IMT2220 Semestre 2025-1
Tarea 2

Elwin van 't Wout

25 de abril de 2025

Introducción

El área de un dominio bidimensional $D \subset \mathbb{R}^2$ se puede calcular con la integral doble

$$A(D) = \iint_D 1 \, \mathrm{d}A.$$

En el caso de dominios del tipo I y II se puede aplicar el teorema de Fubini y calcular la integral doble como una integral iterada. Sin embargo, no todos los dominios son del tipo I o II. Un ejemplo son los fractales. De hecho, calcular su área es desafiante y normalmente se lo aproxima con un método numérico.

El conjunto de Mandelbrot es uno de los ejemplos más conocidos de los fractales. Este conjunto se define como todos los números complejos c tal que la sucesión

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_n = x_{n-1}^2 + c \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

se mantiene acotada en valor absoluto. Es decir, $|x_n| \leq M$ es acotado por el constante M para $n \to \infty$. Se puede demostrar que el número complejo c pertenece al conjunto de Mandelbrot si $|x_n| < 2$ para todos n. Al contrario, si $|x_j| \geq 2$ para algún j, entonces no pertenece al conjunto de Mandelbrot.

Calcular el área del conjunto de Mandelbrot es desafiante debido a su carácter fractal. Uno de los métodos numéricos para estimar su área se llama *pixel*

counting, lo cual es similar al método de Monte Carlo. En este algoritmo, distintos valores complejos c son generados de forma aleatoria en una región adecuada del plano complejo. En seguido, se calcula la sucesión x_n y se verifica su convergencia. La proporción de puntos que se mantiene acotados entrega la estimación del área del conjunto de Mandelbrot.
Se puede resumir el algoritmo como sigue.

1. Definir un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que incluye todo el conjunto de Mandelbrot.

2. Generar m puntos aleatorios $c_j \in V$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

3. Inicializar los valores $x_{0,j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

4. Iterar sobre $k = 1, 2, 3, \ldots, K$ con K el número de iteraciones.

    a) Calcular $x_{k,j} = x_{k-1,j}^2 + c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, m$.
    b) Contar el número de valores $|x_{k,j}| < 2$ para $j = 1, 2, \ldots, m$.
    c) Aproximar el área $\hat{A}_{k,m}(D)$.

El área del conjunto de Mandelbrot es

$$A(D) = \lim_{m,K \to \infty} \hat{A}_{K,m}(D)$$

pero en la práctica uno logra obtener una aproximación razonable para valores de m y K altos pero fijos.

Tarea

Esta tarea contempla el cálculo del área del conjunto de Mandelbrot.

1. Encuentre un dominio $V \subset \mathbb{C}$ que incluye todo el conjunto de Mandelbrot. Justifique por qué este dominio contiene todo el fractal.

2. Programe el método de *pixel counting* en Python.

3. Visualize con Matplotlib la convergencia de las aproximaciones $\hat{A}_{k,m}(D)$. Es decir, una figura con k en el eje horizontal y $\hat{A}_{k,m}(D)$ en el eje vertical, para un valor alto de m.

4. No se conoce el valor exacto del área, pero las estimaciones comúnes dicen 1,506. Calcule la diferencia con tu estimación y justifique si tu algoritmo es correcto.

5. Visualize el conjunto de Mandelbrot en el plano complejo: dibujen los puntos c_j tal que $|x_{k,j}| < 2$. Utilize funciones de Matplotlib, p.ej., `scatter` o `imshow`. Hazlo para $k = 1, 2, 5, 10, 100$ y K.

Evaluación

Entregue todo el código y las respuestas a las preguntas en un Jupyter notebook a través de Canvas.

Los reglamientos del curso se puede encontrar en Canvas. Se destaca que las tareas deben ser hechas de forma individual. No se puede compartir código entre compañeros, tampoco usar código de fuentes externos salvo el código proporcionado en Canvas. Se puede usar herramientas de inteligencia artificial (p.ej., ChatGPT y GitHub CoPilot) para la programación, pero las respuestas a las preguntas en las celdas de *markdown* deben ser escritos por ustedes mismos.

Sugerencias

La librería `numpy.random` ofrece funcionalidad para generar números aleatorios. Revisen bien el intervalo de estos números: dibujen los puntos que crearon.

Pueden representar un número complejo como `a + 1j * b` en Python con `a` y `b` números o Numpy arrays. La variable `1j` representa la unidad imaginaria $\imath$: $\imath^2 = -1$.

Es común visualizar el conjunto de Mandelbrot con los colores dado por $x_{k,j}$. Cómo tarea adicional (sin puntaje) para los interesados: dibujen el valor $|x_{k,j}|$ para cada punto en el conjunto de Mandelbrot.