# Pregunta 1

**a)** Sea $b \in R$, definimos el conjunto:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$$

Demuestre que $U$ es un subespacio vectorial de $R^4$ si y solo si $b = 0$.

R: Para que $U$ sea un subespacio vectorial de $R^4$, debe satisfacer tres condiciones:

Contener al vector cero, ser cerrado bajo la suma, y ser cerrado bajo la multiplicación escalar. En estricto rigor, sólo es necesario comprobar que se cumplen las dos últimas, lo que garantiza que el nulo vector pertenece al subespacio vectorial.

## Debemos notar que, como es una doble implicación, debemos hacer la demostración en ambos sentidos:

- **Cierre bajo la suma**:

  Sea $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ y $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$. Por la condición del conjunto $U$, tenemos que $x_3 = 5x_4 + b_1$ , $y_3 = 5y_4 + b_2$. Luego, sumamos los vectores mediante la definición, sumando coordenada a coordenada:

  $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

  Sustituimos $x_3$ e $y_3$ en la tercera coordenada, para cumplir con la definición del conjunto $U$:

  $$\begin{aligned} x_3 + y_3 &= (5x_4 + b) + (5y_4 + b) \\ &= 5x_4 + b + 5y_4 + b \\ &= 5x_4 + 5y_4 + (2b) \\ &= 5(x_4 + y_4) + (2b) \end{aligned}$$

  Ahora, la tercera coordenada en $U$, por definición debe tener la forma:

  $$5(x_4) + b$$

  Por transitividad, b sólo puede ser cero aquí:

  $$b = 2b$$

No hace falta estudiar las otras coordenadas, ya que por definición del conjunto $U$, las otras coordenadas permanecen inalteradas luego de aplicar la restricción o regla, por eso se omitió, para que la suma no resultara tan extensa.

Por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$ si y solo si $b = 0$.

- **Cierre bajo multiplicación de vector por un escalar**:

  Ahora, tomamos un vector genérico del espacio, sea $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, con $\lambda$ escalar $\in R$. Queremos verificar si $\lambda\mathbf{u} \in U$.

  Multiplicamos el vector $\mathbf{u}$ por $\lambda$:

$$\lambda\mathbf{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

  Por el mismo motivo que antes, sólo miramos la tercera coordenada, sustituyendo según la regla $x_3 = 5x_4 + b$ tenemos, luego de multiplicar por el escalar:

$$\lambda x_3 = \lambda(5x_4 + b) = 5\lambda x_4 + \lambda b$$

  Pero, por definición del conjunto $U$, tenemos que la tercer coordenada debe tener la forma

$$5x_4 + b$$

  Ahora, para que lambda veces b tenga la forma del término independiente de b en la tercera coordenada, no queda más opción que b sea cero, para que de esta forma el término independiente no dependa del valor arbitrario del parámetro lambda, y cumpla así con la regla del conjunto U. Así que, por transitividad, tenemos que

$$\lambda b = b$$

  De donde concluimos que b sólo puede ser cero.

## Demostramos en el otro sentido, partiendo con b = 0

**Cierre bajo la suma**:

Sea $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$ y $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in U$. Por la condición del conjunto, tenemos que $x_3 = 5x_4 + b$ , $y_3 = 5y_4 + b$, pero ahora suponemos $b = 0$. Por lo tanto, $x_3 = 5x_4$ , $y_3 = 5y_4$.

Sumando los vectores:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

Sustituyendo $x_3$ , $y_3$ en la tercera componente,según la regla del conjunto en, con b igual 0:

$$x_3 + y_3 = 5x_4 + 5y_4$$
$$= 5(x_4 + y_4)$$

Como antes, sólo debemos analizar la tercera componente, de donde vemos claramente que cumple con la forma del conjunto U, luego de aplicar la regla. Por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in U$.

- **Cierre bajo multiplicación de vector por un escalar**

  Ahora, supongamos que $b = 0$.

  Sea $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, con $\lambda \in R$.
  Multiplicamos el vector $\mathbf{u}$ por el escalar $\lambda$:

  $$\lambda\mathbf{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

  Por la condición del conjunto $U$, sabemos que $x_3 = 5x_4$. Al multiplicar por $\lambda$ la tercera coordenada con b igual cero, obtenemos:

  $$\lambda x_3 = \lambda(5x_4) = 5\lambda x_4$$

  Como se puede ver, la tercera coordenada cumple con la forma del conjunto $U$ luego de aplicar la regla, y las demás coordenadas, como en todo el desarrollo de la pregunta 1, cumplen con la forma porque no se alteran según la regla.

  Por lo tanto, $\lambda\mathbf{u} \in U$ y, finalizando, se concluye que la doble implicación (si y solo si) es verdadera.

El caso del vector nulo es trivial, basta con reemplazar todas las componentes con cero, y ver que la tercera componente quedará, por regla del conjunto $U$, con el valor de $b$, de donde claramente $b$ debe ser cero para que sea el vector nulo del espacio $R^4$.

Espero que no se me descuente puntaje por no haber hecho la suma y multiplicación por escalar paso a paso, factorizando y agrupando hasta llegar a la forma solicitada del conjunto U, la verdad es que no estoy acostumbrado a utilizar LaTeX y está siendo una tarea muy laboriosa, intento explicar con palabras lo mejor que puedo para no escribir tanto.

# Pregunta 2

**a)** Sea $U$ un espacio vectorial y $U$ un subespacio vectorial de $V$. ¿A qué equivale el conjunto $U+U$?

**b)** Suponga

$$Si \quad U = \{(x, y, x+y, x-y, 2x) \in R^5 \mid x, y \in R\}$$

Encuentre un subespacio $W$ de $R^5$ tal que $R^5 = U \oplus W$
(hint: recuerde el lema 1.45 del libro del curso:
Suponga que $U$ y $W$ son subespacios de $V$
Entonces $U + W$ es suma directa $\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$)

**a) Definimos la suma de $U + U$:**
El conjunto $U+U$ es la suma de los elementos de $U$ consigo mismo, así que denotaremos los elementos del primer y segundo término de la suma como $u_1, u_2$ respectivamente:

$$U + U = \{u_1 + u_2 \mid u_1, u_2 \in U\}$$

Recordamos que un subespacio vectorial debe cumplir las propiedades de cerradura bajo la suma y la multiplicación de vector por escalar, así también debe cumplir que el vector nulo pertenece al conjunto. No hace falta demostrar que el vector nulo pertenece, porque al ser $U$ subespacio vectorial de $V$, $U$ es en sí mismo un espacio vectorial, que por definición cumple con contener al vector nulo.

Ahora, dado que $U$ es un subespacio vectorial, la suma de los elementos $u_1, u_2 \in U$ también pertenece a $U$, por propiedad de cerradura bajo la suma, mencionada anteriormente, por lo que $u_1 + u_2 \in U$

Luego, dado que la suma de elementos de $u_1$ y $u_2$ (que equivale a $U + U$) contiene a todos los elementos de $U$, puesto que al ser cerrado bajo la suma por definición de subespacio vectorialz, no hay elementos que se salgan del conjunto, entonces contiene sólo los elementos pertenecientes a $U$, por lo que podemos concluir que $U + U = U$.

**b)**

Primero, factorizamos los parámetros de $U$ para obtener una base:

$$(x, y, x + y, x - y, 2x) = x(1, 0, 1, 1, 2) + y(0, 1, 1, -1, 0)$$

Por lo que $u_1$ y $u_2$ son bases de $U$, dado que claramente son LI, ya que no existe un escalar tal que $u_1$ por ese escalar sea igual a $u_2$.

$$u_1 = (1, 0, 1, 1, 2), \quad u_2 = (0, 1, 1, -1, 0)$$

Por lo tanto, $u_1$ y $u_2$ generan $U$, luego $U = \text{span}\{u_1, u_2\}$.

Ahora, necesitamos encontrar un subespacio $W$ tal que $R^5 = U \oplus W$. Es decir, que la suma directa cumpla el lema del libro, lo que también significa que la intersección de los conjuntos es vacía: $U \cap W = \{0\}$ y $U + W = R^5$.

Ahora, dado que queremos buscar un subespacio $W$, tal que la suma directa entre ese espacio y $W$ cumpla con ser $R^5$, recordamos la definición de suma directa, y notamos que la intersección es vacía sólo cuando al sumar cualquier combinación lineal de elementos de cada espacio vectorial en conjunto, no hay elementos en común, por lo que buscamos que no haya elementos en común al hacer la suma de las bases, y asï la intersección será vacía. En otras palabras, buscamos que los vectores de las dos bases sean LI entre sí, pero también nos sirve obtener 3 vectores de W que sean LI con los vectores de la base obtenidas anteriormente en U, no necesariamente necesitamos vectores de W que sean bases.

También, hay que decir que mediante el teorema de Grassman, dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U interseccion W), pero buscamos la suma directa, donde sabemos que la intersección sólo contiene al vector nulo, que es igual a cero, luego dim(U+W) = dim(U) + dim(W), pero dim(U) = 2, ya que encontramos dos vectores de la base, así que por eso sabemos que dim(W) = 3, de donde debemos obtener 3 vectores LI.

Dado que $\dim(U) + \dim(W) = \dim(R^5) = 5$, y que $\dim(U) = 2$, tenemos que $\dim(W) = 3$.

Entonces,, como $\dim(W) = 3$, necesitamos encontrar tres vectores LI que generen $W$ y que no estén en el subespacio generado por $U$.

Supongamos que $v_1, v_2, v_3$ son vectores que están en $R^5$. Para garantizar que $R^5 = U \oplus W$, tenemos que asegurar que los vectores $v_1, v_2, v_3$ sean LI y que no sean combinaciones lineales de $u_1$ y $u_2$. Esto garantizará que la intersección de $U$ y $W$ sea solo el vector nulo, es decir, $U \cap W = \{0\}$, lo que tiene dimensión cero, por contener sólo al vector nulo.

**Armamos la ecuación mediante de la intersección:**

Para demostrar que $U \cap W = \{0\}$, podemos tomar un vector $v \in U \cap W$, y como está en la intersección, forzosamente debe ser igual al vector nulo:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3.$$

$$a_1u_1 + a_2u_2 - b_1v_1 - b_2v_2 - b_3v_3 = \vec{0}$$

Como $u_1$ y $u_2$ son LI, los coeficientes $a_1, a_2$ deben ser cero, y dado que $v_1, v_2, v_3$ son igualmente LI, los coeficientes $b_1, b_2, b_3$ también deben ser cero. Justificamos esto porque, sabemos que $u_1$ y $u_2$ son LI entre sí, pero también sabemos por suposición que $v_1, v_2, v_3$ son LI entre sí y al mismo tiempo no pertenecen al espacio generado por U, por lo que $v_1, v_2, v_3$ es un conjunto LI con cualquier combinación de vectores en $U$.

Luego, esto implica que $\mathbf{v} = \vec{0}$

Por lo tanto, demostramos que $U \cap W = \{0\}$, lo que garantiza que la suma es directa entre los vectores genéricos $v_1, v_2, v_3 \ \in Wylosvectoresu_1$ y $u_2$ obtenidos del enunciado, que son bases del conjunto $U$

# Pregunta 3

**a)** Suponga que $v_1, v_2, v_3, v_4$ son span de $V$. Demuestre que la lista

$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4)$$

también es span de $V$.

R: Trabajaremos a $V$ como un espacio vectorial sobre el campo R, ya que en el enunciado no se especifica. Si los vectores $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ son span de V, entonces generan el espacio V, por lo que existe una combinación lineal

$$span(V) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4, \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in R.$$

Ahora, si queremos demostrar que la lista del enunciado también genera V, entonces debe existir una combinación lineal entre la lista, tal que resulte en

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

En efecto, si hacemos una combinación lineal con la lista, tenemos:

$$W = \beta_1(v_1 - v_2) + \beta_2(v_2 - v_3) + \beta_3(v_3 - v_4) + \beta_4(v_4), \quad \text{con } \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in R.$$

Luego,

$$W = \beta_1(v_1 - v_2) + \beta_2(v_2 - v_3) + \beta_3(v_3 - v_4) + \beta_4(v_4)$$

$$= \beta_1 v_1 - \beta_1 v_2 + \beta_2 v_2 - \beta_2 v_3 + \beta_3 v_3 - \beta_3 v_4 + \beta_4 v_4$$

$$= \beta_1(v_1) + (\beta_2 - \beta_1)v_2 + (\beta_3 - \beta_2)v_3 + (\beta_4 - \beta_3)v_4$$

Lo que demuestra que la lista es una combinación lineal de los vectores

$$(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

Y puesto que

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 \in R.$$

son escalares cualquiera, existe una combinación tal que

$$W = span(V)$$

También se le pueden dar valores a la lista y ver que resulta en una combinación de los vectores que se suponen span de V, lo que es la definición de generador (span).

**b)** Encuentre un número $t$ tal que

$$(3,1,4), \quad (2,-3,5), \quad (5,8,t)$$

no sean linealmente independientes en $R^3$.

R: Primero, hacemos una combinación lineal entre los tres vectores $(3,1,4),(2,-3,5),(5,8,t)$

$$\alpha_1(3,1,4)+\alpha_2(2,-3,5)+\alpha_3(5,8,t)=\vec{0},$$

donde $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ son escalares, y el vector nulo $\vec{0}=(0,0,0)$ está en $R^3$.

Entonces, vemos que tenemos el siguiente sistema homogéneo, que podemos pivotear para poder determinar los valores de $t$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 8 \\ 4 & 5 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & t & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, intercambiamos la fila 1 y la fila 2:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & t & 0 \end{array}\right)$$

Luego, hacemos ceros debajo del primer pivote:

$$R_2 \to R_2 - 3R_1, \quad R_3 \to R_3 - 4R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 11 & -19 & 0 \\ 0 & 17 & t-32 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora, dividimos la segunda fila por 11, y operamos con operaciones filas para hacer ceros abajo del segundo pivote:

$$R_2 \to \frac{1}{11} R_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{11} & 0 \\ 0 & 17 & t-32 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \to R_3 - 17R_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{19}{11} & 0 \\ 0 & 0 & t-32+\frac{323}{11} & 0 \end{array} \right)$$

Aquí se ve claramente que

$$t - 32 + \frac{323}{11} = 0$$

También se podía tomar el determinante de la matriz de coeficientes, y ver para qué valores de $t$, el determinante es cero. Mejor aún, sabemos que el determinante de una matriz triangular es el producto de la principal, lo que nos ahorra hacer el cálculo de determinantes por cofactores, por lo que buscamos valores de $t$ de la matriz de coeficientes planteada (A) tal que

$$det(A) = 1 \cdot 1 \cdot \left( t - 32 + \frac{323}{11} \right) = 0$$

$$t - \frac{29}{11} = 0$$

Por lo que el valor de $t$ pedido es:

$$t = \frac{29}{11}$$

# Pregunta 4

Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 220 \\ u_1 + u_4 &= 200 \\ u_2 + u_3 &= 140 \\ u_3 + u_4 &= 160 \end{aligned}$$

Usando el método de eliminación Gaussiana resuelva el sistema.

R: Consideramos la matriz aumentada del sistema, con la matriz de coeficientes y los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}\right)$$

Realizamos operaciones de fila para pivotear con el método de Gauss:

- $R_2 \to R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}\right)$$

  Multiplicamos el renglón 2 por -1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}\right)$$

- $R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \end{array}\right)$$

- $R_3 \leftrightarrow R_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 220 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right)$$

Ahora, como cada pivote de la forma escalonada de la matriz representa $u_1, u_2, u_3, u_4$, podemos encontrar sus valores directamente, partiendo desde la última fila o renglón, sustituyendo hacia arriba:

- $u_4 = 120$
- $u_3 + u_4 = 160 \Rightarrow u_3 = 160 - 120 = 40$
- $u_2 + u_3 - u_4 = 20 \Rightarrow u_2 = 20 - 40 + 120 = 100$
- $u_1 + u_2 + u_3 = 220 \Rightarrow u_1 = 220 - 100 - 40 = 80$

Por lo tanto, los valores de $u_1, u_2, u_3, u_4$ son:

$$u_1 = 80, \quad u_2 = 100, \quad u_3 = 40, \quad u_4 = 120$$

Nota: se han señalado las operaciones fila paso a paso en los ejercicios que lo requieren, con la notación usual de libros, que es R de renglón, en vez de la notación F para denotar operaciones fila.