PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

# IMT2210-1

*Tarea 3*

**Fecha de entrega:** 20 de Mayo de 2025

# Ejercicio 1

Demuestre que
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$
para todo $n \in N$ y todos los reales $x_1, \ldots, x_n$.

## Respuesta:

Vamos a utilizar la desigualdad de **Cauchy-Schwarz** vista en clases, que establece que, para dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, se cumple que:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

Dado que queremos demostrar la desigualdad del enunciado con n términos, debemos tomar dos vectores en $R^n$:

$$\mathbf{w} = (1, 1, \ldots, 1)$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Con el vector $\mathbf{w}$ de n componentes, todos iguales a la unidad.

Entonces, aplicamos la desigualdad a los vectores:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})^2 \leq \|\mathbf{w}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2$$

Pero sabemos que en la izquierda hay un producto punto elevado al cuadrado, lo desarrollamos multiplicando componente a componente:

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = (1)(x_1) + (1)(x_2) + \cdots + (1)(x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

Luego, el lado izquierdo de la desigualdad queda como:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

Ahora, calculamos las normas de los vectores que están a la derecha de la desigualdad:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2$$

Pero, sabemos que lo anterior ocurre n veces, por lo que podemos expresar a $\|\mathbf{w}\|^2$ como una sumatoria con la notación sigma, para usar las propiedades de las sumatorias:

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Ahora, calculamos la norma del vector **x**, no hace falta escribir una sumatoria porque se ve claramente por la definición de norma, que el cuadrado de la norma del vector es la suma del cuadrado de cada una de sus componentes:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Recordemos que, luego de aplicar la desigualdad de **Cauchy-Schwarz** a los dos vectores definidos en $R^n$, obtuvimos la desigualdad:

$$(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})^2 \leq \|\mathbf{w}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2$$

Pero, sustituyendo el producto punto en la izquierda calculado previamente:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq \|\mathbf{w}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2$$

Luego, sistituyendo las normas que hemos calculado, en el lado derecho de la inecuación:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

Que es lo que se quería demostrar.

## Ejercicio 2:

Suponga que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ son vectores no nulos en $R^2$. Demuestre que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta),$$

donde $\theta$ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, considerando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como vectores con punto inicial en el origen.

### Respuesta

Los vectores comienzan en el origen. Escribimos los vectores como sus componentes; $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en $R^2$

Ahora, sabemos que el produto punto o escalar en este contexto está definido como:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Mientras que la norma de cada vector está cada por la suma del cuadrado de sus componentes, todo sobre raíz cuadrada:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Tomando una aproximación geométrica para proceder, podemos considerar los vectores partiendo desde el origen, y armando un triángulo con ellos dos, y el lado restante como la resta $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Entonces, cada lado del triángulo tiene como longitud la norma de cada vector: $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

Luego, podemos aplicar la ley de Cosenos para el lado que está entre el vector $\mathbf{v}$ y el vector $\mathbf{u}$, armando así la igualdad:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$$

Tomamos el lado izquierdo de la igualdad y lo expandimos, es una diferencia al cuadrado, aplicamos el producto notable, así que el lado izquierdo de la igualdad es:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u}\mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2$$

Pero sabemos que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,así que aplicamos el producto punto entre las componentes de los dos vectores, por lo que lo anterior equivale a:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2(u_1 v_1 + u_2 v_2) + \|\mathbf{u}\|^2$$

Como vemos, el término de al medio, nuevamente equivale a algo, esta vez al producto punto, así que lo anterior es equivale a:

$$\|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{u}\|^2$$

Luego, este resultado obtenido, lo reemplazamos en el lado izquierdo de la ecuación formada por la ley de Cosenos, así que

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$$

Equivale a

$$\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$$

Restamos el término $\|\mathbf{u}\|^2$ y $\|\mathbf{v}\|^2$ de ambos lados de la ecuación, seguido de dividir por -2:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$$

Que es lo que se quería demostrar. Además, sabemos que los vectores son no nulos, y las propiedades del valor absoluto de vectores nos dicen que un valor absoluto de un vector siempre es mayor a cero, cuando el vector no es el vector nulo, lo cual sucede ahora para **u** y **v**, así que no hay ningún problema con las operaciones aplicadas a la igualdad.