1 多元多维函数的隐函数定理应用

考虑以下方程组：

$$F_1(x,y,z,u,v) = x^2 + y^2 + z^2 - u^2 - v^2 = 0 \tag{1}$$

$$F_2(x,y,z,u,v) = xy + yz + zu - uv = 0 \tag{2}$$

我们想在点 $P_0 = (1,1,1,1,1)$ 附近，将 u 和 v 表示为 x，y 和 z 的函数。

1.1 隐函数定理的条件验证

隐函数定理告诉我们，如果：

1. 函数 F_1 和 F_2 在点 P_0 附近具有连续偏导数。
2. 在点 P_0 处，对自变量 u 和 v 的雅可比行列式不为零。

那么方程组可以解出 $u = u(x,y,z)$ 和 $v = v(x,y,z)$，并且这些函数在 P_0 附近有连续偏导数。首先计算 F_1 和 F_2 对变量的偏导数：

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x \; \frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad = 2y \; \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z \; \frac{\partial F_1}{\partial u} \qquad = -2u \; \frac{\partial F_1}{\partial v} = -2v \tag{3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y \; \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad = x + z \; \frac{\partial F_2}{\partial z} = y + u \; \frac{\partial F_2}{\partial u} \qquad = z - v \; \frac{\partial F_2}{\partial v} = -u \tag{4}$$

在点 $P_0 = (1,1,1,1,1)$ 处，所有这些偏导数都是连续的。现在我们需要计算雅可比行列式：

$$J = \left| \tfrac{\partial F_1}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial v} \; \tfrac{\partial F_2}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial v} \right| = \left| -2u \quad -2v \; z - v \quad -u \right| \tag{5}$$

代入点 $P_0 = (1,1,1,1,1)$ 的值：

$$J = \left| -2 \quad -2 \; 0 \quad -1 \right| = (-2)\cdot(-1) - (-2)\cdot(0) = 2 \neq 0 \tag{6}$$

因此，隐函数定理的条件满足，我们可以将 u 和 v 表示为 x，y 和 z 的函数。

1.2 隐函数的导数计算

现在我们来计算 u 和 v 对 x，y 和 z 的偏导数。根据隐函数定理，我们有：

$$\left(\tfrac{\partial u}{\partial x} \quad \tfrac{\partial v}{\partial x} \; \tfrac{\partial u}{\partial y} \quad \tfrac{\partial v}{\partial y} \; \tfrac{\partial u}{\partial z} \quad \tfrac{\partial v}{\partial z} \right) = -\left(\tfrac{\partial F_1}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial v} \; \tfrac{\partial F_2}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial v} \right)^{-1} \left(\tfrac{\partial F_1}{\partial x} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} \; \tfrac{\partial F_2}{\partial x} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial y} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial z} \right) \tag{7}$$

首先，我们需要计算雅可比矩阵的逆：

$$\left(\tfrac{\partial F_1}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial v} \; \tfrac{\partial F_2}{\partial u} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial v} \right)^{-1} = \left(-2 \quad -2 \; 0 \quad -1 \right)^{-1} \tag{8}$$

计算 2×2 矩阵的逆：

$$\left(-2 \quad -2 \; 0 \quad -1 \right)^{-1} = \frac{1}{(-2)\cdot(-1) - (-2)\cdot(0)} \left(-1 \quad 2 \; 0 \quad -2 \right) = \frac{1}{2} \left(-1 \quad 2 \; 0 \quad -2 \right) = \left(-\tfrac{1}{2} \quad 1 \; 0 \quad -1 \right) \tag{9}$$

然后计算：

$$\left(\tfrac{\partial F_1}{\partial x} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial y} \quad \tfrac{\partial F_1}{\partial z} \; \tfrac{\partial F_2}{\partial x} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial y} \quad \tfrac{\partial F_2}{\partial z} \right) = \left(2x \quad 2y \quad 2z \; y \quad x + z \quad y + u \right) \tag{10}$$

在点 $P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ 处：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\,1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

现在我们可以计算偏导数矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1\,0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\,1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad = -\left(-\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 1 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 2 \quad -\frac{1}{2} \cdot 2 + \right. \tag{12}$$

因此，在点 $P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ 处：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \; \frac{\partial u}{\partial y} \quad = 1 \; \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \; \frac{\partial v}{\partial x} \quad = -1 \; \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \; \frac{\partial v}{\partial z} \quad = 2 \tag{13}$$

1.3　几何解释

这个例子可以从几何角度理解为两个超曲面在五维空间中的交集：

$$F_1(x, y, z, u, v) = x^2 + y^2 + z^2 - u^2 - v^2 = 0 \; F_2(x, y, z, u, v) \quad = xy + yz + zu - uv = 0 \tag{14}$$

隐函数定理告诉我们，这个交集在 $P_0 = (1, 1, 1, 1, 1)$ 点附近可以表示为一个三维曲面，这个曲面可以参数化为 $(x, y, z, u(x, y, z), v(x, y, z))$。我们刚才计算的偏导数告诉我们这个曲面在 P_0 点处的切平面方向。例如，当我们沿着 x 方向移动时：

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x = 0 \cdot \Delta x = 0 \; \Delta v \quad = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x = -1 \cdot \Delta x = -\Delta x \tag{15}$$

这意味着，在 P_0 点附近，沿着 x 轴方向移动时，u 值基本保持不变，而 v 值以相同的量但方向相反地变化。