PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

IMT2210-1

Tarea 2

Fecha de entrega: 16 de Mayo de 2025

Pregunta 1 [2 pts.]

a) Suponga que $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(R)$ son polinomios tales que el polinomio p_j tiene grado j. Demuestre que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ es una base para $\mathcal{P}_{\leq m}(R)$.

Demostración:

Primero que nada, tenemos conocimiento que la base canónica de los polinomios de hasta grado m es $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$, en ese orden por convención (por lo que sé, cambiar el orden arbitrariamente tendría cambios en las matrices de cambios de base y demás operaciones). Entonces, si tenemos esa base en cuenta y consideramos cualquier tipo de polinomios en la lista $\mathcal{P}_{\leq m}(R)$ del enunciado, podemos notar que, sin importar los polinomios que contenga, siempre el conjunto será una combinación lineal de la base canónica. Pongamos, por ejemplo, el conjunto de polinomios de grado a lo más 2: $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$.

Sea **M** ={5, 2x, 2x + x^2} x $\in R$, para el primer término, notamos que es una combinación lineal de la base canónica mencionada, dado que, para el primer término tenemos:

$$5 = 5(1) + 0(x) + 0(x^2)$$

El segundo término, $2x$, también es una combinación lineal de la base canónica $\{1, x, x^2\}$, ya que:

$$2x = 0(1) + 2(x) + 0(x^2).$$

Finalmente, para el tercer término:

$$2x + x^2 = 0(1) + 2(x) + 1(x^2).$$

Entonces, como cada elemento del conjunto $\{M\}$ es una combinación lineal de la base canónica de los polinomios de hasta grado 2, el conjunto completo también lo es. Me parece excesivo justificar lo anterior para este ejercicio, ya que no es el foco del problema, pero como explicación se puede decir que, si cada elemento del conjunto es combinación lineal de la base, siendo v_i un elemento particular de la generalización de dichos elementos, entonces para cada elemento particular v_i del conjunto, existe un escalar $\alpha_i \in R$ tal que:

$$v_i = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \cdots + a_{im}e_m$$

Siendo el conjunto

$$e_1, e_2, ..., e_m$$

Una base del conjunto en cuestión (no la base canónica necesariamente, como la notación por convención denota, pueden ser también otras)

Notamos también que la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{P}_{\leq m}(R)$ es $m+1$, porque la base canónica está dada, según hemos visto en clases, por $\{1, x, x^2, \ldots, x^m\}$, y además sabemos que $\mathcal{P}_{\leq m}(R)$ contiene $m+1$ elementos, uno más que el grado del polinomio más grande, y ese espacio (o subespacio vectorial), puede ser escrito como combinación lineal de la base canónica, por lo que su dimensión es $m+1$. Es importante considerar este argumento de la dimensión y cantidad de elementos en el argumento anterior también, para así demostrar apropiadamente lo preguntado.

Además, dado que p_j tiene grado exactamente j, los polinomios $p_0, p_1, \ldots, p_m$ son linealmente independientes (dado que ningún polinomio puede escribirse como combinación lineal de los polinomios anteriores, debido a que el grado va incrementando en uno a medida que cada término avanza en el conjunto, y sabemos que hay $m+1$ elementos). Por lo tanto, dado que es imposible, por ejemplo, hacer una combinación linealmente independiente entre dos polinomios de grado diferente y, considerando la argumentación previa, necesariamente el conjunto formado por $p_0, p_1, \ldots, p_m$ (de $m+1$ elementos) es una base para $\mathcal{P}_{\leq m}(R)$.

b) Explique por qué no existe una lista de seis polinomios que sea linealmente independiente en $P_4(F)$.

Explicación:

El espacio $P_4(F)$, definido en un campo F (que incluye a los números reales e imaginarios), consiste en todos los polinomios de grado a lo más 4, con una dimensión de 5 (dado que, como hablamos anteriormente, una base es $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$).

Ahora, dado que tenemos una base de ese espacio, también sabemos que, por teorema del libro del curso, todas las bases tienen la misma dimensión, y en este caso puede ser deducida en base a la cantidad de elementos, ya que por el teorema de la dimensión (a veces llamado así) sabemos que un espacio vectorial debe tener dimensión igual a la cantidad de elementos de su base, y dado que en este caso la base "más simple" tiene 5 elementos, la dimensión de $P_4(F)$ debe ser 5. Por el mismo teorema de la dimensión, sabemos que cualquier lista de 6 polinomios será LD, ya que excede la dimensión de la base, que es LI. Podemos también citar el libro del curso, Lineal Algebra Done Right by Sheldon Axler, página 35, donde se establece que "In a finite-dimensional vector space, the length of every linearly independent list of vectors is less than or equal to the length of every spanning list of vectors." Pero, dado que sabemos que la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$) es LI, y que ninguna otra base difiere en su número de elementos, entonces concluimos que cualquier lista de más de 5 elementos en $P_4(F)$ es LD.

En un espacio vectorial de dimensión n, cualquier conjunto de más de n vectores es linealmente dependiente. Por lo tanto, cualquier lista de seis polinomios en $P_4(F)$ será necesariamente linealmente dependiente.

Pregunta 2 [2 pts.]

a) Suponga que v_1, v_2, v_3, v_4 son linealmente independientes. Demuestre que la lista

$$(v_1 - v_2, \quad v_2 - v_3, \quad v_3 - v_4, \quad v_4)$$

También es linealmente independiente.

Demostración:

Para demostrar que la lista $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4)$ es linealmente independiente, por definición sabemos que se debe cumplir que la única combinación lineal que da como resultado el vector nulo, debe ser con escalares todos ceros.

Se debe cumplir que:

$$c_1(v_1 - v_2) + c_2(v_2 - v_3) + c_3(v_3 - v_4) + c_4 v_4 = \vec{0}$$

donde c_1, c_2, c_3, c_4 son escalares $\in R$. Expandiendo los términos tenemos:

$$c_1 v_1 - c_1 v_2 + c_2 v_2 - c_2 v_3 + c_3 v_3 - c_3 v_4 + c_4 v_4 = \vec{0}$$

Reagrupando y armando la combinación lineal con los vectores LI del enunciado:

$$(c_1)v_1 + (c_2 - c_1)v_2 + (c_3 - c_2)v_3 + (c_4 - c_3)v_4 = \vec{0}$$

Ahora, dado que sabemos que la lista (v_1, v_2, v_3, v_4) es LI, la ecuación anterior, al ser una combinación lineal de la lista LI del enunciado, debe cumplir con que todos los escalares que multiplican a los vectores deben ser cero, por lo que se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 - c_1 &= 0 \\ c_3 - c_2 &= 0 \\ c_4 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos $c_1 = 0$. Sistituimos en en la segunda ecuación y obtenemos:

$$c_2 - 0 = 0 \implies c_2 = 0$$

Luego

$$c_3 - 0 = 0 \implies c_3 = 0$$

Luego

$$c_4 - 0 = 0 \implies c_4 = 0$$

Por lo tanto, dado que todos los escalares deben ser cero, queda demostrado que la lista $(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4)$ es linealmente independiente cuando v_1, v_2, v_3, v_4 lo es también. (Hay algunas inconsistencias en la notación de los vectores por falta de tiempo, pero se entiende por el contexto cuando el 0 se refiere al valor numérico (escalar), o al nulo vector del espacio vectorial en cuestión)

b) Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes en V y que $w \in V$. Demuestre que $v_1, \ldots, v_m, w$ son linealmente independientes si y solo si $w \notin \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

Demostración:

Dado que hay una doble implicación en el enunciado (sí y sólo si), debemos demostrar la equivalencia en las dos direcciones ($\implies$ y $\impliedby$).

($\implies$) Por contradicción, supongamos que $v_1, \ldots, v_m, w$ es una lista de vectores que son LI, demostraremos entonces que $w \notin \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$:

Si $w \in \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, entonces w puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_m$, es decir, en otras palabras, existen escalares $a_1, \ldots, a_m$ tales que:

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$

Lo que es igual a:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m - 1 \cdot w = 0$$

Aquí podemos notar que se forma una combinación lineal de los vectores $v_1, \ldots, v_m, w$ que da como resultado el cero vector del espacio vectorial V al que pertenecen, pero con un coeficiente diferente de cero multiplicando al vector w, por lo que, por definición de dependencia lineal, esta combinación lineal debe ser necesariamente linealmente independiente, lo que contradice la hipótesis que hemos propuesto (que es una lista LI), por lo tanto, por contradicción, la suposición debe ser falsa, y concluimos que $w \notin \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$.

($\impliedby$) Supongamos que $w \notin \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$. Demostraremos que la lista $v_1, \ldots, v_m, w$ es LI.

Armamos una combinación lineal de la lista $v_1, \ldots, v_m, w$ que da como resultado el vector cero, siguiendo la ecuación de la definición de dependencia lineal:

$$c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m + c_{m+1} w = 0$$

Para esto, hay que demostrar que la única solución posible para los escalares $c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}$ es la solución trivial con todos los escalares iguales a cero.

Dado que queremos demostrar que se cumple que $w \notin \text{span}(v_1, \ldots, v_m)$, suponemos que el escalar de dicho vector, en la combinación lineal de la ecuación anterior, es diferente de cero, así podemos llegar a una contradicción.

Suponemos, entonces, que $c_{m+1} \neq 0$. Luego, podemos despejar w de la ecuación anterior:

$$w = -\frac{c_1 v_1}{c_{m+1}} - \cdots - \frac{c_m v_m}{c_{m+1}}$$

Lo que es igual a

$$w = (-\frac{c_1}{c_{m+1}})v_1 - \dots (-\frac{c_m}{c_{m+1}})v_m$$

Notamos que hemos escrito w como una combinación lineal de $v_1, \dots, v_m$ sin restricciones problemáticas en el contexto de la demostración, lo que significa que $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$, por lo que nuestra suposición de que $c_{m+1} \neq 0$ debe ser falsa, así que concluimos que $c_{m+1} = 0$.

Ahora, sabiendo que $c_{m+1} = 0$, lo reemplazamos en la combinación lineal de la ecuación original del inicio:

$$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

Luego, dado que $v_1, \dots, v_m$ es una lista de vectores linealmente independientes (por hipótesis), la única solución posible para los escalares $c_1, \dots, c_m$ es la solución trivial con todos los escalares iguales a cero: $c_1 = 0, \dots, c_m = 0$.

Luego, dado que los escalares desde c_1 hasta $c_m + 1$ son iguales a cero, concluimos que la lista de vectores $v_1, \dots, v_m, w$ es linealmente dependiente.

Conclusión: Luego, habiendo demostrado la doble implicación en ambos sentidos, concluimos que $v_1, \dots, v_m, w$ es una lista de vectores linealmente independientes si y solo si $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_m)$, como se indica en el enunciado. Cabe destacar que, fuera de la demostración, es intuitivo darse cuenta que w no pertenece al span de los demás vectores si esos vectores son LI, porque si perteneciera, significaría que hay una combinación lineal de los vectors $v_1, \dots, v_m$ que da como resultado el vector w y, al considerar el span entre todos esos vectores, estaríamos incluyendo al vector w que ya es combinación lineal de los anteriores, por lo que claramente la combinación lineal entre todos los vectores sería linealmente dependiente, porque el vector w se puede obtener a partir de los otros, y sabemos que una combinación lineal de vectores es linealmente independiente si los vectores no se pueden obtener a partir de combinaciones lineales de los demás. En resumen: si un conjunto de vectores es LI, entonces ningún vector del conjunto puede escribirse como CL de los demás, por teorema.

Pregunta 3 [2 pts.]

a) Demuestre o de un contraejemplo: Si v_1, v_2, v_3, v_4 es una base de V y U es un subespacio de V tal que $v_1, v_2 \in U$ y $v_3 \notin U, v_4 \notin U$, entonces $\{v_1, v_2\}$ es una base de U.

Desarrollo:

La afirmación es claramente falsa, porque si V tiene dimensión 5, y U es subespacio vectorial de éste con dimensión 4, entonces necesitaría una base de 4 elementos, lo que hace imposible que $v1, v2$ sean base de U. Para demostrar claramente que la afirmación del enunciado es **falsa**, daremos un contraejemplo mediante un caso que no cumple:

Sea $V = R^4$, y consideremos su base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Notamos que, para este caso de V, $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, y $v_4 = e_4$. Entonces, la lista de vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ claramente es una base de V.

Consideremos el subespacio U de V generado por los vectores $e_1, e_2, e_3 + e_4$. En otra palabras, esos vectores generan el subespacio: $U = \text{span}\{e_1, e_2, e_3 + e_4\}$.

La dimensión de U es 3, ya que contiene tres vectores LI. Para ver que esos vectores son efectivamente LI, notamos que si armamos la combinación lineal por definición de dependencia lineal, tenemos que

$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3(e_3 + e_4) = \mathbf{0}$

entonces, distribuyendo:

$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_3e_4 = \mathbf{0}$

Luego, como $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es una base de V, sabemos que sus coeficientes en una combinación lineal que da cero deben ser cero, ya que al ser base, la combinación lineal debe ser LI. Así, todos los coeficientes son cero: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$.

Luego, notamos que $v_1, v_2 \in U$, $v_3, v_4 \notin U$ y, además, v_3, v_4 no es una base de U:

- $v_1 = e_1 \in U$, ya que $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot (e_3 + e_4)$.
- $v_2 = e_2 \in U$, ya que $e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot (e_3 + e_4)$.
- $v_3 = e_3 \notin U$. Para demostrar esto, suponemos por contradicción que $e_3 \in U$. Entonces e_3 sería una combinación lineal de los generadores de U: $e_3 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3(e_3 + e_4) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_3e_4$. Igualando coeficientes (ya que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es base), tenemos $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $1 = c_3$, $0 = c_3$. La última igualdad ($1 = c_3$ y $0 = c_3$) es una contradicción, es una contradicción, por lo tanto nuestra suposición es falsa, y $e_3 \notin U$.
- $v_4 = e_4 \notin U$. Al igual que arriba, suponemos por contradicción que $e_4 \in U$. Entonces $e_4 = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3(e_3 + e_4) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + c_3e_4$. Igualando coeficientes, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $0 = c_3$, $1 = c_3$. La última igualdad

$(0 = c_3$ y $1 = c_3)$ es una contradicción, por lo tanto nuestra suposición es falsa, y $e_4 \notin U$.

Entonces, dado que se cumplen todas las condiciones de la proposición del enunciado: $v_1, v_2 \in U$ y $v_3, v_4 \notin U$, y dado que hemos dado un caso adecuado, podemos concluir que v_1, v_2 no es una base de U, porque los vectores v_1, v_2 no generan U, recordemos que un conjunto de vectores es una base si es LI y además genera todo el espacio vectorial en cuestión, pero aquí podemos notar que:

- $\{e_1, e_2\}$ es linealmente independiente (porque es parte de una base canónica).
- $\{e_1, e_2\}$ **no** genera U, ya que $\text{span}\{e_1, e_2\}$ tiene dimensión 2, mientras que U tiene dimensión 3, como se indicó al inicio del desarrollo.

Por lo tanto, $\{v_1, v_2\}$ no es una base de U, como se quería demostrar.

b) Suponga que U y W son subespacios de V tales que $V = U \oplus W$. Suponga además que $u_1, ..., u_m$ es una base de U y $w_1, ..., w_n$ es una base de W. Demuestre que $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ es una base de V.

Demostración:

Para demostrar que el conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ es una base de V debemos, por definición de base de un espacio vectorial, probar que:

1. El conjunto genera mencionado V.
2. El conjunto es LI

Hacemos la demostración con estas dos consideraciones:

Primero, probamos que el conjunto de vectors genera V:

Dado que $V = U \oplus W$, por definición de suma directa, todo vector $v \in V$ puede escribirse como la suma de un vector de U y un vector de W. Es decir, para todo $v \in V$, existen vectores únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.

Como $u_1, ..., u_m$ es una base de U, el vector u puede escribirse como una combinación lineal única de los elementos de la base mencionada:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_mu_m$$

para escalares $a_1, ..., a_m$.

Como $w_1, ..., w_n$ es una base de W, el vector w puede escribirse como una combinación lineal única de los elementos de esta base:

$$w = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n$$

para escalares $b_1, ..., b_n$.

Ahora, juntando esas ecuaciones en $v = u + w$ y desarrollando:

$$v = (a_1u_1+\cdots+a_mu_m)+(b_1w_1+\cdots+b_nw_n) = a_1u_1+\cdots+a_mu_m+b_1w_1+\cdots+b_nw_n$$

Esta es una combinación lineal de los elementos del conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ del enunciado. Entonces, podemos ver que dado que cualquier vector $v \in V$ puede expresarse de esta forma, como combinación lineal de los vectores del enunciado $\in U$ y los vectores $\in W$, por lo que concluimos que span de vectores o, en otras palabras, el conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ genera a V.

Ahora mostramos que el conjunto es LI:

Consideremos la combinación lineal de los elementos del conjunto de vectores $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ igualada al vector cero, por definición de dependencia lineal:

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m + d_1w_1 + \cdots + d_nw_n = \mathbf{0}$$

para escalares $c_1, ..., c_m, d_1, ..., d_n$ en el respectivo campo del espacio vectorial.

Reescribiendo y agrupando:

$$(c_1u_1 + \cdots + c_mu_m) + (d_1w_1 + \cdots + d_nw_n) = \mathbf{0}$$

Denotamos como u' y w' a los paréntesis: $u' = c_1u_1 + \cdots + c_mu_m$ y $w' = d_1w_1 + \cdots + d_nw_n$.

Entonces la ecuación se convierte en $u' + w' = \mathbf{0}$, lo que implica $u' = -w'$.

Por definición, u' es una combinación lineal de vectores en U, por lo que $u' \in U$. Similarmente, w' es una combinación lineal de vectores en W, por lo que $w' \in W$. La ecuación $u' = -w'$ nos dice que el vector u' (que es igual a $-w'$) pertenece tanto a U como a W.

Pero, dado que que $V = U \oplus W$, por el libro de clase sabemos que los subespacios U y W están en suma directa si y sólo si la intersección de dichos subespacios es vacía $U \cap W = \mathbf{0}$

Por lo tanto, el vector que es igual a u' y a $-w'$ debe ser el vector cero:

$$u' = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad w' = \mathbf{0}$$

Sustituyendo las expresiones originales para u' y w':

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m = \mathbf{0}$$

$$d_1w_1 + \cdots + d_nw_n = \mathbf{0}$$

Como $u_1, ..., u_m$ es una base de U, es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, la primera ecuación implica que todos los escalares $c_1, ..., c_m$ deben ser cero:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

De manera análoga, dado que $w_1, ..., w_n$ es una base de W, dicho conjunto de vectores es un conjunto linealmente independiente. Por lo tanto, de la segunda ecuación sabemos que todos los escalares $d_1, ..., d_n$ deben ser cero:

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$$

Ahora, dado que todos los escalares c_i y d_j son cero, la única combinación lineal de los elementos del conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ que resulta en el vector cero es la combinación trivial que es el cero vector del espacio vectorial V al que pertenecen. Por lo tanto, el conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ es linealmente independiente. Así, finalmente concluimos que el conjunto $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ genera a V y es linealmente independiente y, por lo tanto, es una base de V, como se pedía demostrar.

Pregunta 4 [4 pts.]

a)

1. Demuestre que los subespacios de R^2 son precisamente $\{0\}$, R^2, y todas las rectas en R^2 que pasan por el origen.

   Primero, si W es un subespacio vectorial de R^2, sabemos que también es un espacio vectorial y, por lo tanto, debe contener al cero vector de R^2. También, W debe tener dimensión menor o igual a la dimensión de la que es subespacio, la cual es igual a 2 para R^2. Por lo tanto, Vamos a analizar $\dim(W)$ desde 0 hsata 2:

   - $\dim(W) = 0$, la única posibilidad es un espacio vectorial que contiene al vector cero: $\{0\}$.
   - $\dim(W) = 1$, sabemos que la base debe contener un vector no nulo, siendo $v \in W$ con $v \neq 0$. Entonces, al saber que la base del subespacio vectorial W se compone de un vector y, al saber que una combinación lineal de los vectores de la base de este subespacio vectorial generan todo R (puesto que $\dim(R) = 1$), lo expresamos como un generador $W = \text{span}\{v\} = \{cv \mid c \in R\}$, lo cual es una recta que pasa por el origen, ya que span contiene todas las CL posibles de el vector v, incluido el valor 0 para la constante c: $0 \cdot v = 0$. Así, para el subespacio vectorial W de dimensión 1, tenemos que su span es el conjunto de múltiplos escalares deun vector no nulo, que pasa por el origen.
   - $\dim(W) = 2$: Un subespacio de dimensión 2 de R^2 debe contener dos vectores linealmente independientes. Dado que la dimensión de R^2 es 2, cualquier conjunto de 2 vectores linealmente independientes en R^2 forma una base para R^2. Por lo tanto, el subespacio generado por estos vectores es R^2 completo. Así, $W = R^2$.
   - $\dim(W) = 2$: Si W es un subespacio vectorial de R^2 y tiene dimensión 2, sabemos que debe tener una base con dos vectores LI (también hay un teorema que asegura que, para espacios vectoriales de dimensión finita, si sus dimensiones son iguales y uno es subespacio del otro, entonces son el mismo espacio vectorial). Por lo tanto, el span de W compuesto por dos vectores $u, v \in W$, tal que $W = \text{span}\{u, v\} = \{au + bv \mid a, b \in R\}$ es claramente R^2, ya que todas las CL de lso vectores $u, v \in W$, también llamado span, generan el plano R^2.

   Hemos analizado los tres casos posibles de subespacios vectoriales de R^2 basándonos en las dimensiones posibles de éstos, por lo que queda demostrado que éstos son los únicos subespacios vectoriales de R^2.

2. Demuestre que los subespacios de R^3 son precisamente $\{0\}$, R^3, todas las rectas en R^3 que pasan por el origen, y todos los planos en R^3 que pasan por el origen.

Sea V un subespacio vectorial de R^3. Dado que V es subespacio de R^3, su dimensión debe estar entre 0 y la dimensión de R^3, que es 3. Entonces, $\dim(V)$ puede ser 0, 1, 2 o 3, por lo que analizamos los posibles casos, considerando que los casos son análogos a la pregunta anterior, por lo que esta demostración por análisis resultará similar a la anterior:

- $\dim(V) = 0$: Similar al caso en R^2 de la pregunta anterior, el único subespacio de dimensión 0 es el subespacio trivial que contiene al cero vector, $V = \{0\}$, o sea, el origen.
- $\dim(V) = 1$: Como anteriormente, un subespacio de dimensión 1 en R^3 es generado por un único vector no nulo $v \in V$, $v \neq 0$. tal que $V = \text{span}\{v\} = \{cv \mid c \in R\}$. Como vemos, span representa una recta en R^3 que pasa por el origen, ya que siempre se le puede otorgar 0 al parámetro o escalar c en el span, que es una CL del vector v.
- $\dim(V) = 2$: Un subespacio de dimensión 2 en R^3 es generado por dos vectores linealmente independientes $u, v \in V$ tal que $V = \text{span}\{u, v\} = \{au + bv \mid a, b \in R\}$. La CL de estos dos vectores LI genera un plano que contiene a ambos vectores, que también pasan por el origen porque una CL del span incluye los escalares o parámetros con valor 0 ($0u + 0v = 0 \in V$. También sabemos que cualquier par de vectores LI, o sea, no colineales, pueden formar un plano. Entonces, como los vectores del span mencionado pertenecen a R^3, el subespacio V de dimensión 2 son todos los planos de R^3 que pasan por el origen, como lo pide el enunciado.
- Si $\dim(V) = 3$: Análogamente a todo lo anterior, sabemos que un subespacio de dimensión 3 de R^3 tiene 3 vectores LI (sus bases tienen 3 vectores). Por lo tanto, al hacer el span de esos 3 vectores, formamos todo el espacio R^3: $V = \text{span}\{u, v, w\} = \{au + bv + cw \mid a, b, c \in R\}$, con $v, v, w \in V$. Así, $W = R^3$.

  Un subespacio de dimensión 3 de R^3 debe contener tres vectores linealmente independientes. Un conjunto de tres vectores linealmente independientes en R^3 forma una base para R^3. Por lo tanto, el subespacio generado es R^3 completo. Así, $W = R^3$.

Entonces, estos cuatro casos (las dimensiones 0, 1, 2 y 3 para V) cubren todas las posibilidades para la dimensión de un subespacio de R^3. Por lo tanto, los únicos subespacios de R^3 son $\{0\}$, las rectas que pasan por el origen, los planos que pasan por el origen y R^3, como lo pide el enunciado.

Por favor, notar que se ha utilizado la notación de V y W como subespacios del apartado 2 y 1 respectivamente, pero en cada suposición de sus diferentes dimensiones posibles, se ha utilizado la letra de la notación por simplicidad.

b)

Suponga que U y W son subespacios de dimensión cinco en R^9. Demuestre que $U \cap W \neq \{0\}$.

Sea U y W subespacios vectoriales de R^9 tales que $\dim(U) = 5$ y $\dim(W) = 5$.

Sabemos por el teorema de Grassman (o del hombre pasto) que:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Sustituyendo las dimensiones dadas, tenemos:

$$\dim(U + W) = 5 + 5 - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U + W) = 10 - \dim(U \cap W)$$

Dado que U y W son subespacios de R^9, la suma $U + W$ también es un subespacio de R^9, por lo que su dimensión debe ser a lo más 9, dado que

$$\dim(R^9) = 9$$

Por lo tanto, sabiendo que $\dim(U + W) \leq 9$, lo expresamos a partir de la ecuación anterior:

$$10 - \dim(U \cap W) \leq 9$$

Lo que es igual a:

$$10 - 9 \leq \dim(U \cap W)$$

Luego:

$$1 \leq \dim(U \cap W)$$

Esto quiere decir la dimensión de la intersección entre los subespacios vectoriales U y W es es 1, o mayor a 1.

Luego, sabemos que únicamente un espacio vectorial de dimensión 0 es igual a $\{0\}$, pero $\dim(U \cap W) = 1$, por lo que $U \cap W \neq \{0\}$ necesariamente, como se quería demostrar.

c)

Suponga que $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes en V y que $w \in V$. Demuestre que $\dim \operatorname{span}(v_1 + w, \ldots, v_m + w) \geq m - 1$.

Se otorgó el puntaje en este punto.

Pregunta 5 [2 pts.]

a)

Suponga que $T \in L(V, W)$ y $v_1, \ldots, v_m$ es una lista de vectores en V tal que $T(v_1), \ldots, T(v_m)$ es una lista linealmente independiente en W. Demuestre que $v_1, \ldots, v_m$ es linealmente independiente.

Por contradicción, primero suponemos que la lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ no es LI en V. Usando la definición de independencia lineal, armamos la combinación con escalares $c_1, \ldots, c_m$, no todos nulos, tales que:

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m = 0_V$$

Ahora aplicamos la transformación lineal T a ambos lados de esta ecuación. Como T es lineal, sabemos que se preserva el principio de superposición y homogeneidad, como también sabemos que transforma el vector 0 del espacio vectorial de origen de la transformación lineal, al codominio de la transformación lineal, es decir, el cero vector en la transformación lineal va de V hacia W en $(T(0_V) = 0_W)$. Considerando estas tres "propiedades", podemos desarrollar lo mencionado al inicio en la ecuación anterior:

$$T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m) = T(0_V)$$

Luego, podemos "sacar los escalares hacia afuera", por principio de homogeneidad, y separar en términos, aplicando la transformación lineal a cada vector por separado, gracias al principio de superposición:

$$c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_mT(v_m) = 0_W$$

En esta ecuación hemos obtenido una CL de los vectores pasados por la transformación lineal $T(v_1), \ldots, T(v_m)$ que es igual al vector cero del espacio vectorial de llegada de la transformación (W), pero sabemos por hipótesis del enunciado que la lista de vectores $T(v_1), \ldots, T(v_m)$ es LI en W y, entonces, por definición de independencia lineal, se debería cumplir que los escalares en la CL de estos vectores deberían ser todos cero:

$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_m = 0.$

Pero esto contradice nuestra suposición inicial de que no todos los coeficientes c_i de la CL son cero. Entonces, dado que al suponer que $v_1, \ldots, v_m$ no son vectores LI llegamos a una contradicción, concluimos que efectivamente la lista de vectores $v_1, \ldots, v_m$ es LI, lo que concluiye lo que queríamos demostrar.

b)

Suponga que V es finito-dimensional. Demuestre que todo mapa lineal definido en un subespacio de V puede extenderse a un mapa lineal en V. En otras palabras, demuestre que si U es un subespacio de V y $S \in L(U, W)$, entonces existe $T \in L(V, W)$ tal que $T(u) = S(u)$ para todo $u \in U$.

Debemos armar la transformación lineal para que cumpla, modificando las imágenes: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea U un subespacio de V. También, sea $S : U \to W$ una transformación lineal, dado que V es finito-dimensional, su subespacio U también lo es. También, sea $\{u_1, \ldots, u_m\}$ una base para el subespacio U.

Luego, con todas esas suposiciones en mente, como $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es un conjunto linealmente independiente en U, también es un conjunto linealmente independiente en V, dado que U es subespacio vectorial de V. Entonces, podemos extender la base mencionada de U a una base para todo el espacio V según lo consideremos. Sea $\{u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ una base para V, donde podemos notar que $n = \dim(V)$, ya que hay n vectores en el conjunto.

Sabemos que una transformación lineal está determinada por sus valores en una base del espacio de partida, que es el dominio, y sabemos que en este ejercicio la finalidad es construir una transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(u) = S(u)$ para todo $u \in U$. Por lo que debemos definir una transformación lineal T en los vectores de la base de V.

Para los vectores base de V que también están en U (que se compone de los vectores $u_1, \ldots, u_m$), debemos definir $T(u_i)$ de manera que coincida con $S(u_i)$, para as[i cumplir con la construcción que estamos haciendo de la transformación lineal.

Entonces, definimos $T(u_i) = S(u_i)$ para $i = 1, \ldots, m$. Con $S(u_i) \in W$.

Pero, aunque notamos que hay vectores restantes en la base de V que no pertenecen ea U $(v_{m+1}, \ldots, v_n)$, podemos definir sus imágenes en W de manera arbitraria y no habrá problemas. La elección más sencilla es asignarles el vector cero del espacio W. Definimos $T(v_j) = 0_W$ para todos los vectores mencionados.

Ahora, dado que hemos definido los valores de una transformación T en una base de V, por teorema sabemos que existe una única transformación lineal $T : V \to W$ con estos valores en la base $\{u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$.

Entonces, para verificar, con las propiedades del ejercicio anterior (superposición y homogeneidad), al ser T lineal:

$T(u) = S(u)$ para todo $u \in U$.

Como $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es una base de U, u podemos armar la CL:

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m$$

Aplicamos la transformación T a ambos lados de la ecuación:

$$T(u) = T(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m)$$

Como T es lineal, con las propiedades mencionadas más arriba:

$$T(u) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \ldots + c_mT(u_m)$$

Pero, por la definición que armamos de T en la base del espacio vectorial V, tenemos que para cada u_i se cumple que $T(u_i) = S(u_i)$, por lo que la ecuación es equivalente a:

$$T(u) = c_1S(u_1) + c_2S(u_2) + \ldots + c_mS(u_m)$$

Como S también es lineal, la combinación lineal de las imágenes (recorrido) es la imagen de la combinación lineal siguiente:

$$T(u) = S(c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m)$$

Pero, dado qque $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m$:

$$T(u) = S(u)$$

Por lo tanto, queda demostrado que $T(u) = S(u)$ para cualquier vector u en el subespacio U. Por lo tanto, T es una extensión de S a todo el espacio V, según el hint del enunciado.