
Системы счисления

Система счисления — ***способ записи чисел с помощью заданного набора специальных символов (цифр).***

В вычислительной технике применяются **позиционные системы счисления,** *в которых значение цифры* <u>*зависит*</u> *от ее положения в числе*.
Позиционных систем счисления существует множество и отличаются они друг от друга ***алфавитом —*** *множеством используемых цифр.*
Размер алфавита (число цифр в нем) называется ***основанием системы счисления***.
Последовательная запись символов алфавита (цифр) изображает число.
Позиция символа в изображении числа называется ***разрядом***.

Это надо знать:

1. Любое число А в позиционной системе счисления можно представить выражением:

$$A = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 \qquad \textbf{(1)}$$

или $A = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$, где p — основание системы счисления, целое положительное число; a — символ (цифра); n — номер старшего разряда числа.

В компьютере для представления информации используются десятичная, двоичная и шестнадцатеричная системы счисления. Количество цифр, которое требуется для изображения числа в позиционной системе счисления, равно основанию системы счисления p.

Двоичная система счисления имеет набор цифр {0, 1}, p=2. Используя формулу (1), двоичное число $101101_{(2)}$ можно записать так:
$101101_{(2)} = 1*2^5+0*2^4+1*2^3+1*2^2+0*2^1+1*2^0$

Восьмеричная система счисления имеет набор цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, p=8. Используя формулу (1), восьмеричное число $734_{(8)}$ можно записать так:
$734_{(8)} =7*8^2+3*8^1+4*8^0$

Шестнадцатеричная система счисления имеет набор цифр {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}, p = 16. Для изображения чисел в шестнадцатеричной системе счисления требуются 16 цифр. Используя формулу (1), шестнадцатеричное число $E7F8_{(16)}$ можно записать так:
$E7F8_{(16)} =E*16^3+7*16^2+F*16^1+8*16^0$

2. Степени двойки и шестнадцати.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
16^k	16	256	4096	65536	1048576							

3. Соответствие чисел в различных системах счисления

Десятичная	Шестнадцатеричная	Двоичная
0	0	0
1	1	1
2	2	10
3	3	11
4	4	100
5	5	101
6	6	110

7	7	111
8	8	1000
9	9	1001
10	A	1010
11	B	1011
12	C	1100
13	D	1101
14	E	1110
15	F	1111

4. Арифметические операции над числами в двоичной системе счисления

Вычисления выполняются по следующим правилам:

- операция сложения выполняется поразрядно, начиная с младших разрядов в слагаемых;
- в каждом одноименном разряде слагаемых суммируются соответствующие цифры и перенос из предыдущего разряда суммы;
- если сумма цифр одноименных разрядов слагаемых и переноса меньше основания системы счисления, то перенос в следующий разряд равен нулю, если равна или больше — то равен единице.

Правила сложения	Правила вычитания	Правила умножения
0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 10	0 - 0 = 0 0 - 1 = -1 1 - 0 = 1 1 - 1 = 0	0 * 0 = 0 1 * 0 = 0 0 * 1 = 0 1 * 1 = 1

Примеры:
1. Сложить два числа: $1010_{(2)} + 10101_{(2)} = 11111_{(2)}$
2. Найти разность двух чисел $10101_{(2)}$ и $1010_{(2)}$:
$10101_{(2)} - 1010_{(2)} = 1011_{(2)}$
3. Умножить два числа $1011_{(2)}$ и $101_{(2)}$:
$1011_{(2)} * 101_{(2)} = 110111_{(2)}$

5. Перевод чисел из одной системы счисления в другую

Для перевода чисел из любой системы счисления в десятичную, можно воспользоваться выражением (1).
Пример. Перевести в десятичную систему счисления числа $C7_{(16)}$ и $1010_{(2)}$:
$C7_{(16)} = 12*16^1 + 7*16^0 = 192 + 7 = 199_{(10)}$;
$146_{(8)} = 1*8^2+4*8^1+6*8^0 = 102_{(10)}$;
$1010_{(2)} = 1*2^3 + 1*2^1 = 8+2=10$.
Для перевода чисел из десятичной системы счисления в систему с основанием p, необходимо разделить ее на p, остаток даст младший разряд числа. Полученное частное вновь делят на p — остаток даст следующий разряд числа и т.д.
Пример. Перевести десятичное число 25 в двоичную систему счисления:
25 : 2 = 12 (остаток 1);
12 : 2 = 6 (остаток 0),
6 : 2 = 3 (остаток 0),
3 : 2 = 1 (остаток 1),
1 : 2 = 0 (остаток 1).
Таким образом, $25_{(10)} = 11001_{(2)}$.
Перевод чисел из десятичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную производится аналогично.
Для перевода чисел, записанных в восьмеричной системе в двоичный код, необходимо каждую цифру восьмеричного числа представить **триадой** двоичных символов. Лишние нули в старших разрядах отбрасываются. Например:
$12345667_{(8)} = 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_{(2)} = 1\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 110\ 111_{(2)}$.
Обратный перевод (из двоичной в восьмеричную систему) производится так: каждая триада двоичных цифр заменяется восьмеричной цифрой. Для правильного перевода число должно быть выровнено, т.е. число двоичных знаков должно быть кратно трем. Выравнивание производится простым дописыванием требуемого количества нулей перед старшим разрядом целой части числа. Например:

$1100111_{(2)} = 001\ 100\ 111_{(2)} = 147_{(8)}$.

При переводах чисел между двоичным и шестнадцатеричным системами счисления используются четверки двоичных чисел — **тетрады.** При необходимости выравнивание выполняется до длины двоичного числа, кратной четырем. Например:

$12345ABCDEF_{(16)} = 1\ 0010\ 0011\ 0100\ 0101\ 1010\ 1011\ 1100\ 1101\ 1110\ 1111_{(2)}$;

$11001111010\ 1110_{(2)} = 0110\ 0111\ 1010\ 1110_{(2)} = 67AF_{(16)}$.

При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно используется вспомогательный, двоичный код числа. Например:

$1234567_{(8)} = 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111_{(2)}$

$= 0101\ 0011\ 1001\ 0111\ 0111_{(2)} = 53977_{(16)}$;

$1267ABC_{(16)} = 0001\ 0010\ 0110\ 0111\ 1010\ 1011\ 1100_{(2)}$

$= 010\ 010\ 011\ 001\ 111\ 101\ 010\ 111\ 100_{(2)} = 223175274_{(8)}$.

6. Чётные числа в двоичной системе всегда оканчиваются на 0, а нечётные – на 1.

Например:

$62_{10}=111110_2$

$53_{10}=110101_2$

7. Если число N принадлежит интервалу $\mathbf{2^{k-1} \le N < 2^k}$, в его двоичной записи будет всего ***k*** цифр, например, для числа **125**:

$2^6 = 64 \le \mathbf{125} < 128 = 2^7$, $125 = 1111101_2$ (7 цифр)

8. Числа вида 2^k записываются в двоичной системе как единица и k нулей.

Например:

$128_{10}=2^7=10000000_2$

9. Числа вида 2^k-1 записываются в двоичной системе как k единиц.

Например:

$255_{10}=256-1=2^8-1=11111111_2$

10. Число $\mathbf{2^N – 2^K}$ при ***K < N*** в двоичной системе записывается **как *N–K* единиц и *K* нулей**: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$

11. Поскольку $2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

12. Если известна двоичная запись числа N, то двоичную запись числа 2*N можно получить, приписав в конец 0 (нуль).

Например: $7_{10}=111_2$; $2*7_{10}=14_{10}=1110_2$; $2*14_{10}=28_{10}=11100_2$

13. Отрицательные числа в ЭВМ представляются в обратном и дополнительном кодах.

При выполнении арифметических операций в ЭВМ применяют специальные коды для представления чисел: прямой, обратный и дополнительный коды чисел.

Прямой код двоичного числа – это само двоичное число.

Обратный код положительного числа совпадает с прямым, а при записи отрицательного числа все его цифры, кроме цифры, изображающей знак числа, заменяются на противоположные (0 заменяется на 1, а 1 – на 0).

Пример: Дано число X=-1011. Перевести число в обратный код. $X_{обр}=1.0100$

Дополнительный код положительного числа совпадает с прямым, а код отрицательного числа образуется как результат увеличения на 1 его обратного кода.

Пример: Дано число X=-1011. Перевести в дополнительный код. $X_{доп}=1.0101$

Варианты заданий с решением

1. Дано: $a = AA_{16}$, $b = 255_8$. Какое из чисел C, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?

1) 10101010_2 2) 10111100_2 3) 10100011_2 4) 10101100_2

<u>Решение:</u> При переводе a и b в двоичное представление, получим: $a=AA_{16}=10101010_2$, $b=255_8=10101101_2$. Отсюда следует, что подходит значение 10101100_2.

<u>Ответ:</u> **4**

2. Чему равна сумма чисел 71_8 и $1F_{16}$?

1) 77_8 2) 111111_2 3) BB_{16} 4) 88_{10}

Решение: Надо представить числа в двоичном виде и поразрядно сложить:

$71_8=111001_2$ каждая цифра в 8-ой системе представляется 3-мя битами, $1F_{16}=11111_2$ каждая цифра в 16-ой системе представляется 4-мя битами. **(Представление 8-х и 16-х чисел в двоичном виде надо знать!)**

$$\begin{array}{r} 111001 \\ + \quad 11111 \\ \hline 1011000 \end{array}$$

Полученное двоичное число представим в 8-м и 16-м виде: $1011000_2=58_{16}=130_8=88_{10}$.

Ответ: **4**

3. Для передачи по каналу связи сообщения, состоящего только из символов А, Б, В и Г используется посимвольное кодирование: А-0, Б-11, В-100, Г-011. Через канал связи передается сообщение: ГБАВАВГ. Закодируйте сообщение данным кодом. Полученную двоичную последовательность переведите в восьмеричный код.

1) DBACACD 2) 75043 3) 7A23 4) 3304043

Решение: Заменяя в сообщении буквы на соответствующий код, получим следующую последовательность: 0111101000100011. Разобьем эту последовательность на триады справа налево: 111 101 000 100 011, представив каждую триаду в виде 8-го числа, получим: 75043

Ответ: **2**

4. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 26, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 22?

Решение: Для решения задачи достаточно рассмотреть следующие числа в троичной системе счисления: 22_3, 122_3, 222_3 и перевести их в десятичную систему счисления:

$22_3=2*3+2=8_{10}$

$122_3=1*3^2+2*3+2=17_{10}$

$222_3=1*3^2+2*3+2=26_{10}$

Ответ: 8, 17, 26

5. Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 513?

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

Решение: $513=512+1$ => $512=2^9 = 1000000000_2$ => $513= 1000000000_2 +1=1000000001_2$

Ответ: 2

6. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 254?

1) 1 2) 2 3) 4 4) 8

Решение: $254=255 - 1$ => $255=2^8-1=11111111_2 – 1=11111110_2$

Ответ: 1

7. Сколько единиц в двоичной записи шестнадцатеричного числа $12F0_{16}$?

Решение: Для решения задачи надо знать двоичное представление шестнадцатеричных чисел.

$F_{16} = 1111_2$, $2_{16} = 0010_2$, $1_{16} = 0001_2$. Следовательно в числе $12F0_{16}$ всего 6 единиц.

Ответ: 6

8. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа

$\mathbf{4^{512} + 8^{512} – 2^{128} – 250}$

Решение: *Общая идея*: количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц.

Сначала приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что $250 = 256 – 4 – 2 = 2^8 – 2^2 – 2^1$:

$4^{512} + 8^{512} – 2^{128} – 250 = (2^2)^{512} + (2^3)^{512} – 2^{128} – 2^8 + 2^2 + 2^1 = 2^{1536} + 2^{1024} – 2^{128} – 2^8 + 2^2 + 2^1$

Старшая степень двойки – 2^{1536}, двоичная запись этого числа представляет собой единицу и 1536 нулей, то есть, состоит из 1537 знаков.

Остаётся найти количество единиц.

Вспомним, число $2^N–2^K$ при $K < N$ записывается как $N–K$ единиц и K нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$

Для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N–2^K$, причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию.

В нашем выражении $2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^{8} + 2^{2} + 2^{1}$ стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу.

Используем равенство $-2^{N} = -2^{N+1} + 2^{N}$, так что $-2^{128} = -2^{129} + 2^{128}$; получаем:
$2^{1536} + 2^{1024} - 2^{129} + 2^{128} - 2^{8} + 2^{2} + 2^{1}$
Здесь две пары $2^{N}-2^{K}$, а остальные слагаемые дают по одной единице.
Общее число единиц равно: 1 + (1024 – 129) + (128 – 8) + 1 + 1 = 1018
Таким образом, количество значащих нулей равно: 1537 – 1018 = 519
Ответ: 519

9. Некоторое число *X* из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8, 2. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены знаком *:

$$\mathbf{X = 10******_2 = *4*_8 = *2_{16}}$$

Определите число *X*.

Решение: Для решения задачи воспользуемся двоичным представлением шестнадцатеричных и восьмеричных чисел.
$2_{16} = 0010_2$. Следовательно, последняя цифра у восьмеричного числа – 010, т.е. тоже 2, а $4_8 = 100_2$. Таким образом, мы нашли все 6 неизвестных цифр для первого числа - 10100010_2. Идем обратно и получаем восьмеричное число – 242_8 и шестнадцатеричное – $A2_{16}$. Теперь легко получить десятичное число. Так как $A_{16} = 10_{10}$, то 10*16+2 = 162.
Ответ: 162

10. Для хранения целого числа со знаком используется один байт. Сколько единиц содержит внутреннее представление числа (-78)?
1) 3 2) 4 3) 5 4) 6
Решение:

1) переводим число 78 в двоичную систему счисления:
$$78 = 64 + 8 + 4 + 2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 1001110_2$$
2) по условию число занимает в памяти 1 байт = 8 бит, поэтому нужно представить число с помощью 8 разрядов, причем старший разряд - знаковый
3) в прямом коде число будет представлено в виде:
$$11001110_2$$
4) делаем инверсию битов (заменяем везде, кроме знакового разряда, 0 на 1 и 1 на 0) и получим число в обратном коде:
$$11001110_2 \quad \rightarrow \quad 10110001_2$$
5) добавляем к результату единицу и получим число в дополнительном коде:
$$10110001_2 + 1 = 10110010_2$$
6) в записи этого числа 4 единицы

Ответ: 2

11. Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N?

Решение 1: Начнем с двоичной системы. Для хранения числа 67 необходимо 7 цифр, т.к. 64<67<128. $128=2^7$. Рассмотрим троичную систему. Для хранения числа 67 нужно 4 цифры, т.к. 27<67<81. $81=3^4$. Следовательно, троичная система удовлетворяет условию: "число содержит 4 цифры". Теперь необходимо проверить, удовлетворяет данная система условию: "число оканчивается на 1". Для этого нужно перевести 67_{10} в троичную систему. Но полный перевод делать не надо, т.к. нас интересует только первый остаток, на него и будет оканчиваться 67 в троичной системе.

```
67|_3_
_6_ 22
 7
 _6_
 1
```

Остаток равен 1. Следовательно, и второе условие выполнено, поэтому троичная система подходит. Основание троичной системы равно 3.

Ответ: 3

Решение 2: Так как запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1. Таким образом можно записать, что при некотором целом k :

$$k \cdot N + 1 = 67 \;\Rightarrow\; k \cdot N = 66$$

Из последнего выражения видно, что N (основание системы счисления) является делителем числа 66. Делителями числа 66 являются следующие натуральные числа: 2, 3,6, 11, 22, 33, 66.

Но нам известно, что запись числа содержит 4 цифры, то есть $1000_N \le 67 < 10000_N \quad \Rightarrow \quad N^3 \le 67 < N^4$

Выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел, которые являются делителями числа 66:

$$2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 6^3 = 216, ...$$

$$2^4 = 16,\ 3^4 = 81, ...$$

Видно, что из этого списка только для числа N = 3 выполняется условие $N^3 \le 67 < N^4$. Таким образом, ответ – 3.

Проверим это, переведя число 67 в троичную систему: $\mathbf{67_{10} = 2111_3}$

Ответ: 3

12. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1.ААААА
2.ААААО
3.ААААУ
4.АААОА
……

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение: Из списка видно, что используются только символы: "А", "О", "У". Пусть "А"=0, "О"=1, "У"=2.

Список после замены станет таким:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00010

Видно, что это числа, идущие по порядку от нуля в троичной системе. В десятичной системе счисления список бы был таким: 0, 1 , 2, 3.

Нам нужно найти, какое число будет стоять на 240 месте. Т.к. список чисел начинается с нуля, следовательно, нам нужно перевести число 239 в троичную систему счисления. Получим число: 22212_3. Переведем обратно в символы: УУУОУ.

Ответ: УУУОУ

13. В таблице ниже представлена часть кодовой таблицы ASCII:

Символ	**1**	**5**	**A**	**B**	**Q**	**a**	**b**
Десятичный код	49	53	65	66	81	97	98
Шестнадцатеричный код	31	35	41	42	51	61	62

Каков шестнадцатеричный код символа “q” ?

Решение: Q-A=81-65=16 => q-a=16 => q-97=16 => q=97+16=113 => $113_{10}=71_{16}$

$$\begin{array}{r|l} 113 & \underline{16} \\ \underline{112} & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Ответ: 71

14. Решите уравнение $60_8 + x = 120_7$.

Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

Решение: Надо перевести все числа в десятичную систему, решить уравнение и результат перевести в шестеричную систему:

1) $60_8 = 6 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 48,\quad 120_7 = 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 = 63$
2) из уравнения $48 + x = 63$ получаем $x = 15$
3) переводим 15 в шестеричную систему счисления: $15 = 2 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 23_6$

Ответ: 23

15. Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

Решение: если запись числа в системе счисления с основанием N заканчивается на 0, то это число делится на N нацело, поэтому в данной задаче требуется найти наименьшее натуральное число, которое делится одновременно на 3 и на 5, то есть это число15.

Ответ: 15

16. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 2 в записи чисел 10, 11, 12, …, 17 в системе счисления с основанием 5.

Решение (вариант 1):

При решении задачи надо помнить, что в 5-ой системе счисления самая старшая цифра – 4.

Запишем первое и последнее число в заданном диапазоне в системе счисления с основанием 5:

$$10 = 20_5, \quad 17 = 32_5 .$$

Оба они содержат цифру 2, так что, 2 цифры мы уже нашли.

Между 20_5 и 32_5 есть еще числа:

$$21_5,\ 22_5,\ 23_5,\ 24_5,\ 30_5,\ 31_5.$$

В них 5 цифр 2 (в числе 22_5 – сразу две двойки), поэтому всего цифра 2 встречается 7 раз.

Ответ: 7

Решение (вариант 2):

Можно перевести все указанные числа в систему счисления с основанием 5 и подсчитать количество 2:

$$10 = 20_5,\ 11 = 21_5,\ 12 = 22_5,\ 13 = 23_5,\ 14 = 24_5,\ 15 = 30_5,\ 16 = 31_5,\ 17 = 32_5 .$$

Получается 7 штук.

Ответ: 7

17. Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 30 трехзначна.

Решение (вариант 1): Обозначим через N неизвестное основание системы счисления, тогда запись числа 30 в этой системе имеет вид: $x\ y\ z_N = 30$

Любое число в позиционной системе счисления можно представить в виде многочлена по основанию системы счисления:

$$\overset{2}{x}\ \overset{1}{y}\ \overset{0}{z}_N = x \cdot N^2 + y \cdot N + z = 30$$

По условию задачи запись числа трехзначная, т.е. $x \neq 0$, поэтому:

$$N^2 \le 30 < N^3$$

Из неравенства видно, что подходят только два числа для N – 4 и 5:

$$4^2 = 16 \le 30 < 4^3 = 64$$

$$5^2 = 25 \le 30 < 5^3 = 125$$

Минимальное из этих значений – 4.

Ответ: 4

Решение (вариант 2): Так как число по условию трехзначное, то достаточно найти первое целое число, куб которого больше 30; это - 4, так как:

$$3^3 = 27 < 30 < 4^3 = 64$$

Так как $4^2 = 16 \le 30$, следовательно, в системе счисления с основанием 4 запись числа 30 трехзначна.

Ответ: 4

18. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, запись которых в системе счисления с основанием 5 начинается на 3?

Решение (вариант 1): Сначала определим, сколько цифр может быть в этих числах, записанных в системе счисления с основанием 5. Так как $5^2 < 30 < 5^3$, в интересующих нас числах может быть от 1 до 3 цифр.

Трехзначные числа, начинающиеся на 3 в системе с основанием 5 можно представить:

$$3xy_5 = 3 \cdot 5^2 + x \cdot 5 + y$$

Все они заведомо не меньше $3 \cdot 5^2 = 75 > 30$, поэтому в наш диапазон не попадают. Таким образом, остается рассмотреть только однозначные и двухзначные числа. Есть всего одно однозначное число, начинающееся на 3, это 3.

Общий вид всех двузначных чисел, начинающихся на 3 в системе с основанием 5:

$$3 \cdot 5 + k = 15 + k ,$$

где k – целое число из множества {0, 1, 2,3,4} (поскольку система счисления имеет основание 5 и цифр, больших 4, в записи числа быть не может).

Используя эту формулу, находим интересующие нас двузначные числа – 15, 16, 17, 18 и 19.

Ответ: 3, 15, 16, 17, 18, 19

Решение (вариант 2): Поскольку $30 = 110_5$, в интересующих нас числах может быть не более 2 цифр (все трехзначные пятеричные числа, начинающиеся с 3, больше 30). Есть всего одно однозначное число, начинающееся на 3, это 3. Выпишем все пятеричные двузначные числа, которые начинаются с 3, и переведем их в десятичную систему: $30_5 = 15$, $31_5 = 16$, $32_5 = 17$, $33_5 = 18$ и $34_5 = 19$.

Ответ: 3, 15, 16, 17, 18, 19

19. Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления x, при котором $225_x = 405_y$? Ответ записать в виде целого числа.

Решение: Поскольку в левой и в правой частях есть цифра 5, оба основания больше 5, то есть перебор имеет смысл начинать с $x = x_{\min} = 6$.

Для каждого «подозреваемого» x вычисляем значение $225_x = 2 \cdot x^2 + 2x + 5 = N$ и решаем уравнение $N = 405_y = 4 \cdot y^2 + 5$, причем, нас интересуют только натуральные $y > 5$.

Для $x = 6$ и $x = 7$ нужных решений нет, а для $x = 8$ получаем

$$N = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 5 = 149 = 4 \cdot 6^2 + 5$$

так что $y = 6$.

Ответ: 8

20. Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 6 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.

1) $63_{10} * 4_{10}$ 2) $F8_{16} + 1_{10}$ 3) 333_8 4) 11100111_2

Решение: Нужно перевести все заданные числа в двоичную систему, подсчитать число единиц и выбрать наибольшее из чисел, в которых ровно 6 единиц.

Для первого варианта переведем оба сомножителя в двоичную систему:

$63_{10} = 111111_2$ $4_{10} = 100_2$

В первом числе ровно 6 единиц, умножение на второе добавляет в конец два нуля:

$63_{10} * 4_{10} = 111111_2 * 100_2 = 11111100_2$

то есть в этом числе 6 единиц.

Для второго варианта воспользуемся связью между шестнадцатеричной и двоичной системами счисления: каждую цифру шестнадцатеричного числа можно переводить отдельно в тетраду (4 двоичных цифры):

$F_{16} = 1111_2$ $8_{16} = 1000_2$ $F8_{16} = 1111\ 1000_2$

после добавления единицы $F8_{16} + 1 = 1111\ 1001_2$ также получаем число, содержащее ровно 6 единиц, но оно меньше, чем число в первом варианте ответа.

Для третьего варианта используем связь между восьмеричной и двоичной системами: каждую цифру восьмеричного числа переводим отдельно в триаду (группу из трёх) двоичных цифр:

$333_8 = 011\ 011\ 011_2 = 11011011_2$

это число тоже содержит 6 единиц, но меньше, чем число в первом варианте ответа.

Последнее число 11100111_2 уже записано в двоичной системе, оно тоже содержит ровно 6 единиц, но меньше первого числа

Таким образом, все 4 числа, указанные в вариантах ответов содержат ровно 6 единиц, но наибольшее из них – первое

Ответ: 1

21. Даны 4 целых числа, записанные в двоичной системе:

10001011, 10111000, 10011011, 10110100.

Сколько среди них чисел, больших, чем $A4_{16} + 20_8$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение: Надо перевести $A4_{16} + 20_8$ в двоичную систему счисления, разложив их по тетрадам для 16-х чисел и по триадам для 8-х чисел: $A4_{16}$ - 10100100_2 и 20_8 - 10000_2 и поразрядно сложить: $10100100_2 + 10000_2 = 10110100_2$. Сравнив с заданными числами, видим, что только одно число больше полученного, это: 10111000.

Ответ: 1

22. Найти сумму восьмеричных чисел $17_8 + 170_8 + 1700_8 + ... + 1700000_8$, перевести в 16-ую систему счисления. Найдите в записи числа, равного этой сумме, третью цифру слева.

Решение: Несложно выполнить прямое сложение восьмеричных чисел, там быстро обнаруживается закономерность:

$17_8 + 170_8 = 207_8$

$17_8 + 170_8 + 1700_8 = 2107_8$

$17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 = 21107_8$

$17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 = 211107_8$

$17_8 + 170_8 + 1700_8 + 17000_8 + 170000_8 + 1700000_8 = 2111107_8$

Переведем последнюю сумму через триады в двоичный код (заменяем каждую восьмеричную цифру на 3 двоичных):

10001001001001000111_2

Теперь разбиваем цепочку на тетрады (группы из 4-х двоичных цифр), начиная справа, и каждую тетраду представляем в виде шестнадцатеричной цифры 89247_{16}

Третья цифра слева: 2.

Ответ: 2

23. В системе счисления с некоторым основанием число 17 записывается в виде 122. Укажите это основание.

Решение: Обозначим искомое основание системы счисления через *x*, тогда можно записать выражение:

$17 = x^2+2x+2$ или $x^2+2x-15 = 0$. Решив это уравнение, получим $x=3$.

Ответ: 3

12. Задания для тренировки

1. Дано: $a = EA_{16},\ b = 354_8$. Какое из чисел С, записанных в двоичной системе счисления, удовлетворяет неравенству $a < C < b$?

1) 11101010_2 2) 11101110_2 3) 11101100_2 4) 11101011_2

2. Чему равна сумма чисел 44_8 и 59_{16}?

1) 103_{10} 2) 1011_2 3) $A1_{16}$ 4) 175_8

3. Для передачи по каналу связи сообщения, состоящего только из символов А, Б, В и Г используется посимвольное кодирование: А-10, Б-11, В-110, Г-0. Через канал связи передается сообщение: ВАГБААГВ. Закодируйте сообщение данным кодом. Полученную двоичную последовательность переведите в шестнадцатеричный код.

1) D3A6 2) 62032206 3) 6A3D 4) CADBAADC

4. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 30, запись которых в четверичной системе счисления оканчивается на 31?

5. Сколько единиц в двоичной записи числа 127?

1) 1 2) 2 3) 6 4) 7

6. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 65?

1)2 2) 4 3) 5 4) 6

7. Сколько нулей в двоичной записи шестнадцатеричного числа $C3E1_{16}$?

8. Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2016} - 2^{2018} + 8^{800} - 80$

9. Некоторое число *X* из десятичной системы счисления перевели в системы счисления с основаниями 16, 8, 4, 2. Часть символов при записи утеряна. Позиции утерянных символов обозначены знаком *:

$$\mathbf{X = E{*}_{16} = {*}5{*}_8 = {*}{*}{*}1_4 = {*}{*}{*}{*}{*}1{*}{*}_2}$$

Определите число *X*.

10. Для хранения целого числа со знаком используется один байт. Сколько единиц содержит внутреннее представление числа **(-35)**?

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

11. Запись числа 53_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 3 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N?

12. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1.ААААА
2.ААААО
3.ААААУ
4.АААОА
……

Запишите слово, которое стоит на 200-м месте от начала списка.

13. В таблице ниже представлена часть кодовой таблицы ASCII:

Символ	**1**	**5**	**J**	**K**	**P**	**j**	**k**
Десятичный код	49	53	74	75	80	106	107
Шестнадцатеричный код	31	35	4A	4B	50	6A	6B

Каков шестнадцатеричный код символа «р» ?

14. Решите уравнение $42_5 + x = 1122_3$.
Ответ запишите в четверичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

15. Запись натурального числа в системах счисления с основанием 4 и 6 заканчивается на 0. Найдите минимальное натуральное число, удовлетворяющее этим условиям.

16. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 13, 14, 15, …, 23 в системе счисления с основанием 4.

17. Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 50 двузначна.

18. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием 6 начинается на 4?

19. Запись числа 65_8 в некоторой системе счисления выглядит так: 311_N. Найдите основание системы счисления N.

20. Даны 4 числа, они записаны с использованием различных систем счисления. Укажите среди этих чисел то, в двоичной записи которого содержится ровно 5 единиц. Если таких чисел несколько, укажите наибольшее из них.
1) $31_{10} * 8_{10} + 1_{10}$ 2) $F0_{16} + 1_{10}$ 3) 351_8 4) 11100011_2

21. Даны 4 целых числа, записанные в двоичной системе:
10001011, 10111000, 10011011, 10110100.
Сколько среди них чисел, больших, чем $A4_{16} + 20_8$?
1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

22. К записи натурального числа в восьмеричной системе счисления справа приписали два нуля. Во сколько раз увеличилось число? Ответ запишите в десятичной системе счисления.

23. Десятичное число 109 в некоторой системе счисления записывается как «214». Определите основание системы счисления.

Дополнительно (для самых умных):
1) Запись числа N в системе счисления с основанием 6 содержит две цифры, запись этого числа в системе счисления с основанием 5 содержит три цифры, а запись в системе счисления с основанием 11 заканчивается на 1. Чему равно N? Запишите ответ в десятичной системе счисления.

2) Найдите основание системы счисления, в которой выполнено сложение: 144 + 24 = 201.

Источники информации:
1. http://www.ege.spb.ru/
2. http://ege.yandex.ru/informatics/
3. http://kpolyakov.narod.ru