe k, tal que
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{para } n \geq k$$

de modo que

$$|a_{n+1}| > |a_n| \qquad \text{para } n \geq k$$

Isso mostra que $|a_n|$ é positiva e cresecente para $n \geq k$, de modo que $\lim |a_n| \neq 0$ e, portanto, que $\lim a_n \neq 0$. Pelo Teste da divergência, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

3) Para mostrar que o caso $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ é inconclusivo, vamos dar um exemplo em que essa conta é satisfeita mas a série diverge e dar um outro exemplo em que essa conta é satisfeita mas a série converge.

A série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge e é tal que

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim \frac{n}{n+1} = 1$$

A série 2-harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge é tal que

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

■

Exemplos

1) Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

O módulo da sua razão no infinito é

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{1}{n!} x^n} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} |x| = \lim \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1$$

para qualquer x fixado. Pelo Teste da razão segue que a série converge para todo x fixado.

2) Considere o polinômio infinito

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

O módulo da sua razão no infinito é

$$\lim \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \lim \frac{n}{n+1} |x| = |x|$$

para qualquer x fixado. Pelo Teste da razão segue que a série converge, quando $|x| < 1$ e diverge quando $|x| > 1$. O Teste da razão não nos diz nada quando $|x| = 1$. Para saber da convergência da série nesse caso, temos que substituir diretamente $x = 1$, obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

pois é a série harmônica, e substituir diretamente $x = -11$, obtendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

que converge, pelo Teste da série alternada. Segue que a série converge se e só se $x \in [-1, 1)$. Se utilizarmos o teste da raiz, chegaremos aos mesmos resultados, uma vez que

$$\lim \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n} x^n \right|} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} |x| = |x|$$

Teste da integral

A integral imprópria pode ser usada para determinar a convergência ou a divergência de algumas séries com termos não negativos e decrescentes.

Proposição 2.20

Se $a_x = a(x)$ é positiva, decrescente e definida para x real com $x \geq k$, então

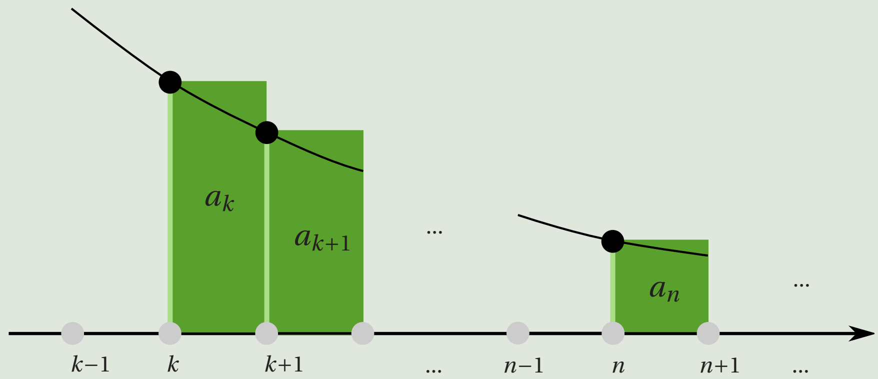
$$\boxed{\int_k^\infty a_n\, dn < \infty \Longrightarrow \sum_{n=k}^\infty a_n < \infty}$$

e

$$\boxed{\int_k^\infty a_n\, dn = \infty \Longrightarrow \sum_{n=k}^\infty a_n = \infty}$$

Prova:

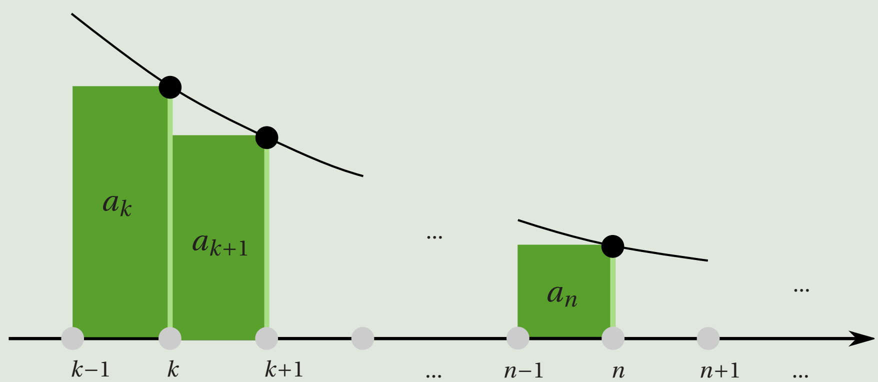
Como $a(x)$ é decrescente e como $a_n = a(n)$, considerando retângulos de base 1 que vão de k a $k+1,\ldots$, de n a $n+1,\ldots$, temos que



de onde segue que

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n \geq \int_k^{n+1} a(x)\,dx$$

Podemos considerar também retângulos de base 1 que vão de $k-1$ a k,..., de $n-1$ a n,..., de modo que



de onde segue que

$$a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n \leq \int_{k-1}^{n} a(x)\,dx$$

Juntando essas duas informações, obtemos que

$$\int_k^{n+1} a(x)\,dx \leq a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n \leq \int_{k-1}^{n} a(x)\,dx$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos que

$$\int_k^\infty a(x)\,dx \le \sum_{n=k}^\infty a_n \le \int_{k-1}^\infty a(x)\,dx$$

Se a integral imprópria $\int_k^\infty a(x)\,dx$ diverge segue da última desigualdade acima que a série de termos sem sinal $\sum_{n=k}^\infty a_n$ diverge.

Se a integral imprópria $\int_k^\infty a(x)\,dx$ converge, então $\int_{k-1}^\infty a(x)\,dx$ também converge, uma vez que

$$\int_{k-1}^\infty a(x)\,dx = \int_{k-1}^k a(x)\,dx + \int_k^\infty a(x)\,dx$$

Segue da última desigualdade acima que $\sum_{n=k}^\infty a_n$ é uma série de termos sem sinal limitada que, portanto, converge.

■

A seguir, alguns exemplos de aplicação do teste da integral.

Exemplos

1) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{n}\,dn = \left[\log(n)\right]_1^\infty = \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

A demonstração do teste da integral nos dá mais informações. Em particular, sabemos que o seguinte limite existe

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \log(m) - \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}$$

uma vez que a sequência é crescente e também é limitada. De fato, temos que

$$\log(m+1) - \log(2) = \int_2^{m+1} \frac{1}{n}\,dn \le \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \le \int_1^m \frac{1}{n} = \log(m)\,dn$$

Multiplicando por menos um, temos que

$$\log(2) - \log(m+1) \geq -\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq -\log(m)$$

Somando $\log(m)$, obtemos

$$\log(2) - \log(m+1) + \log(m) \geq \log(m) - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq 0$$

Segue que

$$0 \leq \log(m) - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \log(m) - \log(m+1) + \log(2) \leq \log(2)$$

O limite γ é chamado de *constante de Euler-Mascheroni* e aparece em diversas fórmulas da matemática e da física.

2) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^2}\, dn = \left[-\frac{1}{n}\right]_1^\infty = 1 < \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots > 1.$$

3) Mais geralmente, para qualquer $p \neq 1$ temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{n^p}\, dn = \left[\frac{n^{1-p}}{1-p}\right]_1^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ \infty & \text{se } p < 1 \end{cases}$$

de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty,$$

quando $p > 1$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty,$$

quando $p < 1$.

Uma vez que já analisamos separademente o caso $p = 1$, temos que a série p-harmônica é tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} < \infty & \text{se } p > 1 \\ = \infty & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

Observe que os testes da razão e da raiz são inconclusivos neste caso, uma vez que

$$\lim \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$$

e que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^p = 1.$$

4) Temos que

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} \, dn = \left[\log(\log(n)) \right]_2^{\infty} = \infty,$$

de modo que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log(n)} = \infty.$$

CAPÍTULO 3

SÉRIES DE POTÊNCIAS

3.1 DOMÍNIO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Nessa seção, vamos retomar o conceito de séries de potências, que agora serão vistas como uma função de x. Nesse ponto, é conveniente fazermos uma analogia com o conceito de função derivada, abordado no início do curso de Cálculo 1.

A derivada de uma função $f(x)$ no ponto x é defnida pelo limite do quociente de Newton de $f(x)$ entre x e $x+h$ quando h tende a zero, dado por

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

A partir da definição de derivada num dado ponto, podemos construir a denominada *função derivada de* $f(x)$, denotada por $f'(x)$, que é dada por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Quando o quociente de Newton pode ser desenvolvido e simplificado, o limite que define a função derivada pode ser determinado como uma função conhecida de x. Por exemplo, considerando $f(x) = x^2$, temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Como

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 2x + h$$

temos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$$

Em relação às séries de potências, a situação é parecida. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ no ponto x é defnida pelo limite da sua m-ésima soma parcial quando m tende para infinito, dado por

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$$

A partir da definição de série de potências num dado ponto, podemos construir a denominada *função série de potências*, denotada por $f(x)$, que é dada por

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} c_n x^n$$

Quando m-ésima soma parcial pode ser desenvolvida e simplificada, o limite que define a função série de potências pode ser determinado como uma função conhecida de x. Por exemplo, considerando a série geométrica de razão x, dada por $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, temos que

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} x^n$$

Como

$$\sum_{n=0}^{m} x^n = 1 + x + x^2 \cdots + x^m = \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x}$$

temos que

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

para todo x tal que $|x| < 1$. Quando x é tal que $|x| \geq 1$, esse limite é infinito ou não existe.

O domínio da função

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

são os valores de x para os quais o limite que define $f(x)$ existe e é um número real, ou seja, é o conjunto

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \text{a série numérica} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{converge}\right\}$$

Observe que 0 sempre está no domínio de uma serié de potências, uma vez que para $x = 0$ temos a série

$$\begin{aligned} f(0) &= c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 + \cdots + c_n \cdot 0^n + \cdots \\ &= c_0 \end{aligned}$$

converge.

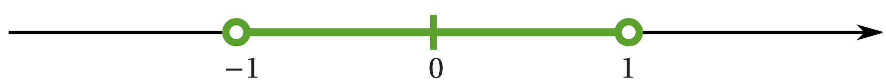
Exemplos

1) A série geométrica de razão x é uma série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

com domínio

$$\left\{x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \text{converge}\right\} = \{x \in \mathbb{R} : \quad |x| < 1\} = (-1, 1)$$



uma vez que a série geométrica converge apenas para esses valores de x.

Já vimos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

2) A série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \end{aligned}$$

tem qual domínio?

Vejamos para quais valores de x a série converge. Fixado x, temos uma série com parcelas

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

Pelo teste da raiz

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right|} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}|x|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \\ &= |x| \end{aligned}$$

de modo que

$$|x| < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{diverge}$$

O Teste da raiz não nos diz o que ocorre quando $|x| = 1$, isto é, quando $x = \pm 1$. Analisamos esses casos diretamente substituindo esses valores de x na série de potências

$$x = 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{converge}$$

pelo Teste da série alternada, pois $\frac{1}{n}$ decresce para 0.

$$x = -1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

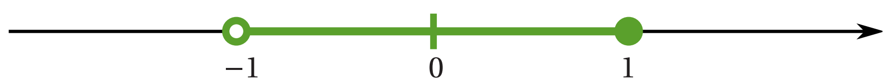
pois é menos a série harmônica. Onde usamos que

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

uma vez que $2n-1$ é sempre ímpar.

Assim, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{converge} \right\} = (-1, 1]$$



Mais à frente, veremos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1+x)$$

para todo $x \in (-1, 1]$.

3) A série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \end{aligned}$$

tem qual domínio?

Vejamos para quais valores de x a série converge. Fixado x, temos uma série com parcelas

$$\frac{1}{n2^n}x^n$$

Pelo teste da raiz

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}x^n\right|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}2} \\
&= \frac{|x|}{2}
\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{|x|}{2} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n \quad \text{converge}$$

$$\frac{|x|}{2} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n \quad \text{diverge}$$

o que é equivalente a

$$|x| < 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}x^n \quad \text{diverge}$$

O Teste da raiz não nos diz o que ocorre quando $|x| = 2$, isto é, quando $x = \pm 2$. Analisamos esses casos diretamente substituindo esses valores de x na série de potências

$$x = 2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

pelo Teste da integral.

$$x = -2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(-2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(-1)^n 2^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{converge}$$

pelo Teste da série alternada, pois $\frac{1}{n}$ decresce para 0.

Assim, o domínio dessa série de potências é

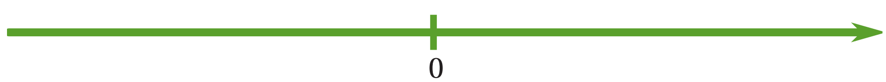
$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \quad \text{converge} \right\} = [-2, 2)$$

4) Já vimos, pelo Teste da Razão, que a série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \end{aligned}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{converge} \right\} = (-\infty, \infty)$$



Mais à frente, veremos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

para todo x.

5) A série de potências

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2!x^2 + 3!x^3 + 4!x^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \end{aligned}$$

tem qual domínio?

Vejamos para quais valores de x a série converge. Fixado x, temos uma série com termo geral

$$n!x^n$$

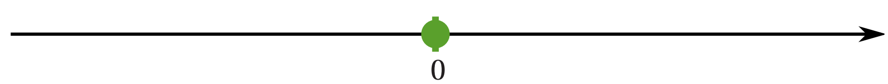
Pelo Teste da razão temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| \\ &= \infty \end{aligned}$$

que é maior que 1, para qualquer $x \neq 0$.

Assim, o domínio dessa série de potências é

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \quad \text{converge} \right\} = [0,0] = \{0\}$$



O domínio das series de potências dos exemplos acima é sempre um intervalo centrado na origem com raio R:

Exemplo 1) domínio é o intervalo

$$(-1,1)$$

o raio é $R = 1$ e o intervalo é aberto em ambos lados.

Exemplo 2) domínio é o intervalo

$$(-1,1]$$

o raio é $R = 1$ e o intervalo é aberto na esquerda e fechado na direita.

Exemplo 3) domínio é o intervalo

$$[-2,2)$$

o raio é $R = 2$ e o intervalo é fechado na esquerda e aberto na direita.

Exemplo 4) domínio é o intervalo

$$(-\infty,\infty)$$

o raio é $R = \infty$ e o intervalo é aberto em ambos lados.

Exemplo 5) domínio é o intervalo

$$[0,0] = \{0\}$$

o raio é $R = 0$ e o intervalo é fechado em ambos lados.

Veremos que o domínio de qualquer série de potências tem essa mesma cara.

Primeiro, uma versão do teste da raiz e da razão para séries de potências.

Proposição 3.1

Temos que

$$\boxed{\begin{array}{c} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\right)|x| \\ \text{ou} \\ \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right)|x| \end{array} \begin{cases} <1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge} \\ >1 & \Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge} \\ =1 & \Longrightarrow \text{inconclusivo} \end{cases}}$$

Prova:

Fixado x, temos uma série numérica com termo geral

$$c_n x^n$$

onde

$$|c_n x^n| = |c_n||x|^n$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|c_n|}|x| \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right) |x|$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x| = \left(\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right) |x|$$

se os limites existem. O resultado segue então do Teste da raiz ou Teste da razão para séries. ■

Proposição 3.2

O domínio de uma série de potências é dado por um dos seguintes intervalos

$$(-R, R) \quad \text{ou} \quad [-R, R] \quad \text{ou} \quad (-R, R] \quad \text{ou} \quad [-R, R)$$

para algum $0 \leq R \leq \infty$, denominado *raio de convergência* da série.

Prova:

Para simplificar a prova vamos supor que existe o limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$$

Pelo Teste da raiz para séries de potências temos que

$$L|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ converge absolutamente}$$

$$L|x| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ diverge}$$

logo

$$|x| < \frac{1}{L} \quad \Longrightarrow \quad \text{a série de potências converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L} \quad \Longrightarrow \quad \text{a série de potências diverge}$$

Segue que o domínio da série de potências é um intervalo centrado na origem com raio $R = 1/L$ (veja Figura ?). ∎

Observe que os diferentes intervalos centrados na origem

$$(-R, R) \qquad [-R, R) \qquad (-R, R] \qquad \text{e} \qquad [-R, R]$$

têm todos o mesmo raio R. Assim, o raio de convergência R nos *diz apenas o tamanho* do domínio da série de potências pois *não diz* qual desses intervalos o domínio é (veja os Exemplos mais acima). Observe também que podemos ter $R = 0$, e nesse caso o domínio da série de potências contém apenas o ponto $x = 0$, e também podemos ter $R = \infty$, e nesse caso o domínio da série de potências é a reta todo.

Derivada de séries de potências

Tomando o devido cuidado com o domínio, podemos derivar uma série de potências termo a termo como se fosse um polinômio

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots\right)' \\
&= 0 + c_1 + c_2 2x + \cdots + c_n n x^{n-1} + \cdots
\end{aligned}$$

Proposição 3.3

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Temos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n\end{aligned}$$

vale para $x \in (-R, R)$.

Além disso, a derivada da série de potências tem o mesmo raio de convergência R.

Prova:

Primeiro vamos provar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$$

têm o mesmo raio de convergência.

Pelo Teste da razão aplicado a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, denotando

$$L_f = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_f} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_f} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{diverge}$$

Pelo Teste da razão aplicado a $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n$, cujos coeficientes são

$$c_{n+1}(n+1)$$

denotando

$$L_g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}(n+2)}{c_{n+1}(n+1)}\right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_g} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_g} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \quad \text{diverge}$$

Para mostrarmos que $f(x)$ e $g(x)$ tem o mesmo raio de convergência, basta mostrar que $L_f = L_g$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} L_g = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}(n+2)}{c_{n+1}(n+1)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_{n+1}}\right| \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot 1 = L_f \end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que $f'(x) = g(x)$. Para isso, usamos a definição de derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x+h)^n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(x+h_n)^{n-1} \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função x^n, de modo que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n(x+h_n)^{n-1},$$

para algum h_n tal que $|h_n| < |h|$. Quando $|x| < R$, as séries convergem absolutamente e podemos provar (o que é feito no apêndice) que

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n n(x+h_n)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

de modo que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \\ &= g(x) \end{aligned}$$

■

Exemplo

Vimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

tem raio de convergência $R=\infty$. Logo

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}x^n\right)' \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}nx^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n
\end{aligned}$$

vale para $x\in(-\infty,\infty)$. Assim, a derivada dessa série de potências é ela mesma. De outro modo

$$\begin{aligned}
\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)' &= 1+2\frac{x}{2!}+3\frac{x^2}{3!}+4\frac{x^3}{4!}+\cdots \\
&= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots
\end{aligned}$$

Mais adiante veremos que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x$ para $x\in(-\infty,\infty)$.

INTEGRAL DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Tomando o devido cuidado com o domínio, podemos integrar uma série de potências termo a termo como se fosse um polinômio

$$\begin{aligned}
\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)dx &= \int\left(c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots\right)dx \\
&= c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+\cdots+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots+C
\end{aligned}$$

Proposição 3.4

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ com raio de convergência $R > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n + C \end{aligned}$$

vale para $x \in (-R, R)$.

Além disso, a integral da série de potências tem o mesmo raio de convergência R.

Prova:

Primeiro vamos provar que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad \text{e} \qquad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n$$

têm o mesmo raio de convergência.

Pelo Teste da razão aplicado a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, denotando

$$L_f = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_f} \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_f} \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{diverge}$$

Pelo Teste da razão aplicado a $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n$, cujos coeficientes são

$$\frac{c_{n-1}}{n}$$

denotando

$$L_F = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{c_n}{n+1}}{\frac{c_{n-1}}{n}} \right|$$

temos que

$$|x| < \frac{1}{L_F} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n \quad \text{converge}$$

$$|x| > \frac{1}{L_F} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n \quad \text{diverge}$$

Para mostrarmos que $f(x)$ e $F(x)$ tem o mesmo raio de convergência, basta mostrar que $L_f = L_F$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} L_F = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{c_n}{n+1}}{\frac{c_{n-1}}{n}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot 1 = L_f \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_{n-1}}{n} x^n\right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{aligned}$$

vale para $(-R,R)$. Isso mostra que $F(x)$ é uma primitiva para $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ em $(-R,R)$. Segue que

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = F(x) + C$$

vale para $(-R,R)$, onde $F(x)$ é dada pela série de potências que queríamos.
■

Exemplos

1) Vimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

tem raio de convergência $R = 1$. Logo

$$
\begin{aligned}
\log(x+1) = \int \frac{1}{1+x}\,dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + C \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C
\end{aligned}
$$

vale para $x \in (-1,1)$. Substituindo $x = 0$ em ambos lados, obtemos que

$$0 = \log(1) = 0 - \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + \cdots + C$$

de modo que $C = 0$. Segue então que

$$
\begin{aligned}
\log(x+1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots
\end{aligned}
$$

vale para $x \in (-1,1)$.

É possível mostrar que a igualdade acima também vale para $x = 1$, o que é feito nos Apêndices, de onde segue o curioso fato que

$$
\begin{aligned}
\log(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots
\end{aligned}
$$

é a soma da série harmônica-alternada.

A igualdade acima pode valer para $x = -1$?

2)

Vimos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

tem raio de convergência $R = 1$. Logo

$$\begin{aligned}\operatorname{atg}(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + C\end{aligned}$$

vale para $x \in (-1,1)$. Substituindo $x = 0$ em ambos lados, obtemos que

$$0 = \operatorname{atg}(0) = 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^5}{5} - \frac{0^7}{7} + \cdots + C$$

de modo que $C = 0$. Segue então que

$$\begin{aligned}\operatorname{atg}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\end{aligned}$$

vale para $x \in (-1,1)$.

É possível mostrar que a igualdade acima também vale para $x =$

1, o que é feito nos Apêndices, de onde segue o curioso fato que

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{atg}(1) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \end{aligned}$$

A igualdade acima pode valer para $x = -1$?

UNICIDADE DOS COEFICIENTES

Nessa seção, vamos ver que, assim como os polinômios, os coeficientes das séries de potências são únicos, pois de fato eles dependem do valor das derivadas na origem.

Proposição 3.5

Se

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$$

para todo $x \in (-R, R)$, então

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

para todo n.

Prova:

Temos que

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \cdots,$$

de modo que $f(0) = c_0$ e

$$c_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}$$

Calculando a derivada primeira, temos que

$$f'(x) = c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + \cdots,$$

de modo que $f'(0) = c_1$ e

$$c_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!}$$

Calculando a derivada segunda, temos que

$$f''(x) = c_2 2 + c_3 3.2x + c_4 4.3x^2 + \cdots,$$

de modo que $f''(0) = c_2 2$ e

$$c_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}$$

Calculando a derivada terceira, temos que

$$f'''(x) = c_3 3.2 + c_4 4.3.2x + \cdots,$$

de modo que $f'''(0) = c_3 3!$ e

$$c_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

Para os outros valores de n, podemos proceder de forma análoga. ■

A unicidade dos coeficientes das séries de potências é então uma consequência imediata.

Corolário 3.6

Se

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n}$$

para todo $x \in (-R, R)$, então

$$\boxed{c_n = d_n}$$

para todo n.

Prova:

Definindo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

segue que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = d_n$$

para todo n. ∎

3.2 Série de Taylor

Quando $f(x)$ é tal que $f^{(n)}(0)$ existe para todo n, podemos considerar

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \cdots}$$

denominada *série de Taylor de f*. Podemos nos perguntar quando a seguinte igualdade é verdadeira

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

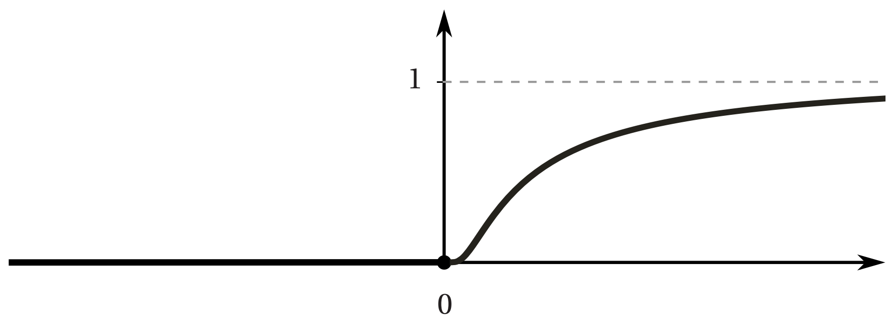
Se já sabemos que $f(x)$ é uma série de potências, essa igualdade é sempre verdadeira. Mas será que isso vale sempre? A seguir, calculamos as séries de

Taylor de algumas funções, começando por uma função que possui todas as derivadas definidas na reta toda, mas que não é igual à sua série de Taylor.

Exemplos

1) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$



Podemos mostrar que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} p_n\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

onde $p_n(y)$ é um polinômio. Por exemplo, no caso da derivada primeira, é fácil ver que $p_1(y) = y^2$. Para determinar o valor da derivada na origem, vamos calcular suas derivadas laterais. A derivada lateral esquerda é dada por

$$f^{(n)}(0\uparrow) = \lim_{x\uparrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

enquanto a derivada lateral direita é dada por

$$f^{(n)}(0\downarrow) \quad = \quad \lim_{x\downarrow 0} f^{(n)}(x)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\downarrow 0} e^{-\frac{1}{x}} p_n\left(\tfrac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{y\to\infty} e^{-y} p_n(y) \\ &= \lim_{y\to\infty} \frac{p_n(y)}{e^y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde o último limite é calculado pela regra de L'Hospital. Temos então que

$$f^{(n)}(0) = 0$$

para todo $n \geq 0$, de modo que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

para todo $n \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} 0x^n \\ &= 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + \cdots \\ &= 0 \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

mostrando que f não é igual à sua série de Taylor.

2) Considere a função $f(x) = e^x$. Temos que

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

para todo $n \geq 0$. Segue então que $f^{(n)}(0) = 1$, para todo $n \geq 0$, de modo que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

para todo $n \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &\overset{?}{=} e^x \end{aligned}$$

restando mostrar que e^x é igual à sua série de Taylor.

3) Considere a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. As primeiras derivadas pares são dadas por

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\ f^{(6)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \operatorname{sen}(x)$$

para todo $k \geq 0$. Por outro lado, as primeiras derivadas ímpares são dadas por

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \\ f^{(5)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(7)}(x) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x)$$

para todo $k \geq 0$. Segue então que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

para todo $k \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\
&\stackrel{?}{=} \operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

restando mostrar que $\operatorname{sen}(x)$ é igual à sua série de Taylor.

4) Considere a função $f(x) = \cos(x)$. As primeiras derivadas pares são dadas por

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \cos(x) \\
f^{(2)}(x) &= -\cos(x) \\
f^{(4)}(x) &= \cos(x) \\
f^{(6)}(x) &= -\cos(x)
\end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x)$$

para todo $k \geq 0$. Por outro lado, as primeiras derivadas ímpares são dadas por

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\
f^{(3)}(x) &= \operatorname{sen}(x) \\
f^{(5)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) \\
f^{(7)}(x) &= \operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen}(x)$$

para todo $k \geq 0$. Segue então que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

para todo $k \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
&\stackrel{?}{=} \cos(x)
\end{aligned}$$

restando mostrar que $\cos(x)$ é igual à sua série de Taylor.

Série binomial

Nessa seção, vamos determinar a série de Taylor da função binomial $f(x) = (1+x)^a$. Quando a é um número natural, essa série se transforma numa soma e obtemos a famosa fórmula do binômio de Newton. Aliás, foi assim que o próprio Newton procedeu a mais de três séculos atrás.

Exemplos

1) As primeiras derivadas de $f(x) = (1+x)^a$ são dadas por

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (1+x)^a \\
f^{(1)}(x) &= a(1+x)^{a-1} \\
f^{(2)}(x) &= a(a-1)(1+x)^{a-2} \\
f^{(3)}(x) &= a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3}
\end{aligned}$$

de modo que

$$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))(1+x)^{a-n}$$

para todo $n \geq 0$. Segue então que

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}$$

para todo $n \geq 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!} x^n \\
&= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \cdots \\
&\overset{?}{=} (1+x)^a
\end{aligned}$$

restando mostrar que $(1+x)^a$ é igual à sua série de Taylor, o que será feito apenas no próximo capítulo. Denotando

$$\binom{a}{0} = 1 \qquad \text{e} \qquad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}$$

denominado n*-coeficiente binomial*, obtemos

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

que generaliza a fórmula binomial. Vamos agora determinar o raio de convergência da série binomial. Uma vez que

$$\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{a}{n+1} x^{n+1}}{\binom{a}{n} x^n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a-n}{n+1} x \right| \\
&= \left| \lim_{n\to\infty} \frac{a-n}{n+1} \right| |x|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |-1||x| \\
&= |x|
\end{aligned}
$$

Pelo teste da razão, segue que o raio de convergência da série binomial é $R = 1$.

2) Quando a é igual a um número inteiro m, para todo $0 \leq n \leq m$, temos que

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Além disso, para todo $n > m$, temos que

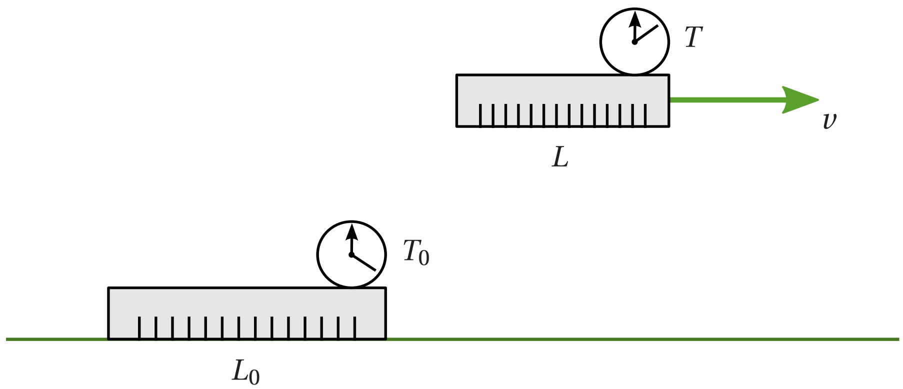
$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-m)\cdots(m-(n-1))}{n!} = 0$$

Nesse caso, a série de Taylor possui raio $R = \infty$ e se transforma numa soma, de modo que

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

é a bem conhecida *fórmula do binômio de Newton.*

3) Na Teoria da Relatividade restrita, quando uma régua e um relógio se movem no eixo x com velocidade v, o comprimento da régua se contrai e o período do relógio se dilata por um fator que depende da velocidade v.



Se a régua possui comprimento L_0 e o relógio possui período T_0 quando estão parados, o comprimento e o período em movimento são dados por

$$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \qquad \text{e} \qquad T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

onde c é a velocidade da luz. Como

$$-1 < -\frac{v^2}{c^2} < 1$$

podemos utilizar a série binomial para calcular o comprimento e o período em movimento. Segue então que

$$\begin{aligned} L &= L_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= L_0\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^n \\ &= L_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{1}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} T &= T_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= T_0\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^n \\ &= T_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right) \end{aligned}$$

Polinômio de Taylor

Para investigarmos melhor em que condições uma dada f é igual à sua série de Taylor, consideramos

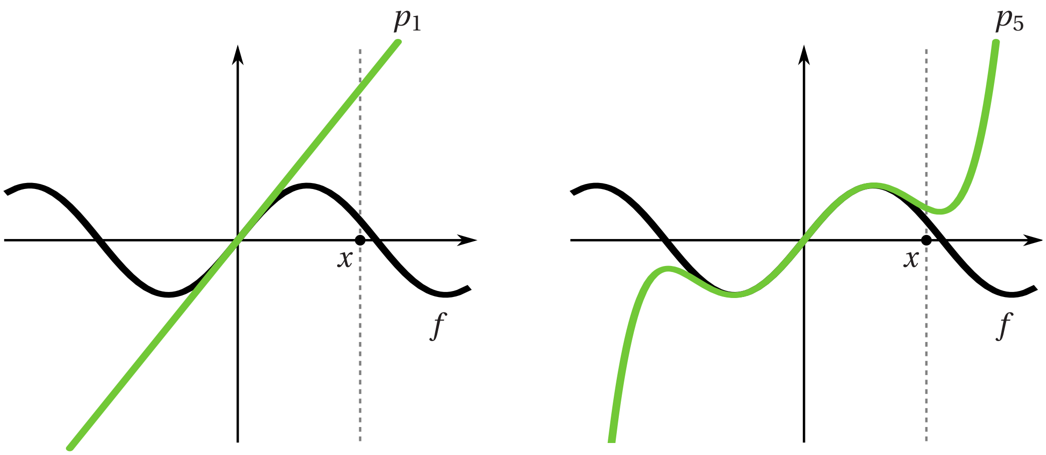
$$\boxed{p_m(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m}$$

denominado *m-ésimo polinômio de Taylor de f*. Esse polinômio coincide com m-ésima soma parcial da série de Taylor de f, de modo que

$$\lim_{m\to\infty} p_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Para que f seja igua à sua série de Taylor em x, basta então mostrarmos que

$$\lim_{m\to\infty} p_m(x) = f(x),$$



Ou, equivalentemente, mostrar que

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \left| f(x) - p_m(x) \right| = 0}$$

onde $\left| f(x) - p_m(x) \right|$ é denominado *erro da aproximação de Taylor* em x.

Exemplos

1) No caso da função $f(x) = e^x$, vimos que sua série de Taylor é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

de modo que seu m-ésimo polinômio de Taylor é dado por

$$p_m(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m$$

2) No caso da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, vimos que sua série de Taylor é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

de modo que seu m-ésimo polinômio de Taylor é dado por

$$p_m(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^m}{m!}$$

3) No caso da função $f(x) = \cos(x)$, vimos que sua série de Taylor é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

de modo que seu m-ésimo polinômio de Taylor é dado por

$$p_m(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^m}{m!}$$

O próximo resultado fornece uma estimativa para o erro da aproximação de Taylor.

Proposição 3.7

Se

$$\boxed{\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_n}$$

para todo $x \in [-c, c]$, então

$$\boxed{\left|f(x) - p_{n-1}(x)\right| \leq M_n \frac{c^n}{n!}}$$

para todo $x \in [-c, c]$.

Prova:

Vamos considerar apenas o caso em $x \in [0, c]$, sendo que o caso em que

$x \in [-c, 0]$ é análogo. Temos que

$$-M_n \leq f^{(n)}(x) \leq M_n,$$

para todo $x \in [0, c]$.

Integrando a desigualdade acima de 0 até $t \in [0, c]$, obtemos

$$\int_0^t -M_n\,dx \leq \int_0^t f^{(n)}(x)\,dx \leq \int_0^t M_n\,dx,$$

de modo que

$$-M_n t \leq f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) \leq M_n t.$$

Trocando t por x, segue que

$$-M_n x \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) \leq M_n x,$$

para todo $x \in [0, c]$.

Integrando a desigualdade acima de 0 até $t \in [0, c]$, obtemos

$$\int_0^t -M_n x\,dx \leq \int_0^t f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)\,dx \leq \int_0^t M_n x\,dx,$$

de modo que

$$-M_n \frac{t^2}{2} \leq f^{(n-2)}(t) - f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,t \leq M_n \frac{t^2}{2}.$$

Trocando t por x, segue que

$$-M_n \frac{x^2}{2} \leq f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,x \leq M_n \frac{x^2}{2},$$

para todo $x \in [0, c]$.

Integrando a desigualdade acima de 0 até $t \in [0, c]$, obtemos

$$\int_0^t -M_n \frac{x^2}{2}\,dx \leq \int_0^t f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)\,x\,dx \leq \int_0^t M_n \frac{x^2}{2}\,dx,$$

de modo que

$$-M_n \frac{t^3}{3!} \leq f^{(n-3)}(t) - f^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0)\,t - f^{(n-1)}(0)\frac{t^2}{2} \leq M_n \frac{t^3}{3!}.$$

Trocando t por x, segue que

$$-M_n \frac{x^3}{3!} \leq f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(0) - f^{(n-2)}(0)\,x - f^{(n-1)}(0)\frac{x^2}{2} \leq M_n \frac{x^3}{3!}.$$

para todo $x \in [0, c]$.

Depois de repetir n vezes esse procedimento de integrar a desigualdade anterior de 0 até $t \in [0, c]$ e depois substituir t por x, obtemos a seguinte desigualdade

$$-M_n \frac{x^n}{n!} \leq f(x) - f(0) - f'(0)x - f''(0)\frac{x^2}{2} - \cdots - f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq M_n \frac{x^n}{n!}.$$

para todo $x \in [0, c]$. Colocando o sinal de menos em evidência no termo do meio, segue que

$$-M_n \frac{x^n}{n!} \leq f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \leq M_n \frac{x^n}{n!}.$$

de modo que

$$-M_n \frac{c^n}{n!} \leq f(x) - p_{n-1}(x) \leq M_n \frac{c^n}{n!}.$$

para todo $x \in [0, c]$. ■

A partir dessa estimativa para o erro da aproximação polinomial, obtemos uma condição que garante que a função coincide com sua série de Taylor.

Proposição 3.8

Se

$$\boxed{\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M_n}$$

para todo $x \in [-c, c]$ e

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} M_n \frac{c^n}{n!} = 0}$$

então

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

para todo $x \in [-c, c]$.

Prova:

Basta utilizar o Teorema do Sanduíche na estimativa para o erro da aproximação polinomial. ■

Exemplos

1) No caso da função $f(x) = e^x$, temos que

$$f^{(n)}(x) = e^x$$

de modo que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq e^c$$

para todo $x \in [-c, c]$. Uma vez que

$$\lim e^c \frac{c^n}{n!} = e^c \lim \frac{c^n}{n!} = 0$$

segue que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

para todo $x \in [-c, c]$. Como c é arbitrário, segue que e^x é igual à sua série de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) No caso da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, temos que

$$f^{(n)}(x) = \pm \operatorname{sen}(x) \text{ ou } \pm \cos(x)$$

de modo que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$$

para todo $x \in [-c, c]$. Uma vez que

$$\lim 1 \frac{c^n}{n!} = \lim \frac{c^n}{n!} = 0$$

segue que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

para todo $x \in [-c, c]$. Como c é arbitrário, segue que $\operatorname{sen}(x)$ é igual à sua série de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$.

3)

No caso da função $f(x) = \cos(x)$, temos que

$$f^{(n)}(x) = \pm \cos(x) \text{ ou } \pm \operatorname{sen}(x)$$

de modo que

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le 1$$

para todo $x \in [-c, c]$. Uma vez que

$$\lim 1 \frac{c^n}{n!} = \lim \frac{c^n}{n!} = 0$$

segue que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

para todo $x \in [-c, c]$. Como c é arbitrário, segue que $\cos(x)$ é igual à sua série de Taylor para todo $x \in \mathbb{R}$.

CALCULADORA CIENTÍFICA

Nessa seção, vamos entender como funciona sua calculadora científica. Vamos mostrar que todas as funções que ela apresenta, podem ser calculadas através da combinação das operações de soma, produto e quociente. Nosso procedimento será o seguinte:

Passos

1) Primeiro vamos partir de algumas funções que pode ser escritas como séries de Taylor cujos coeficientes pode ser calculados através da combinação das operações de soma, produto e quociente. É claro que sua calculadora não pode calcular a soma infinita que define uma série de Taylor. De fato, o que sua calculadora faz é calcular a soma finita que define o polinômio de Taylor. Isso é suficiente para resolver o nosso problema, desde que o grau do polinômio seja escolhido de tal modo que o erro de aproximação polinomial seja menor do que o menor dígito apresentado pelo mostrador da calculadora.

2) A medida que mostramos que algumas funções podem ser calculadas pela calculadora, essas funções podem ser utilizadas para calcular outras funções, desde que elas apareçam através da combinação das operações de soma, produto, quociente e composição.

As funções que aparecem em qualquer calculadora científica são apresentadas na Tabela 3.1.

EXPONENCIAIS, POTÊNCIAS E SUAS INVERSAS

Já sabemos que

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que e^x pode ser calculada pela calculadora.

Tabela 3.1: Funções da calculadora científica

Exponenciais, potências e suas inversas			
e^x	10^x	x^2	x^y
$\log(x)$	$\log_{10}(x)$	$\sqrt{x}$	$\sqrt[y]{x}$
Trigonométricas hiperbólicas e suas inversas			
$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{tgh}(x)$	
$\operatorname{asenh}(x)$	$\operatorname{acosh}(x)$	$\operatorname{atgh}(x)$	
Trigonométricas e suas inversas			
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{tg}(x)$	
$\operatorname{asen}(x)$	$\operatorname{acos}(x)$	$\operatorname{atg}(x)$	

Com relação ao logaritmo, já sabemos que

$$\begin{aligned}\log(1+y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-y)^n}{n}\end{aligned}$$

para todo $-1 < y \le 1$. Para todo $x > 0$ e todo l natural, temos que

$$\begin{aligned}\log(x) &= \log\left(\frac{x}{2^l} 2^l\right) \\ &= \log\left(\frac{x}{2^l} l\right) + \log\left(2^l\right) \\ &= \log\left(1 + \left(\frac{x}{2^l} - 1\right)\right) + l \log(1+1)\end{aligned}$$

Escolhendo l tal que

$$0 < \frac{x}{2^l} < 2$$

segue que

$$-1 < \frac{x}{2^l} - 1 < 1$$

de modo que podemos substituir $y = \frac{x}{2^l} - 1$ e $y = 1$ na expressão acima para obter

$$\boxed{\log(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{x}{2^l}\right)^n}{n} - l\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}$$

Segue então que $\log(x)$ pode ser calculado pela calculadora.

Com relação a 10^x e a $\log_{10}(x)$, temos que

$$\boxed{10^x = e^{x\log(10)}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, e também que

$$\boxed{\log_{10}(x) = \frac{\log(x)}{\log(10)}}$$

para todo $x > 0$. Segue então que essas funções podem ser calculadas pela calculadora.

Com relação a x^y e a $\sqrt[y]{x}$, temos que

$$\boxed{x^y = e^{y\log(x)}}$$

para todo $x > 0$ e todo $y \in \mathbb{R}$, e também que

$$\boxed{\sqrt[y]{x} = e^{\frac{1}{y}\log(x)}}$$

para todo $x > 0$ e todo $y \in \mathbb{R}$. Segue então que essas funções e também as funções x^2 e $\sqrt{x}$ podem ser calculadas pela calculadora.

Trigonométricas hiperbólicas e suas inversas

Por definição, as funções trigonométricas hiperbólicas são dadas por

$$\boxed{\begin{array}{rcrcl} x & = & \cosh(t) & = & \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \\[2ex] y & = & \operatorname{senh}(t) & = & \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\[2ex] z & = & \operatorname{tgh}(t) & = & \dfrac{\operatorname{senh}(t)}{\cosh(t)} \end{array}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que essas funções podem ser calculadas pela calculadora.

Em relação as inversas trigonométricas hiperbólicas, temos que

$$x + y = e^t$$

de modo que

$$t = \log(x + y)$$

Utilizando a identidade trigonométrica hiperbólica fundamental

$$x^2 - y^2 = 1$$

podemos escrever $x + y$ como função de x, de y ou de z, de modo que

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} \operatorname{acosh}(x) & = & t & = & \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ \operatorname{asenh}(y) & = & t & = & \log\left(\sqrt{y^2 + 1} + y\right) \\ \operatorname{atgh}(z) & = & t & = & \log\left(\dfrac{1 + z}{\sqrt{1 - z^2}}\right) \end{array}}$$

Segue então que essas funções podem ser calculadas pela calculadora.

TRIGONOMÉTRICAS E SUAS INVERSAS

Já sabemos que

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} x & = & \cos(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ y & = & \operatorname{sen}(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \end{array}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ podem ser calculadas pela calculadora. Temos também que

$$\boxed{z = \operatorname{tg}(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)}}$$

para todo $t \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, de modo que ela também pode ser calculada pela calculadora.

Em relação as inversas trigonométricas, temos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{asen}'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \left(1-y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-y^2\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n y^{2n}
\end{aligned}$$

para todo $-1 < y < 1$. Integrando essa equação, segue que

$$\begin{aligned}
\operatorname{asen}(y) &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n y^{2n} \right) dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} + C
\end{aligned}$$

Substituindo $y = 0$, segue que

$$0 = \operatorname{asen}(0) = 0 + C$$

de modo que $C = 0$ e que

$$\boxed{\operatorname{asen}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} y^{2k+1}}$$

Segue então que essas função pode ser calculada pela calculadora. Pela Figura **??**, temos que

$$s = \operatorname{asen}(x), \qquad t = \operatorname{acos}(x), \qquad s + t = \frac{\pi}{2}$$

de modo que

$$\boxed{\operatorname{acos}(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{asen}(x)}$$

Segue então que essas função também pode ser calculada pela calculadora. Finalmente, utilizando a identidade trigonométrica fundamental

$$x^2 + y^2 = 1$$

podemos escrever $z = y/x$ como função de y, de modo que

$$\boxed{\operatorname{atg}(z) = t = \operatorname{asen}\left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)}$$

Segue então que essas função também pode ser calculada pela calculadora.

Capítulo 4

Equações diferenciais

4.1 Equação diferencial ordinária

Uma *Equação diferencial ordinária (EDO)* é uma equação cuja incógnita é uma função real e na equação aparecem também derivadas ordinárias dessa função incógnita.

Os exemplos clássicos de equações diferenciais ordinárias têm origem na famosa 2ª Lei de Newton

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= mv'(t) \\ &= mx''(t) \end{aligned}$$

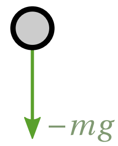
que é uma EDO quando a força é uma função da velocidade ou da posição e a incógnita é a função velocidade $v(t)$ ou a função posição $x(t)$ de um movimento, como nos exemplos a seguir.

Exemplos

1) Velocidade da queda-livre sem atrito: numa queda-livre vertical sem atrito a única força que atua no corpo é a força peso, dada por

$$F = -mg$$

onde m é a massa do corpo e g a aceleração da gravidade.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g$$

onde a incógnita é a função velocidade vertical $v(t)$. Uma vez que a força é constante, a função incógnita pode ser encontrada simplesmente integrando os dois lados da EDO

$$\begin{aligned} \int v'(t)\,dt &= \int -g\,dt \\ v(t) + A &= -gt + B \end{aligned}$$

onde A e B são constantes arbitrárias de integração. Isolando $v(t)$, obtemos

$$v(t) = C - gt$$

onde $C = B - A$ é uma constante arbitrária. Essas são as possíveis velocidades verticais da queda-livre sem atrito.

O significado físico da constante arbitrária C pode ser obtido fazendo $t = 0$ na solução geral

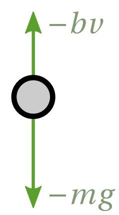
$$v(0) = C$$

Portanto C é a velocidade inicial da queda e para cada velocidade inicial temos uma função velocidade da queda.

2) Velocidade da queda-livre com atrito: numa queda-livre vertical com atrito, além da força peso também atua no corpo a força da resistência do ar. Para pequenas velocidades de queda, essa força é proporcional à velocidade, no sentido oposto

$$F_{ar} = -bv$$

onde o coeficiente de arraste $b > 0$ depende da forma do corpo. Na figura abaixo o corpo está caindo, logo $v < 0$ e, portanto, $F_{ar} > 0$.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g - \frac{b}{m} v(t)$$

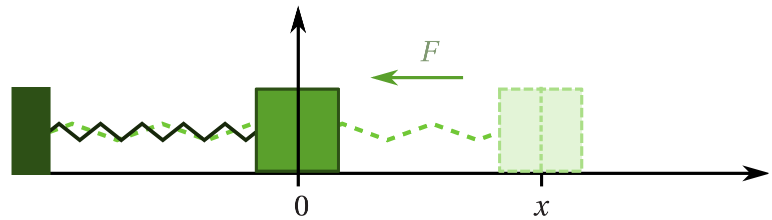
onde a incógnita é a função velocidade vertical $v(t)$, definida para $t \geq 0$, isto é, a partir do instante $t = 0$ em que o corpo começa a queda-livre e daí em diante.

Nesse caso a força não é constante e depende da própria função incógnita, por isso não é possível obter $v(t)$ integrando os dois lados.

3) Posição do sistema massa-mola: pela Lei de Hooke, a força da mola é uma função da posição, dada por

$$F = -kx$$

onde k é a constante de Hooke da mola e x é a posição do bloco de massa m, medida em relação a posição natural da mola, em que ela não está nem esticada, nem comprimida.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

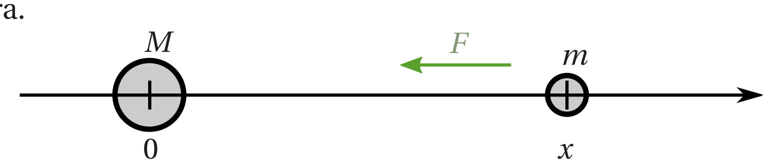
$$mx''(t) = -kx(t)$$

onde a incógnita é a função posição $x(t)$, definida para todos os instantes $t \in \mathbb{R}$.

4) Posição de um meteoro em rota de colisão com a Terra: pela Lei da Gravitação Universal, a força que a Terra exerce sobre o meteoro é dada por

$$F = -GMm\frac{1}{x^2}$$

onde x é a distância entre a Terra e o meteoro, G é a constante de gravitação universal, m é a massa do meteoro e M é a massa da Terra.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada por

$$mx''(t) = -GMm\frac{1}{x(t)^2}$$

onde a incógnita é a função distância $x(t)$, definida até o instante t em que o meteoro colide com a terra.

Apesar de sua origem no estudo do movimento, também é conveniente tratar as equações diferenciais do ponto de vista puramente matemático. A grande novidade das EDOs é que nelas as incógnitas são funções, enquanto nas equações algébricas as incógnitas são números. Ainda assim, existem algumas semelhanças entre EDOs e equações algébricas.

Uma *solução* de uma EDO é uma função que $y(t)$ que satisfaz a EDO. O tipo mais simples de solução é uma *solução constante* $y(t) = c$. No contexto do movimento uma solução constante também é chamada de *solução de equilíbrio*, pois corresponde à ausência de movimento.

Assim como no estudo do movimento, onde queremos descrever todos os movimentos possíveis, não estamos interessados em apenas uma solução, mas em todas as soluções de uma EDO. A *solução geral* de uma EDO é o conjunto de todas as suas soluções e *resolver* uma EDO é encontrar sua solução geral.

Quando se resolve uma EDO em geral encontramos infinitas soluções. Muitas vezes queremos obter, dentre essas infinitas soluções, as soluções tais que ela e suas derivadas têm um valor inicial pré-determinado em $t = 0$. Por exemplo, ao descrever a posição $x(t)$ de um movimento, podemos querer saber quais dentre os movimentos possíveis têm posição inicial e velocidade inicial dadas por

$$x(0) = x_0 \qquad x'(0) = v_0$$

Esse tipo de condição em soluções de uma EDO é chamada de *condição ou valor inicial*.

Assim como nos métodos para resolver uma equação algébrica, os métodos para resolver uma EDO dependem de sua forma. A equação algébrica mais simples de resolver é a linear, na qual as incógnitas aparecem apenas multiplicadas por constantes conhecidas, chamadas de coeficientes da equação, e em seguida somadas. Considere, por exemplo, as seguintes equações algébricas.

Linear	Não-linear
$ax + by = c$ coeficientes: a, b	$xy = 1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad \text{etc}$

Do mesmo modo, veremos que a EDO mais simples de resolver é a *EDO linear*, na qual as funções incógnitas e suas derivadas aparecem apenas multiplicadas por funções conhecidas, chamadas de coeficientes da EDO, e em seguida somadas. Considere, por exemplo, as seguintes EDOs

Linear	Não-linear
$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=f(t)$ coeficientes: $a(t)$, $b(t)$	$y'(t)y(t)=1, \quad y'(t)^2+y(t)^2=1, \quad$ etc

Na EDO linear o termo $f(t)$ é chamado de *forçamento* ou de *termo não-homogêneo* e quando $f(t)=0$ dizemos que a EDO é *homogênea*. Quando uma EDO é não-linear, não faz sentido falar de seus coeficientes nem de seu forçamento.

A *ordem* de uma EDO é a maior ordem das derivadas que aparecem na função incógnita na equação. Por exemplo, uma EDO linear de ordem dois, ou segunda ordem, tem a forma

$$a(t)y''(t)+b(t)y'(t)+c(t)y(t)=f(t)$$

com coeficientes dados por funções conhecidas $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ e forçamento conhecido $f(t)$.

Vamos voltar aos exemplos anteriores para explorar todas essas definições.

Exemplos

1) Velocidade da queda-livre sem atrito:

$$mv'(t)=-mg$$

É uma EDO de 1ª-ordem linear e não-homogênea, o coeficiente de $v'(t)$ é m, o coeficiente de $v(t)$ é 0, o forçamento é $-mg$. Obtivemos acima a solução geral dessa equação, dada por

$$v(t)=C-gt$$

onde $C\in\mathbb{R}$ é uma constante arbitrária. Portanto a solução geral consiste de infinitas soluções.

Impondo a condição inicial

$$v(0) = v_0$$

e usando a solução geral, obtemos que

$$C = v_0$$

logo

$$v(t) = v_0 - gt$$

é a única solução que satisfaz a condição inicial dada.

2) Velocidade da queda-livre com atrito:

$$v'(t) = -g - cv(t)$$

onde $c = b/m$ é o arraste por unidade de massa, é uma EDO de 1ª-ordem linear e não homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$v'(t) + cv(t) = -g$$

O coeficiente de $v'(t)$ é 1, o coeficiente de $v(t)$ é c e o forçamento é $-g$.

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo $v(t) = v_{eq}$ constante e substituindo na EDO

$$\begin{aligned} (v_{eq})' + cv_{eq} &= -g \\ 0 + cv_{eq} &= -g \\ v_{eq} &= -\frac{g}{c} \end{aligned}$$

Portanto temos apenas uma solução de equilíbrio

$$v(t) = -\frac{g}{c} = -\frac{mg}{b}$$

Essa é a chamada velocidade terminal, na qual a força de atrito se equilibra com a força peso: se o corpo começar a cair nessa velocidade, se manterá nessa velocidade o tempo todo.

Como obter as outras soluções?

3) Posição do sistema massa-mola:

$$mx''(t) = -kx(t)$$

É uma EDO de 2ª-ordem linear e homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$mx''(t) + kx(t) = 0$$

O coeficiente de $x''(t)$ é m, o coeficiente de $x'(t)$ é 0, o coeficiente de $x(t)$ é k é o forçamento é 0.

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo $x(t) = x_{eq}$ constante e substituindo na EDO

$$\begin{aligned} m(x_{eq})'' + kx_{eq} &= 0 \\ 0 + kx_{eq} &= 0 \\ x_{eq} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto temos apenas uma solução de equilíbrio $x_{eq}(t) = 0$. Essa é a chamada solução trivial e corresponde ao movimento em que a massa fica parada na posição natural da mola. Como obter as outras soluções?

Se $m = k = 1$, a EDO fica

$$x''(t) + x(t) = 0$$

Temos que $x_1(t) = \cos(t)$ e $x_2(t) = \operatorname{sen}(t)$ são soluções dessa EDO, uma vez que e que

$$x_1''(t) + x_2(t) = -\cos(t) + \cos(t) = 0$$

$$x_2''(t) + x_1(t) = -\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(t) = 0$$

Mais adiante vamos mostrar que a solução geral dessa EDO é

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ &= c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ são duas constantes arbitrárias.

Quais dessas soluções satifazem as seguintes condições iniciais?

$$x(0) = x_0 \qquad x'(0) = v_0$$

Usando que

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t) \\ x'(t) &= -c_1 \operatorname{sen}(t) + c_2 \cos(t) \end{aligned}$$

fazendo $t = 0$, temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 \\ v_0 &= c_2 \end{aligned}$$

Logo

$$x(t) = x_0 \cos(t) + v_0 \operatorname{sen}(t)$$

é a única solução que satisfaz as condições iniciais dadas.

4) Posição de um meteoro em rota de colisão com a Terra:

$$m x''(t) = -GMm \frac{1}{x(t)^2}$$

É uma EDO 2ª-ordem não-linear, pois não pode ser colocada na forma linear.

Podemos procurar soluções de equilíbrio fazendo $x(t) = x_{eq}$ constante e substituindo na EDO

$$\begin{aligned} m(x_{eq})'' &= -GMm \frac{1}{(x_{eq})^2} \\ 0 &= -GMm \frac{1}{(x_{eq})^2} \end{aligned}$$

Portanto essa EDO não possui solução de equilíbrio. Como procurar outras soluções?

Se $m = M = G = 1$, a EDO fica

$$x''(t) = -\frac{1}{x(t)^2}$$

Podemos verificar que

$$x(t) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}t + 1\right)^{\frac{2}{3}}$$

é solução dessa EDO, uma vez que

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{\frac{2}{3}}\right)'' \\
&= \left(\frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{3}{\sqrt{2}}\right)' \\
&= \sqrt{2}\left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' \\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{-\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

e que

$$-\frac{1}{x(t)^2} = -\frac{1}{\left(\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t+1\right)^{-\frac{4}{3}}$$

A solução geral desse problema envolve certas *funções especiais* e está fora do escopo do presente texto.

Veremos que EDOs aparecem e têm aplicações fora da Física, sendo uma das principais ferramentas para se estudar o movimento de quantidades que variam em função de outras quantidades. Veremos também que fenômenos diferentes podem ser modelados pela mesma EDO. Assim, resolvendo a EDO matematicamente teremos resolvido simultaneamente todas os fenômenos modelados por ela.

Notação

Muitas vezes quando estiver implícita que a variável independente é t, para simplificar a EDO omitimos t da função incógnitas escrevendo y, y', y'', ..., no lugar de $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, ...

Por exemplo, a EDO

$$my''(t) = -GMm\frac{1}{y(t)^2}$$

fica

$$my'' = -GMm\frac{1}{y^2}$$

É importante lembrar que, nessa notação, tanto y quanto y'' são, na verdade, funções de t.

Em geral, a obtenção da solução geral de EDOs e de sistemas de EDOs é uma tarefa bastante difícil, de modo que nos restringiremos a alguns casos relevantes, iniciando com as EDOS de 1ª-ordem.

Existem dois tipos de EDOs de 1ª-ordem que podemos resolver com técnicas de Cálculo 1: as separáveis e as lineares.

4.2 EDO SEPARÁVEL

Uma EDO é separável quando ela é de 1ª-ordem e pode ser escrita na seguinte forma

$$\boxed{y'(t) = F(t)G(y(t))}$$

onde $F(t)$ e $G(y)$ são funções reais, respectivamente, de t e de y. Na notação em que omitimos a variável independente t das funções incógnitas, uma EDO separável fica na forma

$$y' = F(t)G(y)$$

onde no lado direito t e y estão separadas num produto de duas funções conhecidas.

Exemplos

1) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = 0$$

é separável, pois pode ser escrita como

$$y'(t) = t^3 y(t)^2$$

onde $F(t) = t^3$ e $G(y) = y^2$.

2) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$$

é separável, pois escrevendo ela na forma

$$y' - t^3 y^2 = t^3$$

vemos que ela pode ser escrita como

$$y' = t^3(1 + y^2)$$

que é separável com $F(t) = t^3$ e $G(y) = 1 + y^2$.

3) A EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^2$$

não é separável, pois o lado direito de

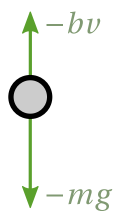
$$y' = t^2(1 + t y^2)$$

não pode ser escrita como um produto da forma $F(t)G(y)$.

4) Velocidade da queda-livre com atrito: numa queda-livre vertical com atrito, além da força peso também atua no corpo a força da resistência do ar. Para pequenas velocidades de queda, essa força é proporcional à velocidade, no sentido oposto

$$F_{ar} = -bv$$

onde o coeficiente de arraste $b > 0$ depende da forma do corpo. Na figura abaixo o corpo está caindo, logo $v < 0$ e, portanto, $F_{ar} > 0$.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = -g - cv(t)$$

onde $c = \frac{b}{m}$ e a incógnita é a função velocidade vertical $v(t)$, definida para $t \geq 0$, isto é, a partir do instante $t = 0$ em que o corpo começa a queda-livre e daí em diante.

Escrevendo a EDO na forma

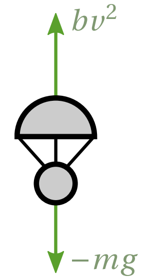
$$v' = -g - cv$$

vemos que ela é separável com $F(t) = 1$, $G(v) = -g - cv$.

5) Velocidade da queda-livre de um pára-quedas: numa queda-livre vertical com atrito, além da força peso também atua no corpo a força da resistência do ar. Para grandes velocidades de queda, a força de resistêcia do ar é proporcional à uma potência da velocidade, no sentido oposto da queda. Por exemplo

$$F_{ar} = bv^2$$

onde o coeficiente de arraste $b > 0$ depende da forma do pára-quedas e onde vamos considerar apenas a queda, na qual sempre teremos $F_{ar} > 0$.



Nesse caso a 2ª Lei de Newton é dada pela EDO não-linear

$$mv'(t) = -mg + bv^2(t)$$

e, portanto,

$$v'(t) = cv^2(t) - g$$

onde $c = \frac{b}{m}$ é arraste por unidade de massa.

Escrevendo a EDO na forma

$$v' = cv^2 - g$$

vemos que ela é separável com $F(t) = 1$, $G(v) = cv^2 - g$.

Se $F(t)$ não é identicamente nula, é fácil ver que as soluções constantes da EDO separável

$$y'(t) = F(t)G(y(t))$$

são da forma

$$y(t) = c \qquad \text{onde} \qquad G(c) = 0$$

isto é, $c \in \mathbb{R}$ é uma raiz de G. A solução geral de uma EDO separável é obtida da seguinte maneira.

Passos

1) Soluções constantes: Encontrar as raízes de

$$G(c) = 0$$

e considerar as soluções constantes $y(t) = c$ correspondentes. No contexto do movimento, essas são as soluções de **equilíbrio**.

2) Separar: Colocar a EDO na forma

$$\frac{y'(t)}{G(y(t))} = F(t)$$

denominada *forma separada*

3) Integrar: Integrando a equação acima

$$\int \frac{y'(t)}{G(y(t))}\,dt = \int F(t)\,dt$$

que, pela substituição

$$y = y(t), \qquad dy = y'(t)dt$$

pode ser escrita como

$$\left(\int \frac{1}{G(y)}\,dy\right)_{y=y(t)} = \int F(t)\,dt$$

4) Isolar: Após resolver as integrais no passo anterior, isolar $y(t)$ na equação acima.

Vamos aplicar os passos acima para obter a solução geral das EDOs separáveis vistas acima.

Exemplos

1) Vimos que a EDO
$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = 0$$
é separável pois pode ser colocada na forma
$$y' = t^3 y^2$$

Equilíbrios: Encontrando as raízes de
$$y^2 = 0 \iff y = 0$$
Obtemos a solução de equilíbrio
$$y(t) = 0$$

Separar: Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser separada
$$\frac{1}{y^2} y' = t^3$$

Integrar: Integrando a equação acima
$$\int \frac{1}{y(t)^2} y'(t)\,dt = \int t^3\,dt$$
substituindo $y = y(t)$, $dy = y'(t)dt$
$$\left(\int \frac{1}{y^2}\,dy\right)_{y=y(t)} = \int t^3\,dt$$
onde
$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + A$$
e
$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + B$$

Isolar: Obtemos a equação

$$-\frac{1}{y} = \frac{t^4}{4} + C$$

onde $C = B - A$ é uma constante arbitrária. Essa equação algébrica é equivalente a

$$\frac{1}{y} = -\frac{t^4 + 4C}{4}$$

de modo que podemos isolar $y = y(t)$ e obter

$$y(t) = -\frac{4}{t^4 + D}$$

onde $D = 4C$ é uma constante arbitrária. A solução geral da EDO é dada pela expressão acima e pela solução de equilíbrio $y(t) = 0$.

2) Vimos que a EDO

$$y'(t) - t^3 y(t)^2 = t^3$$

é separável pois pode ser colocada na forma

$$y' = t^3(1 + y^2)$$

Equilíbrios: Encontrando as raízes de

$$1 + y^2 = 0$$

não obtemos nenhuma raiz real, portanto, não existe solução de equilíbrio.

Separar: Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser colocada na forma separada

$$\frac{1}{1 + y^2} y' = t^3$$

Integrar: Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{1 + y(t)^2} y'(t)\, dt = \int t^3\, dt$$

temos, pela substituição $y = y(t)$, que ela é equivalente a

$$\left(\int \frac{1}{1+y^2}\,dy\right)_{y=y(t)} = \int t^3\,dt$$

onde

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{atg}(y) + A$$

e

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + B$$

Isolar: Obtemos a equação

$$\operatorname{atg}(y) = \frac{t^4}{4} + C$$

onde $C = B - A$ é uma constante arbitrária. Podemos isolar $y = y(t)$ nessa equação algébrica aplicando a função tangente em ambos os lados, de modo que

$$y(t) = \operatorname{tg}\left(\frac{t^4}{4} + C\right)$$

A solução geral da EDO é dada pela expressão acima, uma vez que não existem soluções de equilíbrio.

3) Vimos que a EDO

$$v' = -g - cv$$

é separável.

Equilíbrios: Encontrando as raízes

$$-g - cv = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = -g/c$$

Separar: Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser separada

$$\frac{1}{-g-cv}\,v' = 1$$

Integrar: Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{-g - cv(t)} v'(t)\,dt = \int 1\,dt$$

substituindo $u = -g - cv(t)$, $du = -cv'(t)dt$

$$\left(\int \frac{1}{u}\frac{du}{-c}\right)_{v=v(t)} = \int 1\,dt$$

onde

$$\left(\int \frac{1}{u}\frac{du}{-c}\right)_{v=v(t)} = \frac{1}{-c}\log|-g-cv(t)| + A$$

e

$$\int 1\,dt = t + B$$

Isolar: Obtemos a equação

$$\log|-g-cv(t)| = -ct + C$$

onde $C = -c(B-A)$ é uma constante arbitrária. Essa equação algébrica é equivalente a

$$\begin{aligned} |-g-cv(t)| &= e^{-ct+C} \\ &= e^{C}e^{-ct} \\ &= De^{-ct} \end{aligned}$$

onde $D = e^C$ é uma constante positiva. Tirando o módulo do lado esquerdo temos que

$$-g - cv(t) = Ee^{-ct}$$

onde $E = \pm D^2$ é uma constante não-nula. Se $v(0) = v_0$, segue que

$$-g - cv_0 = E$$

Assim

$$v(t) = -\frac{g}{c} + \left(\frac{g}{c} + v_0\right)e^{-ct}$$

A solução geral da EDO é dada pela expressão acima, pois a solução de equilíbrio é obtida quando $v_0 = -g/c$.

Observe que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} -\frac{g}{c} + \left(\frac{g}{c} + v_0\right) e^{-ct} = -\frac{g}{c}$$

de modo que, a longo prazo, qualquer velocidade de queda do pára-quedas tende para a velocidade de equilíbrio.

4) Vimos que a EDO

$$v' = cv^2 - g$$

é separável. Para simplificar os próximos passos, vamos considerar $c = g = 1$, de modo que a EDO fica

$$v' = v^2 - 1$$

Equilíbrios: Encontrando as raízes

$$v^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v = \pm 1$$

Como estamos considerando apenas a queda, vamos considerar apenas a solução de equilíbrio com velocidade negativa

$$v(t) = -1$$

Separar: Pelo que vimos acima, essa EDO pode ser separada

$$\frac{1}{v^2 - 1} v' = 1$$

Integrar: Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{v(t)^2 - 1} v'(t)\, dt = \int 1\, dt$$

substituindo $v = v(t)$, $dv = v'(t)dt$

$$\left(\int \frac{1}{v^2 - 1}\, dv \right)_{v = v(t)} = \int 1\, dt$$

onde, por frações parciais, temos

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{v^2-1}\,dv &= \int \frac{1}{(v-1)(v+1)}\,dv \\
&= \int \frac{1/2}{v-1} - \frac{1/2}{v+1}\,dv \\
&= \frac{1}{2}\log|v-1| - \frac{1}{2}\log|v+1| + A \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{|v-1|}{|v+1|}\right) + A \\
&= \log\left(\sqrt{\left|\frac{v-1}{v+1}\right|}\right) + A
\end{aligned}
$$

e

$$\int 1\,dt = t + B$$

Isolar: Obtemos a equação

$$\log\left(\sqrt{\left|\frac{v-1}{v+1}\right|}\right) = t + C$$

onde $C = B - A$ é uma constante arbitrária. Essa equação algébrica é equivalente a

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\left|\frac{v-1}{v+1}\right|} &= e^{t+C} \\
&= e^C e^t \\
&= De^t
\end{aligned}
$$

onde $D = e^C$ é uma constante positiva.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{v-1}{v+1}\right| &= (De^t)^2 \\
&= D^2 e^{2t}
\end{aligned}
$$

Tirar o módulo do lado esquerdo temos que

$$\begin{aligned} \frac{v-1}{v+1} &= \pm D^2 e^{2t} \\ &= E e^{2t} \end{aligned}$$

onde $E = \pm D^2$ é uma constante não-nula. Assim

$$\begin{aligned} v-1 &= E e^{2t}(v+1) \\ &= E e^{2t} v + E e^{2t} \end{aligned}$$

logo

$$(1 - E e^{2t}) v = E e^{2t} + 1$$

de modo que podemos isolar $v = v(t)$

$$v(t) = \frac{E e^{2t} + 1}{1 - E e^{2t}}$$

A solução geral da EDO é dada pela expressão acima com $E \neq 0$ e pela solução de equilíbrio $v(t) = -1$.

Observe que, por L'Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{E e^{2t} + 1}{1 - E e^{2t}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{2E e^{2t}}{-2E e^{2t}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

de modo que, a longo prazo, qualquer velocidade de queda do pára-quedas tende para a velocidade de equilíbrio $v(t) = -1$.

A solução com velocidade inicial

$$v(0) = v_0$$

é obtida da seguinte maneira. Se $v_0 = -1$ a solução correspondente é a solução de equilíbrio $v(t) = -1$. Para os outros valores de v_0 a solução correspondente é obtida da solução geral fazendo $t = 0$ de modo que

$$\begin{aligned} v_0 &= v(0) \\ &= \frac{E+1}{1-E} \end{aligned}$$

Isolando E, temos que

$$\begin{aligned} (1-E)\,v_0 &= E+1 \\ v_0 - 1 &= E + E v_0 \\ v_0 - 1 &= E(1+v_0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$E = \frac{v_0 - 1}{1 + v_0}$$

Assim, a solução geral com esse valor de E fixado satisfaz a condição inicial.

Catenária

Considere um cabo suspenso preso a duas extremidades, como por exemplo um cabo de energia preso a duas torres de transmissão ou um colar apoiado em duas extremidades.

Vamos mostrar que o cabo suspenso possui o formato de uma *Catenária*, que é uma curva dada por um pedaço do gráfico da função *cosseno hiperbólico*

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Não é difícil verificar que sua derivada é a função *seno hiperbólico*

$$\operatorname{senh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

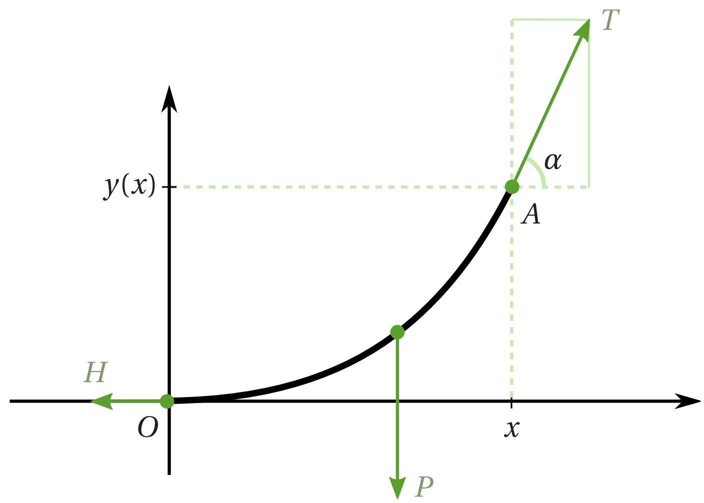
de modo que

$$\cosh'(t) = \operatorname{senh}(t)$$

Também não é difícil verificar que o seno e cosseno hiperbólicos satisfazem a equação da hipérbole unitária, de modo que

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$$

Para determinar o formato do cabo suspenso, vamos proceder a uma análise do equilíbrio estático de alguns dos seus pedaços. Para isso, denote por O o ponto mais baixo do cabo suspenso e coloque a origem do nosso sistema de coordenadas sobre o ponto O. Dado um ponto A qualquer sobre o cabo suspenso, vamos analisar o equilíbrio estático do trecho OA.



As forças atuando nas extremidades desse trecho são forças de tração, de modo que elas possuem direção tangente ao próprio cabo suspenso. Desse modo, a força na extremidade O do trecho é horizontal e tem módulo igual a H, enquanto a força na extremidade A do trecho forma um ângulo α com a horizontal e tem módulo igual a T, como ilustrado pela Figura acima. Além das forças na extremidade, também atua sobre esse trecho sua força peso, que é vertical e tem módulo igual a P. As equações de equilíbrio para os módulos das coordenadas verticais e horizontais das forças envolvidas são dadas por

$$\begin{aligned} T\,\mathrm{sen}(\alpha) &= P \\ T\cos(\alpha) &= H \end{aligned}$$

Dividindo uma equação pela outra, obtemos a seguinte equação de equilíbrio

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{P}{H}$$

Considerando que a densidade linear do cabo é constante e igual a ρ, temos que o módulo da força peso do trecho OA é dado por

$$P = g\rho L$$

onde g é o módulo da aceleração da gravidade e L é o comprimento do trecho OA. Se o formato do cabo é descrito pelo gráfico de uma função y e se x é a coordenada horizontal do ponto A, temos que sua coordenada vertical é dada por $y(x)$, que

$$\mathrm{tg}(\alpha) = y'(x)$$

e que

$$L = \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

Substituindo essas informações na equação de equlíbrio acima, obtemos que

$$y'(x) = \frac{g\rho}{H} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

Derivando essa equação, obtemos a seguinte EDO

$$y''(x) = \frac{g\rho}{H} \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Fazendo $z(x) = y'(x)$ e substituindo na EDO acima, obtemos

$$z'(x) = \frac{g\rho}{H} \sqrt{1 + z(x)^2}$$

que é uma EDO separável. Vamos então aplicar os passos para obter a solução $z(x)$ que satisfaz a condição inicial

$$z(0) = y'(0) = 0$$

e dela obter o formato $y(x)$ do cabo suspenso.

Passos

1) Soluções constantes: Encontrando as raízes de

$$\sqrt{1 + z^2} = 0 \iff 1 + z^2 = 0$$

não obtemos nenhuma raiz real, portanto, nenhuma solução constante.

2) Separar: Essa EDO pode ser colocada na forma separada

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z(x)^2}} z'(x) = \frac{g\rho}{H}$$

3) Integrar: Integrando a equação acima

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z(x)^2}} z'(x)\,dx = \int \frac{g\rho}{H}\,dx$$

temos, pela substituição $z = z(x)$, que ela é equivalente a

$$\left(\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz\right)_{z=z(x)} = \int \frac{g\rho}{H}\,dx$$

onde

$$\int \frac{g\rho}{H}\,dx = \frac{g\rho}{H}x + A$$

A determinação da integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz$$

se dá através da substituição trigonométrica hiperbólica

$$z = \operatorname{senh}(t)$$

de modo que

$$dz = \cosh(t)\,dt$$

e que

$$1+z^2 = 1+\operatorname{senh}^2(t) = \cosh^2(t)$$

uma vez que

$$\cosh^2(t) - \operatorname{senh}^2(t) = 1$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\,dz &= \int \frac{1}{\cosh(t)}\cosh(t)\,dt \\
&= \int 1\,dt \\
&= t + B
\end{aligned}$$

4) Isolar: Voltando à equação original, obtemos que

$$t + B = \frac{g\rho}{H}x + A$$

Quando $x = 0$, temos que $z = z(x) = y'(x) = 0$, de modo que $t = \text{asenh}(z) = 0$, de modo que $B = A$. Logo

$$t = \frac{g\rho}{H}x$$

e aplicando o seno hiperbólico nos dois lados, obtemos que

$$y'(x) = z = \text{senh}(t) = \text{senh}\left(\frac{g\rho}{H}x\right)$$

Integrando essa equação e usando que $\cosh' = \text{senh}$ obtemos que

$$y(x) = \frac{H}{g\rho}\cosh\left(\frac{g\rho}{H}x\right) + C$$

Usando que $y(0) = 0$ e que $\cosh(0) = 1$, segue que

$$0 = y(0) = \frac{H}{g\rho}\cosh(0) + C$$

de modo que

$$C = -\frac{H}{g\rho}$$

Isso mostra que

$$y(x) = \frac{H}{g\rho}\left(\cosh\left(\frac{g\rho}{H}x\right) - 1\right)$$

que é a equação da Catenária.

4.3 EDO LINEAR DE 1ª-ORDEM

Uma EDO é linear de 1ª-ordem quando ela pode ser escrita na seguinte forma

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

onde $a_1(t)$ não é identicamente nulo, $a_1(t), a_0(t)$ são os coeficientes da EDO, $f(t)$ é o forçamento ou termo não-homogêneo da EDO.

Exemplos

1) Velocidade da queda-livre com atrito:

$$mv'(t) = -mg - bv(t)$$

é uma EDO de 1ª-ordem linear não-homogênea, pois pode ser colocada na forma

$$mv'(t) + bv(t) = -mg$$

O coeficiente de $v'(t)$ é m, o coeficiente de $v(t)$ é b e o forçamento é $-mg$. Já obtivemos a solução de equilíbrio

$$v(t) = -\frac{mg}{b}$$

Como obter as outras soluções?

2) Velocidade da queda-livre de um pára-quedas:

$$mv'(t) = -mg + bv^2(t)$$

é uma EDO de 1ª-ordem não-linear devido ao termo $v^2(t)$.

Uma EDO linear de 1ª-ordem e sua *homôgenea associada* são dadas por

$$\begin{aligned} a_1(t)y' + a_0(t)y &= f(t) \\ a_1(t)y' + a_0(t)y &= 0 \end{aligned}$$

Para encontrar sua solução geral, dividimos por $a_1(t)$ para colocar as equações na forma

$$\boxed{\begin{aligned} y' + p(t)y &= g(t) \\ y' + p(t)y &= 0 \end{aligned}}$$

onde

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{a_0(t)}{a_1(t)} \\ g(t) &= \frac{f(t)}{a_1(t)} \end{aligned}$$

estão definidas para todo t tal que $a_1(t) \neq 0$.

Proposição 4.1

A solução geral da EDO linear

$$y' + p(t)y = g(t)$$

é dada por

$$\boxed{y(t) = c(t)e^{-P(t)}}$$

onde

$$\boxed{c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt}$$

e

$$\int p(t)\,dt = P(t) + C$$

Prova:

Multiplicando a EDO não-homogênea pelo denominado *fator integrante* $e^{P(t)}$, obtemos que

$$e^{P(t)}y'(t) + p(t)e^{P(t)}y(t) = g(t)e^{P(t)}$$

Utilizando a regra da cadeia, a regra da derivada do produto e a equação acima, é fácil verificar que

$$\left(e^{P(t)}y(t)\right)' = g(t)e^{P(t)}$$

Assim, agora podemos integrar a equação e obter que

$$e^{P(t)}y(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt$$

Isolando $y(t)$, segue que

$$y(t) = \left(\int g(t)e^{P(t)}\,dt\right)e^{-P(t)}$$

de modo que

$$y(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$c(t) = \int g(t)e^{P(t)}\,dt$$

■

No caso da EDO homogênea, a solução geral é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 4.2

A solução geral da EDO homogênea

$$y' + p(t)y = 0$$

é dada por

$$\boxed{y(t) = ce^{-P(t)}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Prova:

Basta aplicar a solução geral da não-homogênea, observando que $g(t) = 0$, de modo que $c(t) = c$ é uma constante. ■

Exemplos

1) A EDO

$$y'(t) - 2ty(t) = 0$$

é linear homogênea, sendo igual à sua homogênea associada. Temos que $p(t) = -2t$, de modo que

$$\int p(t)\,dt = \int -2t\,dt = -t^2 + C$$

Segue que $P(t) = -t^2$, de modo que a solução geral dessa EDO é dada por

$$y(t) = ce^{-P(t)} = ce^{t^2}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

2) A EDO

$$ty'(t) - y(t) = t^2$$

é linear não-homogênea e sua homogênea associada é dada por

$$ty'(t) - y(t) = 0$$

Para $t > 0$, essa EDO não-homogênea pode ser escrita como

$$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = t$$

e sua homogênea associada pode ser escrita como

$$y'(t) - \frac{1}{t}y(t) = 0$$

Temos que $p(t) = -\frac{1}{t}$, de modo que

$$\int p(t)\,dt = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\log(t) + C$$

Segue que $P(t) = -\log(t)$, de modo que a solução geral da homogênea é dada por

$$y(t) = ce^{-P(t)} = ce^{\log(t)} = ct$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Como $g(t) = t$, segue que

$$\begin{aligned} c(t) &= \int g(t)e^{P(t)}\,dt \\ &= \int te^{\log(t^{-1})}\,dt \\ &= \int tt^{-1}\,dt \\ &= \int 1\,dt \\ &= t + c \end{aligned}$$

de modo que a solução geral da não-homogênea é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t)e^{-P(t)} \\ &= (t+c)e^{\log(t)} \\ &= (t+c)t \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

3) Velocidade da queda-livre com atrito: Já vimos que

$$mv'(t) + bv(t) = -mg$$

é linear de 1ª-ordem. Para obter sua solução geral, primeiro dividimos por m para obter

$$v'(t) + cv(t) = -g$$

onde $p(t) = c = b/m$, de modo que

$$\begin{aligned} \int p(t)\,dt &= \int c\,dt \\ &= ct + C \end{aligned}$$

Segue que $P(t) = ct$, logo a solução geral é

$$v(t) = c(t)e^{-ct}$$

onde

$$\begin{aligned} c(t) &= \int -ge^{ct}\,dt \\ &= -g\frac{e^{ct}}{c} + D \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(-g\frac{e^{ct}}{c} + D\right)e^{-ct} \\ &= -\frac{g}{c} + De^{-ct} \end{aligned}$$

é a solução geral da queda-livre com atrito.

A solução com velocidade inicial dada por

$$v(0) = v_0$$

é obtida da solução geral fazendo $t = 0$ de modo que

$$-\frac{g}{c} + D = v_0 \quad \Longleftrightarrow \quad D = v_0 + \frac{g}{c}$$

Assim, apenas a solução

$$v(t) = -\frac{g}{c} + \left(v_0 + \frac{g}{c}\right)e^{-ct}$$

satisfaz essa condição inicial.

Temos que

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{c}$$

E portanto, a longo prazo e independentemente da velocidade inicial, a velocidade da queda-livre com atrito sempre tende para a velocidade de equilíbrio $-g/c$, conhecida como velocidade terminal.

Também podemos comparar a velocidade da queda-livre com e sem atrito em cada instante t mantendo t fixo e fazendo o coeficiente de arraste c tender a zero

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 0} v(t) &= \lim_{c\to 0} -\frac{g}{c} + \left(v_0 + \frac{g}{c}\right) e^{-ct} \\
&= \lim_{c\to 0} v_0 e^{-ct} + \frac{g}{c}(e^{-ct} - 1) \\
&= v_0 + g \lim_{c\to 0} \frac{e^{-ct} - 1}{c} \\
&= v_0 - gt
\end{aligned}$$

onde usamos L'Hospital no último limite, que é uma indeterminação do tipo $0/0$, lembrando que devemos derivar em relação à c, uma vez que estamos tomando o limite quando c tende a zero. Segue que, no limite quando o coeficiente de arraste c tende a zero, a velocidade da queda-livre com atrito coincide com a velocidade da queda-livre sem atrito.

Problema de Valor Inicial

No exemplo anterior vimos que a solução geral de uma EDO consiste de infinitas soluções e que, no entanto, uma única solução satisfaz o valor inicial dado. O problema de encontrar a solução de uma EDO que satisfaz um valor inicial é conhecido como *Problema de Valor de Inicial* (PVI).

O próximo resultado mostra que um PVI para uma EDO linear de 1ª-ordem sempre possui uma única solução.

Proposição 4.3

Seja y_0 um valor dado. Então o PVI linear

$$\boxed{\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}}$$

possui uma única solução.

Prova:

Fixando $P(t)$ uma primitiva de $p(t)$ e $F(t)$ uma primitiva de $e^{P(t)}g(t)$, temos que a solução geral da EDO é dada por

$$y(t) = c(t)e^{-P(t)}$$

onde

$$\begin{aligned} c(t) &= \int e^{P(t)}g(t)\,dt \\ &= F(t) + C \end{aligned}$$

onde C é uma constante arbitrária, de modo que

$$y(t) = (F(t) + C)e^{-P(t)}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ &= (F(0) + C)e^{-P(0)} \end{aligned}$$

onde podemos isolar C

$$C = y_0 e^{P(0)} - F(0)$$

e, com essa escolha de C, obtemos a única solução $y(t)$ do PVI.

■

Na proposição anterior o valor inicial foi dada no instante $t = 0$ por conveniência: o resultado continua válido se o valor inicial for dado em qualquer outro instante onde os coeficientes da EDO estejam definidos. A unicidade de solução de um PVI está relacionada com o *determinismo* do fênomeno descrito pela EDO linear: conhecido o valor inicial de uma quantidade e como essa quantidade varia no tempo, a quantidade fica determinada unicamente.

Exemplo

Considere o PVI linear homogêneo

$$\begin{cases} (1+x)y'(x) - ay(x) = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Onde a é uma constante real. Para $x > -1$, a EDO pode ser escrita como

$$y'(x) - \frac{a}{1+x}y(x) = 0$$

Temos que $p(x) = -\frac{a}{1+x}$, de modo que

$$\begin{aligned} \int p(x)\,dx &= \int -\frac{a}{1+x}\,dx \\ &= -a\log(1+x) + C \\ &= -\log(1+x)^a + C \end{aligned}$$

Segue que $P(x) = -\log(1+x)^a$, de modo que a solução geral da EDO é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= ce^{-P(x)} \\ &= ce^{\log(1+x)^a} \\ &= c(1+x)^a \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Usando o valor inicial, temos que

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) \\ &= c(1+0)^a \\ &= c \end{aligned}$$

Segue que

$$y(x) = (1+x)^a$$

é a solução do PVI.

Vamos verificar que a série binomial

$$\begin{aligned} y(x) &= \binom{a}{0} + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \end{aligned}$$

é uma solução desse PVI para todo $x \in (-1,1)$, onde

$$\binom{a}{0} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))}{n!}$$

Já sabemos que

$$y(0) = \binom{a}{0} = 1$$

e que o raio de convergência da série binomial é $R = 1$, de modo que a derivada dessa série em $x \in (-1,1)$ é dada por

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n+1} (n+1) x^n \end{aligned}$$

Usando que

$$\binom{a}{n+1} = \binom{a}{n} \frac{a-n}{n+1}$$

segue que

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} (a-n) x^n$$

Temos que $y(x)$ é solução da EDO, uma vez que

$$\begin{aligned}
(1+x)y'(x) &= y'(x) + xy'(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n+1}(n+1)x^n + x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}(a-n)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n} n x^{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a\binom{a}{n}x^n \\
&= ay(x)
\end{aligned}$$

Como a solução do PVI é única, segue que

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

para todo $x \in (-1,1)$.

4.4 EDO linear de 2ª ordem

Uma EDO é linear de 2ª-ordem quando ela pode ser escrita na seguinte forma

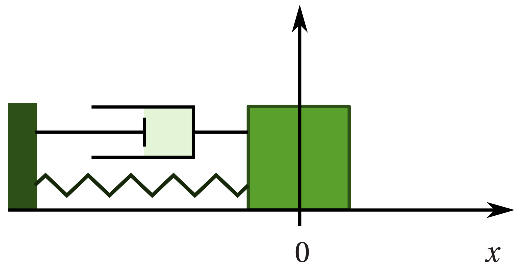
$$a_2(t)y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

onde $a_2(t)$ não é identicamente nulo, $a_2(t), a_1(t), a_0(t)$ são os coeficientes da EDO e $f(t)$ é o forçamento ou termo não-homogêneo da EDO.

As equações lineares de 2ª-ordem são muito relevantes, pois aparecem associada a modelos de diversas áreas de aplicação, como ilustrado pelos seguintes exemplos.

Exemplos

1) Posição no sistema Massa-Mola-Amortecimento (MMA): Considere o deslocamento $x(t)$ à partir da posição de equilíbrio de um bloco de massa m acoplado a uma mola, a um amortecedor e a um forçamento externo.



Pela Lei de Hooke, a força da mola é proporcional à posição e dada por

$$F_M = -kx(t)$$

onde k é a constante de Hooke da mola. Já força de amortecimento é proporcional à velocidade e dada por

$$F_A = -bx'(t)$$

onde b é uma constante que depende da construção do amortecedor. O forçamento externo independe da posição ou velocidade do bloco e é uma função do tempo e dada por

$$F_E = f(t)$$

Desconsiderando a força de atrito do bloco com o piso, a força resultante é dada por

$$F = F_A + F_M + F_E$$

Pela 2ª Lei de Newton, temos então que

$$mx''(t) = -bx'(t) - kx(t) + f(t)$$

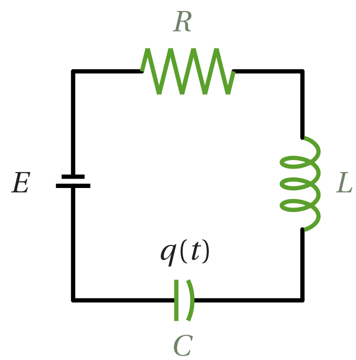
de modo que

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t)$$

As condições iniciais são dadas por

$$\begin{cases} x(0) & = & x_0 & \text{posição inicial} \\ x'(0) & = & v_0 & \text{velocidade inicial} \end{cases}$$

2) Carga no circuito Resistor-Indutor-Capacitor (RLC): Considere a carga $q(t)$ no capacitor de um circuito elétrico em série formado por um resistor, por um indutor, por um capacitor e por uma fonte externa.



A queda de tensão nas extremidades do capacitor é proporcional à carga $q(t)$ armazenada por ele e dada por

$$V_C = Cq(t)$$

onde C é a capacitância do capacitor, enquanto a queda de tensão nas extremidades do resistor é proporcional à corrente $q'(t)$ que passa por ele e dada por

$$V_R = Rq'(t)$$

onde R é a resistência do resistor, e a queda de tensão nas extremidades do indutor é proporcional à $q''(t)$ e dada por

$$V_L = Lq''(t)$$

onde L é a indutância do indutor. Pela 2ª Lei de Kirchoff, a soma das quedas de tensão num circuito elétrico é igual à tensão da fonte

externa dada por
$$V_E = E(t)$$
de modo que
$$V_L + V_R + V_C = V_E$$
ou seja
$$Lq''(t) + Rq'(t) + Cq(t) = E(t)$$
onde L, R, C podem variar com o tempo. As condições iniciais são dadas por
$$\begin{cases} q(0) = q_0 & \text{carga inicial} \\ q'(0) = i_0 & \text{corrente inicial} \end{cases}$$

Note como dois fenômenos distintos, um sistema mecânico MMA e um circuito elétrico RLC, são modelados pela mesma EDO. A vantagem da abordagem matemática a uma EDO é que, resolvido o modelo matemático obtemos de uma só vez a descrição de ambos fenômenos. Além da economia de esforços, isso também permite fazer analogias entre os dois fenômentos, o que nos ajuda a entendê-los: no circuito elétrico o capacitor tem o papel da mola de armazenar energia, a resistência tem o papel do amortecedor de dissipar a energia e a indutância tem o papel da massa de fornecer inércia para a carga.

Solução geral

Uma EDO linear de 2ª-ordem e sua *homôgenea associada* são dadas por

$$\begin{aligned} a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y &= f(t) \\ a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y &= 0 \end{aligned}$$

Para encontrar sua solução geral, dividimos por $a_2(t)$ para colocar as equações na forma

$$\boxed{\begin{aligned} y'' + q(t)y' + p(t)y &= g(t) \\ y'' + q(t)y' + p(t)y &= 0 \end{aligned}}$$

onde

$$q(t) = \frac{a_1(t)}{a_2(t)} \qquad p(t) = \frac{a_0(t)}{a_2(t)} \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a_2(t)}$$

estão definidas para todo t tal que $a_2(t) \neq 0$.

Exemplo

Considere a EDO linear de 2ª ordem dada por

$$t^2 y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = t^5$$

cuja homogênea associada

$$t^2 y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0$$

é um exemplo do que é conhecido como Equação de Euler. Dividindo por $a_2(t) = t^2$, obtemos

$$\begin{aligned} y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) &= t^3 \\ y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) &= 0 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{2}{t} \\ p(t) &= \frac{-2}{t^2} \\ g(t) &= t^3 \end{aligned}$$

estão definidas no intervalo $t > 0$.

A proposição seguinte mostra que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não-homogênea é dada pela soma de uma solução particular com as soluções da homogênea associada.

Proposição 4.4

A solução geral da EDO não-homogênea

$$\boxed{y''(t)+q(t)y'(t)+p(t)y(t)=g(t)}$$

é dada por

$$\boxed{y(t)=y_p(t)+y_h(t)}$$

onde $y_p(t)$ é uma solução particular da EDO não-homogênea e $y_h(t)$ é a solução geral da homogênea associada.

Prova:

Primeiro vamos mostrar que, se $z(t)$ é solução da homogênea associada, então $y(t)=y_p(t)+z(t)$ é solução da não-homogênea. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
& y''(t)+q(t)y'(t)+p(t)y(t) \\
= {} & \left(y_p(t)+z(t)\right)''+q(t)\left(y_p(t)+z(t)\right)'+p(t)\left(y_p(t)+z(t)\right) \\
= {} & \left(y_p''(t)+z''(t)\right)+q(t)\left(y_p'(t)+z'(t)\right)+p(t)\left(y_p(t)+z(t)\right) \\
= {} & \left(y_p''(t)+q(t)y_p'(t)+p(t)y_p(t)\right)+\left(z''(t)+q(t)z'(t)+p(t)z(t)\right) \\
= {} & g(t)+0 \\
= {} & g(t)
\end{aligned}$$

onde usamos que $y_p(t)$ é uma solução particular da EDO não-homogênea.

Agora vamos mostrar que toda solução da não-homogênea é dada por essa forma. Seja $y(t)$ uma solução qualquer da EDO linear de 2ª ordem não-homogênea. Temos então que

$$\begin{aligned}
y''(t)+q(t)y'(t)+p(t)y(t) &= g(t) \\
y_p''(t)+q(t)y_p'(t)+p(t)y_p(t) &= g(t)
\end{aligned}$$

Subtraindo as equações, obtemos que

$$\big(y(t) - y_p(t)\big)'' + q(t)\big(y(t) - y_p(t)\big)' + p(t)\big(y(t) - y_p(t)\big) = 0$$

Logo $z(t) = y(t) - y_p(t)$ é solução da homogênea associada, de modo que

$$y(t) = y_p(t) + z(t)$$

■

SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

Vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem homogênea

$$\boxed{y'' + q(t)y' + p(t)y = 0}$$

é dada pela combinação linear

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sempre que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ forem soluções não-proporcionais da EDO, denominadas *soluções fundamentais*.

Exemplo

Temos que

$$y_1(t) = t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais (não-proporcionais) da Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0$$

Vamos ver que a solução geral dessa EDO é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não são proporcionais, temos que

$$\frac{y_2(t)}{y_1(t)}$$

não é constante, de modo que sua derivada é não nula e dada por

$$\boxed{\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2}}$$

onde

$$W(y_1(t), y_2(t)) = y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

é denominado o *Wronskiano* de $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Note que o Wronskiano é dado pelo seguinte determinante

$$\boxed{W(y_1(t), y_2(t)) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}$$

Exemplo

O Wronskiano das soluções

$$y_1(t) = t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = t^{-2}$$

da Equação de Euler

$$t^2y''(t) + 2ty'(t) - 2y(t) = 0$$

é dado por

$$W(t, t^{-2}) \quad = \quad \begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ (t)' & (t^{-2})' \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} t & t^{-2} \\ 1 & -2t^{-3} \end{vmatrix} \\
&= t(-2x^{-3}) - t^{-2}(1) \\
&= -3t^{-2}
\end{aligned}
$$

A proposição a seguir estabelece um fato de fundamental importância sobre o Wronskiano.

Proposição 4.5: Fórmula de Abel

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções da EDO homogênea

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então

$$\boxed{W(y_1(t), y_2(t)) = ce^{-Q(t)}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e

$$\int q(t)\,dx = Q(t) + C$$

Prova:

Por simplicidade, vamos denotar $W(y_1(t), y_2(t))$ por

$$W(t) = y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t)$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
W'(t) &= (y_2'(t)y_1(t) - y_1'(t)y_2(t))' \\
&= \quad y_2''(t)y_1(t) + y_1'(t)y_2'(t) \\
&\quad -y_1''(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1'(t) \\
&= y_2''(t)y_1(t) - y_1''(t)y_2(t)
\end{aligned}
$$

Como $y_2(t)$ e $y_1(t)$ são soluções da EDO, temos que

$$\begin{aligned} y_2''(t)+q(t)y_2'(t)+p(t)y_2(t) &= 0 \\ y_1''(t)+q(t)y_1'(t)+p(t)y_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por $y_1(t)$ e a segunda equação por $y_2(t)$, obtemos que

$$\begin{aligned} y_2''(t)y_1(t)+q(t)y_2'(t)y_1(t)+p(t)y_2(t)y_1(t) &= 0 \\ y_1''(t)y_2(t)+q(t)y_1'(t)y_2(t)+p(t)y_1(t)y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

de modo que, subtraindo as duas equações, obtemos

$$W'(t)+q(t)W(t)=0$$

cuja solução é dada por

$$W(t)=ce^{-Q(t)}$$

onde $c\in\mathbb{R}$ e

$$\int q(t)\,dx = Q(t)+C$$

■

Exemplo

A Equação de Euler

$$t^2y''(t)+2ty'(t)-2y(t)=0$$

pode ser reescrita como

$$y''(t)+\frac{2}{t}y'(t)-\frac{2}{t^2}y(t)=0$$

de modo que

$$q(t)=\frac{2}{t}$$

Segue que

$$Q(t) = 2\log(t)$$

de modo que, pela Fórmula de Abel, temos que

$$W(t) = ce^{-Q(t)} = ct^{-2}$$

Vamos mostrar agora a relação entre duas soluções serem fundamentais e seu Wronskiano não se anular.

Proposição 4.6

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções da EDO homogênea

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

(A) $W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$ para algum t_0

(B) $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$ para todo t

(C) $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são fundamentais

Prova:

Vamos mostrar que (A) é equivalente a (B) e, depois, que (B) é equivalente a (C).

Para mostrar que (A) e (B) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$W(y_1(t), y_2(t)) = ce^{-Q(t)}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Segue então que

$$W(y_1(t_0), y_2(t_0)) \neq 0$$

para algum t_0, é equivalente a

$$c \neq 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$$

para todo t.

Para mostrar que (B) e (C) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2}$$

Segue então que

$$W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$$

para todo t, é equivalente a

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' \neq 0$$

para todo t, que, por sua vez, é equivalente a $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não serem proporcionais, que, por sua vez, é equivalente a

$$y_1(t) \text{ e } y_2(t) \text{ serem fundamentais}$$

■

Finalmente vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem é dada pela combinação linear de duas soluções fundamentais.

Proposição 4.7

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais da EDO

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = 0$$

Então $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não se anulam simultaneamente e a solução geral da EDO é dada por

$$\boxed{y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Prova:

Como $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais, temos que

$$W(y_1(t), y_2(t)) = y_2'(t) y_1(t) - y_1'(t) y_2(t) \neq 0$$

para todo t, de modo que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ não podem se anular simultaneamente.

Agora seja $z(t)$ uma solução qualquer da EDO e suponha, sem perda de generalidade, que $y_1(t) \neq 0$. Comparando $z(t)$ com $y_1(t)$, temos que

$$\left(\frac{z(t)}{y_1(t)}\right)' = \frac{W(y_1(t), z(t))}{y_1(t)^2} = \frac{ae^{-Q(t)}}{y_1(t)^2}$$

para algum $a \in \mathbb{R}$, e comparando $y_2(t)$ com $y_1(t)$, temos que

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' = \frac{W(y_1(t), y_2(t))}{y_1(t)^2} = \frac{be^{-Q(t)}}{y_1(t)^2} \neq 0$$

de modo que $b \neq 0$. Segue então que

$$\left(\frac{z(t)}{y_1(t)}\right)' = \frac{a}{b} \frac{be^{-Q(t)}}{y_1(t)^2} = \frac{a}{b} \left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)'$$

Integrando essa equação, obtemos que

$$\frac{z(t)}{y_1(t)} = \frac{a}{b} \frac{y_2(t)}{y_1(t)} + c_1$$

para algum $c_1 \in \mathbb{R}$. Denotando $c_2 = a/b$ e isolando $z(t)$ na equação acima, segue que

$$z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

mostrando que a solução é uma combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Agora, uma vez que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da EDO, temos que

$$\begin{aligned} y_1''(t) + q(t)y_1'(t) + p(t)y_1(t) &= 0 \\ y_2''(t) + q(t)y_2'(t) + p(t)y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por c_1 e a segunda equação por c_2, obtemos que

$$\begin{aligned} c_1 y_1''(t) + q(t)c_1 y_1'(t) + p(t)c_1 y_1(t) &= 0 \\ c_2 y_2''(t) + q(t)c_2 y_2'(t) + p(t)c_2 y_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Somando essas equações, obtemos que

$$(c_1 y_1''(t) + c_2 y_2''(t)) + q(t)(c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)) + p(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) = 0$$

mostrando que $y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ é de fato solução da EDO para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Vamos considerar o seguinte exemplo.

Exemplos

1) Temos que

$$y_1(t) = t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais (não-proporcionais) da Equação de Euler

$$t^2 y''(t) + 2t y'(t) - 2y(t) = 0$$

que é equivalente à EDO

$$y''(t) + \frac{2}{t} y'(t) - \frac{2}{t^2} y(t) = 0$$

para $t > 0$. Temos então a solução geral dessas duas EDO para $t > 0$ é dada por

$$y(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2) Sistema massa-mola sem amortecimento:

$$mx''(t) = -kx(t)$$

Essa é uma EDO linear homogênea

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

tal que $p(t) = \frac{k}{m}$ e $q(t) = 0$. Temos que

$$x_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

são soluções, o que pode ser verificado por substituição na EDO. De fato, são soluções fundamentais da homogênea, uma vez que não são proporcionais. Segue que a solução geral da EDO é dada por

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

SOLUÇÃO DA NÃO-HOMOGÊNEA

A solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não-homogênea

$$y'' + q(t)y' + p(t)y = g(t)$$

será dada a partir da solução geral da sua homogêna associada através do método denominado de *Variação dos Parâmetros*.

Passos

1) **Variar os parâmetros:** Procurar uma solução da EDO não-homogêna da forma $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$, substituindo os parâmetros c_1 e c_2 da solução geral $c_1 y_1(t) + c_2 y_2$ da homogêna associada por funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$, que são as novas incógnitas.

2) Determinar os parâmetros variáveis: Determinar quais são as funções $c_1(t)$ e $c_2(t)$, utilizando a EDO não-homogênea. Uma vez que

$$y(t) = y_1(t)c_1(t) + y_2(t)c_2(t)$$

segue que

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_1'(t)c_1(t) + y_2'(t)c_2(t) + \\ &+ c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) \end{aligned}$$

Impondo que

$$c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) = 0$$

obtemos que

$$y'(t) = y_1'(t)c_1(t) + y_2'(t)c_2(t)$$

de modo que

$$\begin{aligned} y''(t) &= y_1''(t)c_1(t) + y_2''(t)c_2(t) + \\ &+ c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) \end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{array}{rcrcr} p(t)y(t) & = & p(t)y_1(t)c_1(t) & + & p(t)y_2(t)c_2(t) \\ \\ q(t)y'(t) & = & q(t)y_1'(t)c_1(t) & + & q(t)y_2'(t)c_2(t) \\ \\ y''(t) & = & y_1''(t)c_1(t) & + & y_2''(t)c_2(t) \\ & + & c_1'(t)y_1'(t) & + & c_2'(t)y_2'(t) \end{array}$$

Somando as equações, colocando $c_1(t)$ e $c_2(t)$ em evidência, e usando que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da homogênea e que $y(t)$ é solução da não-homogênea, obtemos que

$$g(t) = c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t)$$

Obtemos assim o seguinte sistema

$$\begin{cases} y_1(t)c_1'(t) & + & y_2(t)c_2'(t) & = & 0 \\ \\ y_1'(t)c_1'(t) & + & y_2'(t)c_2'(t) & = & g(t) \end{cases}$$

para determinar $c_1'(t)$ e $c_2'(t)$. Temos que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é o Wronskiano das soluções fundamentais, dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

que é não nulo, uma vez que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais. Pela regra de Cramer, apresentada no Apêndice, segue que

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(t) \\ g(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}$$

e que

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & 0 \\ y_1'(t) & g(t) \end{vmatrix}}{W(t)} = \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}$$

de modo que

$$c_1(t) = \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt$$

e que

$$c_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt$$

Observe que, como $c_1(t)$ e $c_2(t)$ são dadas por integrais indefinidas, cada uma delas é de fato uma família de funções contendo uma constante arbitrária.

A proposição seguinte mostra que o método da Variação dos Parâmetros fornece a solução geral de uma EDO linear de 2ª ordem não-homogênea.

Proposição 4.8

A solução geral da EDO

$$y''(t) + q(t)y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$$

é dada por

$$\boxed{y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)}$$

onde

$$\boxed{\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt \\ c_2(t) &= \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt \end{aligned}}$$

enquanto $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções fundamentais da homogênea associada e $W(t)$ é o seu Wronskiano.

Prova:

Basta notar que $c_1(t) = C_1(t) + c_1$ e também que $c_2(t) = C_2(t) + c_2$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A solução dada pelo método da Variação dos Parâmetros pode então ser escrita como

$$\begin{aligned} y(t) &= (C_1(t) + c_1)\, y_1(t) + (C_2(t) + c_2)\, y_2(t) \\ &= \big(C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)\big) + \big(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\big) \end{aligned}$$

Escolhendo $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, vemos que

$$y_p(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$$

é uma solução particular da não-homogênea. O resultado segue então da Proposição 4.4, uma vez que

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é a solução geral da homogênea. ■

Vamos considerar o seguinte exemplo.

Exemplo

Vimos que

$$y_1(t) = t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = t^{-2}$$

são soluções fundamentais da EDO

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) = 0$$

que é a homogênea associada à EDO não-homogênea

$$y''(t) + \frac{2}{t}y'(t) - \frac{2}{t^2}y(t) = t^3$$

Vimos também que o Wronskiano dessas duas soluções fundamentais é dado por

$$W(t) = -3t^{-2}$$

Temos então que

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$$

é a solução geral da EDO não-homogênea, onde

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt \\ &= \int -\frac{t^3t^{-2}}{-3t^{-2}}\,dt \\ &= \int \frac{t^3}{3}\,dt \\ &= \frac{t^4}{12} + c_1 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
c_2(t) &= \int \frac{g(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt \\
&= \int \frac{t^3 t}{-3t^{-2}}\,dt \\
&= \int -\frac{t^6}{3}\,dt \\
&= -\frac{t^7}{21} + c_2
\end{aligned}
$$

A solução geral da EDO não-homogênea é então dada por

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \left(\frac{t^4}{12} + c_1\right) t + \left(-\frac{t^7}{21} + c_2\right) t^{-2} \\
&= \frac{t^5}{12} - \frac{t^5}{21} + c_1 t + c_2 t^{-2} \\
&= \frac{t^5}{28} + c_1 t + c_2 t^{-2}
\end{aligned}
$$

Observe que

$$y_p(t) = \frac{t^5}{28}$$

é uma solução particular da EDO não-homogênea, enquanto

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t^{-2}$$

é a solução geral da homogênea associada, de modo que

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

é a solução geral da EDO não-homogênea.

Problema de Valores Iniciais

Exemplo

Vamos resolver o PVI do sistema massa-mola sem amortecimento

$$\begin{cases} mx''(t) + kx(t) = 0 \\ \\ x(0) = x_0 \quad x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Já vimos que ele tem solução geral dada por

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é a frequência natural de vibração desse sistema massa-mola. Temos então

$$x'(t) = -c_1\omega \operatorname{sen}(\omega t) + c_2\omega \cos(\omega t)$$

Usando os valores iniciais temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1 \\ v_0 &= x'(0) = c_2\omega \end{aligned}$$

Segue que $c_1 = x_0$ e $c_2 = v_0/\omega$ e, portanto,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$

é a única solução do PVI.

No exemplo anterior vimos que a solução geral de uma EDO consiste de infinitas soluções e que, no entanto, uma única solução satisfaz os valores iniciais dados. O próximo resultado mostra que um PVI para uma EDO linear de 2ª-ordem sempre possui uma única solução, desde que sejam considerados valores iniciais para a função incógnita e sua primeira derivada. Fisicamente, isso corresponde a fixar a posição e velocidade iniciais de um corpo para obter sua trajetória.

Proposição 4.9

Sejam y_0 e y_0' valores dados e suponha que a EDO possui soluções fundamentais. Então o PVI linear

$$\boxed{\begin{cases} y'' + q(t)y + p(t)y = g(t) \\ \\ y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y_0' \end{cases}}$$

possui uma única solução.

Prova:

Fixando $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluções fundamentais e $y_p(t)$ é uma solução particular, temos que a solução geral da EDO é da forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Segue que

$$y'(t) = c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t) + y_p'(t)$$

Usando as condições iniciais, temos que

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) \\ &= c_1 y_1(0) + c_2 y_2(0) + y_p(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0' &= y'(0) \\ &= c_1 y_1'(0) + c_2 y_2'(0) + y_p'(0) \end{aligned}$$

de modo que c_1 e c_2 podem ser obtidos resolvendo o sistema

$$y_1(0)c_1 + y_2(0)c_2 = y_0 - y_p(0)$$

$$y_1'(0)c_1 + y_2'(0)c_2 = y_0' - y_p'(0)$$

cujo determinante é $W(y_1, y_2)(0)$. Esse determinante é não-nulo, uma vez que $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são fundamentais, portanto esse sistema tem uma única solução c_1, c_2 e, com esses valores de c_1 e c_2, obtemos a única solução $y(t)$ do PVI.

■

Na proposição anterior os valores iniciais foram dados no instante $t = 0$ por conveniência: o resultado continua válido se os valores iniciais forem dados em qualquer outro instante onde os coeficientes da EDO estejam definidos.

Como os métodos para se encontrar a solução geral e a solução de PVIs de equações lineares dependem da determinação de soluções fundamentais, vamos analisar, nas próximas seções, alguns métodos para se obter soluções fundamentais. Vamos primeiro analisar EDOs lineares com coeficientes constantes e depois analisar o caso geral, das EDOs lineares com coeficientes variáveis.

4.5 Coeficientes constantes

Uma EDO linear com coeficientes constantes pode ser colocada na forma

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

onde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ são constantes. Pelo que vimos na Seção anterior, para resolvê-la temos que encontrar soluções fundamentais da homogênea associada

$$\boxed{a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0}$$

Equação característica

Vamos procurar soluções da forma exponencial $y(t) = e^{rt}$, de modo que

$$\begin{aligned} a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) &= a_2 \left(e^{rt}\right)'' + a_1 \left(e^{rt}\right)' + a_0 \left(e^{rt}\right) \\ &= a_2 \left(r^2 e^{rt}\right) + a_1 \left(r e^{rt}\right) + a_0 \left(e^{rt}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) e^{rt} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

o que ocorre se e só se

$$\boxed{a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0}$$

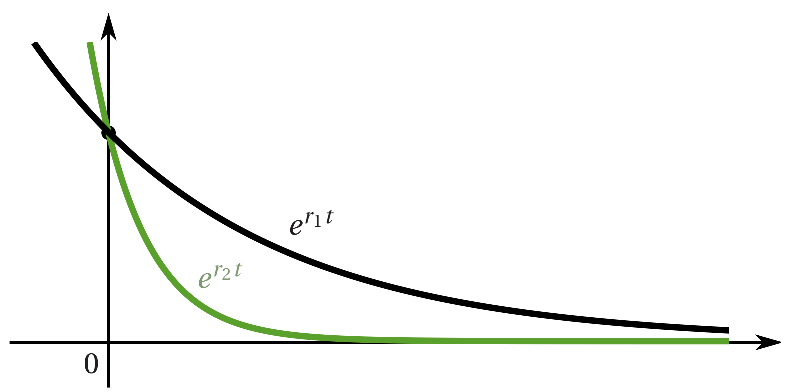
que é denominada *equação característica* da homogênea. O tipo de solução depende então do tipo de raízes dessa equação, denominadas *raízes características* da homogênea. Vamos analisar o que ocorre dependendo do sinal do discriminante da equação característica.

Raízes reais distintas

Quando $\Delta > 0$, existem duas raízes características, dadas por

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \qquad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2a_2}$$

que são reais e distintas, de modo que $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$ são soluções fundamentais, uma vez que não são proporcionais.



Segue então que

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é a solução geral da homogênea. A tabela seguinte resume essas informações.

raízes características:	$r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \qquad r_1 \neq r_2$
soluções fundamentais:	$e^{r_1 t}, \qquad e^{r_2 t}$
solução geral:	$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

Vamos aplicar esse resultado no seguinte exemplo.

Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

equação característica:	$r^2 - r - 2 = 0$
raízes características:	$r_1 = -1, \qquad r_2 = 2$
soluções fundamentais:	$e^{-t}, \qquad e^{2t}$
solução geral:	$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

Raiz real única

Quando $\Delta = 0$, existe uma única raiz característica

$$r = \frac{-a_1}{2a_2}$$

que é real, de modo que e^{rt} é uma solução, mas temos que encontrar outra solução não-proprcional. Se $y(t)$ é uma solução qualquer da homogênea, temos que

$$\left(\frac{y(t)}{e^{rt}}\right)' = \frac{W(t)}{\left(e^{rt}\right)^2}$$

onde

$$W(t) = c_1 e^{-Q(t)}$$

com

$$Q'(t) = q(t) = \frac{a_1}{a_2} = -2r$$

Segue então que

$$Q(t) = -2rt$$

de modo que

$$\left(\frac{y(t)}{e^{rt}}\right)' = \frac{c_1 e^{-Q(t)}}{e^{2rt}} = \frac{c_1 e^{2rt}}{e^{2rt}} = c_1$$

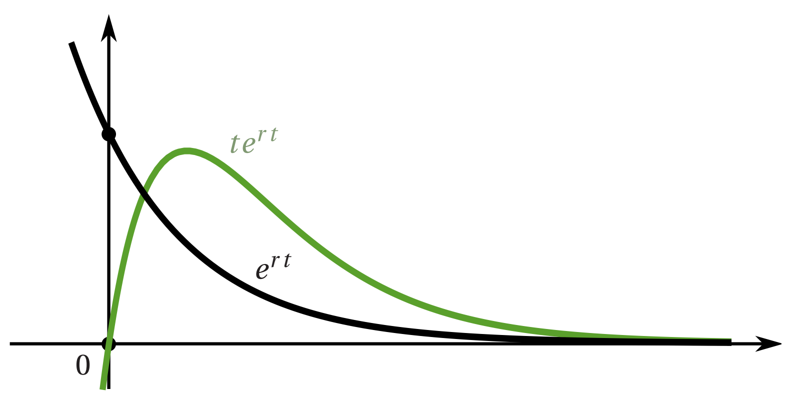
Integrando, segue que

$$\frac{y(t)}{e^{rt}} = c_1 t + c_2$$

de modo que

$$y(t) = c_1 t e^{rt} + c_2 e^{rt}$$

é a solução geral da homogênea, pois te^{rt}, e^{rt} são soluções fundamentais, uma vez que não são proporcionais.



A tabela seguinte resume essas informações.

raiz característica:	$r \in \mathbb{R}$
soluções fundamentais:	$te^{rt}, \qquad e^{rt}$
solução geral:	$y(t) = c_1 te^{rt} + c_2 e^{rt}$

Vamos aplicar esse resultado no seguinte exemplo.

Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

equação característica:	$r^2 + 2r + 1 = 0$
raízes características:	$r = -1$
soluções fundamentais:	$te^{-t}, \qquad e^{-t}$
solução geral:	$y(t) = c_1 te^{-t} + c_2 e^{-t}$

Raízes complexas

Quando $\Delta < 0$, existem duas raízes características, dadas por

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2} = \overbrace{\frac{-a_1}{2a_2}}^{a} \pm i \overbrace{\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}}^{b} = a \pm ib$$

Elas são complexas conjugadas e sempre podemos considerar $b > 0$. Em que sentido podemos afirmar que $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$ são soluções da homogênea? Como apresentado no Apêndice, podemos definir a exponencial complexa por

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}\cos(bt) + ie^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$$

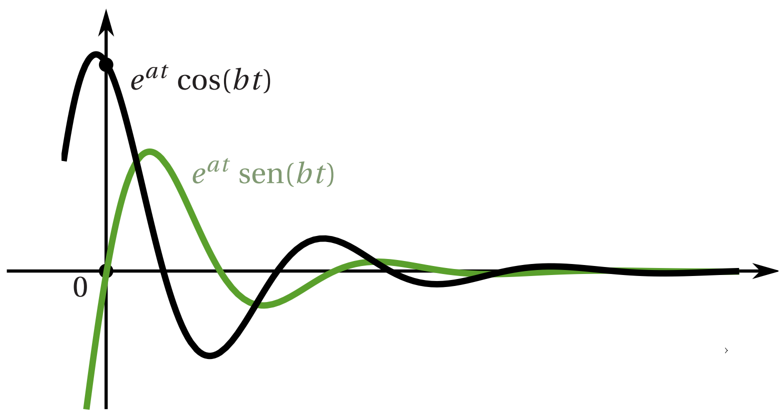
e podemos mostrar que

$$\left(e^{(a+ib)t}\right)' = (a+ib)e^{(a+ib)t}$$

e que

$$\left(e^{(a+ib)t}\right)'' = (a+ib)^2 e^{(a+ib)t}$$

de modo que $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$ são de fato soluções *complexas* da homogênea. Além disso, podemos mostrar que a parte real e a parte imáginária são também soluções da homogênea, de modo que $e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$ são soluções *reais* da homogênea e, portanto, soluções fundamentais, uma vez que não são proporcionais.



Segue então que

$$y(t) = c_1 e^{at}\cos(bt) + c_2 e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$$

é a solução geral da homogênea. A tabela seguinte resume essas informações.

raiz característica:	$r_1, r_2 = a \pm ib$
soluções fundamentais:	$e^{at}\cos(bt)$, $e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$
solução geral:	$y(t) = c_1 e^{at}\cos(bt) + c_2 e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$

Vamos aplicar esse resultado no seguinte exemplo.

Exemplo

Vamos considerar a seguinte EDO

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$$

Neste caso, temos que

equação característica:	$r^2 + 2r + 5 = 0$
raízes características:	$r_1, r_2 = -1 \pm 2i$
soluções fundamentais:	$e^{-t}\cos(2t), \qquad e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$
solução geral:	$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(2t) + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$

4.6 Coeficientes variáveis

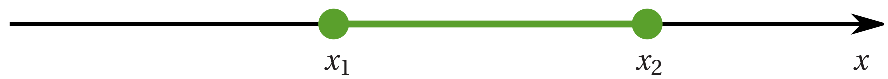
Mecânica quântica

Agora vamos apresentar algumas equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis que surgem na Mecânica Quântica e vamos ter uma ideia de como, de suas soluções, surgem os orbitais atômicos dos quais ouvimos falar no ensino médio.

A descrição quântica dos fenômenos subatômicos é probabilística. Por exemplo, ao invés de descrevermos a posição de uma partícula subatômica, descrevemos qual a probabilidade de encontrá-la em uma certa região. Essa probabilidade é dada pela equação de Schroedinger, que é o análogo quântico da Segunda Lei de Newton. Vamos ver como é essa descrição em algumas situações e perceber que as EDOs lineares de coeficientes variáveis têm fundamental importância.

Oscilador harmônico

Considere primeiro um oscilador harmônico quântico unidimensional com energia E, onde uma partícula subatômica de massa m se movimenta no eixo x



sob a ação de um potencial da forma

$$V(x) = \frac{m\omega^2}{2} x^2,$$

que é o potencial do sistema massa-mola com frequência ω. A probabilidade da partícula estar no intervalo $[x_1, x_2]$ é proporcional à integral

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)^2 \, dx$$

onde a função $X(x)$ satisfaz a equação de Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} X''(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 X(x) = EX(x)$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis, onde $\hbar$ é a constante de Planck dividida por 2π. Vamos supor, por simplicidade, que $m = 1$ e $\omega = \hbar^2$, de modo que a equação pode ser reescrita como se segue

$$X''(x) + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - x^2 \right) X(x) = 0.$$

Se procurarmos solução na forma $X(x) = e^{-x^2/2} y(x)$, um cálculo direto mostra que

$$X''(x) = e^{-x^2/2} \left(y''(x) - 2xy'(x) + (x^2 - 1) y(x) \right).$$

Substituindo a expressão acima na equação e lembrando que a função exponencial nunca se anula, concluímos que a função $y(x)$ deve satisfazer a denominada *equação de Hermite*

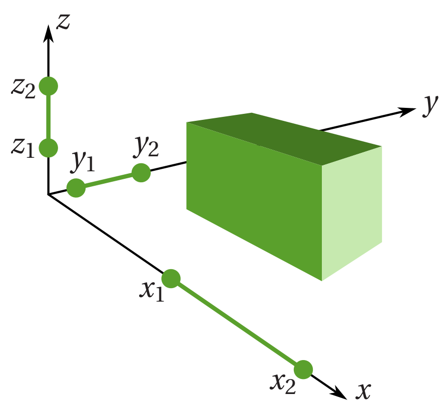
$$\boxed{y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0}$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis, onde

$$\lambda = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}.$$

Essa equação será retomada posteriormente.

Em um oscilador harmônico quântico tridimensional com energia E, a situação é similar. Nesse caso, a partícula se movimenta nos eixos x, y e z



sob a ação de um potencial da forma

$$V(x,y,z) = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

e a probabilidade da partícula estar no ponto (x,y,z) com $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$ e $z \in [z_1, z_2]$, é proporcional à

$$\int_{x_1}^{x_2} X(x)^2\,dx \int_{y_1}^{y_2} Y(y)^2\,dy \int_{z_1}^{z_2} Z(z)^2\,dz$$

onde cada uma das funções X, Y e Z satisfaz uma equação do oscilador unidimensional dada por

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}X''(x) + \frac{kx^2}{2}X(x) &= E_x X(x)\\
-\frac{\hbar^2}{2m}Y''(y) + \frac{ky^2}{2}Y(y) &= E_y Y(y)\\
-\frac{\hbar^2}{2m}Z''(z) + \frac{kz^2}{2}Z(z) &= E_z Z(z)
\end{aligned}$$

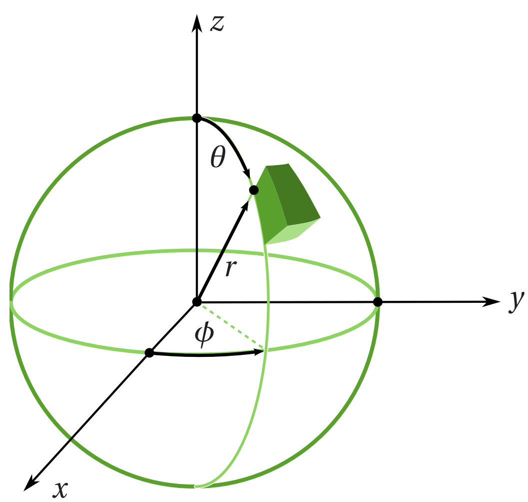
com $E_x + E_y + E_z = E$.

Átomo de hidrogêneo

No caso do átomo de hidrogêneo, o elétron se movimenta no espaço ao redor do núcleo que consiste de um só próton, sob a ação de um potencial Coulombiano da forma

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

onde r é a distância do elétron ao próton, e é a carga elétrica do próton e ϵ_0 é a permissividade no vácuo. Em coordenadas esféricas, a posição do elétron é dada por (r,θ,ϕ), onde θ é o ângulo polar e ϕ é o ângulo azimutal.



A probabilidade do elétron estar na região de coordenadas (r,θ,ϕ) com $r \in (r_1,r_2)$, com $\theta \in (\theta_1,\theta_2)$ e com $\phi \in (\phi_1,\phi_2)$, é proporcional à

$$\int_{r_1}^{r_2} R(r)^2\,dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Theta(\theta)^2\,d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} \Phi(\phi)^2\,d\phi$$

onde $\Phi(\phi) = 1$ e $R(r)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{R(r)}\left(r^2 R'(r)\right)' - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} - E\right) = \lambda(\lambda+1)$$

enquanto $\Theta(\theta)$ satisfaz a equação

$$\frac{1}{\Theta(\theta)}\Big(\operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\theta\cdot\Theta'(\theta)\right)'\Big) + \lambda(\lambda+1)\operatorname{sen}^2\theta = \mu^2$$

Escrevendo

$$\boxed{R(r) = x^{\lambda} e^{-x} y^{(2\lambda+1)}(2x)}$$

onde

$$x = \kappa r, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}, \qquad \nu = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2\kappa}$$

é um exercício desafio da nossa Lista mostrar que $y(x)$ satisfaz a denominada *equação de Laguerre*

$$\boxed{xy''(x) + (1-x)y'(x) + (\nu+\lambda)y(x) = 0}$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis.

Por outro lado, escrevendo

$$\boxed{\Theta(\theta) = (1-x^2)^{\mu/2} y^{(\mu)}(x)}$$

onde $x = \cos\theta$, é um exercício desafio da nossa Lista mostrar que $y(x)$ satisfaz a denominada *equação de Legendre*

$$\boxed{(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda(\lambda+1)y(x) = 0}$$

que é uma EDO linear de coeficientes variáveis.

Se considerarmos o conjunto dos pontos de coordenadas (r,θ,ϕ) que satisfazem a equação

$$\boxed{R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) = c}$$

para alguma constante c positiva, obtemos uma superfície, que é denominada *orbital*. Observe que cada orbital é uma superfície de revolução em relação ao eixo z, pois o ângulo azimutal ϕ desaparece da equação que define a superfície, uma vez que $\Phi(\phi) = 1$.

É possível mostrar que as constantes ν, λ e μ são números inteiros, denominados *números quânticos*, respectivamente, *principal*, *orbital* e *magnético*. Também é possível mostrar que λ é sempre não-negativo e menor do que ν e que μ é sempre não-negativo e menor ou igual a λ. Os orbitais s, p, d, f da química correspondem aos números orbitais $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

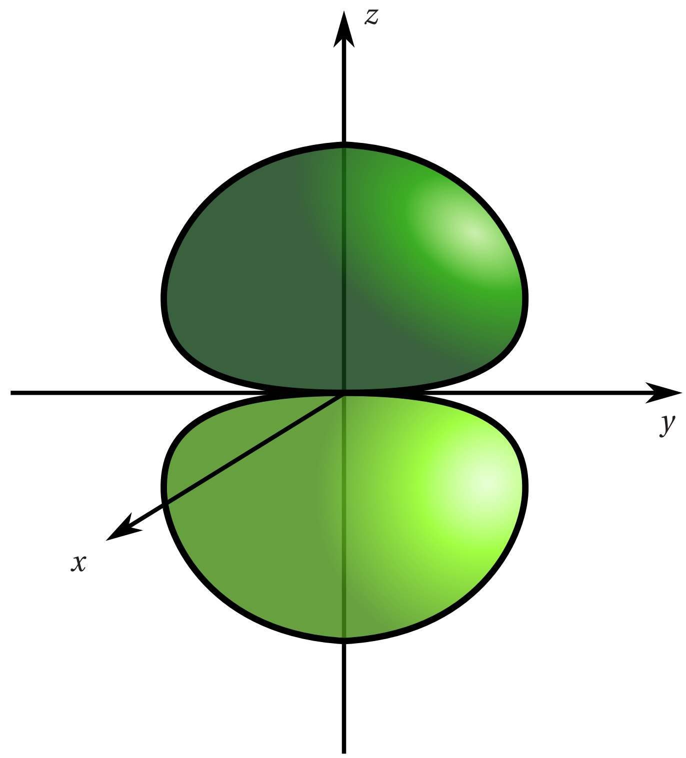
No caso do orbital s, quando $\lambda = 0$ e $\mu = 0$, a equação de Legendre fica igual a

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) = 0$$

É um exercício da nossa Lista mostrar que a única solução com significado físico é a solução constante. Segue então que $\Theta(\theta)$ é constante, de modo que a equação do orbital s se reduz a

$$R(r) = c$$

cuja solução é o raio r ser constante, mostrando que o orbital s é uma esfera.



No caso do orbital p, quando $\lambda = 1$, temos que ν tem que ser maior ou igual a dois. Vamos analisar o caso em que $\nu = 2$ e que $\mu = 0$. A equação de Legendre fica igual a

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$$

É um exercício da nossa Lista mostrar que a única solução com significado físico é a solução $y(x) = x = \cos(\theta)$. Como estamos no caso em que $\mu = 0$, segue então que $\Theta(\theta)$ é um múltiplo de $\cos(\theta)$. Por outro lado, a equação de Laguerre fica igual a

$$xy''(x) + (1-x)y'(x) + 3y(x) = 0$$

É um exercício da nossa Lista mostrar que a única solução com significado físico é a solução polinomial de grau três. Como estamos no caso em que $\lambda = 1$, segue que a derivada $y^{(2\lambda+1)} = y'''$ é uma constante. Escolhendo unidades adequadas de modo que $\kappa = 1$, segue então que $R(r)$ é um múltiplo de re^{-r}. Nesse caso, a equação do orbital p é igual

$$re^{-r}\cos(\theta) = c$$

Soluções por séries de potências

Vamos agora procurar soluções de uma EDO dadas por séries de potências

$$y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

Lembramos que

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + c_4 4x^3 + \cdots \\ y''(x) &= c_2 2 + c_3 3\cdot 2x + c_4 4\cdot 3x^2 + c_5 5\cdot 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

De outro modo

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)nx^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \end{aligned}$$

Temos que as condições iniciais determinam os dois primeiros coeficientes, uma vez que

$$\begin{cases} y(0) &= c_0 &= y_0 \\ y'(0) &= c_1 &= y_1 \end{cases}$$

Para determinarmos os demais coeficientes, temos que utilizar a EDO: vamos ver como isso funciona por meio de exemplos. Uma maneira útil de obtermos soluções fundamentais nesses exemplos é a seguinte.

Proposição 4.10

Considere $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da EDO

$$\boxed{y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = 0}$$

que satisfazem, respectivamente, as seguintes condições iniciais

$$\boxed{\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases}}$$

Então $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais.

Prova:

Basta mostrarmos que o Wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é diferente de zero em algum ponto x_0, o que é verdade, uma vez que

$$W(y_1(0), y_2(0)) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

■

Exemplos

1) Primeiro, consideramos uma equação de coeficientes constantes

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Temos que

$$q(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad p(x) = 1$$

são séries de potências com $R = \infty$, uma vez que são polinômios, de modo que existe uma solução dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

que converge em $(-\infty, \infty)$. Substituindo

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

na EDO, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

Somando as duas séries de potências, obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n\right) x^n = 0$$

Pela unicidade dos coeficientes de séries de potências, a única série de potências identicamente nula é a que possui todos os coeficientes nulos, de modo que

$$c_{n+2}(n+2)(n+1) + c_n = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Para esses valores de n, obtemos então que

$$c_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} c_n$$

que é denominada *Equação de Recorrência* dos coeficientes. A partir do coeficiente c_0, obtemos os coeficientes pares, uma vez que

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-1}{(0+2)(0+1)} c_0 &&= \frac{-1}{2!} c_0 \\
c_4 &= \frac{-1}{(2+2)(2+1)} c_2 &&= \frac{-1}{4\cdot 3}\frac{-1}{2!} c_0 &&= \frac{(-1)^2}{4!} c_0 \\
c_6 &= \frac{-1}{(4+2)(4+1)} c_2 &&= \frac{-1}{6\cdot 5}\frac{(-1)^2}{4!} c_0 &&= \frac{(-1)^3}{6!} c_0 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} c_0
\end{aligned}
$$

Por outro lado, a partir do coeficiente c_1, obtemos os coeficientes ímpares, uma vez que

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{-1}{(1+2)(1+1)} c_1 &&= \frac{-1}{3!} c_1 \\
c_5 &= \frac{-1}{(3+2)(3+1)} c_3 &&= \frac{-1}{5\cdot 4}\frac{-1}{3!} c_1 &&= \frac{(-1)^2}{5!} c_1 \\
c_7 &= \frac{-1}{(5+2)(5+1)} c_5 &&= \frac{-1}{7\cdot 6}\frac{(-1)^2}{5!} c_1 &&= \frac{(-1)^3}{7!} c_1 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
c_{2k+1} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1
\end{aligned}
$$

Segue então que

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} c_0, & n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Para obtermos as soluções fundamentais, devemos utilizar as respectivas condições iniciais.

Para $y_1(x)$, temos que

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 = c_0 \\ y_1'(0) = 0 = c_1 \end{cases}$$

de modo que

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Por outro lado, para $y_2(x)$, temos que

$$\begin{cases} y_2(0) = 0 = c_0 \\ y_2'(0) = 1 = c_1 \end{cases}$$

de modo que

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

Pelo método das raízes características, já sabiamos que sen e cos seriam duas soluções fundamentais para esse problema, mas o método das séries de potências também se aplica à equações com coeficientes variáveis.

2) Considere a seguinte equação de coeficientes variáveis

$$x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

Como antes, vamos tentar solução na forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Temos que

$$\begin{aligned} x^2 y'' &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3x-1)y' &= 3x \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [3n c_n - (n+1) c_{n+1}] x^n \end{aligned}$$

Substituindo na EDO obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} [3nc_n - (n+1)c_{n+1}]x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)c_n + 3nc_n + c_n - (n+1)c_{n+1}]x^n = 0$$

Uma vez que todos os coeficientes da série acima têm que se anular, temos que

$$\begin{aligned} (n(n-1)+3n+1)c_n - (n+1)c_{n+1} &= 0 \\ (n^2+2n+1)c_n - (n+1)c_{n+1} &= 0 \\ (n+1)^2 c_n &= (n+1)c_{n+1} \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Isolando o coeficiente de ordem mais alta, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$\boxed{c_{n+1} = (n+1)c_n}$$

Segue que $c_1 = 1c_0$, $c_2 = 2c_1 = 2c_0$, $c_3 = 3c_2 = 3!c_0$, $c_4 = 4c_3 = 4!c_0$ e, em geral,

$$c_n = n!c_0$$

Assim, se $c_0 = 0$ então todo $c_n = 0$ e obtemos a solução trivial $y = 0$. Se $c_0 \neq 0$ obtemos a solução

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

cujo raio de convergência é $R = 0$, como já vimos anteriormente (basta aplicar o teste da razão). Portanto essa última função não é uma solução genuína uma vez que não está definida num intervalo.

Esse exemplo mostra que devemos tomar cuidado ao procurar soluções por séries de potências: nem sempre existe alguma solução não nula dessa forma!

Não é difícil verificar que a função

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

é uma solução da equação acima. Essa função pode ser escrita como $y(x) = xf'(x)$, onde $f(x)$ é a função do primeiro exemplo da seção sobre série de Taylor no terceiro capítulo. Como $f(x)$ possui todas as derivadas em todos os pontos da reta, o mesmo vale para essa solução $y(x)$, que no entanto não pode ser escrita como uma série de potências.

3) Agora, consideramos uma equação de coeficientes variáveis, a equação de Hermite

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\lambda y(x) = 0$$

em que $\lambda \in \mathbb{R}$. Como antes, vamos tentar solucao na forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Observamos que, no caso em questão, o coeficiente que multiplica o termo $y'(x)$ não é constante. Procedemos então como se segue:

$$\begin{aligned} -2xy'(x) &= -2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2(n+1)c_{n+1}x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -2nc_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2nc_n x^n \end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade que $0c_0 = 0$. De maneira mais simples podemos calcular

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n.$$

Substituindo esses valores na equação obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} -2nc_nx^n + 2\lambda\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2(\lambda - n)c_n]x^n = 0.$$

Uma vez que todos os coeficientes da série acima têm que se anular, obtemos a seguinte equação de recorrência

$$c_{n+2} = \frac{2(n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}c_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Como no exemplo anterior, a relação acima nos fornece duas soluções dependendo da escolha dos termos c_0 e c_1. Para a primeira, vamos supor $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$. Desse modo, a fórmula acima implica que todos os termos de ordem ímpar são nulos, isto é, $c_{2k+1} =$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo, obtemos uma solução da forma $y_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}x^{2k}$, em que os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1 \\
c_2 &= \frac{2(0-\lambda)}{2\cdot 1}c_0 = \frac{2(0-\lambda)}{2!} \\
c_4 &= \frac{2(2-\lambda)}{4\cdot 3}c_2 = \frac{4(2-\lambda)(0-\lambda)}{4!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{2(4-\lambda)}{6\cdot 5}c_4 = \frac{8(4-\lambda)(2-\lambda)(0-\lambda)}{6!} \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Uma vez que os coeficientes da equação de Hermite têm raio de convergência infinito, sabemos que essa solução converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos contudo mostrar que, a partir da fórmula de recorrência, podemos calcular o raio de convergência da solução. De fato, basta notar que

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{2(k+1)}x^{2(k+1)}}{c_{2k}x^{2k}}\right| = |x|^2 \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right| = 0$$

uma vez que, usando a equação de recorrência, segue que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{2(2k-\lambda)}{(2k+2)(2k+1)} = 0$$

Este último limite pode ser calculando usando a regra de L'Hospital ou mesmo colocando o fator k^2 em evidência tanto no numerador quanto no denominador.

Um aspecto importante da solução y_1 encontrada acima é que, se $\lambda \in \mathbb{N}$ é um número par, então a solução é um polinômio. De fato, basta observar que, pela equação de recorrência, devemos ter

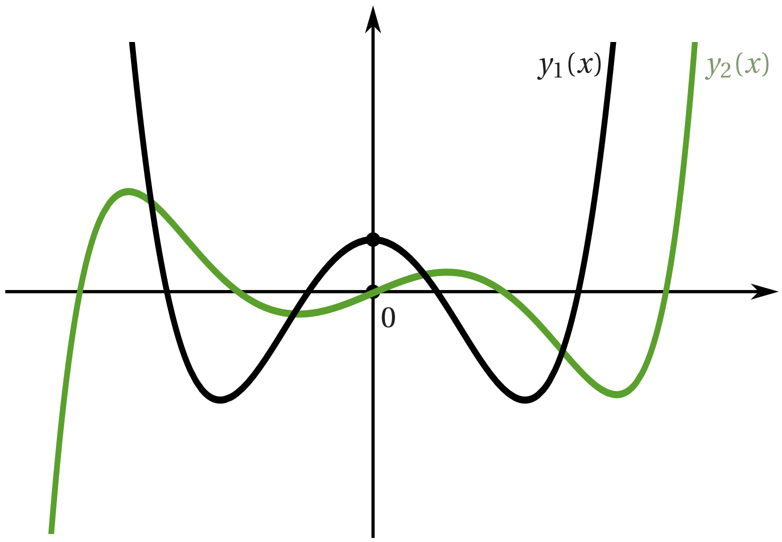
$$c_{\lambda+2} = \frac{2(\lambda-\lambda)}{(\lambda+4)(\lambda+3)} = 0.$$

Como, para $k \in \mathbb{N}$, os termos $c_{\lambda+2k}$ são todos múltiplos de $c_{\lambda+2}$, concluímos que a solução $y_1(x)$ assume a seguinte forma

$$y_1(x) = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + \cdots + c_\lambda x^\lambda.$$

O polinômio acima é conhecido com *polinômio de Hermite de grau* λ.

É um exercício da nossa Lista obter a segunda solução $y_2(x)$ fazendo $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ e argumentando como acima. Nesse caso, vamos obter uma série com potências ímpares que tem raio de convergência infinito. Novamente, se λ for um número ímpar, vamos obter um polinômio formado somente por potências ímpares. Como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são não-proporcionais, elas formam um par de soluções fundamentais.



Finalizamos observando que o procedimento apresentado nos exemplos acima podem ser usados para resolver qualquer equação em que os coeficientes $p(x)$ e $q(x)$ são séries de potência. O eventual fato da fórmula de recorrência não ter uma expressão bonita não é importante. O que é necessário é que seja possível calcular um coeficiente c_n a partir dos coeficientes anteriores, com as condições iniciais fornecendo os primeiros coeficientes.

CAPÍTULO 5

ORDEM SUPERIOR E SISTEMAS

Nesse capítulo vamos estudar métodos alternativos para resolver EDOs e sistemas de EDOs de coeficientes constantes. Esses métodos são inspirados no método das raízes características mas têm um alcance maior: eles se aplicam a EDOs homogêneas com coeficientes constantes de ordem mais alta, a EDOs não-homogêneas com certos tipos de forçamento e a sistemas de EDOs com coeficientes constantes.

5.1 RAÍZES CARACTERÍSTICAS

Considere uma EDO linear homogênea de ordem n e coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

onde $y = y(t)$ e os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são constantes reais. Assim como no caso de EDOs de segunda ordem, podemos considerar a respectiva equação característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0$$

e introduzir o denominado *polinômio característico*

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

Podemos reescrever a EDO através do polinômio característico e do denominado *operador de derivação*, dado por

$$Dy = y'$$

de modo que

$$D^2 y = DDy = Dy' = y''$$

e, de modo mais geral, que

$$D^n y = y^{(n)}$$

Denotando

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

podemos definir

$$\begin{aligned} p(D)y &= \left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) y \\ &= a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y \end{aligned}$$

de modo que a EDO pode ser escrita como

$$p(D)y = 0$$

Queremos usar a o que sabemos sobre fatoração de polinômios para auxiliar a determinar a solução geral de uma EDO linear com coeficientes constantes. Para isso, o seguinte resultado é fundamental.

Proposição 5.1

Sejam p e q dois polinômios quaisquer, temos que

$$\boxed{(p(D)q(D))y = p(D)(q(D)y)}$$

Além disso, se

$$\begin{aligned} p(D)y &= 0 \\ q(D)z &= 0 \end{aligned}$$

então

$$\boxed{p(D)q(D)(y+z)=0}$$

A demonstração desse resultado se encontra no Apêndice e é basicamente consequência do fato da derivada separar a soma e comutar com o produto por escalar.

Exemplo

A EDO $y''-y=0$ pode ser escrita como

$$(D^2-1)\,y=0$$

O polinômio característico se fatora como

$$r^2-1=(r+1)(r-1)$$

Afirmamos que

$$D^2-1=(D+1)(D-1)$$

De fato,

$$(D+1)(D-1)\,y=(D+1)(y'-y)=(y'-y)'+(y'-y)=y''-y=(D^2-1)\,y$$

Observe que a ordem dos fatores não importa

$$(D-1)(D+1)\,y=(D-1)(y'+y)=(y'+y)'-(y'+y)=y''-y=(D^2-1)\,y$$

Assim, a EDO original fica fatorada como

$$\begin{aligned}(D^2-1)\,y &= (D+1)(D-1)\,y=0\\ &= (D-1)(D+1)\,y=0\end{aligned}$$

Mais do que simplificar a EDO, a fatoração usando o operador derivada D fornece um método para encontrar soluções. De fato, se $(D-1)y = 0$ então y é solução da EDO original pois

$$\begin{aligned}(D^2-1)y &= (D+1)\underbrace{(D-1)y}_{=0} \\ &= (D+1)0 \\ &= 0\end{aligned}$$

logo $C_1 e^t$ é solução da EDO original. Também, se $(D+1)y = 0$ então y é solução da EDO original pois

$$\begin{aligned}(D^2-1)y &= (D-1)\underbrace{(D+1)y}_{=0} \\ &= (D-1)0 \\ &= 0\end{aligned}$$

logo $C_2 e^{-t}$ é solução da EDO original.

Uma vez que e^t e e^{-t} são soluções não proporcionais, segue que a solução geral da EDO homogênea fatorada

$$(D^2-1)y = (D+1)(D-1)y = 0$$

é a soma da solução geral das EDOs homogêneas de cada um dos fatores

$$(D+1)y = 0 \qquad \text{e} \qquad (D-1)y = 0$$

Suponha agora que o polinômio característico da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

pode ser fatorado como

$$p(r) = a_n (r-r_1)^{m_1} (r-r_2)^{m_2} \cdots (r-r_k)^{m_k}$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ são distintos. Segue que

$$p(D) = a_n (D-r_1)^{m_1} (D-r_2)^{m_2} \cdots (D-r_k)^{m_k}$$

de modo que a EDO pode ser rescrita como

$$a_n(D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\cdots(D-r_k)^{m_k}y=0$$

Pela Proposição A.21, temos que a soma das soluções das equações

$$\begin{aligned}(D-r_1)^{m_1}y &= 0\\ (D-r_2)^{m_2}y &= 0\\ &\vdots\\ (D-r_k)^{m_k}y &= 0\end{aligned}$$

é solução da EDO original. Como uma dada raiz r pode ser complexa, vamos primeiramente determinar a solução geral complexa dessas EDOs. Posteriormente vamos utilizar a Proposição A.5 para obter a solução geral real da EDO original como sendo a parte real da solução geral complexa da EDO original.

Proposição 5.2

Escrevendo

$$y(t)=e^{rt}z(t)$$

temos que

$$\boxed{(D-r)^m y = e^{rt}D^m z}$$

Em particular, temos que a solução geral complexa de

$$(D-r)^m y = 0$$

é dada por

$$\boxed{y(t)=P(t)e^{rt}}$$

onde $P(t)$ é um polinômio em t com coeficientes complexos quaisquer e com grau $m-1$.

Prova:

Vamos provar que

$$(D-r)^m y = e^{rt} D^m z$$

por indução em m. Para $m = 1$ temos

$$(D-r)e^{rt}z = (e^{rt}z)' - rze^{rt} = e^{rt}z' = e^{rt}Dz$$

Supondo que a fórmula vale para $m-1$, vamos mostrar que vale para m. De fato, temos que

$$\begin{aligned}(D-r)^m e^{rt} z &= (D-r)[(D-r)^{m-1}e^{rt}z] \\ &= (D-r)e^{rt}D^{m-1}z \\ &= e^{rt}DD^{m-1}z \\ &= e^{rt}D^m z\end{aligned}$$

Para obter a solução geral de

$$(D-r)^m y = 0$$

escrevendo $y(t) = e^{rt}z(t)$, temos que

$$(D-r)^m y = e^{rt}D^m z = 0$$

que é equivalente a

$$D^m z = 0$$

A solução geral dessa última EDO é obtida por m integrações, de modo que

$$z(t) = P(t) = C_1 + C_2 t + \cdots + C_m t^{m-1}$$

onde $C_1, C_2, \ldots, C_m$ são constantes complexas arbitrárias. ■

Se a EDO original pode ser escrita como

$$a_n(D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\cdots(D-r_k)^{m_k}y = 0$$

pelas Proposições A.21 e 5.2, segue então que

$$P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{r_k t}$$

é solução da EDO, onde $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_k(t)$ são polinômios em t com coeficientes complexos quaisquer e com graus, respectivamente, $m_1 - 1, m_2 -$

$1, \ldots, m_k - 1$. Resta então apenas mostrar que essa é de fato a solução geral e para isso precisamos do seguinte resultado.

Proposição 5.3

Se $r \neq 0$ é um número complexo e $P(t)$ é um polinômio em t com coeficientes complexos, então

$$\boxed{\int P(t)e^{rt}\,dt = Q(t)e^{rt} + C}$$

onde $Q(t)$ é um polinômio em t com coeficientes complexos com mesmo grau de $P(t)$ e C é uma constante complexa arbitrária.

Prova:

Vamos demonstrar essa proposição por indução no grau de $P(t)$. Se $P(t)$ tem grau zero, então $P(t) = P$, constante, de modo que

$$\int P(t)e^{rt}\,dt = P\frac{e^{rt}}{r} + C = Q(t)e^{rt} + C$$

onde $Q(t) = P/r$ tem grau zero. Se o grau de $P(t)$ é positivo, integrando por partes, obtemos que

$$\int P(t)e^{rt}\,dt = P(t)\frac{e^{rt}}{r} - \int P'(t)\frac{e^{rt}}{r}\,dt$$

Como o grau de $P'(t)$ é o grau de $P(t)$ menos um, podemos usar a hipótese de indução para escrever

$$\int P'(t)\frac{e^{rt}}{r}\,dt = R(t)e^{rt} + A$$

onde $R(t)$ é um polinômio em t com coeficientes complexos com mesmo grau de $P'(t)$ e A é uma constante complexa arbitrária. Segue então que

$$\int P(t)e^{rt}\,dt = P(t)\frac{e^{rt}}{r} - R(t)e^{rt} - A = Q(t)e^{rt} + C$$

onde $Q(t) = P(t)/r - R(t)$ é um polinômio em t com coeficientes complexos com mesmo grau de $P(t)$ e $C = -A$ é uma constante complexa arbitrária. ■

Teorema 5.4

Suponha que o polinômio característico da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

pode ser escrito como

$$p(r) = a_n (r - r_1)^{m_1} (r - r_2)^{m_2} \cdots (r - r_k)^{m_k}$$

onde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ são distintos. Então a solução geral complexa da EDO é dada por

$$\boxed{P_1(t)e^{r_1 t} + P_2(t)e^{r_2 t} + \cdots + P_k(t)e^{r_k t}}$$

onde $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_k(t)$ são polinômios em t com coeficientes complexos quaisquer e com graus, respectivamente, $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_k - 1$.

Prova:

Pelo que observamos acima, resta apenas mostrar que toda solução possui essa forma. Vamos demonstrar essa resultado por indução no número de raízes distintas. Quando temos apenas uma raiz distinta, o resultado segue da Proposição 5.2. Supondo que já demonstramos o resultado para k raízes distintas, vamos mostrar que também é válido para $k + 1$ raízes distintas. Nesse caso, a EDO pode ser escrita como

$$a_n(D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\cdots(D-r_k)^{m_k}(D-r_{k+1})^{m_{k+1}}y=0$$

Escrevendo

$$u=(D-r_{k+1})^{m_{k+1}}y$$

temos que u satisfaz a EDO

$$a_n(D-r_1)^{m_1}(D-r_2)^{m_2}\cdots(D-r_k)^{m_k}u=0$$

de modo que u pode ser escrita como

$$u(t)=P_1(t)e^{r_1t}+P_2(t)e^{r_2t}+\cdots+P_k(t)e^{r_kt}$$

onde $P_1(t),P_2(t),\ldots,P_k(t)$ são polinômios em t com coeficientes complexos com graus, respectivamente, $m_1-1,m_2-1,\ldots,m_k-1$. Segue então que

$$(D-r_{k+1})^{m_{k+1}}y=P_1(t)e^{r_1t}+P_2(t)e^{r_2t}+\cdots+P_k(t)e^{r_kt}$$

Escrevendo

$$y=e^{r_{k+1}t}z$$

pela primeira parte da Proposição 5.2, temos que

$$e^{r_{k+1}t}D^{m_{k+1}}z=P_1(t)e^{r_1t}+P_2(t)e^{r_2t}+\cdots+P_k(t)e^{r_kt}$$

de modo que

$$D^{m_{k+1}}z=P_1(t)e^{(r_1-r_{k+1})t}+P_2(t)e^{(r_2-r_{k+1})t}+\cdots+P_k(t)e^{(r_k-r_{k+1})t}$$

Integrando essa equação m_{k+1} vezes e usando a Proposição 5.3, obtemos que

$$z(t)=Q_1(t)e^{(r_1-r_{k+1})t}+Q_2(t)e^{(r_2-r_{k+1})t}+\cdots+Q_k(t)e^{(r_k-r_{k+1})t}+Q_{k+1}(t)$$

onde $Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_k(t), Q_{k+1}(t)$ são polinômios em t com coeficientes complexos com graus, respectivamente, $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_k - 1, m_{k+1} - 1$. Segue então que

$$y(t) = Q_1(t)e^{r_1 t} + Q_2(t)e^{r_2 t} + \cdots + Q_k(t)e^{r_k t} + Q_{k+1}(t)e^{r_{k+1} t}$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora podemos obter a solução geral real de uma EDO linear com coeficientes constantes. Lembramos que, como os coeficientes são reais, as eventuais raízes complexas sempre aparecem aos pares conjugados com a mesma multiplicidade.

Teorema 5.5

A solução geral real da EDO

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots a_1 y' + a_0 y = 0$$

é dada pela soma de parcelas determinadas pelas raízes distintas da seguinte forma:

A) uma raiz real r com multiplicidade m determina a parcela

$$p(t)e^{rt}$$

onde $p(t)$ é um polinômio em t com coeficientes reais quaisquer e com grau $m-1$ e

B) um par de raízes complexas conjugadas $a \pm ib$ com multiplicidade m determina a parcela

$$p(t)e^{at}\cos(bt) + q(t)e^{at}\operatorname{sen}(bt)$$

onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios em t com coeficientes reais quaisquer e com grau $m-1$.

Prova:

Pela Proposição A.5, a solução geral real da EDO original é dada pela parte real da solução geral complexa da EDO original. Além disso, a parte real de uma soma é a soma das partes reais.

Se r é uma raiz real com multiplicidade m, ela determina a parcela $P(t)e^{rt}$ na solução geral complexa, com $P(t) = p(t) + iq(t)$, onde $p(t)$ e $q(t)$ são polinômios em t com coeficientes reais quaisquer e com grau $m-1$. Segue que a parte real de $P(t)e^{rt}$ é dada por $p(t)e^{rt}$.

Se $a \pm ib$ é um par de raízes complexas conjugadas com multiplicidade m, elas determinam as parcelas $R(t)e^{(a+ib)t} + U(t)e^{(a-ib)t}$ na solução geral complexa, com $R(t) = r(t) + is(t)$ e $U(t) = u(t) + iv(t)$, onde $r(t), s(t), u(t), v(t)$ são polinômios em t com coeficientes reais quaisquer e com grau $m-1$. Como

$$e^{(a\pm ib)t} = e^{at}\cos(bt) \pm ie^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$$

segue que a parte real de $R(t)e^{(a+ib)t} + U(t)e^{(a-ib)t}$ é dada por

$$p(t)e^{at}\cos(bt) + q(t)e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)$$

onde $p(t) = r(t) + u(t)$ e $q(t) = -s(t) + v(t)$ são polinômios em t com coeficientes reais quaisquer e com grau $m-1$. ■

Exemplos

1) A EDO de 3^a ordem

$$(D-2)^3 y = 0$$

tem apenas uma raiz característica 2 com multiplicidade 3, logo tem solução geral

$$y(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)e^{2t}$$

2) A EDO de 3^a ordem

$$(D-2)^2(D+5)\,y=0$$

tem raiz característica 2 com multiplicidade 2 e raiz característica -5 com multiplicidade 1, logo tem solução geral

$$y(t)=(c_1+c_2)\,te^{2t}+c_3e^{-5t}$$

3) A EDO de 2ª-ordem

$$(D^2-4D+13)\,y=0$$

é uma EDO com coeficientes reais e tem raízes características $2\pm 3i$ com multiplicidade 1, logo tem solução geral

$$y(t)=c_1e^{2t}\cos(3t)+c_2e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$$

4) A EDO de 4^a ordem

$$(D^2-4D+13)^2\,y=0$$

é uma EDO com coeficientes reais e tem raízes características $2\pm 3i$ com multiplicidade 2, logo tem solução geral

$$y(t)=(c_1+c_2t)e^{2t}\cos(3t)+(c_3+c_4t)e^{2t}\,\mathrm{sen}(3t)$$

5.2 Coeficientes a determinar

Uma maneira de resolver certos tipos de EDOs não-homogêneas de coeficientes constantes é anular o forçamento, transformando-as em EDOs homogêneas de ordem maior.

Exemplos

1) Considere a EDO não-homogênea de 1ª-ordem

$$(D-2)\,y = 3e^{-5t}$$

A homogênea associada é

$$(D-2)\,y = 0$$

que tem raiz característica 2 de multiplicidade 1, portanto a solução geral da homogênea é

$$y_h(t) = c_1 e^{2t}$$

Observe que o forçamento $3e^{-5t}$ é solução de uma EDO homogênea com raiz característica -5 de multiplicidade 1, portanto o forçamento é solução de

$$(D+5)\,y = 0$$

isto é, $(D+5)(3e^{-5t}) = 0$. Dizemos que $(D+5)$ anula $3e^{-5t}$. Assim, aplicando $(D+5)$ em ambos lados da equação não-homogênea

$$\begin{aligned} (D-2)\,y &= 3e^{-5t} \\ \Longrightarrow (D+5)(D-2)\,y &= (D+5)(3e^{-5t}) \\ \Longrightarrow (D+5)(D-2)\,y &= 0 \end{aligned}$$

obtemos que toda solução y da não-homogênea de 1ª-ordem é solução de uma homogênea de 2ª-ordem, a equação aumentada, que é homogênea.

Como a equação aumentada tem raiz característica 2 de multiplicidade 1, e -5 de multiplicidade 1 sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + \boxed{Ae^{-5t}}$$

Observe que a solução geral da equação aumentada não é a solução geral da não-homogênea original, pois tem constantes arbitrárias demais! Porém, a primeira parte de $y(t)$ é solução geral da homogênea associada e a parte destacada

$$y_p(t) = Ae^{-5t}$$

é candidata à solução particular da não-homogênea. Para determiná-la, devemos determinar o coeficiente A e para isso, basta substituir y_p na não-homogênea:

$$\begin{aligned} (D-2)Ae^{-5t} &= (Ae^{-5t})' - 2Ae^{-5t} \\ &= A(-5e^{-5t} - 2e^{-5t}) \\ &= A(-7e^{-5t}) \\ &= 3e^{-5t} \end{aligned}$$

de onde obtemos que $A = -3/7$. Assim, $-3/7e^{-5t}$ é uma solução particular e a solução geral da não-homogênea é

$$y(t) = c_1e^{2t} - \frac{3}{7}e^{-5t}$$

2) Agora vamos mudar o forçamento e considerar a EDO não-homogênea de 1ª-ordem

$$(D-2)y = 4e^{2t}$$

Observe que o forçamento $4e^{2t}$ é solução de uma EDO homogênea com raiz característica 2 de multiplicidade 1, portanto o forçamento é solução de

$$(D-2)y = 0$$

isto é, $(D-2)(4e^{2t}) = 0$. Dizemos que $(D-2)$ anula $4e^{2t}$. Assim, aplicando $(D-2)$ em ambos lados da equação não-homogênea

$$\begin{aligned} (D-2)y &= 4e^{2t} \\ \Longrightarrow (D-2)(D-2)y &= (D-2)(4e^{2t}) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (D-2)^2 y \quad = \quad 0$$

obtemos que toda solução y da não-homogênea é solução da equação aumentada, que é homogênea.

Como a equação aumentada tem raiz característica 2 de multiplicidade 2 sua solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + \boxed{Ate^{2t}}$$

Novamente, a solução geral da equação aumentada não é a solução geral da não-homogênea original, porém, a primeira parte de $y(t)$ é solução geral da homogênea associada e a parte destacada

$$y_p(t) = Ate^{2t}$$

é candidata à solução particular da não-homogênea. Para determiná-la, devemos determinar o coeficiente A e para isso, basta substituir y_p na não-homogênea:

$$\begin{aligned}
(D-2)Ate^{2t} &= (Ate^{2t})' - 2Ate^{2t} \\
&= A(e^{2t} + 2te^{2t} - 2te^{2t}) \\
&= A(e^{2t}) \\
&= 4e^{2t}
\end{aligned}$$

de onde obtemos que $A = 4$. Assim, $4te^{2t}$ é uma solução particular e a solução geral da não-homogênea é

$$y(t) = c_1 e^{2t} + 4te^{2t}$$

Observe que resolvemos a não-homogênea sem integrar nenhuma vez, apenas derivando. Note também que a equação aumentada não fornece diretamente a solução geral da não-homogênea, mas fornece um candidato certeiro para a solução particular: para determiná-lo basta determinar os coeficientes que o acompanham. Por conta disso, esse método é conhecido por *método dos coeficientes à determinar.* Seus passos são os seguintes.

Passos

1) **Homogênea:** Fatorar a homogênea associada usando o operador derivada D e obter sua solução geral.

2) **Anular:** Anular o forçamento da não-homogênea obtendo a *equação aumentada*, que é homogênea.

Forçamento	Anulado por
polinômio $p(t)$ de grau $< m$	D^m
Ae^{rt}	$(D-r)$
$p(t)e^{rt}$	$(D-r)^m$
$Ae^{at}\cos(bt)$	$(D-(a+ib))(D-(a-ib))$
$p(t)e^{at}\cos(bt)$	$(D-(a+ib))^m(D-(a-ib))^m$

Forçamentos que possuem o seno são anulados da mesma maneira que os forçamentos que possuem o cosseno.

3) **Forma da solução particular:** Obter a solução geral da equação aumentada e identificar a parte que vem da homogênea: a outra parte fornece a forma da solução particular da não-homogênea.

4) **Determinar os coeficientes:** Determinar os coeficientes da forma da solução particular substituindo-a na equação não-homogênea original: isso fornece uma solução particular.

A solução geral da não-homogênea é a solução geral da homogênea associada somada a essa solução particular.

Observe que usar a tabela acima é como resolver uma EDO ao contrário: dado um forçamento no lado esquerdo, devemos descobrir qual raiz característica r com qual multiplicidade m devemos ter numa EDO para que o forçamento seja uma de suas soluções, usando essa raiz com multiplicidade e o operador derivada D obtemos, no lado direito, o anulador desse forçamento.

Esse método se aplica apenas para EDOs de coeficientes constantes com forçamento da forma dada na tabela acima ou uma combinação linear de forçamentos da forma acima: caso contrário deve-se recorrer ao método da variação dos parâmetros.

Oscilações forçadas

Vimos que o movimento sem força-externa de um sistema massa-mola sem amortecimento, de um circuito LC sem resistência, e de um pêndulo com oscilações pequenas são modelados pela mesma EDO homogênea

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

onde $\omega > 0$ é a frequência natural da oscilação livre. A equação característica é

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

com raízes características $\pm i\omega$. Logo a EDO se fatora como

$$(D - i\omega)(D + i\omega)y = 0$$

e sua solução geral é

$$y_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Queremos descrever agora o movimento das oscilações forçadas por uma força externa periódica de frequência ω_0 e amplitude L dada por

$$y'' + \omega^2 y = L \cos(w_0 t)$$

Essa equação pode ser fatorada como

$$(D - i\omega)(D + i\omega)y = L \cos(w_0 t)$$

Observe que o forçamento é solução de uma EDO com raízes características $\pm i\omega_0$, logo o forçamento é anulado por

$$(D - i\omega_0)(D + i\omega_0)$$

Segue que

$$\begin{aligned}
(D-i\omega)(D+i\omega)y &= L\cos(w_0 t)\\
\Longrightarrow (D-i\omega_0)(D+i\omega_0)(D-i\omega)(D+i\omega)y &= (D-i\omega_0)(D+i\omega_0)L\cos(w_0 t)\\
\Longrightarrow (D-i\omega_0)(D+i\omega_0)(D-i\omega)(D+i\omega)y &= 0
\end{aligned}$$

de onde obtemos que toda solução y da não-homogênea é solução da homogênea aumentada de 4^a ordem.

As soluções da homogênea aumentada

$$(D-i\omega_0)(D+i\omega_0)(D-i\omega)(D+i\omega)y=0$$

vão depender da multiplicidade de suas raízes características.

- Se $\omega_0 \neq \omega$ então estamos forçando a oscilação numa frequência diferente da sua frequência natural. Nesse caso temos raízes características distintas $\pm i\omega$, $\pm i\omega_0$, cada uma com multiplicidade 1, portanto a solução geral da homogênea aumentada é

  $$y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \boxed{A\cos(\omega_1 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)}$$

  Para determinar A e B basta substituir a parte destacada na equação original. Antes disso já podemos descrever o movimento da oscilação forçada nesse caso: ocorre uma superposição de frequências distintas no movimento final, um fenômeno conhecido como batimento ou interferência destrutiva.

- Se $\omega_0 = \omega$ então estamos forçando a oscilação numa frequência igual à sua frequência natural. Nesse caso temos raízes características $\pm i\omega$, cada uma com multiplicidade 2,

  $$(D-i\omega)^2(D+i\omega)^2 y = 0$$

  portanto a solução geral da homogênea aumentada é

  $$y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \boxed{At\cos(\omega t) + Bt\,\mathrm{sen}(\omega_1 t)}$$

  Para determinar A e B basta substituir a parte destacada na equação original. Antes disso já podemos descrever o movimento da oscilação forçada nesse caso: a amplitude do movimento aumenta com o tempo, devido ao fator t, um fenômeno conhecido como ressonância ou interferência construtiva.

É interessante ver como fenômenos físicos como batimento e ressonância se manifestam na multiplicidade de raízes características de uma EDO.

5.3 Transformada de Laplace

Agora veremos um método de resolver EDO que transforma a EDO numa equação algébrica que já incorpora as condições iniciais.

A *transformada de Laplace* de uma dada função $y(t)$ é uma nova função com variável independente dada por s e definida pela seguinte integral imprópria

$$L\left[y(t)\right](s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt$$

O domínio da transformada é o conjunto dos $s \in \mathbb{R}$ tais que a integral imprópria existe e é finita. Quando for conveniente, suprimiremos algumas das respectivas variáveis independentes, de modo que a transformada da função $y(t)$ poderá ser denotada por $L\left[y(t)\right]$ ou por $L\left[y\right](s)$ ou ainda por $L\left[y\right]$.

Exemplo

A transformada da função e^{at} é dada por

$$\begin{aligned} L\left[e^{at}\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s)t}\,dt \\ &= \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^\infty \\ &= \left(\lim_{t\to\infty} \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right) - \frac{e^{(a-s)0}}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned}$$

para todo $s > a$, que é o domínio dessa transformada, uma vez que a integral imprópria é infinita para todo $s \le a$.

Pode-se mostrar que, quando não é vazio, o domínio de uma transformada é da forma (a,∞). Quando uma função $y(t)$ possui *crescimento exponencial*, ou seja, quando existem constantes c e M tais que $|y(t)| \leq Me^{ct}$ para t suficientemente grande, a transformada $L[y]$ sempre possui domínio não vazio. Uma vez que não será de utilidade para os resultados desse capítulo, não iremos nos preocupar em determinar os domínios das diversas tranformadas a serem consideradas.

Linearidade da transformada

Uma das propriedade mais simples da transformada é que a transformada da combinação linear de duas funções é a combinação linear das transformadas dessas duas funções.

Proposição 5.6

Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, temos que

$$\boxed{L[ay+bz] = aL[y] + bL[z]}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[ay+bz] &= \int_0^\infty e^{-st}(ay(t)+bz(t))\,dt \\ &= \int_0^\infty ae^{-st}y(t)+be^{-st}z(t)\,dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}y(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st}z(t)\,dt \end{aligned}$$

$$= \quad aL[y] + bL[z]$$

■

Exemplos

1) Temos que

$$\begin{aligned} L\left[3e^{2t} - 2e^{-3t}\right] &= 3L\left[e^{2t}\right] - 2L\left[e^{-3t}\right] \\ &= 3\frac{1}{s-2} - 2\frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

2) Temos que

$$\begin{aligned} L[\operatorname{senh}(at)] &= L\left[\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{(s-a)(s+a)}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

TRANSFORMADA DA DERIVADA

A mais importante propriedade da transformada é que ela transforma derivar em relação à variável t em multiplicar pela variável s. Essa é a propriedade que a torna útil na resolução de PVIs como veremos mais adiante.

Proposição 5.7

Temos que

$$\boxed{L[y'] = sL[y] - y(0)}$$

Prova:

A demonstração se baseia na regra da integração por partes e no fato de que

$$\left(e^{-st}\right)' = -se^{-st}$$

Segue então que

$$\begin{aligned} L[y'] &= \int_0^\infty e^{-st} y'(t)\,dt \\ &= \left[e^{-st} y(t)\right]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} y(t)\,dt \\ &= -y(0) + s\int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt \\ &= sL[y] - y(0) \end{aligned}$$

onde utilizamos que

$$\lim_{t\to\infty} y(t)e^{-st} = 0$$

para s suficientemente grande. ■

Vamos considerar os seguintes exemplos.

Exemplos

1) Pela regra da transformada da derivada, temos que

$$L\left[\left(e^{at}\right)'\right] = sL\left[e^{at}\right] - e^0 = sL\left[e^{at}\right] - 1$$

Por outro lado, usando a linearidade, temos que

$$L\left[\left(e^{at}\right)'\right] = L\left[ae^{at}\right] = aL\left[e^{at}\right]$$

de modo que

$$sL\left[e^{at}\right] - 1 = aL\left[e^{at}\right]$$

Segue então que

$$(s-a)L\left[e^{at}\right] = 1$$

de modo que

$$L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a}$$

Observe que, quando $a = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} L[1] &= L\left[e^{0}\right] \\ &= \frac{1}{s-0} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

2) Pela regra da transformada da derivada, temos que

$$L\left[\left(t^{n}\right)'\right] = sL\left[t^{n}\right] - 0^{n} = sL\left[t^{n}\right]$$

Por outro lado, usando a linearidade, temos que

$$L\left[\left(t^{n}\right)'\right] = L\left[nt^{n-1}\right] = nL\left[t^{n-1}\right]$$

de modo que

$$sL\left[t^{n}\right] = nL\left[t^{n-1}\right]$$

Segue então que

$$L\left[t^{n}\right] = \frac{n}{s}L\left[t^{n-1}\right]$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
L[t] &= \frac{1}{s}L[1] &&= \frac{1!}{s^2}\\
L\left[t^2\right] &= \frac{2}{s}L[t] &&= \frac{2!}{s^3}\\
L\left[t^3\right] &= \frac{3}{s}L\left[t^2\right] &&= \frac{3!}{s^4}\\
L\left[t^4\right] &= \frac{4}{s}L\left[t^3\right] &&= \frac{4!}{s^5}\\
&\vdots\\
L[t^n] &= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}
$$

A partir da regra da transformada da derivada primeira, podemos obter a regra da transformada da derivada segunda.

Proposição 5.8

Temos que

$$\boxed{L\left[y''\right] = s^2L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)}$$

Prova:

Temos que

$$
\begin{aligned}
L\left[y''\right] &= L\left[(y')'\right]\\
&= sL\left[y'\right] - y'(0)\\
&= s\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) - y'(0)
\end{aligned}
$$

$$= \quad s^2 L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)$$

■

Vamos considerar os seguintes exemplos.

Exemplos

1) Pela regra da transformada da derivada segunda, temos que

$$L\left[(\,\mathrm{sen})''\right] = s^2 L[\,\mathrm{sen}] - s\,\mathrm{sen}(0) - \,\mathrm{sen}'(0) = s^2 L[\,\mathrm{sen}] - 1$$

Por outro lado, usando a linearidade, temos que

$$L\left[(\,\mathrm{sen})''\right] = L[-\,\mathrm{sen}] = -L[\,\mathrm{sen}]$$

de modo que

$$s^2 L[\,\mathrm{sen}] - 1 = -L[\,\mathrm{sen}]$$

Segue então que

$$(s^2+1)L[\,\mathrm{sen}] = 1$$

de modo que

$$L[\,\mathrm{sen}] = \frac{1}{s^2+1}$$

2) Pela regra da transformada da derivada segunda, temos que

$$L\left[(\,\cos)''\right] = s^2 L[\,\cos] - s\cos(0) - \,\cos'(0) = s^2 L[\,\cos] - s$$

Por outro lado, usando a linearidade, temos que

$$L\left[(\,\cos)''\right] = L[-\,\cos] = -L[\,\cos]$$

de modo que

$$s^2 L[\,\cos] - s = -L[\,\cos]$$

Segue então que

$$(s^2+1)L[\,\cos] = s$$

de modo que

$$L[\cos] = \frac{s}{s^2+1}$$

Podemos considerar a transformada de um dado PVI com coeficientes constantes. Vamos considerar um exemplo de um PVI homogêneo.

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' + 3y' + 2y\right] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] + 3L\left[y'\right] + 2L\left[y\right] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} \left(s^2L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + & \\ +3\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + & \\ +2L\left[y\right] & = 0 \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2L\left[y\right] - (s-2) + & \\ +3sL\left[y\right] - 3 + & \\ +2L\left[y\right] & = 0 \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2+3s+2\right)L\left[y\right]=(s-2)+3=s+1$$

obtemos que

$$L\left[y\right]=\frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

Uma vez que

$$s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

segue que

$$L\left[y\right]=\frac{1}{s+2}=L\left[e^{-2t}\right]$$

Vamos ver mais adiante que isso de fato implica que

$$y(t)=e^{-2t}$$

Deslocamento

O efeito sobre a transformada de multiplicarmos uma função $y(t)$ pela função e^{at} é deslocarmos a variável s para a variável $s-a$.

Proposição 5.9

Temos que

$$\boxed{L\left[y(t)e^{at}\right](s)=L\left[y(t)\right](s-a)}$$

Prova:

Temos que

$$
\begin{aligned}
L\left[y(t)e^{at}\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}y(t)e^{at}\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}y(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}y(t)\,dt \\
&= L\left[y(t)\right](s-a)
\end{aligned}
$$

■

Exemplo

Uma vez que

$$L\left[t^n\right](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

pela regra do deslocamento, segue que

$$
\begin{aligned}
L\left[t^n e^{at}\right](s) &= L\left[t^n\right](s-a) \\
&= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Por exemplo

$$L\left[te^{-t}\right] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Vamos considerar mais um exemplo de um PVI homogêneo.

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' + 2y' + y\right] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] + 2L\left[y'\right] + L\left[y\right] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} \left(s^2 L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + \\ +2\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + \\ +L\left[y\right] &= 0 \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L\left[y\right] - 1 + \\ +2sL\left[y\right] + \\ +L\left[y\right] &= 0 \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2 + 2s + 1\right) L\left[y\right] = 1$$

obtemos que

$$L\left[y\right] = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

Uma vez que

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$$

segue que

$$L\left[y\right] = \frac{1}{(s+1)^2} = L\left[te^{-t}\right]$$

Vamos ver mais adiante que isso de fato implica que

$$y(t) = te^{-t}$$

Mudança de escala

O efeito sobre a transformada de multiplicamos a variável t por uma constante positiva b é dividirmos tanto a transformada quanto a variável s por b.

Proposição 5.10

Temos que

$$\boxed{L\left[y(bt)\right](s) = \frac{1}{b}L\left[y(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right)}$$

Prova:

Temos que

$$L\left[y(bt)\right](s) = \int_0^{\infty} e^{-st}y(bt)\,dt$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \frac{u}{b}$, onde $dt = \frac{du}{b}$, segue que $u = 0$, quando $t = 0$, e que $u \to \infty$, quando $t \to \infty$, de modo que

$$\begin{aligned} L\left[y(bt)\right](s) &= \int_0^{\infty} e^{-s\frac{u}{b}}y(u)\,\frac{du}{b} \\ &= \frac{1}{b}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{s}{b}\right)u}y(u)\,du \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = t$, onde $du = dt$, temos que

$$\begin{aligned} L\left[y(bt)\right](s) &= \frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{b}\right)t} y(t)\,dt \\ &= \frac{1}{b} L\left[y(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right) \end{aligned}$$

■

Exemplos

1) Uma vez que

$$L[\,\mathrm{sen}(t)]\,(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

pela regra da mudança de escala, segue que

$$\begin{aligned} L[\,\mathrm{sen}(bt)]\,(s) &= \frac{1}{b} L[\,\mathrm{sen}(t)]\left(\frac{s}{b}\right) \\ &= \frac{1}{b}\frac{1}{\left(\frac{s}{b}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{b^2}\frac{b}{\frac{s^2}{b^2}+1} \\ &= \frac{b}{s^2+b^2} \end{aligned}$$

Utilizando a regra do deslocamento, obtemos que

$$\begin{aligned} L\left[e^{at}\,\mathrm{sen}(bt)\right](s) &= L[\,\mathrm{sen}(bt)]\,(s-a) \\ &= \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \end{aligned}$$

Por exemplo

$$L\left[e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)\right] = \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

2) Uma vez que

$$L\left[\,\cos(t)\right](s) = \frac{s}{s^2+1}$$

pela regra da mudança de escala, segue que

$$\begin{aligned}
L\left[\,\cos(bt)\right](s) &= \frac{1}{b} L\left[\,\cos(t)\right]\left(\frac{s}{b}\right) \\
&= \frac{1}{b}\frac{\frac{s}{b}}{\left(\frac{s}{b}\right)^2+1} \\
&= \frac{1}{b^2}\frac{s}{\frac{s^2}{b^2}+1} \\
&= \frac{s}{s^2+b^2}
\end{aligned}$$

Utilizando a regra do deslocamento, obtemos que

$$\begin{aligned}
L\left[e^{at}\cos(bt)\right](s) &= L\left[\,\cos(bt)\right](s-a) \\
&= \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}
\end{aligned}$$

Por exemplo

$$L\left[e^{-t}\cos(2t)\right] = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Vamos considerar mais um exemplo de um PVI homogêneo.

Exemplo

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' + 2y' + 5y\right] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] + 2L\left[y'\right] + 5L\left[y\right] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned}\left(s^2 L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + \\ +2\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + \\ +5L\left[y\right] &= 0\end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned}s^2 L\left[y\right] - 2 + \\ +2sL\left[y\right] + \\ +5L\left[y\right] &= 0\end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2 + 2s + 5\right) L\left[y\right] = 2$$

obtemos que

$$L\left[y\right] = \frac{2}{s^2 + 2s + 5}$$

Uma vez que

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 + 4$$

segue que

$$L\left[y\right] = \frac{2}{(s+1)^2 + 4} = L\left[e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)\right]$$

Vamos ver mais adiante que isso de fato implica que

$$y(t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)$$

Derivada da transformada

Enquanto a transformada da derivada está relacionada com multiplicar $L[y]$ pela variável s, a derivada da transformada está relacionada com multiplicar y pela variável $-t$. Primeiro vamos mostrar que a transformada $L[y](s)$ é uma função contínua em relação à variável s.

Proposição 5.11

Temos que

$$\boxed{\lim_{h\to 0} L[y](s+h) = L[y](s)}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} L[y](s+h) - L[y](s) &= \int_0^\infty e^{-(s+h)t} y(t)\,dt - \int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(e^{-(s+h)t} - e^{-st}\right) y(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty -xhe^{-(s+c)t} y(t)\,dt \end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função e^{-st}, de modo que

$$\frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} = -te^{-(s+c)t},$$

para algum c tal que $|c| < |h| < 1$. Usando que o módulo da integral é menor ou igual à integral do módulo, segue que

$$\left|L[y](s+h) - L[y](s)\right| = |h| \left| \int_0^\infty e^{-(s+c)t} \left(-xy(t)\right)\,dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |h| \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t} \left|-xy(t)\right| dt \\
&\leq |h| \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t} \left|-xy(t)\right| dt \\
&= |h| L\left[\left|-xy\right|\right](s-1)
\end{aligned}$$

onde utilizamos que $e^{-(s+c)t} < e^{-(s-1)t}$. Por sanduíche, segue que

$$\lim_{h \to 0} L\left[y\right](s+h) = L\left[y\right](s)$$

■

Agora vamos determinar a derivada de $L\left[y\right](s)$ em relação à variável s.

Proposição 5.12

Temos que

$$\boxed{L\left[y\right]'(s) = L\left[-ty\right](s)}$$

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned}
L\left[y\right]'(s) &= \lim_{h \to 0} \frac{L\left[y\right](s+h) - L\left[y\right](s)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} \right) y(t)\, dt \\
&= \lim_{h \to 0} \int_0^{\infty} -te^{-(s+c)t} y(t)\, dt
\end{aligned}$$

onde utilizamos, na última igualdade, o Teorema do Valor Médio aplicado à função e^{-st}, onde c é tal que $|c| < |h|$. Segue então que

$$L\left[y\right]'(s) = \lim_{h \to 0} \int_0^{\infty} e^{-(s+c)t} \left(-xy(t)\right) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} L\left[-xy\right](s+c)\\
&= L\left[-xy\right](s)
\end{aligned}
$$

onde utilizamos a continuidade da transformada, uma vez que $c \to 0$, quando $h \to 0$. ■

Exemplos

1) Temos que

$$
\begin{aligned}
L\left[te^{at}\right] &= -L\left[-te^{at}\right]\\
&= -L\left[e^{at}\right]'\\
&= -\left(\frac{1}{s-a}\right)'\\
&= \frac{1}{(s-a)^2}
\end{aligned}
$$

2) Temos que

$$
\begin{aligned}
L[t\,\mathrm{sen}(bt)] &= -L[-t\,\mathrm{sen}(bt)]\\
&= -L[\,\mathrm{sen}(bt)]'\\
&= -\left(\frac{b}{s^2+b^2}\right)'\\
&= -b\left(\left(s^2+b^2\right)^{-1}\right)'\\
&= b\left(s^2+b^2\right)^{-2}2s\\
&= \frac{2bs}{\left(s^2+b^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

INJETIVIDADE DA TRANSFORMADA

Quando obtemos que a tranformada da solução de um PVI é igual à transformada de uma dada função, precisamos saber se isso implica que a solução do PVI é igual a essa dada função. Primeiro precisamos do seguinte lema.

Lema 5.13

Se

$$\boxed{y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n}$$

então

$$\boxed{L[y] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n]}$$

Prova:

Usando a linearidade da transformada, obtemos que

$$L[y] = \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] + L\left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n\right]$$

de modo que

$$L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] = L\left[\sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n\right]$$

para todo k. Usando a definição de transformada, que o módulo da integral é menor ou igual à integral do módulo e que o módulo da série é menor ou igual à série dos módulos, segue que

$$\left|L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n]\right| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\sum_{n=k}^{\infty} c_n t^n\right) dt\right|$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-st} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt$$

para todo k. Agora, para todo $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\left| L[y] - \sum_{n=0}^{k-1} c_n L[t^n] \right| &\leq \int_0^t e^{-st} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \\
&\quad + \int_t^\infty e^{-st} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt \\
&\leq \left(\sum_{n=k}^{\infty} |c_n| t^n \right) \int_0^t e^{-st}\, dt \\
&\quad + \int_t^\infty e^{-st} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt
\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, obtemos que

$$\left| L[y] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n] \right| \leq \int_t^\infty e^{-st} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| t^n \right) dt$$

Fazendo $t \to \infty$ e usando o sanduíche, obtemos que

$$\left| L[y] - \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n] \right| = 0$$

de modo que

$$L[y] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L[t^n]$$

■

O resultado seguinte mostra que se as tranformadas de duas funções são as mesmas, então essas duas funções são de fato as mesmas.

Proposição 5.14

Se

$$\boxed{L[w] = L[z]}$$

então

$$\boxed{w = z}$$

Prova:

Se

$$L[w] = L[z]$$

pela linearidade da transformada, temos que

$$L[w - z] = L[w] - L[z] = 0$$

Definindo

$$y = w - z$$

basta então mostrarmos que

$$y = 0$$

Vamos supor que

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

Usando o lema anterior, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= L\left[y\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n L\left[t^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{s^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n! x^{n+1} \end{aligned}$$

onde $x = 1/s \in (0, R)$, para algum $R > 0$. Segue então que $c_n n! = 0$, para todo $n \geq 0$, de modo que $c_n = 0$, para todo $n \geq 0$, mostrando que $y = 0$. ■

5.4 Transformada inversa

Aplicando a transformada a um dado PVI, conseguimos obter a transformada da sua solução $L\left[y(t)\right] = Y(s)$. Entretanto o que de fato desejamos obter é a solução $y(t)$ do PVI. Isso é possível através da denominada *transformada inversa*, dada por

$$\boxed{L^{-1}[Y(s)] = y(t) \qquad \text{se} \qquad Y(s) = L\left[y(t)\right]}$$

que está bem definida, uma vez que $y(t)$ é única pela injetividade da transformada. As transformadas das funções já consideradas até aqui, denominadas *funções elementares*, são apresentadas na tabela abaixo.

$y(t)$	$L\left[y(t)\right]$
$t^n e^{rt}$	$\dfrac{n!}{(s-r)^{n+1}}$
$e^{at}\,\text{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

As transformadas das funções elementares são denominadas *frações parciais* e suas transformadas inversas são as respectivas funções elementares, o que é apresentado na tabela abaixo, obtida da tabela acima simplesmente trocando suas colunas.

$Y(s)$	$L^{-1}[Y(s)]$
$\dfrac{n!}{(s-r)^{n+1}}$	$t^n e^{rt}$
$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\,\text{sen}(bt)$
$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$	$e^{at}\cos(bt)$

Em geral, não é tão fácil calcular a transformada inversa de uma dada função $Y(s)$.

Funções racionais

Nos PVIs considerados por nós até agora, a transformada da solução é em geral o que é denominado de *função racional em s*, dada por

$$Y(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

onde $P(s)$ e $Q(s)$ são polinômios tais que o grau de $P(s)$ é menor do que o grau de $Q(s)$. Nesse caso, podemos escrever a transformada inversa de $Y(s)$ como uma combinação linear de funções elementares.

Proposição 5.15

Considere $P(s)$ e $Q(s)$ polinômios tais que o grau de $P(s)$ é menor do que o grau de $Q(s)$ e suponha que $Q(s)$ possui raízes reais r com multiplicidade m e raízes complexas conjugadas simples $a \pm ib$. Segue então que

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] &= \cdots + A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} + A_3 t^2 e^{rt} + \cdots + A_m t^{m-1} e^{rt} + \cdots \\ &\quad \cdots + A e^{at} \operatorname{sen}(bt) + B e^{at} \cos(bt) + \cdots \end{aligned}$$

onde $\ldots, A_1, \ldots, A_m, \ldots, A, B, \ldots$ são contantes reais.

Prova:

Temos que

$$Q(s) = a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0$$

e que

$$P(s) = b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

onde $a_n \neq 0$. Considere agora o PVI homogêneo

$$\begin{cases} a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Observe que equação característica dessa EDO é precisamente $Q(r) = 0$, portanto suas raízes características são precisamente as raízes do denominador $Q(s)$. A transformada da solução é dada por

$$L\left[y\right] = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

onde

$$\begin{aligned} R(s) \quad = \quad & a_n y_0 s^{n-1} + (a_{n-1} y_0 + a_n y_1) s^{n-2} + \cdots \\ & \cdots + (a_2 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-3} + a_n y_{n-2}) s + \\ & + (a_1 y_0 + \cdots + a_{n-2} y_{n-3} + a_{n-1} y_{n-2} + a_n y_{n-1}) \end{aligned}$$

Afirmamos que é possível escolher as condições iniciais $\{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ de modo que $R(s) = P(s)$. De fato, para isso acontecer, as condições iniciais devem satisfazer o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n y_0 & = & b_{n-1} \\ a_{n-1} y_0 + a_n y_1 & = & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-3} + a_n y_{n-2} & = & b_1 \\ a_1 y_0 + \cdots + a_{n-2} y_{n-3} + a_{n-1} y_{n-2} + a_n y_{n-1} & = & b_0 \end{array} \right.$$

que sempre possui solução, pois está escalonado e $a_n \neq 0$. Neste caso, segue que

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = L\left[y\right]$$

de modo que

$$L^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right] = y(t)$$

onde $y(t)$ é a solução do PVI.

O resultado segue do que sabemos sobre a solução geral da EDO homogênea de coeficientes constantes do PVI que, de acordo com a Seção 5.1, é determinada por suas raízes características que são precisamente as raízes de $Q(s)$. ■

A partir desse resultado, podemos aplicar o seguinte método, denominado de *Frações Parciais*, para determinarmos a transformada inversa de uma função racional $Y(s)$:

Passos

1) Raízes do denominador: Determinar as raízes de $Q(s)$. Vamos considerar apenas o caso em que $Q(s)$ possui raízes reais r com multiplicidade m e raízes complexas conjugadas simples $a \pm ib$. Devemos então escrever o denominador da seguinte forma:

$$Q(s) = \cdots (s-r)^m \cdots ((s-a)^2 + b^2) \cdots$$

2) Combinação de funções elementares: A partir das raízes obtidas no passo anterior, escrever a solução como combinação de funções elementares da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= \cdots + A_1 e^{rt} + A_2 t e^{rt} + A_3 t^2 e^{rt} + \cdots + A_m t^{m-1} e^{rt} + \cdots \\ &\quad \cdots + A e^{at} \operatorname{sen}(bt) + B e^{at} \cos(bt) + \cdots \end{aligned}$$

onde $\ldots, A_1, \ldots, A_m, \ldots, A, B, \ldots$ são contantes a serem determinadas.

3) Combinação de frações parciais: Aplicar a transformada em ambos os lados, escrevendo $Y(s)$ como uma frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{\cdots (s-r)^m \cdots ((s-a)^2+b^2) \cdots} &= \cdots + A_1 \frac{1}{s-r} + A_2 \frac{1}{(s-r)^2} + \\ &\quad + A_3 \frac{2}{(s-r)^3} + \cdots + A_m \frac{(m-1)!}{(s-r)^m} + \cdots \\ &\quad \cdots + A \frac{b}{(s-a)^2+b^2} + \\ &\quad + B \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} + \cdots \end{aligned}$$

4) Igualdade de polinômios: Multiplicar pelo denominador ambos os lados da equação e obter uma igualdade de polinômios.

5) Igualdade dos coeficientes: Igualar os coeficientes dos polinômios da equação obtida no passo anterior, encontrando um sistema linear para as constantes $\ldots, A_1, \ldots, A_m, \ldots, A, B, \ldots$.

6) Sistema linear: Resolver o sistema linear obtido no passo anterior, determinando as constantes $\ldots, A_1, \ldots, A_m, \ldots, A, B, \ldots$.

7) Solução do PVI: Substituir os valores obtidos no passo anterior na igualdade do segundo passo, determinando a solução do PVI.

Vamos aplicar os passos acima para obter a solução de alguns PVIs.

Exemplos

1) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{-3t} \\ \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' + 6y' + 9y\right] = L\left[e^{-3t}\right] = \frac{1}{s+3}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] + 6L\left[y'\right] + 9L\left[y\right] = \frac{1}{s+3}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} \left(s^2 L\left[y\right] - s y(0) - y'(0)\right) + & \\ +6\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + & \\ +9L\left[y\right] &= \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - (s+2) + & \\ +6sL[y] - 6+ & \\ +9L[y] &= \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2+6s+9\right) L[y] = s+8+\frac{1}{s+3} = \frac{(s+8)(s+3)+1}{s+3}$$

obtemos que

$$L[y] = \frac{(s+8)(s+3)+1}{(s+3)(s^2+6s+9)} = \frac{s^2+11s+25}{(s+3)(s^2+6s+9)}$$

Raízes do denominador: Temos que $r = -3$ é raiz simples de $s+3$ e também é raiz dupla de s^2+6s+9. Logo $r = -3$ é raiz do denominador com multiplicidade $m = 3$, de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s+3)(s^2+6s+9) = (s+3)^3$$

Combinação de funções elementares: Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = Ae^{-3t} + bte^{-3t} + Ct^2e^{-3t}$$

onde A, B, C são contantes a serem determinadas.

Combinação de frações parciais: Aplicando a transformada em ambos os lados, obtemos que

$$\frac{s^2+11s+25}{(s+3)^3} = A\frac{1}{s+3} + B\frac{1}{(s+3)^2} + C\frac{2}{(s+3)^3}$$

Igualdade de polinômios: Multiplicando a equação por $(s+3)^3$, obtemos que

$$s^2+11s+25 = A(s+3)^2 + B(s+3) + 2C$$

$$
\begin{aligned}
&= A(s^2+6s+9)+B(s+3)+2C \\
&= As^2+(6A+B)s+9A+3B+2C
\end{aligned}
$$

Igualdade dos coeficientes: Igualando os coeficientes dos polinômios, segue que

$$
\begin{cases}
A &= 1 \\
6A+B &= 11 \\
9A+3B+2C &= 25
\end{cases}
$$

Sistema linear: Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$
A=1, \qquad B=5, \qquad C=\frac{1}{2}
$$

Solução do PVI: Segue que

$$
y(t)=e^{-3t}+5te^{-3t}+\frac{1}{2}t^2e^{-3t}
$$

é a solução do PVI.

2) Considere o PVI

$$
\begin{cases}
y''-4y'+4y=e^t \\
y(0)=0, \quad y'(0)=0
\end{cases}
$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$
L\left[y''-4y'+4y\right]=L\left[e^t\right]=\frac{1}{s-1}
$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$
L\left[y''\right]-4L\left[y'\right]+4L\left[y\right]=\frac{1}{s-1}
$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned}\left(s^2 L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + \\ -4\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + \\ +4L\left[y\right] &= \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned}s^2 L\left[y\right] + \\ -4sL\left[y\right] + \\ +4L\left[y\right] &= \frac{1}{s-1}\end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2 - 4s + 4\right) L\left[y\right] = \frac{1}{s-1}$$

obtemos que

$$L\left[y\right] = \frac{1}{(s-1)(s^2-4s+4)}$$

Raízes do denominador: Temos que $r = 1$ é raiz simples de $s-1$ e $r = 2$ é raiz dupla de s^2-4s+4, de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s-1)(s^2-4s+4) = (s-1)(s-2)^2$$

Combinação de funções elementares: Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + Cte^{2t}$$

onde A, B, C são contantes a serem determinadas.

Combinação de frações parciais: Aplicando a transformada em ambos os lados, obtemos que

$$\frac{1}{(s-1)(s-2)^2} = A\frac{1}{s-1} + B\frac{1}{s-2} + C\frac{1}{(s-2)^2}$$

Igualdade de polinômios: Multiplicando a equação por $(s-1)(s-2)^2$, obtemos que

$$\begin{aligned} 1 &= A(s-2)^2 + B(s-1)(s-2) + C(s-1) \\ &= A(s-4s+4) + B(s^2-3s+2) + C(s-1) \\ &= (A+B)s^2 + (-4A-3B+C)s + 4A+2B-C \end{aligned}$$

Igualdade dos coeficientes: Igualando os coeficientes dos polinômios, segue que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ -4A-3B+C &=& 0 \\ 4A+2B-C &=& 1 \end{array} \right.$$

Sistema linear: Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$A=1, \qquad B=-1, \qquad C=1$$

Solução do PVI: Segue que

$$y(t) = e^t - e^{2t} + te^{2t}$$

é a solução do PVI.

3) Considere o PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 0 \end{array} \right.$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' - 5y' + 6y\right] = L[0] = 0$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] - 5L\left[y'\right] + 6L\left[y\right] = 0$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned}\left(s^2L\left[y\right]-sy(0)-y'(0)\right)+\\ -5\left(sL\left[y\right]-y(0)\right)+\\ +6L\left[y\right] &= 0\end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned}s^2L\left[y\right]-2s+\\ -5sL\left[y\right]+10+\\ +6L\left[y\right] &= 0\end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2-5s+6\right)L\left[y\right]=2s-10$$

obtemos que

$$L\left[y\right]=\frac{2s-10}{s^2-5s+6}$$

Raízes do denominador: Temos que $r=2$ e $r=3$ são raízes simples de s^2-5s+6, de modo que o denominador pode ser escrito como

$$s^2-5s+6=(s-2)(s-3)$$

Combinação de funções elementares: Podemos então escrever a solução como

$$y(t)=Ae^{2t}+Be^{3t}$$

onde A, B são contantes a serem determinadas.

Combinação de frações parciais: Aplicando a transformada em ambos os lados, obtemos que

$$\frac{2s-10}{(s-2)(s-3)}=A\frac{1}{s-2}+B\frac{1}{s-3}$$

Igualdade de polinômios: Multiplicando a equação por $(s-2)(s-3)$, obtemos que

$$\begin{aligned}2s-10 &= A(s-3)+B(s-2)\\ &= (A+B)s-3A-2B\end{aligned}$$

Igualdade dos coeficientes: Igualando os coeficientes dos polinômios, segue que

$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ -3A-2B &= -10 \end{cases}$$

Sistema linear: Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$A = 6, \qquad B = -4$$

Solução do PVI: Segue que

$$y(t) = 6e^{2t} - 4e^{3t}$$

é a solução do PVI.

4) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = 2 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' + 4y' + 13y\right] = L[2] = \frac{2}{s}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] + 4L\left[y'\right] + 13L\left[y\right] = \frac{2}{s}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} \left(s^2L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + \\ +4\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + \\ +13L\left[y\right] &= \frac{2}{s} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{array}{rcl} s^2 L[y] + & & \\ +4sL[y] + & & \\ +13L[y] & = & \dfrac{2}{s} \end{array}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2 + 4s + 13\right) L[y] = \frac{2}{s}$$

obtemos que

$$L[y] = \frac{2}{s(s^2 + 4s + 13)}$$

Raízes do denominador: Temos que $r = 0$ é raiz simples de s e $a \pm b = -2 \pm 3i$ são raízes complexas conjugadas simples de $s^2 + 4s + 13$, de modo que o denominador pode ser escrito como

$$s(s^2 + 4s + 13) = s((s+2)^2 + 3^2)$$

Combinação de funções elementares: Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = A + Be^{-2t}\,\text{sen}(3t) + Ce^{-2t}\cos(3t)$$

onde A, B, C são contantes a serem determinadas.

Combinação de frações parciais: Aplicando a transformada em ambos os lados, obtemos que

$$\frac{2}{s((s+2)^2 + 3^2)} = A\frac{1}{s} + B\frac{3}{(s+2)^2 + 3^2} + C\frac{s+2}{(s+2)^2 + 3^2}$$

Igualdade de polinômios: Multiplicando a equação por $s((s+2)^2 + 3^2)$, obtemos que

$$\begin{array}{rcl} 2 & = & A((s+2)^2 + 3^2) + 3Bs + C(s+2)s \\ & = & A(s^2 + 4s + 13) + 3Bs + C(s^2 + 2s) \\ & = & (A+C)s^2 + (4A + 3B + 2C)s + 13A \end{array}$$

Igualdade dos coeficientes: Igualando os coeficientes dos polinômios, segue que

$$\begin{cases} A+C &= 0 \\ 4A+3B+2C &= 0 \\ 13A &= 2 \end{cases}$$

Sistema linear: Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$A = \frac{2}{13}, \qquad B = -\frac{4}{39}, \qquad C = -\frac{2}{13}$$

Solução do PVI: Segue que

$$y(t) = \frac{2}{13} - \frac{4}{39}e^{-2t}\,\text{sen}(3t) - \frac{2}{13}e^{-2t}\cos(3t)$$

é a solução do PVI.

5) Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \cos(t) \\ \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e aplique a transformada em ambos os lados da EDO

$$L\left[y'' - 2y' + 2y\right] = L[\cos(t)] = \frac{s}{s^2+1}$$

Podemos então utilizar a linearidade da transformada

$$L\left[y''\right] - 2L\left[y'\right] + 2L\left[y\right] = \frac{s}{s^2+1}$$

as regras da transformada das derivadas

$$\begin{aligned} \left(s^2L\left[y\right] - sy(0) - y'(0)\right) + & \\ -2\left(sL\left[y\right] - y(0)\right) + & \\ +2L\left[y\right] &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} s^2 L[y] - s + & \\ -2sL[y] + 2 & \\ +2L[y] &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2 - 2s + 2\right) L[y] = s - 2 + \frac{s}{s^2+1} = \frac{(s-2)(s^2+1)+s}{s^2+1}$$

obtemos que

$$L[y] = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$$

Raízes do denominador: Temos que $a \pm b = 0 \pm i$ são raízes complexas conjugadas simples de s^2+1 e que $a \pm b = 1 \pm i$ são raízes complexas conjugadas simples de $s^2 - 2s + 2$, de modo que o denominador pode ser escrito como

$$(s^2+1)(s^2-2s+2) = (s^2+1)((s-1)^2+1)$$

Combinação de funções elementares: Podemos então escrever a solução como

$$y(t) = A\,\text{sen}(t) + B\cos(t) + Ce^t\,\text{sen}(t) + De^t\cos(t)$$

onde A, B, C, D são contantes a serem determinadas.

Combinação de frações parciais: Aplicando a transformada em ambos os lados, obtemos que

$$\frac{s^3-2s^2+2s-2}{(s^2+1)((s-1)^2+1)} = A\frac{1}{s^2+1} + B\frac{s}{s^2+1} + C\frac{1}{(s-1)^2+1} + D\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

Igualdade de polinômios: Multiplicando a equação por $(s^2+1)((s-1)^2+1)$, obtemos que

$$\begin{aligned} & s^3 - 2s^2 + 2s - 2 = \\ = \ & A((s-1)^2+1) + Bs((s-1)^2+1) + C(s^2+1) + D(s-1)(s^2+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A(s^2-2s+2)+B(s^3-2s^2+2s)+C(s^2+1)+D(s^3-s^2+s-1) \\ &= (B+D)s^3+(A-2B+C-D)s^2+(-2A+2B+D)s+2A+C-D \end{aligned}$$

Igualdade dos coeficientes: Igualando os coeficientes dos polinômios, segue que

$$\begin{cases} B+D &= 1 \\ A-2B+C-D &= -2 \\ -2A+2B+D &= 2 \\ 2A+C-D &= -2 \end{cases}$$

Sistema linear: Resolvendo esse sistema, obtemos que

$$A=-\frac{2}{5}, \qquad B=\frac{1}{5}, \qquad C=-\frac{2}{5}, \qquad D=\frac{4}{5}$$

Solução do PVI: Segue que

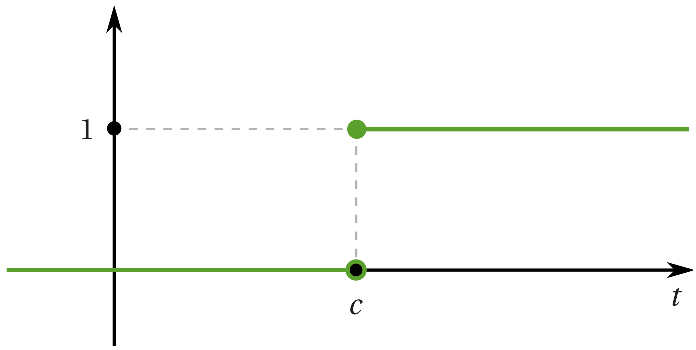
$$y(t)=-\frac{2}{5}\operatorname{sen}(t)+\frac{1}{5}\cos(t)-\frac{2}{5}e^t\operatorname{sen}(t)+\frac{4}{5}e^t\cos(t)$$

é a solução do PVI.

5.5 Funções definidas por partes

Até agora, utilizamos a transformada de Laplace para obter a solução de PVIs onde aparecem apenas funções dadas por séries de potências. Uma vantagem desse método é que ele também pode ser aplicado para obter a solução de PVIs onde aparecem funções *definidas por partes*. Sem a transformada, teríamos que dividir um PVI desse tipo em vários outros problemas e solucioná-los individualmente, mas, com ela, podemos lidar com eles de uma única vez.

A função definida por partes mais simples é a *função degrau em c*

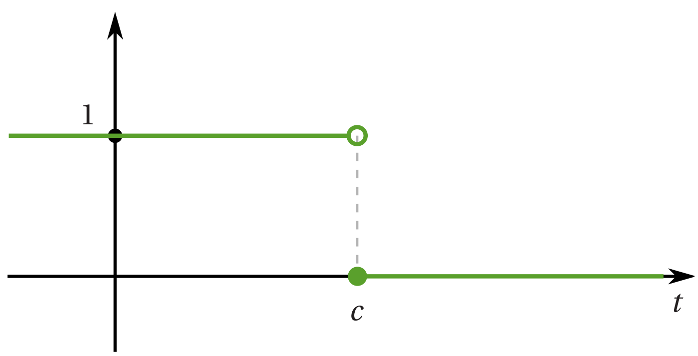


Definida por

$$\boxed{u_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}}$$

O gráfico de u_c justifica plenamente o seu nome. A análise do gráfico mostra que a função representa um salto de zero até um no ponto $t = c$. Isto pode ser pensado como um interruptor que estava desligado e, no instante c, foi ligado alcançando a voltagem de uma unidade.

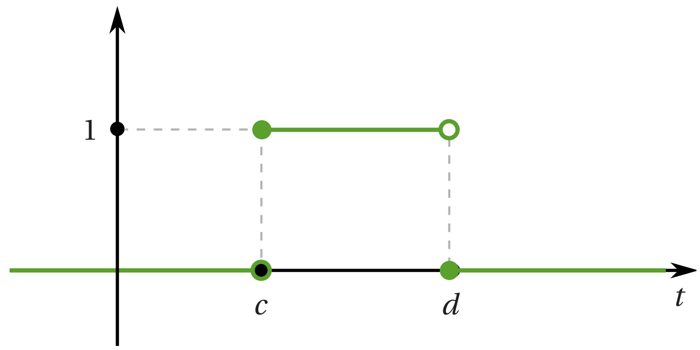
Podemos considerar ainda um interruptor que estava ligado e, no instante c, é desligado.



Podemos escrever essa função usando a função degrau da seguinte maneira

$$\boxed{1 - u_c(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < c \\ 0 & \text{se } t \geq c \end{cases}}$$

Podemos considerar também um interruptor que é ligado no instante $t = c$ e é desligado no instante $t = d$.



Podemos escrever essa função usando agora duas funções degrau

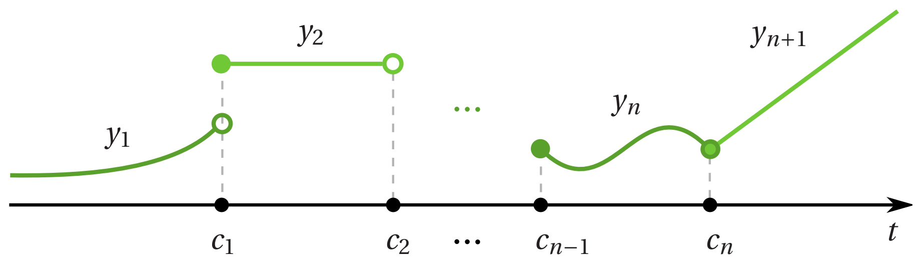
$$\boxed{u_c(t) - u_d(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ t < c \\ 1 & \text{se } \ c \leq t < d \\ 0 & \text{se } \ t \geq d \end{cases}}$$

Mais geralmente, funções degrau são a chave para escrevermos funções definidas por partes com uma única expressão algébrica. De fato, vale o seguinte resultado.

Proposição 5.16

Considere a função definida por partes dada por

$$y(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{se } \ t < c_1 \\ y_2(t) & \text{se } \ c_1 \leq t < c_2 \\ \vdots & \\ y_n(t) & \text{se } \ c_{n-1} \leq t < c_n \\ y_{n+1}(t) & \text{se } \ t \geq c_n \end{cases}$$



Então

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = \; & y_1(t)\left(1-u_{c_1}(t)\right) + y_2(t)\left(u_{c_1}(t)-u_{c_2}(t)\right) + \cdots \\ & \cdots + y_n(t)\left(u_{c_{n-1}}(t)-u_{c_n}(t)\right) + y_{n+1}(t)u_{c_n}(t) \end{aligned}}$$

Exemplo

Num circuito RLC, uma bateria de 12 volts é ligada no instante $t = 5$ e desligada no intante $t = 7$. A carga $q(t)$ no capacitor satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} q'' + 4q' + 3q = 12\left(u_5(t) - u_7(t)\right) \\ q(0) = 2 \\ q'(0) = -2 \end{cases}$$

Pela linearidade da transformada, basta agora determinarmos a transformada de funções da forma $u_c(t)y(t)$.

Proposição 5.17

Temos que

$$\boxed{L\left[u_c(t)y(t)\right] = e^{-cs}L\left[y(t+c)\right]}$$

Prova:

Pela definição

$$L\left[u_c(t)y(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)y(t)dt \tag{5.1}$$
$$= \int_c^\infty e^{-st}y(t)dt \tag{5.2}$$

Na passagem de (5.1) para (5.2) usamos apenas a definição de função degrau. Note que, com exceção de começar em c ao invés de zero, a expressão acima se parece com uma Transformada de Laplace. Corrigimos este problema usando a substituição $t = t - c$ e temos

$$\begin{aligned}
L\left[u_c(t)y(t)\right] &= \int_c^\infty e^{-st}y(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(t+c)}y(t+c)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-sc}e^{-st}y(t+c)dt \\
&= e^{-sc}\int_0^\infty e^{-st}y(t+c)dt \\
&= e^{-cs}L\left[y(t+c)\right].
\end{aligned}$$

■

Em particular, obtemos a transformada da função degrau.

Exemplo

Temos que $u_c(t) = u_c(t) \cdot 1$, logo

$$L[u_c(t)] = e^{-cs} L[1] = e^{-cs} \frac{1}{s}$$

Observe que se $y(t)$ é uma função elementar, então $y(t+c)$ pode ser escrita como uma combinação de funções elementares.

Exemplos

1) Se $y(t) = t^n e^{rt}$, então

$$\begin{aligned} y(t+c) &= (t+c)^n e^{r(t+c)} \\ &= (t+c)^n e^{rx+rc} \\ &= e^{rc} e^{rt} (t+c)^n \end{aligned}$$

Como e^{rc} é uma constante e como $(t+c)^n$ é um polinômio, segue que $y(t+c)$ pode ser escrita como uma combinação de funções elementares.

2) Se $y(t) = e^{at}\,\text{sen}(bt)$, então

$$\begin{aligned} y(t+c) &= e^{a(t+c)}\,\text{sen}(b(t+c)) \\ &= e^{at+ac}\,\text{sen}(bt+bc) \\ &= e^{at}e^{ac}\,(\,\text{sen}(bt)\cos(bc) + \,\text{sen}(bc)\cos(bt)) \\ &= Ae^{at}\,\text{sen}(bt) + Be^{at}\cos(bt) \end{aligned}$$

onde $A = e^{ac}\cos(bc)$ e $B = e^{ac}\,\text{sen}(bc)$ são constantes.

3) Se $y(t) = e^{at}\cos(bt)$, então

$$y(t+c) = e^{a(t+c)}\cos(b(t+c))$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{at+ac}\cos(bt+bc)\\
&= e^{at}e^{ac}\left(\cos(bt)\cos(bc) - \operatorname{sen}(bc)\operatorname{sen}(bt)\right)\\
&= Ae^{at}\cos(bt) + Be^{at}\operatorname{sen}(bt)
\end{aligned}
$$

onde $A = e^{ac}\cos(bc)$ e $B = -e^{ac}\operatorname{sen}(bc)$ são constantes.

Uma consequência imediata da proposição acima é o seguinte resultado.

Corolário 5.18

Temos que

$Y(s)$	$L^{-1}[Y(s)]$
$e^{-cs}L\left[y(t)\right]$	$u_c(t)y(t-c)$

Prova:

O resultado segue da proposição anterior, uma vez que

$$L\left[u_c(t)y(t-c)\right] = e^{-cs}L\left[y(t-c+c)\right] = e^{-cs}L\left[y(t)\right]$$

■

Apresentamos a seguir o procedimento para se obter a solução des PVIs em que aparece uma função definida por partes, onde cada parte é dada por uma função elementar.

Passos

1) Utilize a proposição acima e proceda como usualmente para obter transformada da solução $L\left[y\right]$, que sempre poderá ser escrita como

$$L[y] = e^{-c_1 s} Y_1(s) + e^{-c_2 s} Y_2(s) + \cdots + e^{-c_n s} Y_n(s)$$

onde $Y_1(s), Y_2(s), \ldots, Y_n(s)$ são funções racionais em s.

2) Aplique o método das frações parciais, apresentado na seção anterior, para obter as transformadas inversas de $Y_1(s), Y_2(s), \ldots, Y_n(s)$, denotadas por $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$.

3) Da linearidade da transformada inversa e do corolário acima, segue que

$$y(t) = u_{c_1}(t) y_1(t - c_1) + u_{c_2}(t) y_2(t - c_2) + \cdots + u_{c_n}(t) y_n(t - c_n)$$

Vamos aplicar esse método ao exemplo acima.

Exemplo

Num circuito RLC, uma bateria de 12 volts é ligada no instante $t = 5$ e desligada no intante $t = 7$. A carga $q(t)$ no capacitor satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} q'' + 4q' + 3q = 12\,(u_5(t) - u_7(t)) \\ q(0) = 2 \\ q'(0) = -2 \end{cases}$$

Observe que, nesse problema, a variável indendente é o tempo t. Aplicando a transformada em ambos os lados da EDO e usando a linearidade

$$L[q''] + 4L[q'] + 3L[q] = 12L[u_5(t)] - 12L[u_7(t)]$$

usando as regras da transformada e as condições iniciais

$$\begin{aligned}\left(s^2L\left[q\right]-2s+2\right)+&\\ +4\left(sL\left[q\right]-2\right)+&\\ +3L\left[q\right] &= e^{-5s}\frac{12}{s}-e^{-7s}\frac{12}{s}\end{aligned}$$

Colocando a transformada da solução do PVI em evidência

$$\left(s^2+4s+3\right)L\left[q\right]=2s+6+e^{-5s}\frac{12}{s}-e^{-7s}\frac{12}{s}$$

obtemos que

$$\begin{aligned}L\left[q\right] &= \frac{2s+6}{s^2+4s+3}+e^{-5s}\frac{12}{s(s^2+4s+3)}-e^{-7s}\frac{12}{s(s^2+4s+3)}\\ &= Q_1(s)+e^{-5s}Q_2(s)-e^{-7s}Q_2(s)\end{aligned}$$

onde

$$Q_1(s)=\frac{2s+6}{s^2+4s+3}\qquad Q_2(s)=\frac{12}{s(s^2+4s+3)}$$

Aplicando o método das frações parciais apresentado na seção anterior, obtemos

$$Q_1(s)=\frac{2}{s+1}\qquad Q_2(s)=\frac{4}{s}-\frac{6}{s+1}+\frac{2}{s+3}$$

de onde obtemos as respectivas transformadas inversas

$$q_1(t)=2e^{-t}\qquad q_2(t)=4-6e^{-t}+2e^{-3t}$$

De $L\left[q\right]=Q_1(s)+e^{-5s}Q_2(s)-e^{-7s}Q_2(s)$ segue então que

$$\begin{aligned}q(t) &= q_1(t)+u_5(t)q_2(t-5)-u_7(t)q_2(t-7)\\ &= 2e^{-t}+\\ &\quad +u_5(t)\left(4-6e^{-(t-5)}+2e^{-3(t-5)}\right)-\\ &\quad -u_7(t)\left(4-6e^{-(t-7)}+2e^{-3(t-7)}\right)\end{aligned}$$

é a solução do PVI.

5.6 Sistema de EDOs

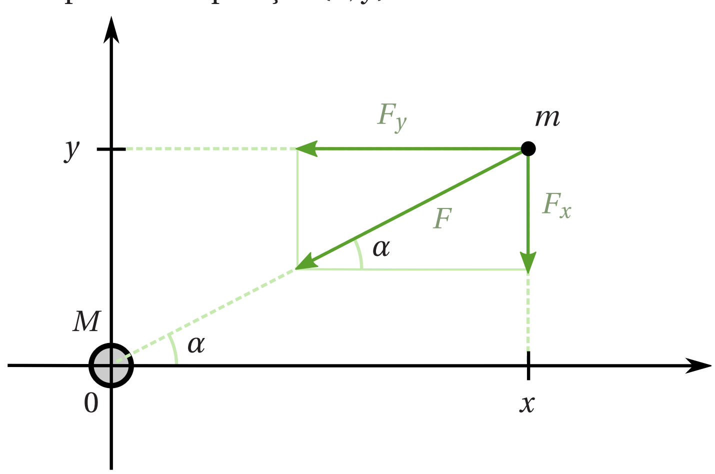
Muitas vezes uma quantidade desconhecida $x(t)$ varia de acordo com outra quantidade desconhecida $y(t)$ e vice-versa, por exemplo:

- as coordenadas de um planeta orbitando ao redor do sol,
- o decaimento da massa uma substância radioativa em diversas substâncias nuclearmente instáveis até chegar numa substância nuclearmente estável.

Nesses casos as quantidades desconhecidas são modeladas por duas ou mais funções incógnitas relacionadas por duas ou mais equações que envolvem suas derivadas: é isso que se chama de *sistema de EDOs*.

Exemplos

1) Um planeta de massa m se movimenta sob a força central de uma estrela de massa M num plano coordenado em que a estrela fica na origem e o planeta na posição (x, y).



Se d é a distância entre a estrela e o planeta, Pela Lei da Gravitação Universal, a força F que a estrela exerce sobre o planeta tem módulo

$$GMm\frac{1}{d^2}$$

e, portanto, componentes x e y dados por

$$F_x = -GMm\frac{1}{d^2}\cos(\alpha) \qquad F_y = -GMm\frac{1}{d^2}\operatorname{sen}(\alpha)$$

onde G é a constante da gravitação universal. A Segunda Lei de Newton nesse caso é

$$\begin{cases} mx'' &= F_x \\ my'' &= F_y \end{cases}$$

Usando que

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{d} \qquad \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{y}{d} \qquad d = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

a Segunda Lei de Newton fornece o seguinte sistema não-linear de 2^a ordem e duas incógnitas

$$\begin{cases} mx'' &= -GMm\dfrac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \\ my'' &= -GMm\dfrac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Observe que esse sistema é não-linear e está acoplado: para conhecer a posição $x(t)$ devemos primeiro conhecer $y(t)$ e vice-versa, não há como isolar uma ou outra função incógnita.

Com um pouco de conhecimento de Mecânica Clássica esse sistema pode ser resolvido explicitamente e dele se deduzir matematicamente as Leis de Kepler. Para exemplificar isso vamos deduzir uma das Leis de Kepler para órbitas circulares. Uma órbita circular de raio R satisfaz

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Assim, para órbitas circulares o sistema de EDOs fica

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{GM}{R^3}x \\ \\ y'' = -\dfrac{GM}{R^3}y \end{cases}$$

ou seja, duas EDOs desacopladas do tipo massa-mola. Um par de soluções que satisfaz $x^2 + y^2 = R^2$ é dada pela trajetória circular

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$y(t) = R\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

com velocidade angular constante

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

O período da trajetória é $T = 2\pi/\omega$. O quadrado desse período é

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2}{GM}R^3$$

e, portanto, proporcional ao cubo da distância entre o planeta e a estrela. Isso mostra como a terceira Lei de Kepler para órbitas circulares é consequência do sistema de EDOs da gravitação de dois corpos.

O problema da gravitação de dois corpos, é clássico e suas soluções são bem conhecidas desde Kepler e bem fundamentadas desde Newton. Introduza a terceira dimensão no espaço e um terceiro corpo –uma lua orbitando ao redor do planeta, ou dois planetas orbitando ao redor da estrela, ou ainda um planeta orbitando uma estrela binária (ou seja, um par de estrelas)– e o problema já fica bastante mais difícil. É um sistema de 2^a ordem e nove incógnitas (três para a posição de cada corpo celeste) chamado de *problema dos três corpos*. Esse problema, relacionado com a questão ainda não respondida da estabilidade do Sistema Solar é tema ativo de pesquisa até hoje[a]. Um dos desenvolvimentos mais desconcertantes desse problema ocorreu em 1900, quando o matemático francês Henri Poincaré chegou a conclusão que esse sistema em geral não tem solução explícita, não tem órbitas periódicas e as trajetórias desses três corpos pode ser extremamente complicada! Foi a primeira aparição do fênomeno do caos e imprevisibilidade em sistemas de EDOs.

[a] Veja o artigo: *O Sistema Solar é Estável?* de Jürgen Moser, Revista Matemática Universitária n^{o}9/10, Dezembro de 1989, disponível em: http://goo.gl/cBJCwY

2) O decaimento uma substância radioativa numa substância nuclearmente estável costuma se dar não de uma vez, mas por meio de uma cadeia de isótopos: os átomos da substância radioativa decaem num primeiro isótopo instável, que por sua vez decaem num segundo isótopo instável e assim por diante, até decairem num isótopo estável. Por exemplo, a cadeia de decaimento natural do urânio tem 20 isótopos como, por exemplo

$$\text{U-238} \to \text{Th-234} \to \cdots \to \text{Pb-206}$$

cujo último membro é um isótopo estável do chumbo. A meia vida dos diversos isótopos dessa cadeia varia de 4,5 bilhões de anos para o U-238, 24,6 dias para o Th-234 a uma fração de segundos para alguns outros isótopos. Desse modo, uma amostra da substância radioativa costuma ter diversas proporções de cada isótopo e é possível, à partir dessas proporções, descobrir quando a substância começou a decair. Esse método de datação é especialmente adequado para substâncias inorgânicas como rochas, portanto, para datações geológicas.

Como modelar uma cadeia de decaimento? Suponha uma cadeia de decaimento com três isótopos

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

onde Z é o isótopo estável e α e β são as constantes de decaimento dos isótopos instáveis X e Y, relacionadas com suas respectivas meia-vidas. Denotando por $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ as quantidades de cada isótopo, o decaimento de X é dado por

$$X' = -\alpha X$$

pois é proporcional à quantidade presente de X, já o decaimento de Y é dado pela taxa líquida

$$Y' = \alpha X - \beta Y$$

já que ele ganha massa do decaimento de X e perde massa do seu próprio decaimento para Z, por último o decaimento de Z é dado por

$$Z' = \beta Y$$

uma vez que ele ganha massa do decaimento de Y e, por ser estável, não decai.

Obtemos assim o seguinte sistema de 1^a ordem e três incógnitas:

$$\begin{cases} X' &= -\alpha X \\ Y' &= \alpha X - \beta Y \\ Z' &= \beta Y \end{cases}$$

Observe que Y está acoplado com X e Y e Z está acoplado com Y. Porém o sistema está escalonado: na primeira equação X não está acoplado com nenhuma outra incógnita, assim podemos resolver a primeira equação para X (linear homogênea). Conhecendo X podemos resolver a segunda equação para Y (linear não-homogênea). Resolvendo a terceira equação, obtemos Z integrando Y.

A maior dificuldade para se resolver um sistema de EDOs é que suas funções incógnitas e suas derivadas estão acopladas.

SISTEMAS LINEARES DE EDOS

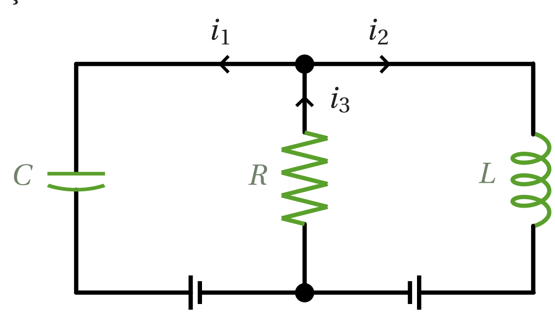
Dizemos que o sistema é linear se todas suas equações são lineares: nesse caso veremos que temos boas técnicas de solução.

Exemplos

1) O sistema de EDOs da gravitação de dois corpos no plano xy é de 2^a ordem para x e de 2^a ordem para y. O sistema não é linear pois nem a primeira nem a segunda equação são lineares.

O sistema de EDOs do decaimento de isótopos é linear de 1^a ordem.

2) Já estudamos circuitos RLC simples, vamos considerar agora dois circuitos acoplados. Considere as correntes num circuito RC acoplado a um circuito LR com a resistência em comum, ambos submetidos à força eletromotriz nula.



A primeira Lei de Kirchhoff diz que, em cada nó do circuito, a soma das correntes que entram é igual a soma das correntes que saem, de modo que

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

A segunda Lei de Kirchhoff diz que, em cada circuito, a soma das quedas de tensão num circuito é igual à força eletromotriz, de modo que

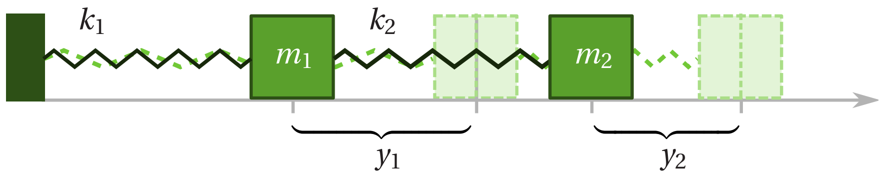
$$\begin{cases} Ri_3 + Cq_1 = 0 \\ Li_2' + Ri_3 = 0 \end{cases}$$

Derivando a primeira equação desse sistema e utilizando que $q_1' = i_1$ e que $i_3' = i_1' + i_2'$, obtemos que as correntes satisfazem

$$\begin{cases} Ri_1' + Ri_2' + Ci_1 = 0 \\ Li_2' + Ri_1 + Ri_2 = 0 \end{cases}$$

que é um sistema de EDOs lineares de 1^a ordem para i_1 e i_2.

3) Considere dois sistemas massa-mola acoplados, um deles preso à uma parede, ambos submetidos a uma força externa nula.



Pela Lei de Hooke, a força de uma mola é proporcional à sua distorção. Observe que a distorção da primeira mola é y_1 uma vez que essa mola está fixada na parede, enquanto a distorção da segunda mola é $y_2 - y_1$ uma vez que essa mola está fixada no primeiro corpo. A Segunda Lei de Newton aplicada ao primeiro corpo nos dá

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1)$$

uma vez que a força da primeira mola no primeiro corpo é na direção oposta à distorção da mola e a força da segunda mola no primeiro corpo é na mesma direção da distorção da mola. A Segunda Lei de Newton aplicada ao segundo corpo nos dá

$$m_2 y_2'' = -k_2(y_2 - y_1)$$

uma vez que apenas a segunda mola atua nele, com força na direção oposta à distorção da mola. Segue que as posições satisfazem

$$\begin{cases} m_1 y_1'' &= &-(k_1 + k_2)y_1 &+ &k_2 y_2 \\ m_2 y_2'' &= &k_2 y_1 &- &k_2 y_2 \end{cases}$$

que é um sistema de EDOs lineares de 2^a ordem para y_1 e y_2.

Quando o sistema de EDO é linear e tem coeficientes constantes podemos eliminar as derivadas por meio da Transformada de Laplace, que transforma o sistema linear de EDOs num sistema linear algébrico

Sistema de EDOs lineares de coeficientes constantes para x, y, $\ldots$

$$\downarrow$$

Sistema Algébrico linear para $L[x]$, $L[y]$, $\ldots$

As transformadas $L[x]$, $L[y]$, $\ldots$ ainda estão acopladas no Sistema linear Algébrico, porém como não há mais derivadas, elas são facilmente descopladas resolvendo o sistema linear algebricamente. Uma vez obtidas as transformadas $L[x]$, $L[y]$, $\ldots$, podemos fazer a transformada inversa para obter as funções incógnitas x, y, $\ldots$.

Exemplo

Já vimos que num circuito RC submetido a uma força eletromotriz nula, a resistência consome toda a carga do capacitor, portanto a corrente do circuito tende a zero exponencialmente. O mesmo acontece com a corrente de um circuito RL submetido a força eletromotriz nula.

Veremos agora que acoplando esses circuitos esses correntes também tendem a zero, mas podem oscilar. A título de ilustração, vamos considerar o circuito acoplado do exemplo anterior com resistência $R = 1$, a indutância $L = 1$, a capacitância $C = 2$ e as correntes iniciais $i_1(0) = 1$ e $i_2(0) = 1$, iguais em ambos circuitos, obtendo o seguinte PVI

$$\begin{cases} i_1' + i_2' + 2i_1 = 0 \\ i_2' + i_1 + i_2 = 0 \\ i_1(0) = 1 \\ i_2(0) = 1 \end{cases}$$

Aplicando a transformada no PVI, obtemos

$$\begin{cases} L[i_1'] + L[i_2'] + 2L[i_1] = 0 \\ L[i_2'] + L[i_1] + L[i_2] = 0 \end{cases}$$

de modo que

$$\begin{cases} sL[i_1] - i_1(0) + sL[i_2] - i_2(0) + 2L[i_1] = 0 \\ sL[i_2] - i_2(0) + L[i_1] + L[i_2] = 0 \end{cases}$$

Usando as condições iniciais $i_1(0) = 1$ e $i_2(0) = 1$, obtemos que

$$\begin{cases} (s+2)L[i_1] & + & sL[i_2] & = & 2 \\ L[i_1] & + & (s+1)L[i_2] & = & 1 \end{cases}$$

que é um sistema algébrico linear para $L[i_1]$ e $L[i_2]$. Resolvendo esse sistema pela regra de Cramer, obtemos que

$$L[i_1] = \frac{\begin{vmatrix} 2 & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+2) & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}} = \frac{2s+2-s}{(s+2)(s+1)-s} = \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$L[i_2] = \frac{\begin{vmatrix} (s+2) & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s+2) & s \\ 1 & (s+1) \end{vmatrix}} = \frac{(s+2)-2}{(s+2)(s+1)-s} = \frac{s}{s^2+2s+2}$$

Assim $L[i_1]$ e $L[i_2]$ têm o mesmo denominador s^2+2s+2 cujas raízes são dadas por

$$\Delta = 4 - 8 = -4, \qquad \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Segue que o denominador se escreve como

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1,$$

de modo que

$$L[i_1] = \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$$
$$L[i_2] = \frac{s}{(s+1)^2+1}$$

Determinando $i_1(t)$ e $i_2(t)$ como nas seções anteriores, é facil obter

$$\begin{aligned} i_1(t) &= e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ i_2(t) &= e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\,\mathrm{sen}(t) \\ i_3(t) &= 2e^{-t}\cos(t) \end{aligned}$$

Isso mostra que dois circuitos que sozinhos não oscilam podem oscilar quando são acoplados, mesmo sem nenhuma força eletromotriz externa.

Podemos utilizar o mesmo procedimento para resolver um PVI para um sistema de EDOs lineares de 2ª-ordem ou ordem maior, homogêneo ou não, desde que o sistema tenha coeficientes constantes. A transformada de Laplace é, portanto, o procedimento mais prático para resolver explicitamente sistemas de EDOs lineares de coeficientes constantes.

Sistemas de 1^a ordem

Um estudo sistemático de sistemas de EDOs pode ser feito estudando os sistemas de 1^a ordem uma vez que todo sistema de EDOs pode ser transformado num sistema de 1^a ordem. Isso é bem ilustrado pela a Segunda Lei de Newton, que é de 2^a ordem na posição mas de 1^a ordem na velocidade. Por exemplo, considere um sistema massa-mola-amortecedor, sua a posição $y(t)$ é solução da EDO

$$my'' = -ky - by'$$

que é de 2^a ordem na posição. Introduzindo a velocidade $v(t)$ como nova função incógnita, temos que

$$v(t) = y'(t)$$

de modo que o par posição $y(t)$ e velocidade $v(t)$ é solução do sistema de EDOs

$$\begin{cases} mv' &= -ky - bv \\ y' &= v \end{cases}$$

que é um sistema de 1^a ordem na posição e velocidade.

Podemos usar essa mesma ideia para transformar qualquer EDO ou sistema de EDOs de ordem 2, 3 ou maior num sistema de EDOs de 1^a ordem com mais funções incógnitas: basta ir introduzindo as derivadas como novas funções incógnitas. Assim EDOs de todas as ordens e os sistemas de EDOs de todas as ordens podem ser reduzidos a sistemas de EDOs de 1^a ordem (com mais funções incógnitas).

Exemplos

1) Considere a EDO de 3^a ordem

$$az''' + bz'' + cz' + dz = 0$$

Introduzindo $y = z'$ obtemos

$$ay'' + by' + cy + dz = 0$$

introduzindo $x = y'$ obtemos

$$ax' + bx + cy + dz = 0$$

Segue que EDO é equivalente ao sistema de 1^a ordem com três incógnitas

$$\begin{cases} ax' + bx + cy + dz &= 0 \\ y' &= x \\ z' &= y \end{cases}$$

2) O movimento de duas massa-molas acopladas é dado por um sistema de EDOs de 2^a ordem com duas incógnitas

$$\begin{cases} m_1 v_1' &= -(k_1+k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 v_2' &= k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

Introduzindo as velocidades $v_1 = y_1'$ e $v_2 = y_2'$ obtemos o sistema de 1^a ordem com quatro incógnitas

$$\begin{cases} m_1 v_1' &= -(k_1+k_2)y_1 + k_2 y_2 \\ m_2 v_2' &= k_2 y_1 - k_2 y_2 \\ y_1' &= v_1 \\ y_2' &= v_2 \end{cases}$$

Todos os exemplos anteriores são sistemas de 1^a ordem lineares e de coeficientes constantes. Eles podem ser escritos na forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

com mais incógnitas e mais equações lineares, caso haja necessidade. No caso de sistemas com coeficientes constantes podemos falar de raízes características do sistema da seguinte maneira. Escrevendo o sistema com o operador de derivação D

$$\begin{cases} Dx = ax + by \\ Dy = cx + dy \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} (a-D)x + by = 0 \\ cx + (d-D)y = 0 \end{cases}$$

Podemos enxergar esse último sistema como um sistema linear onde D aparece nos coeficientes. Imitando o método de Cramer, podemos isolar x aplicando $(d-D)$ na primeira equação, aplicando multiplicação por $-b$ na segunda equação e somando as equações

$$\begin{array}{rcrcl} (d-D)(a-D)x & + & (d-D)by & = & 0 \\ -bcx & + & -b(d-D)y & = & 0 \\ \hline ((d-D)(a-D)-bc)x & & & = & 0 \end{array}$$

Assim, obtemos que x satisfaz a EDO aumentada

$$((d-D)(a-D)-bc)x = 0$$

cujo polinômio característico

$$p(D) = ((d-D)(a-D)-bc)x = \begin{vmatrix} (a-D) & b \\ c & (d-D) \end{vmatrix}$$

é dado pelo determinante dos coeficientes do último sistema. Analogamente, prova-se que y satisfaz a mesma EDO aumentada. Segue que as raízes características da EDO aumentada fornecem as soluções do sistema: dizemos que essas raízes são as *raízes características do sistema.* Trocando D por uma variável λ no polinômio característico $p(D)$ da equação aumentada, vemos que ele é o conhecido

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix}$$

polinômio característico [1] da matriz dos coeficientes $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$: suas raízes são os *autovalores* da matriz. Portanto as raízes características de um sistema de 1^a ordem são os autovalores da matriz dos coeficientes.

Exemplo

O movimento de um sistema massa-mola sem amortecimento e com $m = k$ é dado pela EDO de 2^a ordem

$$y'' = -y$$

Introduzindo a velocidade $x(t) = y'(t)$ obtemos o sistema de 1^a ordem

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

[1] Para quem já viu esse conceito em IAL.

cuja matriz dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seus autovalores são as raízes do polinômio característico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

dadas por $\pm i$ que são, portanto, as raízes características do sistema de 1^a ordem. Observe que essas são as raízes características da EDO original $y'' = -y$.

A mesma ideia funciona para sistemas com mais funções incógnitas:

> raízes características de qualquer sistema linear de 1^a ordem
> são os autovalores da matriz dos coeficientes

Por exemplo, para encontrar as correntes numa rede elétrica de circuitos acoplados obtemos o sistema de EDOs de 1^a ordem que modela essa rede elétrica e encontramos os autovalores da matriz dos coeficientes desse sistema. Esse é um dos motivos porque autovalores são importantes nas aplicações.

Exponencial de matrizes

Podemos escrever um sistema de coeficientes constantes na forma matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Colocando

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

o sistema fica na forma

$$X'(t) = AX(t),$$

Exemplo

O sistema linear de 1^a ordem para a posição e a velocidade do massa-mola com $k = m$ é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sabemos que a solução do PVI linear de 1^a ordem

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = c \end{cases}$$

onde a é constante, é dada pela exponencial

$$x(t) = e^{at}c$$

Isso sugere que a solução do PVI para o sistema de EDOs lineares de 1^a ordem

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = C \end{cases}$$

onde $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ é matriz constante, seja dada pela exponencial de matrizes

$$X(t) = e^{At}C$$

onde a condição inicial é $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = C$. O que seria a exponencial de uma matriz e^{At}? Nada mais natural que definir isso usando a série de potências da exponencial e^x trocando x por At

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

onde $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ..., são as potências da matriz A e I é a matriz identidade $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. É imediato que para $t = 0$ temos $e^0 = I$ e é possível provar que

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}$$

e concluir que $X(t) = e^{At}C$ satisfaz $X(0) = C$ e $X'(t) = AX(t)$, como queríamos. Portanto, a exponencial de matrizes fornece a solução de um sistema linear de EDOs de 1^a ordem.

Exemplo

Considere o sistema linear de 1^a ordem para a posição e a velocidade do massa-mola

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para obter sua solução com a exponencial da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

primeiro calculamos as potências de A. Na verdade, basta calcular

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

de onde segue que

$$\begin{array}{llll} A^0 = I & A^2 = -I & A^4 = A^2A^2 = I & \dots \\ A^1 = A & A^3 = A^2A = -A & A^5 = A^4A = A & \dots \end{array}$$

Portanto e^{tA} é

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-t^2/2! & 0\\ 0 & -t^2/2!\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t^4/4! & 0\\ 0 & t^4/4!\end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & t^3/3!\\ -t^3/3! & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & -t^5/5!\\ t^5/5! & 0\end{pmatrix} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix}\cos(t) & -\operatorname{sen}(t)\\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$$

e a solução do sistema com condição inicial $C = \binom{c_1}{c_2}$ é dada por

$$e^{tA}C = \begin{pmatrix}\cos(t) & -\operatorname{sen}(t)\\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\cos(t) - c_2\operatorname{sen}(t)\\ c_1\operatorname{sen}(t) + c_2\cos(t)\end{pmatrix}$$

Observe que a posição é a segunda linha $y(t) = c_1\operatorname{sen}(t) + c_2\cos(t)$ e a velocidade é a primeira linha $x(t) = y'(t)$.

A mesma ideia funciona para sistemas com mais funções incógnitas:

A solução de qualquer sistema linear de 1^a ordem
$X'(t) = AX(t)$ com condição inicial $X(0) = C$
é dada pela exponencial de matrizes $e^{tA}C$

A exponencial de matrizes é surpreendente e é uma ferramenta teórica importante. Porém, ela tem pouca importância prática uma vez que, em geral, é difícil calcular as potências de uma matriz com muitas entradas.

APÊNDICE A

APÊNDICE

A.1 SEQUÊNCIA MONÓTONAS

Nesta seção, demonstramos a seguinte proposição.

Proposição A.1

Seja a_n uma sequência monótona. Então

(A) Se a_n é limitada, então $a_n \to a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e

(B) Se a_n não é limitada, então $a_n \to \infty$ ou $a_n \to -\infty$.

Prova:

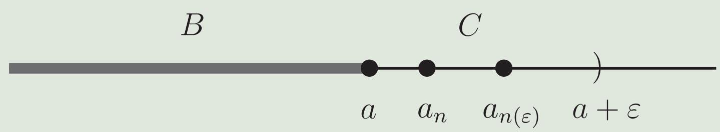
Para o item A, vamos supor que a_n é não-crescente. Definimos o conjunto

$$C = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

e o conjunto

$$B = \{b : b \leq a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

ilustrados pela figura abaixo.



Temos que C é não-vazio e, como a_n é limitada, temos que B também é não-vazio. Além disso, por definição, temos que $B \leq C$. Logo, pela completude de $\mathbb{R}$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $B \leq a \leq C$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $a+\varepsilon$ não pertence a B. Logo, existe $n(\varepsilon)$ tal que

$$a_{n(\varepsilon)} < a+\varepsilon.$$

Como $a \leq C$ e como a_n é não-crescente, temos então que

$$n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow a \leq a_n \leq a_{n(\varepsilon)} < a+\varepsilon.$$

Portanto

$$n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow 0 \leq a_n - a < \varepsilon,$$

mostrando que $a_n \to a$. O caso em que a_n é não-decrescente pode ser reduzido ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício.

Para o item B, vamos supor que a_n é não-decrescente. Como a_n não é limitada, para todo $R > 0$, existe um m tal que $R < a_m$. Portanto, definindo $n(R) = m$, segue que

$$n \geq n(R) \qquad \Longrightarrow \qquad R < a_m \leq a_n$$

mostrando que $a_n \to \infty$. O caso em que a_n é não-crescente pode ser reduzido ao caso demonstrado acima, o que é deixado como exercício.

■

A.2 INTEGRAL IMPRÓPRIA

Temos que a *integral imprópria* de f de a até ∞ é dada por

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx}$$

e pode ser interpretada como a área da região ilimitada ilustrada pela Figura ??. Se a integral indefinida de f é dada por

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

segue que

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[F(x)]_a^t = [F(x)]_a^\infty}$$

Para funções positivas, esse limite sempre existe, podendo ser finito ou infinito.

Exemplos

1) Temos que

$$\int_0^\infty \cos(x)\,dx$$

não existe, uma vez que

$$\int \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)+C$$

e que o limite

$$[\operatorname{sen}(x)]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}(\operatorname{sen}(t)-\operatorname{sen}(0)) = \lim_{t\to\infty}\operatorname{sen}(t)$$

não existe.

2) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \infty,$$

uma vez que

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

e que o limite

$$\big[\log|x|\big]_1^\infty = \lim_{t\to\infty}\big(\log(t) - \log(1)\big) = \lim_{t\to\infty}\log(t) = \infty.$$

3) Temos que

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1,$$

uma vez que

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

e que o limite

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

As regras de integração permanecem válidas para as integrais impróprias, desde que os limites existam.

Proposição A.2

Temos que

$$\boxed{\int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx = \big[f(x)g(x)\big]_a^\infty - \int_a^\infty g'(x)f(x)\,dx}$$

e também que

$$\boxed{\int_a^\infty f(bx)\,dx = \frac{1}{b}\int_{ab}^\infty f(x)\,dx}$$

para todo $b > 0$.

Prova:

Temos que
$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g'(x)f(x)\,dx$$
e que
$$\int_a^t f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^t - \int_a^t g'(x)f(x)\,dx.$$
Fazendo $t \to \infty$, segue que
$$\int_a^\infty f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^\infty - \int_a^\infty g'(x)f(x)\,dx.$$
Por substituição, fazendo $t = bx$, temos que $dt = b\,dx$ e que
$$\int f(bx)\,dx = \frac{1}{b}\int f(t)\,dt.$$
Temos então que
$$\int_a^\infty f(bx)\,dx = \frac{1}{b}\int_{ab}^\infty f(t)\,dt,$$
uma vez que $t = ab$, quando $x = a$, e que $t \to \infty$, quando $x \to \infty$. Como
$$\frac{1}{b}\int_{ab}^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{b}\int_{ab}^\infty f(x)\,dx,$$
segue que
$$\int_a^\infty f(bx)\,dx = \frac{1}{b}\int_{ab}^\infty f(x)\,dx.$$
■

A.3 EXPONENCIAL COMPLEXA

Queremos definir a exponecial *complexa* $e^{(a+ib)x}$, onde $a, b, x \in \mathbb{R}$. Vamos primeiro considerar o caso particular puramanente imaginário. A partir da série de potências de e^x, dada por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

podemos tentar obter a série de potências de e^{ix}, trocando x por ix, de modo que

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots$$

Agrupando as potências pares e as potências ímpares e colocando i em evidência nas potências ímpares, obtemos que

$$e^{ix} = \left(1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x + \frac{i^2x^3}{3!} + \frac{i^4x^5}{5!} + \cdots\right)$$

de modo que

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

Lembrando que as séries de potências do cosseno e do seno são dadas por

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

e por

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

segue que

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)}$$

Podemos então definir a exponencial complexa por

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx}$$

de modo que

$$\boxed{e^{(a+ib)x} = e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\,\mathrm{sen}(bx)}$$

Exemplos

1) Temos que

$$
\begin{aligned}
e^{(2+0i)x} &= e^{2x}\cos(0x) + ie^{2x}\operatorname{sen}(0x) \\
&= e^{2x}
\end{aligned}
$$

2) Temos que

$$
\begin{aligned}
e^{(0+3i)x} &= e^{0x}\cos(3x) + ie^{0x}\operatorname{sen}(3x) \\
&= \cos(3x) + i\operatorname{sen}(3x)
\end{aligned}
$$

3) Temos que

$$
\begin{aligned}
e^{(2+3i)x} &= e^{2x}\cos(3x) + ie^{2x}\operatorname{sen}(3x) \\
&= e^{2x}e^{3ix}
\end{aligned}
$$

Desejamos mostrar que, quando $a+ib$ é uma raiz característica de uma dada homogênea, a exponencial $e^{(a+ib)x}$ é uma solução complexa dessa homogênea e que sua parte real e sua parte imaginária são soluções reais dessa mesma homogênea.

Funções com valores complexos

Uma *função com valores complexos* é uma função da forma

$$y(x) = f(x) + ig(x)$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e f e g são funções com valores reais. A derivada dessa função com valores complexos é definida como

$$y'(x) = f'(x) + ig'(x)$$

Exemplo

Temos que

$$\begin{aligned}\left(e^{ix}\right)' &= (\cos(x) + i\,\text{sen}(x))' \\ &= -\,\text{sen}(x) + i\cos(x) \\ &= i(\cos(x) + i\,\text{sen}(x)) \\ &= ie^{ix}\end{aligned}$$

O resultado seguinte mostra que a regra da derivada do produto também é válida para funções a valores complexos.

Proposição A.3

Se $y(x)$ e $z(x)$ são funções com valores complexos e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

(1) $(y(x)z(x))' = y'(x)z(x) + z'(x)y(x)$

(2) $(\alpha y(x))' = \alpha y'(x)$

Prova:

(1) Por comodidade, vamos suprimir a variável independente da notação. Considere

$$y = f + ig, \qquad z = u + iv$$

de modo que

$$y' = f' + ig', \qquad z' = u' + iv'$$

Temos então que

$$yz = fu - gv + i(fv + gu)$$

de modo que

$$(yz)' = f'u + u'f - (g'v + v'g) + i(f'v + v'f + g'u + u'g)$$

Por outro lado, temos que

$$y'z = f'u - g'v + i(f'v + g'u)$$

e que

$$yz' = fu' - gv' + i(fv' + gu')$$

Somando essas duas equações, obtemos que

$$y'z + yz' = (yz)'$$

(2) Utilizando o item anterior e que a derivada de constante é nula, obtemos que

$$(\alpha y(x))' = (\alpha)' y(x) + \alpha y'(x) = \alpha y'(x)$$

■

Exemplo

Temos que

$$\begin{aligned} \left(e^{ix}\right)'' &= \left(ie^{ix}\right)' \\ &= i\left(e^{ix}\right)' \\ &= i(ie^{ix}) \\ &= -e^{ix} \end{aligned}$$

de modo que $y(x) = e^{ix}$ é uma solução complexa da EDO

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Vamos agora mostrar que a regra da derivada da exponencial também é válida no caso complexo.

Proposição A.4

Temos que

$$\boxed{\left(e^{(a+ib)x}\right)' = (a+ib)e^{(a+ib)x}}$$

Prova:

Uma vez que

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx}$$

pela regra da derivada do produto, obtemos que

$$\left(e^{(a+ib)x}\right)' = \left(e^{ax}\right)' e^{ibx} + \left(e^{ibx}\right)' e^{ax}$$

Por outro lado, temos que

$$\left(e^{ax}\right)' = ae^{ax}$$

e que

$$\begin{aligned} \left(e^{ibx}\right)' &= (\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx))' \\ &= -b \operatorname{sen}(bx) + ib \cos(bx) \\ &= ib(\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)) \\ &= ibe^{ibx} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \left(e^{(a+ib)x}\right)' &= \left(ae^{ax}\right) e^{ibx} + \left(ibe^{ibx}\right) e^{ax} \\ &= (a+ib)e^{ax}e^{ibx} \end{aligned}$$

$$= \quad (a+ib)e^{(a+ib)x}$$

■

Finalmente, vamos mostrar que a parte real e a parte imaginária de soluções com valores complexos são soluções com valores reais.

Proposição A.5

Se

$$\boxed{y(x) = f(x) + ig(x)}$$

é uma solução da homogênea

$$\boxed{a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0}$$

onde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, então sua parte real e sua parte imaginária

$$\boxed{f(x) \quad \text{e} \quad g(x)}$$

também são soluções dessa homogênea.

Prova:

Temos que

$$\begin{array}{rcrcr} y(x) & = & f(x) & + & ig(x) \\ y'(x) & = & f'(x) & + & ig'(x) \\ y''(x) & = & f''(x) & + & ig''(x) \end{array}$$

Multiplicando a primeira linha por a_0, a segunda por a_1 e a terceira por a_2, obtemos que

$$\begin{array}{rcrcr} a_0 y(x) & = & a_0 f(x) & + & i a_0 g(x) \\ a_1 y'(x) & = & a_1 f'(x) & + & i a_1 g'(x) \\ a_2 y''(x) & = & a_2 f''(x) & + & i a_2 g''(x) \end{array}$$

Somando essas equações e usando que $y(x)$ é solução da homogênea, obtemos que

$$0 = \begin{pmatrix} a_0 f(x) \\ +a_1 f'(x) \\ +a_2 f''(x) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} a_0 g(x) \\ +a_1 g'(x) \\ +a_2 g''(x) \end{pmatrix}$$

Comos a parte real e a parte imaginária tem que ser nulas, segue $f(x)$ e $g(x)$ também são soluções dessa homogênea. ■

A.4 Continuidade de séries de potências

O Teorema de Abel afirma que uma série de potências é contínua em todos os pontos onde ela está definida. Nessa seção, vamos demonstrar uma versão mais fraca desse teorema. Para isso previsamos do seguinte lema.

Lema A.6

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 < \infty$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge absolutamente e

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)$$

Prova:

Como $|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, por comparação, segue que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge absolutamente. Dado $x \in \mathbb{R}$, considere a seguinte desigualdade

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x + b_n)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right) x^2 + \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right) x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$$

Denotando

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2, \qquad b = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n, \qquad c = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$$

temos que $ax^2 + bx + c \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue então que $b^2 \leq 4ac$, de modo que

$$4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n\right)^2 \leq 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2\right)$$

O resultado segue cancelando 4 em ambos os lados da desigualdade. ■

Podemos então provar o seguinte resultado.

Proposição A.7

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ possui raio de convergência $R = 1$ e $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e $\sum_{n=0}^{\infty}(s - s_n)^2$ também converge, então

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Prova:

Como $s_n \to s$, temos que s_n é limitada e portanto $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ converge para $|x| < 1$. Logo

$$x \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^n$$

de modo que

$$\begin{aligned} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - s_{n-1})x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s x^n &= (1-x)s\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= (1-x)s\frac{1}{1-x} \\ &= s \end{aligned}$$

de modo que

$$s - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_n) x^n$$

Segue então que

$$\begin{aligned}
\left(s - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 &= (1-x)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (s-s_n) x^n\right)^2 \\
&\leq (1-x)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (s-s_n)^2\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right) \\
&= (1-x)^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (s-s_n)^2\right) \frac{1}{1-x^2} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (s-s_n)^2\right) \frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}$$

onde aplicamos o lema anterior para obter a desigualdade acima. O resultado segue então por sanduíche, uma vez que

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{1+x} = 0$$

■

O resultado seguinte é consequência direta da proposição anterior.

Corolário A.8

Se $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ possui raio de convergência $R = 1$, com a_n decrescente e tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$, então

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

Prova:

Temos que a série alternada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge e que $(s - s_n)^2 \leq a_n^2$.

■

Exemplos

1) A seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n$$

possui raio $R = 1$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$$

Segue então que

$$\lim_{x\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{x\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}x^n=\lim_{x\uparrow 1}\log(1+x)=\log(2)$$

Pela unicidade dos limites, segue que

$$\log(2)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

2) A seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

possui raio $R = 1$ e

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}<\infty$$

Segue então que

$$\lim_{x\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{x\uparrow 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\lim_{x\uparrow 1}\operatorname{atg}(x)=\operatorname{atg}(1)=\frac{\pi}{4}$$

Pela unicidade dos limites, segue que

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

de modo que

$$\pi=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

A.5 Derivada de séries de potências

Nessa seção, vamos completar a prova de que a derivada de uma série de potências é a série das derivadas. Para isso, precisamos do seguinte resultado.

Lema A.9

Se $|s|,|t|\le r$, temos que

$$|s^m-t^m|\le|s-t|nr^{m-1}$$

Prova:

É fácil verificar que

$$s^m-t^m=(s-t)(s^{m-1}+s^{m-2}t+\cdots+st^{m-2}+t^{m-1})$$

Agora, utilizando a desigualdade triangular, temos que

$$|s^m-t^m| \quad = \quad |s-t||s^{m-1}+s^{m-2}t+\cdots+st^{m-2}+t^{m-1}|$$

$$\leq \quad |s-t|(|s^{m-1}|+|s^{m-2}t|+\cdots+|st^{m-2}|+|t^{m-1}|)$$

Para cada parcela no lado direito, temos que

$$\begin{aligned} |s^{m-k}t^{k-1}| &= |s|^{m-k}|t|^{k-1} \\ &\leq r^{m-k}r^{k-1} \\ &= r^{m-1} \end{aligned}$$

uma vez que $|s|, |t| \leq r$. Segue então que

$$\begin{aligned} |s^m - t^m| &\leq |s-t|(|s^{m-1}|+|s^{m-2}t|+\cdots+|st^{m-2}|+|t^{m-1}|) \\ &\leq |s-t|(r^{m-1}+r^{m-1}+\cdots+r^{m-1}+r^{m-1}) \\ &= |s-t|mr^{m-1} \end{aligned}$$

como desejavamos. ■

Podemos então provar a seguinte proposição.

Proposição A.10

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio $R > 0$. Se $|c_n| < |h|$, então

$$\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x+c_n)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

para todo $x \in (-R, R)$.

Prova:

Temos que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x+c_n)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n((x+c_n)^{n-1} - x^{n-1})\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n \left|(x+c_n)^{n-1} - x^{n-1}\right| \end{aligned}$$

Como $x \in (-R, R)$, temos que $|x| < r$, para algum $r < R$. Para h suficientemente pequeno, temos que $|x + c_n| < r$, uma vez que $|c_n| < |h|$. Usando o lema, com $s = x + c_n$, com $t = x$ e com $m = n - 1$, segue que

$$\begin{aligned} \left|(x+c_n)^{n-1} - x^{n-1}\right| &\leq |(x+c_n) - x|(n-1)r^{n-2} \\ &= |c_n|(n-1)r^{n-2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x+c_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n |c_n| (n-1) r^{n-2}$$

Usando que $|c_n| < |h|$, segue que

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x+c_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n |h| (n-1) r^{n-2} \\ &= |h| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n (n-1) r^{n-2} \end{aligned}$$

Logo

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x+c_n)^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right| \leq |h| L$$

onde $L = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n (n-1) r^{n-2}$ não depende de h. O resultado segue então por sanduíche. ■

A.6 Soluções por séries de potências

Nessa seção, vamos mostrar que todo PVI linear cujos coeficientes são séries de potências tem solução por séries de potências. Primeiro precisamos mostrar que o produto de duas séries de potências é uma série de potências.

Proposição A.11

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ duas séries que convergem absolutamente. Então

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Prova:

Vamos primeiro mostrar que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

onde

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}||b_k|$$

De fato, consideramos a seguinte desigualdade

$$\left(\sum_{n=0}^{[m/2]} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{[m/2]} |b_n|\right) \leq \sum_{n=0}^{m} d_n \leq \left(\sum_{n=0}^{m} |a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m} |b_n|\right),$$

onde $[x]$ denota a parte inteira de x. Essa desigualdade pode ser visualizada através da seguite matriz. O primeiro termo da desigualdade é a soma das entradas da submatriz $[m/2]$ por $[m/2]$. O termo intermediário é a soma das entradas do triângulo de vértices $|a_0||b_0|$, $|a_0||b_m|$ e $|a_m||b_0|$. Já o terceiro termo da desigualdade é a soma de todas as entradas da matriz m por m.

$$\begin{pmatrix} |a_0||b_0| & \cdots & |a_0||b_{[m/2]}| & \cdots & |a_0||b_m| \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |a_{[m/2]}||b_0| & \cdots & |a_{[m/2]}||b_{[m/2]}| & \cdots & |a_{[m/2]}||b_m| \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ |a_m||b_0| & \cdots & |a_m||b_{[m/2]}| & \cdots & |a_m||b_m| \end{pmatrix}$$

Tomando o limite de m tendendo para ∞ na desiguladade acima e utilizando a regra do limite do produto e a regra do sanduíche, obtemos o resultado desejado, uma vez que $[m/2]$ também tende para a ∞.

Considerando a diferença entre a soma dos elementos da matriz m por m e o triângulo, obtemos que

$$\left(\sum_{n=0}^{m}|a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m}|b_n|\right)-\sum_{n=0}^{m}d_n=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=m-n+1}^{m}|a_n||b_k|,$$

Agora vamos considerar a situação sem os valores absolutos.

$$\begin{pmatrix} a_0b_0 & \cdots & a_0b_{[m/2]} & \cdots & a_0b_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{[m/2]}b_0 & \cdots & a_{[m/2]}b_{[m/2]} & \cdots & a_{[m/2]}b_m \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_mb_0 & \cdots & a_mb_{[m/2]} & \cdots & a_mb_m \end{pmatrix}$$

Da mesma forma que no caso acima, temos que

$$\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)-\sum_{n=0}^{m}c_n=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=m-n+1}^{m}a_nb_k,$$

Pela desiguadade triangular, temos que

$$\left|\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=m-n+1}^{m}a_nb_k\right|\leq\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=m-n+1}^{m}|a_n||b_k|$$

de modo que

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{m}a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{m}b_n\right)-\sum_{n=0}^{m}c_n\right|\leq\left(\sum_{n=0}^{m}|a_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{m}|b_n|\right)-\sum_{n=0}^{m}d_n$$

O resultado segue então por sanduíche. ■

Como consequência da proposição acima temos que o produto de duas séries de potências é uma série de potências.

Corolário A.12

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ duas séries que convergem absolutamente. Então

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Prova:

Segue da proposição anterior e do fato de que

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^{n-k} b_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) x^n$$

■

Agora considere o seguinte PVI linear de segunda ordem

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = 0 \\ \\ y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Proposição A.13

Se $p(x)$ e $q(x)$ são séries de potências convergindo absolutamente em $x = 1$, então o PVI possui solução por série de potências que converge pelo menos para $|x| < 1$.

Prova:

Escrevendo

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

temos, por hipótese, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n| < \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |q_n| < \infty$$

de modo que $|p_n|$ e $|q_n|$ tendem para 0. Segue que essas sequências são limitadas, de modo que existe $M > 0$ tal que $|p_n|, |q_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$. Considere

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Pela regra do produto de séries de potências, segue que

$$\begin{aligned} y(x)p(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k p_{n-k}\right) x^n \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} y'(x)q(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1) q_{n-k}\right) x^n \end{aligned}$$

Uma vez que

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n$$

para que $y(x)$ seja solução do PVI, somando as equações acimas, obtemos que

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1) q_{n-k} + a_k p_{n-k}\right) x^n$$

Segue então a seguinte equação de recorrência

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) = -\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1)q_{n-k} + a_k p_{n-k}$$

para todo $n \geq 0$. Essa equação determina os coeficientes a_n, uma vez que

$$a_0 = y(0) = y_0 \qquad \text{e} \qquad a_1 = y'(0) = y_1$$

onde utilizamos as condições iniciais. Resta mostrar que a série de $y(x)$ converge para $|x| < 1$. Vamos definir uma sequência $A_n \geq 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n x^n| < \infty$$

para $|x| < 1$. Definimos então

$$A_0 = |a_0| \qquad \text{e} \qquad A_1 = |a_1|$$

e o próximos termos através da sequinte relação de recorrência

$$A_{n+2}(n+2)(n+1) = M\left(A_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(k+1) + A_k\right)$$

Vamos mostrar por indução que $|a_n| \leq A_n$, para todo $n \geq 0$. Supondo que $|a_k| \leq A_k$, para todo $k = 0, 1, \ldots, n+1$, tomamos o valor absoluto em ambos os lados da equação da recorrência, de modo que

$$\begin{aligned}
|a_{n+2}|(n+2)(n+1) &= \left|\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(k+1)q_{n-k} + a_k p_{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} |a_{k+1}|(k+1)|q_{n-k}| + |a_k||p_{n-k}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(k+1)M + A_k M \\
&\leq A_{n+2}(n+2)(n+1)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade triangular e que $|p_n|, |q_n| \leq M$ para todo $n \geq 0$. Cancelando o fator $(n+2)(n+1)$ no primeiro e último termo das desigualdades acima, obtemos que $|a_{n+2}| \leq A_{n+2}$, completando a indução. Segue então que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n x^n|$$

restando mostrar que o segundo termo dessa desigualdade é finito, para $|x| < 1$. Para isso, basta mostrarmos que o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ é igual a 1. Pelo teste da razão, isso é equivalente a mostrar que

$$\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = 1$$

Pela equação de recorrência de A_n, temos que

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(n+1)n &= M\left(A_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_{k+1}(k+1) + A_k\right) \\
&= M\left(A_n + A_n n + A_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} A_{k+1}(k+1) + A_k\right) \\
&= MA_n(n+1) + M\left(A_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} A_{k+1}(k+1) + A_k\right) \\
&= MA_n(n+1) + A_n n(n-1) \\
&= A_n(M(n+1) + n(n-1))
\end{aligned}$$

Segue então que

$$\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim \frac{M}{n} + \frac{n-1}{n+1} = 1$$

como queríamos. ■

Como consequência da proposição acima, obtemos o resultado desejado dessa seção.

Proposição A.14

Se $p(x)$ e $q(x)$ são séries de potências, então todo PVI possui uma solução $y(x)$ dada por uma série de potências que converge pelo menos em $(-R,R)$, onde R é o menor dos raios de converência de $p(x)$ e $q(x)$.

Prova:

Considere $0 < r < R$ arbitrário. Temos que $y(x)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y''(x) + q(x)y'(x) + p(x)y(x) = 0 \\ \\ y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1 \end{cases}$$

se e só se $z(t) = y(rt)$ é solução do PVI

$$\begin{cases} z''(t) + rq(rt)z'(t) + r^2 p(rt)z(t) = 0 \\ \\ z(0) = y_0, \qquad z'(0) = y_1 \end{cases}$$

onde $rq(rt)$ e $r^2 p(rt)$ são séries de potências que convergem absolutamente em $t = 1$. Pela proposição anterior, $z(t)$ é uma série de potências que converge pelo menos para $|t| < 1$. Portanto $y(x) = z(x/r)$ é uma série de potências que converge pelo menos para $|x/r| < 1$. Como $0 < r < R$ é arbitrário, segue que $y(x)$ é uma série de potências que converge pelo menos para $|x| < R$. ■

A.7 Regra de Cramer

Nessa seção, vamos apresentar a *Regra de Cramer*, que é um método para resolver sistemas lineares. Primeiro consideramos o caso dois por dois.

Proposição A.15

Se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

então o sistema linear

$$\begin{cases} ax & + & by & = & e \\ cx & + & dy & = & f \end{cases}$$

possui uma única solução dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Prova:

Para obtermos x, primeiro multiplicamos a primeira linha do sistema por d e a segunda linha do sistema por b, de modo que

$$\begin{cases} adx & + & bdy & = & ed \\ bcx & + & bdy & = & fb \end{cases}$$

Depois, subtraindo a primeira linha menos a segunda, obtemos que

$$(ad - bc)x = ed - fb$$

de modo que

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Para obtermos y, primeiro multiplicamos a primeira linha do sistema por c e a segunda linha do sistema por a, de modo que

$$\begin{cases} acx & + & bcy & = & ce \\ acx & + & ady & = & af \end{cases}$$

Depois, subtraindo a segunda linha menos a primeira, obtemos que

$$(ad - bc)y = af - ce$$

de modo que

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

■

A seguir apresentamos o caso geral, cuja demonstração pode ser obtida de modo semelhante ao caso dois por dois, através de indução e da regra de Laplace para determinantes.

Proposição A.16

Se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

então o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \cdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

possui uma única solução dada por

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad \ldots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

A.8 EDO LINEAR DE ORDEM SUPERIOR

A teoria de EDOs de ordem superior é completamente semelhante à teoria de EDOs de 2ª ordem. Uma EDO linear de ordem n pode ser colocada na forma

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

onde os $a_k(x)$ e $f(x)$ são funções contínuas de x. Sua equação *homôgenea associada* é dada por

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

Dividindo por $a_n(x)$, as equações acima podem ser colocadas na forma

$$\boxed{\begin{aligned} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) &= g(x) \\ y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) &= 0 \end{aligned}}$$

onde

$$\begin{aligned} p_k(x) &= \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \\ g(x) &= \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{aligned}$$

são funções contínuas, para todo x tal que $a_n(x) \neq 0$.

SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA

Vamos mostrar que, assim como no caso de uma EDO linear homogênea de 2ª ordem, a solução geral de uma EDO linear homogênea de ordem superior é dada pela combinação linear

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, sempre que $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ forem soluções fundamentais. No caso de EDOs de 2ª ordem, temos que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais quando elas não são proporcionais, o que é o mesmo que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

implicar que $c_1 = c_2 = 0$. No caso de EDOs de ordem superior, as soluções são fundamentais quando elas são *linearmente independentes*, ou seja, quando

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) = 0$$

implicar que todos os c_k são todos nulos.

No caso de EDOs de 2ª ordem, podemos utilizar o Wronskiano

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

para determinar se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções fundamentais. No caso de EDOs de ordem superior, também podemos utilizar o Wronskiano

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

para determinar se $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ são soluções fundamentais.

A proposição a seguir generaliza um resultado do caso de EDOs de 2ª ordem e estabelece um fato de fundamental importância sobre o Wronskiano.

Proposição A.17: Fórmula de Abel

Sejam $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluções da EDO

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$$

Então

$$\boxed{W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = ce^{-P_{n-1}(x)}}$$

onde $c \in \mathbb{R}$ e

$$\int p_{n-1}(x)\,dx = P_{n-1}(x) + C$$

Prova:

Por comodidade, vamos denotar o Wronskiano $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$ apenas por $W(x)$. Basta então provarmos que o Wronskianos satisfaz a seguinte EDO

$$W'(x) + p_{n-1}W(x) = 0$$

Vamos então calcular a derivada do Wronskiano

$$W'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{W(x+h) - W(x)}{h}$$

Primeiro vamos considerar o numerador do quociente de Newton, é dado por

$$W(x+h) - W(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x+h) & y_2(x+h) & \cdots & y_n(x+h) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vamos reescrever essa diferença como a seguinte soma telescópica

$W(x+h) - W(x) =$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x+h) & y_2(x+h) & \cdots & y_n(x+h) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(x+h) & y_2(x+h) & \cdots & y_n(x+h) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Para analisar essas diferenças vamos utilizar o fato de que se dois determinates diferem apenas numa única linha, sua diferença é o determinante onde as linha coincidentes são repetidas e na linha que difere aparece a diferença das linhas originais. Temos então que

$$W(x+h)-W(x)=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x+h)-y_1(x) & y_2(x+h)-y_2(x) & \cdots & y_n(x+h)-y_n(x) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x+h)-y_1'(x) & y_2'(x+h)-y_2'(x) & \cdots & y_n'(x+h)-y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix}+$$

$$\vdots$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(x+h) & y_2(x+h) & \cdots & y_n(x+h) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x+h)-y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x+h)-y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h)-\cdots\ y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Voltando ao quociente de Newton, devemos divir por h o numerador $W(x+h)-W(x)$. Para isso vamos utilizar o fato de que, quando dividimos por h um determinante, o resultado é o mesmo determinante com uma das linhas divididas por h. Temos então que

$$\frac{W(x+h)-W(x)}{h} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{y_1(x+h)-y_1(x)}{h} & \frac{y_2(x+h)-y_2(x)}{h} & \cdots & \frac{y_n(x+h)-y_n(x)}{h} \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \frac{y_1'(x+h)-y_1'(x)}{h} & \frac{y_2'(x+h)-y_2'(x)}{h} & \cdots & \frac{y_n'(x+h)-y_n'(x)}{h} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x+h) & y_2^{(n-2)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x+h) \\ y_1^{(n-1)}(x+h) & y_2^{(n-1)}(x+h) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x+h) \end{vmatrix} +$$

$$\vdots$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1(x+h) & y_2(x+h) & \cdots & y_n(x+h) \\ y_1'(x+h) & y_2'(x+h) & \cdots & y_n'(x+h) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ \frac{y_1^{(n-1)}(x+h)-y_1^{(n-1)}(x)}{h} & \frac{y_2^{(n-1)}(x+h)-y_1^{(n-1)}(x)}{h} & \cdots & \frac{y_n^{(n-1)}(x+h)-y_n^{(n-1)}(x)}{h} \end{vmatrix}$$

A derivada é então obtida tomando-se o limite com h tendendo a zero, de modo que

$$W'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{W(x+h)-W(x)}{h} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

onde suprimimos as variável independente x por comodidade. Como todos os primeiros determinates possuem linhas repetidas, eles são nulos, sobrando apenas o último determinante, de modo que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Como $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ são soluções da EDO, segue que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} - \cdots - p_1 y_1' - p_0 y_1 & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} - \cdots - p_1 y_n' - p_0 y_n \end{vmatrix}$$

Segue então que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-2}y_1^{(n-2)} - \cdots - p_1 y_1' - p_0 y_1 & \cdots & -p_{n-2}y_n^{(n-2)} - \cdots - p_1 y_n' - p_0 y_n \end{vmatrix}$$

O segundo determinante acima é nulo, pois sua última linha e combinação linear das linhas anteriores, de modo que

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ -p_{n-1}y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_{n-1}y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Podemos então colocar $-p_{n-1}$ multiplicando fora do determinante, de modo que

$$W'(x) = -p_{n-1} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = -p_{n-1}W(x)$$

como queríamos demonstrar. ∎

Vamos mostrar agora que a mesma relação entre as soluções serem fundamentais e seu Wronskiano não se anular, válida no caso de EDOs de 2ª ordem, também é válida no caso de EDOs de ordem superior.

Proposição A.18

Sejam $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ soluções da EDO

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

(A) $W(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) \neq 0$ para algum x_0

(B) $W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ para todo x

(C) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ são fundamentais

Prova:

Vamos mostrar que (A) é equivalente a (B) e, depois, que (B) é equivalente a (C).

Para mostrar que (A) e (B) são equivalentes, primeiro lembramos que

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = ce^{-P_{n-1}(x)}$$

onde $c \in \mathbb{R}$. Segue então que

$$W(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) \neq 0$$

para algum x_0, é equivalente a

$$c \neq 0$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$$

para todo x.

Para mostrar que (B) e (C) são equivalentes, basta lembrar que um determinante é não nulo se e só se suas colunas são linearmente independentes. ■

Finalmente vamos mostrar que a solução geral de uma EDO linear de ordem n é dada pela combinação linear de soluções fundamentais.

Proposição A.19

Sejam $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ soluções fundamentais da EDO

$$y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0$$

Então a solução geral da EDO é dada por

$$\boxed{y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)}$$

onde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Prova:

Seja $z(x)$ uma solução qualquer da EDO. Temos que

$$W(z(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = ae^{-P_{n-1}(x)}$$

para algum $a \in \mathbb{R}$, e que

$$W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) = be^{-P_{n-1}(x)} \neq 0$$

de modo que $b \neq 0$. O desenvolvimento do determinante que define o Wronskiano $W(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$ pela última linha através do método de Laplace implica que deve existir pelo menos um subconjunto de $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\}$ com $n-1$ funções cujo respectivo Wronskiano seja não nulo. Podemos supor então, sem perda de generalidade, que $W(y_2(x), \dots, y_n(x))$ é não nulo. Relacionando as duas equações acimas, obtemos que

$$W(z(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = \frac{a}{b} b e^{-P_{n-1}(x)} = c_1 W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))$$

onde $c_1 = a/b$. Segue também que

$$W(z(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) - c_1 W(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x))) =$$

$$= \begin{vmatrix} z(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ z'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Multiplicando c_1 pela primeira coluna e usando que a diferença de dois determinates que diferem apenas em uma única coluna é o determinante onde as colunas coincidentes são repetidas e na coluna que difere aparece a diferença das colunas originais, obtemos que

$$\begin{vmatrix} z(x) - c_1 y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ z'(x) - c_1 y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^{(n-1)}(x) - c_1 y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Usando que um determinante é nulo quando suas colunas são linearmente dependentes e também que $y_2(x), \ldots, y_n(x)$ são linearmente independentes, segue que a primeira coluna pode ser escrita como a combinação linear das demais, de modo que

$$\begin{array}{rcccc} z(x) - c_1 y_1(x) & = & c_2(x) y_2(x) & + \cdots + & c_n(x) y_n(x) \\ z'(x) - c_1 y_1'(x) & = & c_2(x) y_2'(x) & + \cdots + & c_n(x) y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z^{(n-2)}(x) - c_1 y_1^{(n-2)}(x) & = & c_2(x) y_2^{(n-2)}(x) & + \cdots + & c_n(x) y_n^{(n-2)}(x) \\ z^{(n-1)}(x) - c_1 y_1^{(n-1)}(x) & = & c_2(x) y_2^{(n-1)}(x) & + \cdots + & c_n(x) y_n^{(n-1)}(x) \end{array}$$

onde $c_2(x), \ldots, c_n(x)$ são funções de x. Considerando as $n-1$ primeiras equações, temos que o determinante da matriz dos coeficientes é justamente o Wronskiano $W(y_2(x), \ldots, y_n(x))$ que supusemos acima ser diferente de zero. Pela regra de Cramer, essas $n-1$ equações determinam $c_2(x), \ldots, c_n(x)$ como o quociente de determinantes. Como cada determinante é um produto de funções deriváveis, pelas regras das derivadas do produto e do quociente, segue que $c_2(x), \ldots, c_n(x)$ também são deriváveis. Derivando-se as $n-1$ primeiras equações e comparando-se com as $n-1$ últimas equações sem derivar, obtemos as seguintes equações

$$\begin{array}{cccc}
c_2'(x)y_2(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n(x) & = & 0 \\
c_2'(x)y_2'(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n'(x) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) & +\cdots+ & c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = & 0
\end{array}$$

Novamente pela regra de Cramer, essas $n-1$ equações mostram que

$$c_2'(x) = \cdots = c_n'(x) = 0$$

para todo x, de modo que $c_2(x), \ldots, c_n(x)$ são funções constantes. Segue então que

$$z(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

como queríamos demonstrar. ∎

Solução da não-homogênea

Assim como no caso de EDOs de 2ª ordem, a solução geral de uma EDO linear de ordem superior não-homogênea será dada a partir da solução geral da sua homogêna associada através do método denominado de *Variação dos Parâmetros.*

Passos

1) Variar os parâmetros: Tentar uma solução da EDO não-homogêna da forma $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$, substituindo os parâmetros $c_1, \ldots, c_n$ da solução geral $c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ da homogêna associada por funções $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, que são as novas incógnitas.

2) Determinar os parâmetros variáveis: Determinar quais são as funções $c_1(x), \ldots, c_n(x)$, utilizando a EDO não-homogênea. Uma vez que

$$y(x) = y_1(x)c_1(x) + \cdots + y_n(x)c_n(x)$$

derivando essa combinação, segue que

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x)c_1(x) + \cdots + y_n'(x)c_n(x) \\ &+ y_1(x)c_1'(x) + \cdots + y_n(x)c_n'(x) \end{aligned}$$

Impondo que

$$y_1(x)c_1'(x) + \cdots + y_n(x)c_n'(x) = 0$$

obtemos que

$$y'(x) = y_1'(x)c_1(x) + \cdots + y_n'(x)c_n(x)$$

Derivando essa combinação, segue que

$$\begin{aligned} y''(x) &= y_1''(x)c_1(x) + \cdots + y_n''(x)c_n(x) \\ &+ y_1'(x)c_1'(x) + \cdots + y_n'(x)c_n'(x) \end{aligned}$$

Impondo que

$$y_1'(x)c_1'(x) + \cdots + y_n'(x)c_n'(x) = 0$$

obtemos que

$$y''(x) = y_1''(x)c_1(x) + \cdots + y_n''(x)c_n(x)$$

Repetindo esse processo algumas vezes, impondo que

$$\begin{array}{rcccl} y_1(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n(x)c_n'(x) & = & 0 \\ y_1'(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n'(x)c_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n^{(n-2)}(x)c_n'(x) & = & 0 \end{array}$$

podemos mostrar que

$$\begin{array}{rcccl} y(x) & = & y_1(x)c_1(x) & +\cdots+ & y_n(x)c_n(x) \\ y'(x) & = & y_1'(x)c_1(x) & +\cdots+ & y_n'(x)c_n(x) \\ y''(x) & = & y_1''(x)c_1(x) & +\cdots+ & y_n''(x)c_n(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & = & y_1^{(n-1)}(x)c_1(x) & +\cdots+ & y_n^{(n-1)}(x)c_n(x) \end{array}$$

Derivando a última equação, obtemos que

$$\begin{array}{rcccl} y^{(n)}(x) & = & y_1^{(n)}(x)c_1(x) & +\cdots+ & y_n^{(n)}(x)c_n(x)+ \\ & & +y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) \end{array}$$

Multiplicando essas equações pelos respectivos coeficientes, somando as equações, colocando $c_1(x),\ldots,c_n(x)$ em evidência, e usando que $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ são soluções da homogênea e que $y(x)$ é solução da não-homogênea, obtemos que

$$g(x) = y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x)$$

Obtemos então o seguinte sistema

$$
\begin{array}{rcrcl}
y_1(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n(x)c_n'(x) & = & 0 \\
y_1'(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n'(x)c_n'(x) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
y_1^{(n-2)}(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n^{(n-2)}(x)c_n'(x) & = & 0 \\
y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) & +\cdots+ & y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) & = & g(x)
\end{array}
$$

que determina $c_1'(x),\ldots,c_n'(x)$. Temos que o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é o Wronskiano das soluções fundamentais, dado por

$$
\begin{vmatrix}
y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\
y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
y_1^{(n-2)}(x) & y_2^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\
y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix} \neq 0
$$

que é não nulo, uma vez que $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ são soluções fundamentais. Utilizando a regra de Cramer, determinamos $c_1'(x),\ldots,c_n'(x)$ e, integrando, obtemos $c_1(x),\ldots,c_n(x)$.

Problema de Valores Iniciais

Assim como no caso de EDOs de 2ª ordem, um PVI para uma EDO linear de ordem n não-homogênea possui uma única solução, desde que sejam considerados valores iniciais para a função incógnita e suas derivadas até a ordem $n-1$.

Proposição A.20

Sejam y_0, y_0', …, $y_0^{(n-1)}$ valores dados e suponha que a EDO possui soluções fundamentais. Então o PVI linear

$$\boxed{\begin{cases} y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = 0 \\ y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y_0' \qquad \ldots \qquad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}}$$

possui uma única solução.

A demonstração é uma adaptação imediata da demonstração do caso de 2ª ordem dada na Proposição 4.9. Os valores iniciais na proposição acima foram dados no instante $t = 0$ por conveniência: o resultado continua válido se os valores iniciais forem dados em qualquer outro instante onde os coeficientes da EDO estejam definidos.

Coeficientes constantes

Proposição A.21

Sejam p e q dois polinômios quaisquer, temos que

$$\boxed{(p(D)q(D))y = p(D)(q(D)y)}$$

Além disso, se

$$\begin{aligned} p(D)y &= 0 \\ q(D)z &= 0 \end{aligned}$$

então

$$\boxed{p(D)q(D)(y+z) = 0}$$

Prova:

Se

$$\begin{aligned} p(D) &= a_n D^n + \cdots + a_1 D + a_0 \\ q(D) &= b_m D^m + \cdots + b_1 D + b_0 \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} p(D)q(D) &= a_n b_m D^{m+n} + \cdots + a_n b_1 D^{1+n} + a_n b_0 D^n + \cdots \\ &\cdots + a_1 b_m D^{m+1} + \cdots + a_1 b_1 D^2 + a_1 b_0 D + \\ &+ a_0 b_m D^m + \cdots + a_0 b_1 D + a_0 b_0 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$q(D)y = b_m y^{(m)} + \cdots + b_1 y' + b_0 y$$

Como a derivada separa soma e comuta com o produto por escalar, segue que

$$\begin{aligned} p(D)(q(D)y) &= a_n b_m y^{(m+n)} + \cdots + a_n b_1 y^{(1+n)} + a_n b_0 y^{(n)} + \cdots \\ &\cdots + a_1 b_m y^{(m+1)} + \cdots + a_1 b_1 y'' + a_1 b_0 y' + \\ &+ a_0 b_m y^{(m)} + \cdots + a_0 b_1 y' + a_0 b_0 y \end{aligned}$$

Das equações acima, segue imediatamente que

$$(p(D)q(D))y = p(D)(q(D)y)$$

A segunda parte segue da primeira, pois

$$\begin{aligned} p(D)q(D)(y+z) &= p(D)q(D)y + p(D)q(D)z \\ &= q(D)p(D)y + p(D)q(D)z \\ &= q(D)(p(D)y) + p(D)(q(D)z) \\ &= q(D)0 + p(D)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

■