IMT2220 Cálculo para Ciencia de Datos - 2025-2
Tarea 2

Profesor: Ignacio Labarca
`ignacio.labarca@uc.cl`

Fecha de entrega: Miércoles 19 de Noviembre de 2025 (por Canvas)

1. Introducción

La **suma de Riemann** en dos dimensiones es una generalización del concepto de suma de Riemann para funciones de una variable. Permite aproximar el volumen bajo una superficie $z = f(x, y)$ sobre una región $R \subseteq \mathbb{R}^2$.

1.1. Definición

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua sobre una región rectangular $R = [a, b] \times [c, d]$. Para aproximar la integral doble

$$\iint_R f(x, y)\, dA,$$

se procede de la siguiente manera:

1. Se particiona el intervalo $[a, b]$ en n_x subintervalos de ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n_x}$, generando los vértices:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \ldots, \quad x_{n_x} = b.$$

2. Análogamente, se particiona $[c, d]$ en n_y subintervalos de ancho $\Delta y = \frac{d-c}{n_y}$:

$$y_0 = c, \quad y_1 = c + \Delta y, \quad y_2 = c + 2\Delta y, \quad \ldots, \quad y_{n_y} = d.$$

3. Para cada rectángulo $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, se calcula el punto medio:

$$X_{ij} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad Y_{ij} = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}.$$

4. La suma de Riemann se define como:

$$S_{n_x,n_y} = \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} f(X_{ij}, Y_{ij}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y.$$

Geométricamente, S_{n_x,n_y} representa la suma de los volúmenes de paralelepípedos con base $\Delta x \times \Delta y$ y altura $f(X_{ij}, Y_{ij})$.

1.2. Función graficar_riemann

Se entrega la función de Python **graficar_riemann** que permite visualizar la suma de Riemann y calcular su valor numérico. La firma de la función es:

```
graficar_riemann(x_range, y_range, nx, ny, f, mask=None,
                 color='steelblue', alpha=0.8)
```

Parámetros:

- `x_range`: tupla $(x_{\text{mín}}, x_{\text{máx}})$ con el rango en x.
- `y_range`: tupla $(y_{\text{mín}}, y_{\text{máx}})$ con el rango en y.
- `nx`, `ny`: número de particiones en x e y respectivamente.
- `f`: función $f(x, y)$ que define la altura.
- `mask`: función opcional que retorna `True` si (x, y) está en la región de integración.
- `color`, `alpha`: opciones de visualización.

Retorno: figura de matplotlib, ejes 3D y valor de la suma de Riemann.

2. Tarea

2.1. Parte 1: Ejemplos dados

Implementar las funciones necesarias para poder calcular con:

1. **Rectángulo:** $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre $[0, 1] \times [0, 1]$,
2. **Círculo:** $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 \leq 4$,
3. **Parábolas:** $f(x, y) = 1$ sobre la región $x^2 \leq y \leq 2 - x^2$,

usando `graficar_riemann.py`.

Para cada ejemplo, calcular la suma de Riemann con los siguientes valores de $n_x = n_y = n$:

$$n \in \{10, 100, 1000\}.$$

2.2. Parte 2: Cálculo analítico

Para cada uno de los tres ejemplos, calcular **manualmente** (de forma analítica) el valor exacto de la integral doble:

$$I = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Mostrar todos los pasos del cálculo.

2.3. Parte 3: Análisis de convergencia

Para cada ejemplo, completar una tabla con la siguiente información:

n	Suma de Riemann	Valor exacto	Error relativo (%)
10			
100			
1000			

donde el error relativo se calcula como:

$$\text{Error relativo} = \left| \frac{S_n - I}{I} \right| \times 100\,\%.$$

Analizar brevemente cómo cambia el error a medida que aumenta n.

2.4. Parte 4: Ejemplo propio

Proponer un cuarto ejemplo de integración doble con las siguientes características:

- Definir una función $f(x, y)$ y una región R (con máscara).
- Calcular el valor exacto de $\iint_R f(x, y)\, dA$ de forma analítica.
- Implementar el ejemplo usando la función `graficar_riemann`.
- Realizar el mismo análisis de convergencia que en la Parte 3.

3. Formato de entrega

- Documento PDF o Jupyter Notebook con:
  - Desarrollo analítico de las integrales (Parte 2).
  - Tablas completas de análisis de error (Parte 3 y 4).
  - Descripción del ejemplo propio (Parte 4).
  - Gráficos generados por la función `graficar_riemann` para cada ejemplo.
- Código Python o Jupyter Notebook modificado con el ejemplo propio agregado.