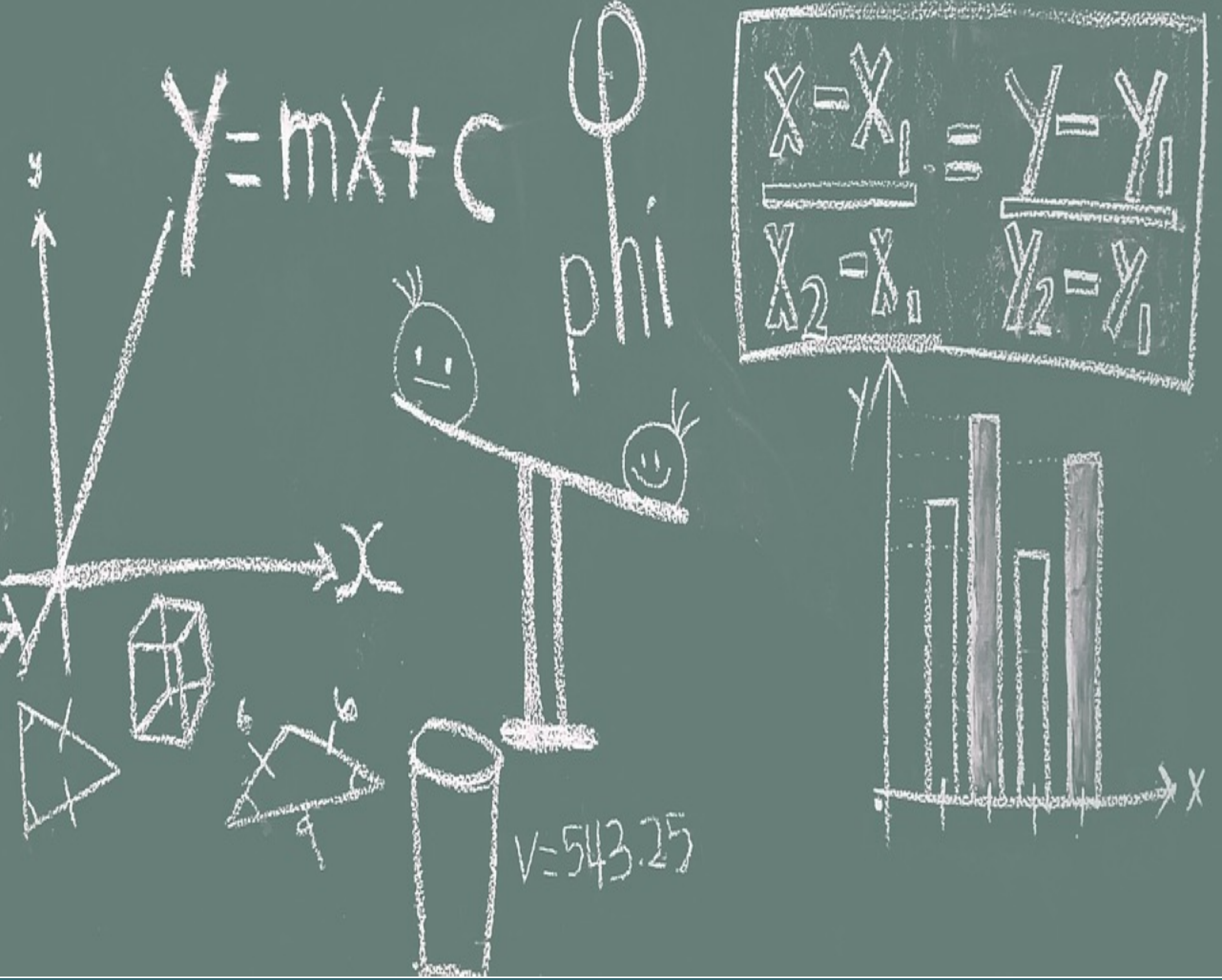

数学教育学: 复习资料

Mathematics Education:prep materials

作者：郭雨阳

时间：2022 年 12 月 3 日

版本：3.8 - 最终版

太阳只会照进成年人的眼睛, 但会通过眼睛照进孩子的心灵. ———爱默生《论自然》

前言

- 本资料的编写选取模板ElegantLaTeX 系列的 ElegantBook, 并有略微改动, 在此感谢作者 Ethan Deng 和 Liam Huang, 以及 ElegantLaTeX Program.
- 考试将从共 25 题中抽取 13 道, 其中必考题已经标出.
- 作答部分题目时可以举例, 但注意尽量不要举和题库中相同的例子.
- 对于解释题需要先解释每个字, 再整句翻译.

目录

第 1 章 论述题

1.1 论述数学活动经验

(1) **基本数学活动经验的定义**

基本数学活动经验是指在数学目标的指引下,通过对具体事物进行实际操作、观察和思考,从感性向理性飞跃时所形成的认识.

(2) **基本数学活动经验的特征**

① 基本数学活动经验是具有数学目标的主动学习的结果.

例 1.1.1

折纸可以是美学欣赏,可以是技能训练,但一旦有了诸如“学习轴对称概念”等的数学目标,就变成了数学活动. ♣

② 基本数学活动经验专指对具体、形象的事物进行实际操作、观察和思考所获得的经验,以区别于广义的抽象数学思维活动所获得的经验.

例 1.1.2

对一堆纽扣进行分类可列入基本数学活动,而将自然数分为质数与合数则属于抽象思维活动. ♣

③ 基本数学活动经验是人们的“数学现实”最贴近现实的部分.

④ 学生积累丰富的数学活动经验,需要和探究性学习联系在一起,使其善于发现日常生活中的数学问题,提出问题,解决问题.

(3) **基本数学活动经验的类型**

① 直接数学活动经验: 直接联系日常生活经验的数学活动所获得的经验.

② 间接数学活动经验: 创设实际情境构建数学模型所获得的数学经验.

③ 专门设计的数学活动经验: 由纯粹的数学活动所获得的经验.

④ 意境联结性数学活动经验: 通过实际情境与意境的沟通,借助想象体验数学概念和数学思想所获得的数学经验.

(4) **积累数学活动经验的教学策略**

数学活动经验的累积过程是学生主动探索的过程.

① 数学活动应该成为数学学习的有机组成部分.

② 数学活动来源于日常生活,但是高于日常生活.

③ 拓展生活现实领域,扩大数学经验的范围.

1.2 论述数学的研究对象是抽象的、形式化的思想材料

(1) **抽象的思想材料**

数学以外的科学的研究对象是客观世界的具体物化形式或具体运动形态,用一定的仪器设备可以观测得到. 而对于数学中的研究对象,虽然可能找到它们形成的客观背景,但现实世界中没有这些对象物化形式的实际存在,它们是人类思想抽象的产物.

(2) **形式化的思想材料**

所谓形式化就是将这些抽象的思想材料是用数学的特殊符号语言组织起来,当人们面对一系列数学材料时,看到的仅仅是材料的形式,其所包含的真正内容却是隐藏在形式之中的抽象思想.

例 1.2.1

$\sin x$ 直观上仅仅是一个符号, 一种形式, 但它的真实含义是“直角三角形的一个锐角 x 所对直角边与斜边的比值”, 然而单从符号的形式表面是看不到它的真实含义的, 它的真实含义体现为思想材料,$\sin x$ 只不过是它的表现形式.

1.3 论述数学理论如何反映不同科学领域中不同问题的抽象本质

人在思维中把事物的某一方面特性与其它特性区分开来加以单独考虑, 进而舍弃其它的特性, 保留下来的特性就是抽象出来的事物的本质. 许多不同科学领域的不同问题, 表面看起来是完全不同的, 可一旦将它们用数学语言表述出来的时候, 我们发现它们可以用同一个数学模型来刻画, 这个数学模型就反映了它们的共同性质, 即本质.

例 1.3.1

例如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$ 是最简单的一阶微分方程. 这个微分方程可以用来描述放射性同位素的衰变过程 (化学). 可以用来描述某种细菌的繁殖过程 (生物). 可以用来描述某个条件下的热传导过程 (物理). 也可以用来描述某个地区人口的变化过程 (社会学) 等等.

同一个数学概念能够用来解释物质世界和人类社会的各种问题, 原因在于这一简单的数学概念和理论反映了多种问题的共同本质属性. 正是数学反映了各种不同领域的许多深刻的联系, 从而使数学起到统一和综合各种科学知识的作用. 数学这种通过揭示本质属性实现的统一和综合各种学科知识的功能, 使人类获得了深刻的洞察力, 促进了人类对客观世界的理解.

1.4 论述数学方法的内涵

(1) **数学的主要研究方式是思辨**

由于数学的对象是抽象的、形式化的思想材料, 这就决定了数学研究必然是以思辨的方式进行, 也就是说数学活动是人类抽象的思想活动.

数学的思想活动实际是一种“思想实验”, 与其它实验性科学相比, 数学“思想实验”, 不是在普通实验室里进行的, 数学的“思想实验”以人的大脑为载体, 利用各种思维方式, 对抽象的形式化的思想材料进行加工, 创造出数学成果.

尽管计算机为今天的数学的研究提供了史无前例的技术力量, 但是数学科学的研究工作在很大程度上仍然依靠个人的灵感和创造力, 也就是依赖于个人的思维活动.

(2) **数学中的弱抽象方法**

弱抽象是指在同类的事物中抽取关于数量关系、空间形式或结构关系方面的共同属性, 舍弃其它的特征, 从而形成新的数学概念. 其本质在于“舍弃”.

用弱抽象得到的数学对象, 一般表现为概念外延的扩大和内涵的减少. 一般来说, 只有内容结构较为丰富的对象, 才能成为弱抽象的原型.

弱抽象是“特殊到一般”的过程, 因而实际是归纳推理过程, 这个过程比较直观, 是通过直接经验来建构新的数学概念. 更贴近学生的思维水平, 更容易理解.

例 1.4.1

自然数“3”的概念就是弱抽象产物. 在“三只鸡”,“三个苹果”,“三个球”等这类事物中,“个数 3”是它们的共同本质属性, 于是“3”被抽象出来, 而“鸡”、“苹果”、“球”都是非本质属性而被舍弃.

(3) **数学中的强抽象方法**

强抽象是指把新的特征或属性添加到已有的数学结构中, 从而形成新的数学概念. 其本质是“添加”.

强抽象是一种概念强化式的抽象, 这样获得的新概念或理论, 实际上是原型的特例. 强抽象方法获得的数学对象, 一般在概念的外延上缩小了, 但却使内涵或结构更加丰富和具体. 强抽象方法的本质在于, 强抽象是将不同数学概念或结构有机的结合的过程.

强抽象是“一般到特殊”的过程, 因而实际是演绎推理的过程, 这个过程比较直接, 但不易理解. 用这种方法建构新的数学概念, 对思维水平要求要高一些.

例 1.4.2

- 由一般三角形概念, 引入“两条边相等”, 或“一个角是直角”的特性, 就分别得到比较特殊的三角形概念: 等腰三角形和直角三角形.
- 在函数概念中, 引入“连续性”就形成了“连续函数”的新概念, 进而有“可微函数”的概念.
- 点、线、面这些几何元素同各种变换相结合, 即在点、线、面这些几何元素中分别引进不同的变换关系, 就产生了合同、相似、仿射、射影、是高等几何概念.

♣

1.5 论述数学抽象的形式化特点

(1) **数学语言的形式化**

数学语言的形式化, 首先表现为符号化. 数学符号是数学抽象物的表现形式, 是数学存在的具体化身, 是对现实世界数量关系、空间形式和结构关系反映的结果. 按一定规则组织起来, 就成为数学思想材料的物质载体——数学语言.

数学语言的形式化就是用一套有数学含义的符号体系来表述数学对象的结构和规律, 从而把对数学具体对象的研究, 转化为对符号形式的研究. 这些数学符号代表了特定的数学含义, 但是仅仅看它的表面并不能看出它内在的意义, 因而是一种形式, 只有懂得它的意义的人, 才能把这个形式与它的意义联系起来.

例 1.5.1

- 勾股定理-直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方, 可以形式化为: 如果 $\triangle ABC$ 中 $AB \perp AC$, 那么 $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- 方程组 $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$ 也是形式化的表示, 它的真正含义是“是否存在同时满足这三个等式的一组数值 (x, y, z)”. 在 Viète 以前, 方程不是用这个符号的“形式”表述的, 那时方程的表示要复杂的多.
- 描述函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言: 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 可得 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-c| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 c 点的极限为 A.
  进一步形式化就是:$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当$0 < |x-c| < \delta$时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon \to \lim\limits_{n \to c} f(x) = A$.

♣

(2) **数学概念、命题的形式化**

数学语言中有一个共同的句法形式——“如果…那么…”或者“若…则…”. 也就是数学的论断都是建立在“假设”的基础之上, 如果假设不成立, 那么论断也就不成立了. 在数学的公理体系中, 公理本身就是“假设”, 然后按照逻辑演绎的方法经过“真值传递”形成数学的科学真理. 由假设推出结论, 就是一种“形式化”推理. 因此数学的概念、命题都是一些形式.

(3) **数学形式化的特征**

数学的符号化是数学形式化的一部分, 因此数学的形式化不等于数学的符号化. 形式化和符号化的差别在于: 数学的符号化着眼于各种数学抽象物本身及其关系的形式上的表述, 而形式化着眼于各种数学抽

象物之间本质联系的形式上的表述, 目的是把纯粹的数量关系、空间形式和结构关系以简洁明了的形式加以表示, 以便揭示各种抽象物的数学本质和规律.

数学符号是数学抽象物的表现形式, 每一个数学符号都代表了相应的数学抽象物, 因而就具有了相应数学抽象物的思想内容, 只不过这些思想内容隐藏在符号形式的背后, 数学符号形式和它的思想内容是一个完整的整体.

对数学形式化有一个正确的认识, 对数学教育而言十分重要, 它向教师和学生强调了数学教与学的活动中, 不仅要掌握数学对象的形式, 更要理解数学形式所包含的数学对象的本质属性, 透过形式抓住本质.

1.6 论述数学的严谨性由公理化的结构决定

(1) **数学公理化的由来**

一般来说, 所有的数学证明都是归结为逻辑论证. 但是如果定理 A 由定理 B 导出. 而定理 B 由定理 C 导出, 定理 C 又是由更前面的定理推出, 为了避免"无限向前递推"的情况, 就采用这样的方法: 将某些概念以及它们之间的关系当作原始的, 不加定义的, 而所有以后的概念和性质都以精确的定义和逻辑论证的方法, 从原始概念导出. 这种建立科学学科的过程就是公理化, 其中那些原始的不加定义的概念和关系就是公理. 第一个用这种方法建立数学学科的是 Euclid 的《几何原本》.

(2) **数学公理化的发展**

数学的公理化本质上反映了数学的内部组织形式, 数学公理化发展经历了实质公理系统的第一阶段, 形式公理系统的第二阶段, 才完成了数学内部组织精确化、完善化的过程. 特别在公理化发展的第二阶段, 人们从非欧几何的公理体系中看到, 数学的公理可以违背人的感性直观, 并不是什么自明之理, 数学公理是对数学对象的性质的约定. 公理对不对, 这个问题对数学家没有意义. 数学家关注的是, 如果某一对象适合于这些公理, 那么它一定也适合于从公理推出的定理. 此时, 数学家眼中的公理已经完全脱离了实际意义, 仅仅是一种形式. 这就是形式公理体系. 这样一来, 公理化就不再局限在几何的范围. 现代数学中, 集合论, 近似代数、实泛函分析等都属于形式公理体系.

(3) **数学公理化的缺陷**

数学的公理化也有局限性, 并不能解决数学中的一切问题. 逻辑推理的这种传递真值的作用, 可以保证按照某一公理系统建立起来的某一数学理论体系, 具有逻辑相容性, 即在逻辑上是无矛盾的. 这的确表明数学在逻辑上是高度严谨的. 但命题在真正意义上是否正确要追溯到作为逻辑推导的命题最初出发点的那些公理是否正确. 而决定那些不加证明的数学公理的真值性的保证, 只能是数学家们亲身工作的实践. 数学家在自己的实践中, 使自己的认识不断地同客观的规律接近, 不断地认识数学对象的深刻本质, 从中确定数学真值. 在这个意义上, 数学并不是绝对严谨的.

1.7 论述数学教学是数学活动的教学

(1) **数学教学是学生在教师的引导下进行的积极的数学活动**

数学教学是学生在教师的引导下进行的积极的数学活动, 由此获得数学知识经验、思维能力和情感态度等各方面的持续发展. 因此, 数学教学具有数学活动的特征, 同时也具有学生相应水平上的思维活动的特征.

(2) **数学活动在大多数情况下是抽象的、形式化的思想活动**

将数学教学界定为数学活动的教学, 是对数学教学本质的准确把握. 这可以从两个方面来理解:

① 数学知识的形成是从生活实践活动中逐步积累的结果, 具有以活动为基础的经验知识历次精微的过程性特征.

② 无论是数学家探索、发现数学的过程, 还是数学学习者的再发现过程, 总是处于一定的活动状态中, 并总是在活动中得以发展的.

(3) **数学活动的教学具有内外统一性**

数学教学中的数学活动既有外部的具体行为操作, 又有内部的抽象思维动作, 是学生的由外及里的活动, 并且以内部的积极思维活动为主要形式. 数学教学过程以数学活动的形式出现, 就更容易调动学生的学习积极性, 更容易激活学生的思维, 更容易促进思维动作的协调运用, 有利于学生思维的发展和思维水平的提高.

1.8 论述数学活动发生的逻辑必要条件

(1) **引起学生学习的心向**

数学活动的内容和环境必须能够激起学生的兴趣和求知欲, 使学生自觉地参与数学活动的心向, 这样才能使数学活动的发生自然而有意义. 因此, 是否引起了学生学习的心向是判断数学活动是否发生的一个重要标志.

(2) **数学活动内容具有潜在逻辑性**

数学新知识的呈现要以学习者的认知结构中是否有适当的知识可与之建立非人为和实质性的联系为依据, 这也是有意义学习的基本条件. 从教学的角度讲, 关键是如何组织、加工数学新知识使之与学生已有的知识发生逻辑关联. 这是数学活动顺利进行的重要保障.

(3) **数学活动要以学生的已有学习为基础**

学生已有的学习、已有的知识是数学活动中新知识的生长点或固着点, 以此为基础学习者才能进行有效的自主建构活动, 这也是建构主义教学的基本观点.

(4) **学生要具备参与数学活动的“思维潜能”**

具备相应的思维潜能, 是数学有意义学习的基本条件. 从教学的角度讲, 就是要求设计数学活动时, 要充分认识学生思维潜能的现有发展水平. 如果脱离学生的实际思维水平, 将会使数学教学流于形式, 必然给学生理解、建构知识的过程起到阻碍作用, 这样的数学活动无疑是低效、盲目的.

1.9 论述数学教学过程的因素

教师、学生、教学内容、教学方法是数学教学过程的最基本的因素, 它们相互依存、相互作用、相互制约, 形成一道完整的教学链条.

(1) **教师: 教学向导的主角**

教师是教的主体, 但教师的主体作用体现为另一个主体——学生的“向导和引路人”. 课堂里有许多教学向导, 教师是向导, 课本是向导, 图像是向导, 同学之间也可以互为向导, 但是所有的教学向导中的主角是教师. 教学是离不开教师的:

① 教师是教学目标的贯彻者.

② 教师是数学知识的传授者.

③ 教师是学生进行数学学习的合作者.

④ 教师是整个数学教学过程的组织者、引导者和调控者

注 虽然不依赖教师的指导也可以进行数学学习, 但这种自我进行的学习本质上不属于数学教学活动.

(2) **学生: 学的活动的主体**

学生的主体功能体现为积极的智力参与、个人体验以及主动的意义建构.

在数学教学过程中, 虽然学生自身的年龄特点与认识水平以及数学学科特点决定了学生的学习活动总是在教师的引导下进行, 但是教师的指导和帮助对学生来说归根到底只是一种外因. 从根本上讲, 无论是数学知识的掌握, 还是数学能力的发展以及个性心理品质的形成, 都不是教师所能教会的, 而是学生在教师的引导下主动获得的. 因此, 数学教学过程的各项任务不应当靠教师强行要求学生去被动地完成, 而应当最大限度地调动学生自主参与探究、发现的积极性, 靠学生的主观努力主动完成.

学生在数学教学过程中有其认识的特殊性:

① 学生的**认识对象**以间接经验为主.

② 学生的**认知条件**是在教师的指导下进行.

③ 学生的**认知任务**不仅在于掌握数学的基本知识和基本技能, 还要发展数学思维能力和创新能力.

(3) **教学内容: 师生活动的载体**

教学内容是教师引导学生学习的客观依据和信息源泉, 是教学过程中教师与学生、学生与学生发生相互作用的中介. 教学不是随意进行的, 必须依照一定的教学内容和教学要求展开, 它们同时也是教学质量评价的标准.

在数学教学过程中, 教师应以显性的知识为线索, 通过自己的思维活动去再现隐藏在教材背后的鲜活的探索和发现活动, 引导学生积极参与、主动探究, 尽可能地 "再创造"、"再发现" 教材中的数学知识, 在此基础上建构合理的数学认知结构.

(4) **教学方法: 指引教学过程展开的行动方式**

教学方法是由许多教学方式和手段构成的, 教师需要根据具体的数学教学内容、教学环境和条件、学生的实际认知水平等情况灵活的选用, 使教学方法与数学教学过程的其它要素协调起来, 才能达到理想的教学效果.

数学教学过程的各个要素之间虽然有各自独立的地位和作用, 但它们又是一个相互关联的整体. 教学过程的效率和成绩并不取决于单个构成要素的水平, 而是取决于四个要素之间动态组合的水平. 只有当各构成要素都能最大限度地发挥其功能时, 才能实现数学教学过程的整体优化.

1.10 论述波利亚解题理论 (解题表、波利亚提问), 并能够根据具体题目使用解题表【必考】

(1) 理解问题

① 未知量是什么?

② 已知量什么?

③ 条件是什么? 是否充分?

④ 能否画图?

⑤ 能否用自己的方式叙述问题?

(2) 拟定方案

① 以前有没有见过相似或相关问题?

② 以前用过的方法这次能否适用?

③ 不相似的地方是否需要引入辅助假设?

④ 条件有没有用足?

⑤ 能不能构造比现在更简单的问题, 先解决简单的?

⑥ 如果微调已知数、条件, 甚至改变求解的未知数, 能否找到解题线索?

(3) 执行方案

① 每一步都检查过了吗?

② 能证明每一步都是正确的吗?

(4) 回顾检查

① 结果检查了吗?

② 论证过程检查了吗?

③ 能否用另外的方法推出结果?

④ 能否将方法用于解决其他题目?

例 1.10.1

已知长方体的长、宽、高, 求其对角线长度.

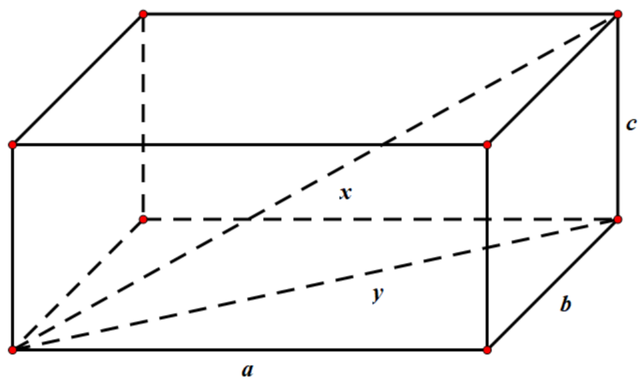

图 1.1: 长方体对角线求解示意图

解 利用波利亚的解题理论解决具体问题, 方法如下:

step.1 理解问题

首先, 必须了解问题的文字叙述:

① Q: 未知量是什么?
A: 长方体对角线的长度.

② Q: 已知量是什么?
A: 长方体的长、宽、高.

③ Q: 条件是什么? 是否充分?
A: 条件是长方体的结构特征. 是充分的. 如果我们知道长方体的长宽高, 我们就能确定一个长方体. 如果长方体被确定, 则对角线也被确定了.

④ Q: 能否画图?
A: 能, 如图1.1所示.

⑤ Q: 能否用自己的方式叙述问题?
A: 引入适当的符号: 已知长方体的长、宽、高分别为 a, b, c, 求其对角线长度 x.

step.2 拟定方案

① Q: 以前有没有见过相似或相关问题?
A: 有, 如求长方形的对角线长度.

② Q: 以前用过的方法这次能否适用?
A: 能, 但需要多次使用.

③ Q: 不相似的地方是否需要引入辅助假设?
A: 需要, 作出长方体任意一个面的任意一条对角线.

④ Q: 条件有没有用足?
A: 全部使用了.

⑤ Q: 能不能构造比现在更简单的问题, 先解决简单的?
A: 能, 先转化为求长方形的对角线长度问题.

⑥ Q: 如果微调已知数、条件, 甚至改变求解的未知数, 能否找到解题线索?
A: 如转变为求长方体某个面的对角线长度.

step.3 实施方案

如图1.1, 未知数 x 是直角三角形的斜边, 而给定的高度 c 是边长之一, 另一边则是长方体的一个面的对角线, 用 y 表示, 用 a,b 消去辅助未知数 y, 最后将 x 用 a,b,c 表示.

step.4 回顾检查

① Q: 结果检查了吗?
A: 可以换用长方体不同的长、宽、高重新计算, 利用长方体的对称性检查结果.

② Q: 论证过程检查了吗?
A: 长、宽、高在我们的问题中起的作用是一样的, 我们的问题对 a,b,c 来说是对称的. 所得的公式对 a,b,c 是对称的.

③ Q: 能否用另外的方法推出结果?
A: 可以利用向量的加法运算来推导.

④ Q: 能否将方法用于解决其他题目?
A: 如果高 c 减小至零, 这时长方体变成长方形. 令 $c=0$, 就得到了矩形对角线的正确公式.

1.11 论述教学模式与教学方法的区别与联系

(1) **教学模式和教学方法的定义**

① 教学模式 是指在一定教育思想、教育理论和学习理论指导下的, 为完成特定的教学目标和内容围绕某一主题形成的比较稳定且简明的教学结构理论框架及具体可操作的教学活动方式, 教学模式一般都包含着可供教学实施的操作程序和授课的基本策略. 每一种教学模式都反应了一定的教学思想、教育目的、教学原则、和一系列的完整的操作程序和体系等.

② 教学方法 通常是指为达到既定的教学目的, 实现既定的教学内容, 在教学原则指导下, 借助一定的教学手段而进行的师生相互作用的活动方式和措施, 既包括教师教的方法, 也包括学生学的方法, 是教法和学法的统一.

(2) **教学模式和教学方法的区别**

教学模式是对多种教学方法的提炼和组合, 而教学方法经常表现为教学过程中的某一个侧面的一系列操作活动, 但教学方法操作性和详细程度与教学模式相比更高. 教学方法只是教学模式的组成部分, 而教学模式是教学方法的稳定化、系统化和理论化, 是教师在详细的教学活动所参照的标准样式.

(3) **教学模式和教学方法的联系**

教学模式与教学方法二者都是师生为了达成某种教育教学目的, 所采用的各种手段、方法的总和, 都是教学论要研究的重要组成部分.

1.12 论述数学概念的分类

以数学概念所反映的属性的类别为标准, 数学概念可分为以下三类:

(1) **反映数学基本元素的概念**

这类概念反映不同层次的数、式、方程、函数、图形等基本的数学元素, 数学中多数概念均属此类, 它们是数学学科中的基本单元, 是进行数学思维的细胞.

例 1.12.1

整数、有理数、绝对值、分式、根式、一元一次方程、幂函数、三角形、棱柱、椭圆. ♣

(2) **反映关系的概念**

这类概念反映两个或两个以上数学对象之间的某种联系.

例 1.12.2

互为相反数、全等、相似、整除、平行、垂直、互为反函数、等价、包含.

(3) **反映对象特性的概念**

这类概念反映数学元素所具有的某种性质.

例 1.12.3

对称、周期性、单调性、奇偶性、连续性、可导性.

注 前苏联心理学家维果斯基以概念形成的不同心理过程为标准, 将数学概念分为另外两类:

① **日常概念**又称为前科学概念, 它是人们在日常生活中, 通过辨别不同事物, 逐渐积累经验而形成的概念.

② **科学概念**是通过下定义的方式揭示概念的内涵或外延而形成的概念.

1.13 论述给概念下定义时的注意点

(1) **定义必须相称**

例 1.13.1

如果把无理数定义为"有理数的不尽方根数", 就犯了定义过窄的错误, 而把无理数定义为"无限小数", 则犯了定义过宽的错误.

(2) **定义不能循环**

如果用甲概念来定义乙概念, 那么在同一个理论体系中就不能再用乙概念来定义甲概念. 为了避免循环定义的错误, 在一个理论体系中, 必须用已定义过的概念来定义新概念, 如此追溯上去, 总有一些概念不能用其它概念来定义. 这些不加定义的概念叫做原始概念, 比如, 集合、点、线、面等. 原始概念没有严格定义, 常用描述、举例的方法说明它的本质属性, 所以有时也称为描述性概念.

例 1.13.2

用"两直线垂直相交所成的角叫做直角"来定义"直角", 再用"如果两直线所成的角为直角, 那么这两条直线相互垂直"来定义"垂直", 这就犯了循环定义的错误.

(3) **定义可以不唯一**

① 定义的方式不唯一.

例 1.13.3

"质数"可定义为"除了 1 与自身没有其它因数的自然数", 也可定义为"由 $p|ab$ 能推出 $p|a$ 或 $p|b$ 的大于 1 的自然数 p". 同一个概念的不同定义应是相互等价的.

② 定义的语言表达形式不唯一:

例 1.13.4

常见的形式有"……就是……", "……叫做……", "所谓……指的是……", "当且仅当有……时, 才有……"等. 由此可见, 任何定义都是充分必要的.

方程的解的定义"使方程 $f(x) = 0$ 成立的未知数的值", 既包括"如果 α 是方程 $f(x) = 0$ 的解, 则 $f(\alpha) = 0$", 又包括"如果 $f(\alpha) = 0$, 则 α 是方程 $f(\alpha) = 0$ 的解"

(4) **定义是对被定义概念内涵或外延的一种规定**

对概念的定义只能解释, 不能证明.

1.14 论述概念的获得

所谓概念的获得, 就是理解、掌握一类事物的共同的、本质的属性. 也就是说, 能够用符号、词汇表示一类事物, 而不是个别的、特殊的事物. 心理学研究成果表明, 概念获得的形式有两种基本形式——概念的形成与概念的同化.

(1) **概念的形成**

概念形成是儿童在日常生活中获得概念的典型方式. 所谓概念的形成, 就是从大量的实例出发, 通过个体的感知、辨别、比较、归类, 以归纳的方式概括出一类事物的共同属性, 从而获得某概念的方式. 以概念的形成的方式获得概念, 其主要特征是能区分该概念的肯定例证或否定例证.

例 1.14.1

- 学前儿童理解“三角形”这个概念, 最初是听妈妈指着不同形状的物体说“这是三角形”, 然后逐渐积累了区别不同事物形状的经验. 随着时间的推移, 他的认知结构中逐渐形成“三角形”“四边形”的概念, 一旦看到某个物体, 就能说出其形状特征, 并能将之与“四边形”等其它形状的物体区别开来.
- 儿童一旦形成“猫”“狗”等小动物的概念, 就能够从外部特征区分出哪个小动物是“猫”, 哪个小动物是“狗”, 尽管他不能用语言描述“猫”“狗”的本质属性.

♣

在概念形成的过程中, 有以下一些关键要素:

① 观察一定数量的、形式变异的事实材料.

② 分化每一个事实材料的属性.

③ 概括出这些事实材料的共性.

④ 辨析变式材料, 确认关键属性.

(2) **概念的同化**

根据美国的心理学家奥苏贝尔的意义学习理论, 所谓同化, 就是新知识与学习者原有认知结构中的某些观念建立有机的、非人为的实质性的联系, 通过新旧知识的作用, 新知识被纳入原有的认知结构之中, 原有的认知结构得到充实. 因此, 在教学条件下, 学生获得数学概念的另一个基本方式, 就是在学生原在知识经验基础上, 以定义的方式直接揭示概念的关键特征, 由学生通过与已有认知结构中相关概念建立联系来理解、掌握新概念, 这就是概念的同化.

例 1.14.2

“等差数列”概念的学习, 必须在学生掌握了“数列”“项”“两数之差”“常数”等概念的基础上, 给出等差数列的定义:“后项与前项之差为常数”, 将等差数列与其它数列区别开来. 通过概念的形成获得概念更加准确, 并能形成概念体系.

♣

在概念同化过程中, 有以下一些关键要素:

① 学习新概念的已有知识经验.

② 运用定义给出概念的本质属性、名称、符号.

③ 运用定义辨认概念的肯定例证与否定例证.

④ 把新概念纳入到相应的概念体系中, 与已有概念建立有机的联系, 形成一个概念体系.

(3) **概念的教学**

在概念教学过程中, 可以针对学生的年龄特征与数学概念的特点, 综合运用上述两种概念获得的形式. 一般地, 先通过观察、分析适量的、具体的、形式变异的事实材料, 让学生自行概括出这类事物的共同的本质属性, 尝试着给概念下定义, 在这基础上再给出科学定义, 通过定义进一步明确概念的内涵与外延.

1.15 论述如何备好一节课

1. 做好三个方面的工作

(1) 钻研教材

① 钻研课程标准, 弄清课程教学目标和任务, 明确课程基本内容, 规划课程时间分配及教法.

② 钻研教科书, 分析教材的知识结构, 把握重点、难点.

③ 广泛阅读教学参考资料, 选取合适的资料充实和丰富教学内容.

(2) 了解学生

① 了解学生原有的知识水平和接受能力, 学生的兴趣、需要与思想状况, 学生的学习方法和学习习惯等.

② 正确分析并预测学生学习新知识会遇到哪些问题、困难或疑惑等, 以及准备哪些措施进行矫正和改善等.

(3) 设计教法

设计教法是解决如何把已经掌握的教材内容传授给学生的问题, 具体包括如何组织教材、如何安排每一节课的活动、如何运用各种方法开展教学活动等. 此外, 教师也要考虑学生的学法, 包括在预习、课堂学习活动与课外作业中使用的学法等.

2. 写好三个计划

① 学期 (学年) 教学进度计划

② 课题 (单元) 计划

③ 课时计划

3. 教师备课的基本要求

① 要深入准确地把握学科课程标准和教学内容.

② 要有针对性, 适应学生的特点.

③ 要根据社会发展、科技发展和学生对象的变化, 不断更新备课的内容.

④ 要充分和周密考虑教学设计诸因素的关系和结构, 并做好课前的各种准备.

1.16 论述数学课堂教学的导入情境遵循的原则

(1) 目的性原则

教学导入情境必须紧扣将要展开的数学教学内容和教学目标设计, 并充分考虑到学生的现有发展水平, 具有明确的目的性. 不可一味追求新颖、别致效果而偏离教学任务或脱离学生实际, 使教学导入情境盲目、无序.

(2) 针对性原则

教学导入情境必须具有明确的针对性, 不仅要根据不同的教学内容设计相应的导入方式, 而且要使导入情境简洁明快, 尽快准确地切中主题. 如果过多地在外围绕圈子, 就会分散学生关注的焦点问题, 从而降低教学导入的实际效力.

(3) 激励性原则

教学导入情境必须具有较强的吸引力, 能够激发学生积极参与、主动思考, 引导着学生的注意指向. 因而, 不管是以问题、活动材料还是实验情境导入, 都应遵循激励原则, 以便引起学生浓厚的学习兴趣和强烈的求知欲望.

(4) 启发性原则

教学导入情境的主要目的是为整堂课的顺利进行做好铺垫, 应当达到先声夺人、引人入胜的效果. 因而, 导入情境必须具有良好的启发性, 能够向学生明示或暗示所要思考的方向和解决问题的办法.

(5) 探究性原则

数学的学习主要应是学生自发探究的过程, 教学导入情境应当为学生的探究活动创设一定的条件, 使

学生对所要学习的新内容有层次、分阶段地展开探究.

1.17 论述数学课堂教学提问的功能

(1) **激励参与功能**

德国教育家第斯多惠说过: “教学的艺术不在于传授的本领, 而在于激励、唤醒和鼓舞.” 而提出问题正是落实激励学生参与学习的重要手段. 数学教学中提出的问题不仅应具有明确的活动指向性, 而且具有足够的吸引力, 从而使学生自然生成一种问题探索活动的心向, 主动、自觉地参与寻求新的知识. 通过思考问题, 学生的注意力会集中在所学习的内容上, 必然提高各种参与活动的水平, 逐渐使学生成为自我激励、自我引导的学习者, 并在自我监控和反思的过程中, 渐次发展为独立自主的探索者和学习者.

(2) **建构灵活的数学基础知识的功能**

课堂教学中的数学问题一般都是教师围绕所要学习的定理、定义、法则、公式等基础知识结合一定的情境而设计的, 本身涵盖了丰富的信息, 并对数学的基础知识赋予了生动的意义. 学生在思考、探索问题的过程中, 要提取、分析、整理相关信息, 一定程度上亲历了知识的发生发展过程, 对知识的概括出自个人化的深层次理解. 这样的知识由于融入了个体特定数学活动场景中的特定心理体验, 对数学学习者本人而言是鲜活的、有生气的, 是能够灵活加以迁移的.

(3) **发展数学思维能力的功能**

培养学生的逻辑推理能力向来被看作数学思维训练的主要标志, 但这种思维训练又很容易滑向机械模仿式的操作训练. 教师的提问可在一定程度上弥补这种缺陷, 能够引导学生积极思考, 开拓思路, 学会良好的构思和有效地表达自己的看法. 这种提问可以起到示范、启发作用, 教会学生如何发现问题、提出问题. 学生在分析问题和解决问题的过程中, 学会如何进行比较、分析、综合、抽象、概括、演绎和归纳, 从而学会思考问题的方法, 发展数学思维能力.

注 教学中提出的数学问题, 虽然不同于通常意义上的、适于数学家或数学专业人员做研究工作的“非常规”问题, 但这种问题也要求学习者本人在思考、解决问题时, 具备一定的创新意识和批判反省的思维能力, 并在提出假设、探寻途径、反思结论的过程中, 无形中提高了创造性思维、批判性思维以及自我反省思维等高层次数学思维的能力.

(4) **强化反馈功能**

学生在回答问题的过程中, 需要检索、组织所学习的知识及相关的数学思想方法, 从中选取用于解决问题的工具, 通过针对性地不断探索、思考, 使得所学的知识和技能在新的问题情境中得到巩固和强化. 而从教师的角度来讲, 通过提问可以检查学生是否掌握已学过的知识, 及时得到反馈的信息, 了解学生的认知状态, 诊断学生在理解知识和掌握技能方面所遇到的困难和问题, 从而对教学过程进行调整, 并给学生以相应的指导. 这种类型的提问, 几乎每堂课, 甚至每一段落都能凸显它的强化反馈功能. 但提问要力求有新意, 不应局限于简单的回忆、再现和确认.

第 2 章 例谈题

2.1 例谈严谨性与量力性相结合的教学原则

(1) **严谨性与量力性的定义**

① 严谨性 是指对数学结论的叙述必须精确, 结论的论证必须严格、周密, 整个数学内容被组织成一个严谨的逻辑系统. 这个数学的逻辑系统一般的模式为: 提出完备的公理体系, 由此确定尽可能少的基本概念和公理.

② 量力性 要求教师应充分考虑学生思维发展的水平、理解的程度和接受的能力来组织教学, 既不要求过高, 也不要求过低, 要使所授的知识可以让学生接受. 因此, 在数学教学中, 如何安排课程、处理教材、设计方法等都必须考虑青少年的年龄特征, 对数学的严谨性要有一个逐步适应、逐步提高的过程.

(2) **严谨性与量力性相结合的教学原则**

① 认真钻研课程标准、教材, 明确把握教材的严谨性要求. 分析思考课标、教材对各部分内容要求的深浅度, 把握其严谨性要求的高低.

② 在具体的概念和定理等内容的教学中, 不要一下子和盘托出所要学习的概念和定理等全部内容, 要体现出逐层逐步严谨的过程.

③ 在教学中, 要有意识地逐步培养学生言必有据、思考缜密、思路清晰的良好的思维习惯, 这些思维习惯是学生的数学思维严谨性程度高低的主要标志.

④ 在平时, 要在研究学生的年龄特点、个性特点、智力、能力水平方面下工夫. 因为如果教师对学生的能力水平等问题估计不准确, 就不可能贯彻好“严谨性”和“量力性”的原则.

例 2.1.1

椭圆的长轴和长轴长[5] 的两个定义对比:

① A, A_1, B, B_1 四点, 就是椭圆与它的对称轴的交点, 叫做椭圆的顶点, 线段 $AA_1 = 2a$ 叫做椭圆的长轴.

② A, A_1, B, B_1 四点, 就是椭圆与它的对称轴的交点, 叫做椭圆的顶点, 线段 AA_1 叫做椭圆的长轴,$|AA_1| = 2a$ 称为椭圆的长轴长.

♣

2.2 例谈抽象与具体相结合的教学原则

抽象与具体相结合的教学原则是数学教学中抽象思维与生动具体对象统一规律的反映. 在数学教学中既要促使学生通过各种感官去感知数学的具体模型, 形成鲜明的表象, 又要引导学生在感知材料的基础上进行抽象思维, 形成正确的概念、判断和推理. 数学的抽象使它具有高度的概括性, 也使得数学理论能推广到更为广泛的具体对象之中.

从具体到抽象符合学生在学习过程中从感知到理解, 从表象到概念的认识规律. 学生认识数学理论是从生动直觉开始. 理性知识的形成, 必须具有感性知识基础. 只有在此基础上, 进一步区分这些研究对象所共有的, 决定它们性质的本质属性和仅是个别对象特有的非本质属性, 才能在头脑中形成理性知识.

例 2.2.1

学习一元一次不等式时, 先通过生活中大量的实例 (如高速限速、隧道限高等) 给学生以鲜明的形象认识, 在此基础上引入数学符号来刻画数量的不等关系, 调动学生的抽象思维.

♣

第 3 章 解释证明题

3.1 解释并证明:“幂势既同, 则积不容异”[1]

(1) **单字解释**

① 幂: 水平截面积.

② 势: 高.

(2) **句子翻译**

等高的两立体, 若其任意高处的水平截面积相等, 则这两立体体积相等.

(3) **证明方法**

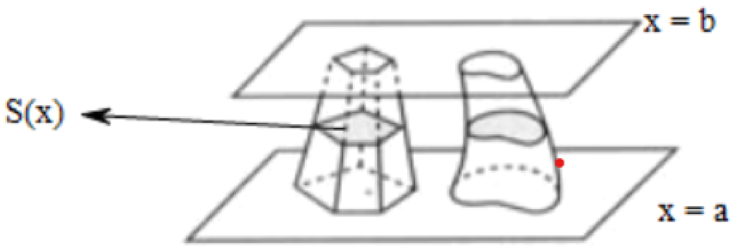

图 3.1: 祖暅原理证明示意图

证明 如图3.1所示, 设从左到右两个柱体分别为 A 和 B

已知 A,B 满足“幂势既同”, 往证其“积不容异”

现 A,B 夹在两水平面 $x = a, x = b$ 之间, 不妨设 $a < b$

用任意平行于水平面的平面截取 A,B, 所截得的面积分别设为 $S_A(x), S_B(x)$

这显然是关于 x 的连续函数, 且有 $S_A(x) \equiv S_B(x)$

先将区间 $[a, b]$ 分为 n 份:$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_n = b$

则 A,B 就被分为了 n 份, 从下往上数第 k 个部分的高度即为 $x_k - x_{k-1}$, 记 $\Delta k = x_k - x_{k-1}$

当 n 很大时, 被分割成的每个小部分近似成直棱柱, 取 $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$

其体积可以表示为 $V_{Ak} = S_A(\xi_k)\Delta k, V_{Bk} = S_B(\xi_k)\Delta k$

那么整个柱体的体积即为 $V_A = \sum\limits_{k=1}^{n} S_A(\xi_k)\Delta k, V_B = \sum\limits_{k=1}^{n} S_B(\xi_k)\Delta k$

下令 $\max\limits_{k} \Delta k \to 0$. 则由定积分的定义,$V_A = \int_a^b S_A(x)\mathrm{d}x, V_B = \int_a^b S_B(x)\mathrm{d}x$

进而有 $V_A = V_B$, 证毕

3.2 解释:“不愤不启, 不悱不发, 举一隅不以三隅反, 则不复也”

(1) **单字解释**

① 愤: 思考问题时有困难想不明白.

② 启: 启发.

③ 悱: 想表达却说不出来.

④ 隅: 角落, 方面.

⑤ 复: 反复.

(2) **句子翻译**

不到他想弄懂而弄不懂的时候不去启发他, 不到他想说什么而说不出的时候不去引导他, 告诉他一方, 他不能类推其余的三方, 也就不再重复告诉他了.

(3) **句子理解**

这句话出自于《论语》, 强调教育要掌握时机和因势利导, 要求教师践行启发式教育中的“自主、合作、探究”, 因此, 要上好一堂课, 教师不仅要备课充分, 更应结合新课标, 把启发式教法运用到教学中, 从而达到教书育人的目的.

3.3 解释:“愤者, 心求通而未得之意. 悱者, 口欲言而未能之貌. 启, 谓开其意. 发, 谓达其辞”

(1) **句子翻译**

所谓愤, 是指 (在教学过程中) 那些决心想要解决问题却得不到答案的心理状态. 所谓悱, 是指 (在教学过程中) 嘴巴上想要把它 (完整地) 表达出来, 但 (由于思考地不够) 却无法 (全面地) 说出来. 所谓启, 就是帮助愤者解开问题的意思. 所谓发, 是指说出他想要表达的意思.

(2) **句子理解**

这句话朱熹是对孔子的“不愤不启, 不悱不发”的解释, 无疑是讲要用启发式的教学方法, 而不可采用要求学生死记硬背的注入式教学方法. 启发式教学深刻地揭示出了学习过程中学生遇到疑难问题时会出现的“愤”“悱”两种心理状态, 若老师及时予以引导和启发, 就能够有效促进学生认知水平的提高.

第 4 章 教学设计题

4.1 探索并证明直线与平面垂直的判定定理 (画出定理发现的逻辑框图), 并进行教学设计[2, 3]

1. 探索证明

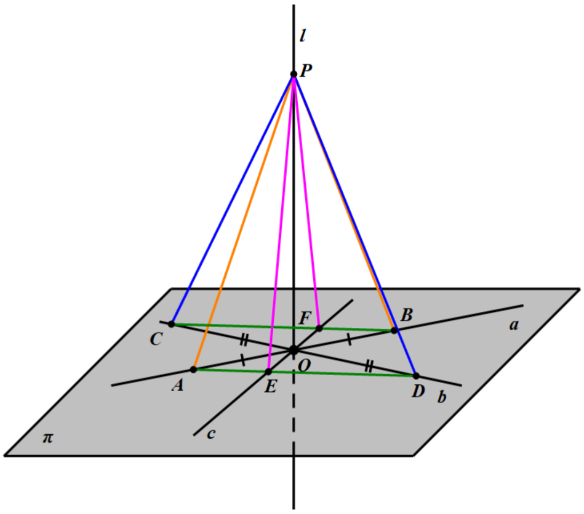

图 4.1: 直线与平面垂直判定定理证明示意图

✍ **证明** 如图4.1所示, 经平移可将平面上任意一条直线 c 移动至过点 O

在直线 a, b 上分别截取 $OA = OB, OC = OD$, 在 l 上任取一点 P 连接 PA, PB, PC, PD

连接 AD, BC 分别交 c 于 E, F, 连接 PE, PF

$$\left.\begin{array}{r} PO \perp AB \\ OA = OB \\ OP\text{为公共边} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle POA \cong \triangle POB(SAS) \Rightarrow PA = PB$$

同理可得:$PC = PD$

$$\left.\begin{array}{r} OA = OB \\ OD = OC \\ \angle AOD\text{与}\angle BOC\text{为对顶角} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOD \cong \triangle BOC(SAS) \Rightarrow AD = BC, \angle ADO = \angle BCO$$

$$\left.\begin{array}{r} PA = PB \\ PD = PC \\ AD = BC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PAD \cong \triangle PBC(SSS) \Rightarrow \angle PDE = \angle PCF$$

$$\left.\begin{array}{r} \angle ADO = \angle BCO \\ OD = OC \\ \angle DOE\text{与}\angle COF\text{为对顶角} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle DOE \cong \triangle COF(ASA) \Rightarrow DE = CF, OE = OF$$

$$\left.\begin{array}{r} PD = PC \\ \angle PDE = \angle PCF \\ DE = CF \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle PDE \cong \triangle PCF(SAS) \Rightarrow PE = PF \Rightarrow \triangle POE \cong \triangle POF(SSS) \Rightarrow PO \perp c$$

$$\left.\begin{array}{r} PE = PF \\ OP\text{为公共边} \\ OE = OF \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle POE \cong \triangle POF(SSS) \Rightarrow PO \perp c$$

由线面垂直定义:$l \perp \pi$

2. 教学设计

(1) 教材分析

本节内容来自苏教版数学必修 2 第一章第 1.2 节: 点、线、面之间的位置关系中第 1.2.3 小节. 垂直是立体几何的核心内容之一, 也是高考的重点内容. 线面垂直的定义是线面垂直最基础的判定方法和性质, 也是探究线面垂直判定定理的基础. 线面垂直的判定定理充分体现了线线垂直和线面垂直之间的转化, 既是后续学习面面垂直的基础, 也是连接线线垂直和面面垂直之间的纽带. 因此本节的学习内容意义重大.

(2) 学情分析

本节课是在前面已学空间点、线、面位置关系及平行关系的基础上的继续学习, 对空间概念建立有一定基础. 同时结合有关的实物模型, 通过直观感知可以初步归纳出直线与平面垂直的定义和判定定理, 在此基础上进一步讲解证明.

(3) 知识分析

① 教学重点

i. 直线与平面垂直的概念.

ii. 直线与平面垂直的判定定理.

② 教学难点

i. 概括、理解直线与平面垂直的概念.

ii. 理解、证明直线与平面垂直的判定定理.

(4) 目标设计

① 知识与技能目标

i. 理解直线与平面垂直的概念.

ii. 初步掌握直线与平面垂直的判定及应用.

② 过程与方法目标

通过线面垂直判定定理的获得进一步理解“直观感知 → 操作确认 → 思辨论证”的认知方法.

③ 情感态度与价值观目标

i. 通过对直线与平面垂直的定义和线面垂直的判定定理的教学, 培养学生观察、探究、发现的能力和空间想象能力、逻辑推理能力.

ii. 通过师生、生生的合作学习, 培养学生团队协作, 增强主动与他人合作交流的意识.

iii. 让学生亲身经历数学研究的过程, 体验探索的乐趣, 增强学习数学的兴趣.

(5) 教学方法

启发式教学方法, 通过设置层层递进的问题, 启发引导学生由浅入深、由简至繁地进行学习.

(6) 策略设计

创设情境、探索归纳、引出新知、总结提升.

(7) 教学过程设计

① 创设情境, 感知概念

i. 展示图片: 请同学们观察图片, 说出旗杆与地面、水杯与桌面的位置关系.

ii. 观察实例: 学生将书打开直立于桌面, 观察书脊与桌面的位置关系.

引出问题: “如何判断一条直线是否与一个平面垂直?”

设计意图: 数学来源于生活, 通过生活实例导入内容容易引起学生对数学课堂的关注, 拉近数学与学生的距离. 同时这样设计也能将教学内容转化为具有潜在意义的问题, 让学生产生强烈的问题意识, 使学生的整个学习过程成为“猜想”, 继而紧张地沉思, 期待寻找理由和证明过程.

② 观察归纳, 形成概念

i. 学生画图: 将旗杆与地面的位置关系画出相应的几何图形.

ii. 提出问题: 能否用一条直线垂直于一个平面内的直线, 来定义这条直线与这个平面垂直呢?(学生讨论并交流)

iii. 归纳直线与平面垂直的定义、介绍相关概念, 并要求学生用符号语言表示.

设计意图: 如何使学生从”线面垂直的直观感知”中抽象出“直线与平面内所有直线垂直”是本环节的关键, 因此, 在教学中, 充分发挥学生的主观能动性, 利用多媒体演示和学生动手使其经历从实际背景中抽象出几何概念的全过程, 从而形成完整和正确的概念, 最后, 通过辨析讨论加深学生对概念的理解. 这种立足于感性认识的归纳过程, 即由特殊到一般, 由具体到抽象, 既有助于学生对概念本质的理解, 又使学生的抽象思维得到发展, 培养学生的几何直观能力.

③ 辨析讨论, 深化概念

判断正误:

i. 如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线, 那么这条直线就与这个平面垂直.

ii. 如果一条直线垂直一个平面, 那么这条直线就垂直于这个平面内的任一直线.

设计意图: 通过问题辨析, 加深概念的理解, 掌握概念的本质属性. 由 *i.* 使学生明确定义中的“任意一条直线”是“所有直线”的意思, 定义的实质就是直线与平面内所有直线都垂直. 由 *ii.* 使学生明确, 线面垂直的定义既是线面垂直的判定又是性质, 线线垂直与线面垂直可以相互转化.

④ 引出定理, 给出证明

见探索证明.

3. 逻辑框图

定理发现的逻辑框图如图4.2所示.

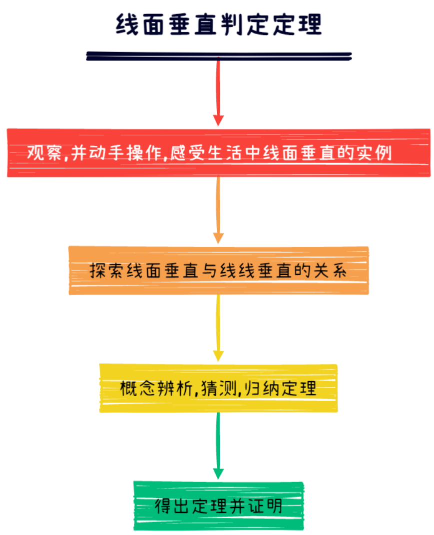

图 4.2: 定理发现逻辑框图: 线面垂直判定定理

4.2 探索并证明圆周角定理 (画出定理发现的逻辑框图), 并进行教学设计[4]

1. 探索证明

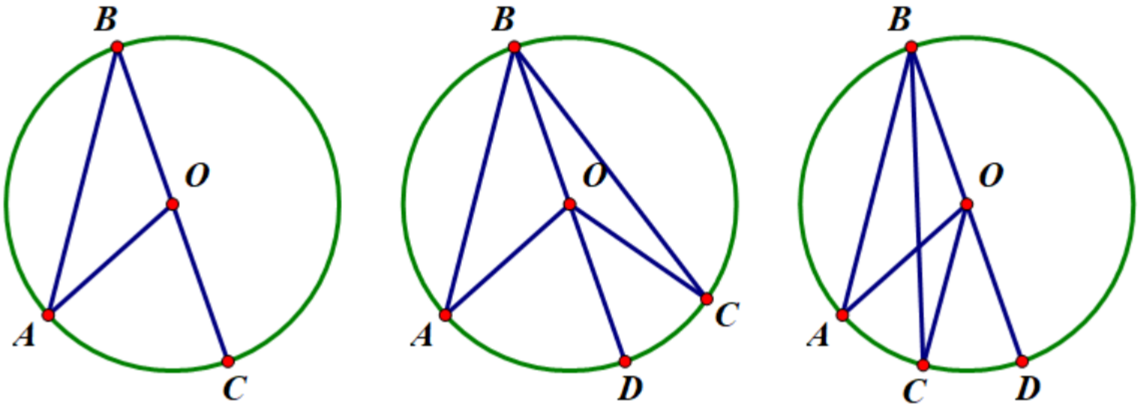

图 4.3: 圆周角定理证明示意图

✍ **证明** 如图4.3, 分情况讨论:

(1) 当圆心 O 在圆周角 $\angle ABC$ 的边上时

$\because \angle AOC$ 为 $\triangle ABO$ 的外角

$\therefore \angle AOC = \angle OAB + \angle ABC$

$\because OA = OB$

$\therefore \angle OAB = \angle ABC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC$

(2) 当圆心 O 在圆周角 $\angle ABC$ 的内部时

连接 BO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 D

由 (1) 可知:$\angle AOD = 2\angle ABD, \angle COD = 2\angle CBD$

进而有 $\angle AOC = 2\angle ABC$

(3) 当圆心 O 在圆周角 $\angle AOC$ 的外部时

连接 BO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 D

由 (1) 可知:$\angle AOD = 2\angle ABD, \angle COD = 2\angle CBD$

进而有 $\angle AOC = 2\angle ABC$

2. 教学设计

(1) 教材分析

本节内容来自苏教版九年级上册第二章第 2.4 节: 圆周角, 在此之前学习了确定圆的条件, 为本节的内容打下了基础, 同时, 紧接本节内容将讲授直线与圆的位置关系, 圆周角定理在其中又起着十分重要的辅助功能, 因此本节内容是帮助学生联系直线与圆关系的纽带, 意义重大.

(2) 学情分析

本节课是在前面已学圆和圆周角的相关定义的基础上的继续学习, 对圆周角的概念已经把握. 同时结合多媒体展示, 通过直观感知可以初步归纳出圆周角定理并在此基础上讲解证明.

(3) 知识分析

① 教学重点

理解圆周角和圆心角的关系, 发现并证明圆周角定理.

② 教学难点

圆周角定理的证明.

(4) 目标设计

① 知识与技能目标

i. 了解圆周角与圆心角的关系.

ii. 理解圆周角定理的证明.

iii. 能运用圆周角定理解决实际问题.

② 过程与方法目标

i. 经历观察、比较、分析圆周角与圆心角的关系, 发展合情推理的能力和演绎推理的能力.

ii. 探索证明圆周角定理的过程, 提高发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

③ 情感态度与价值观目标

i. 培养分类讨论、转化的数学思想.

ii. 通过师生、生生的合作学习, 培养学生团队协作, 增强主动与他人合作交流的意识.

iii. 让学生亲身经历数学研究的过程, 体验探索的乐趣, 增强学习数学的兴趣.

(5) 教学方法

启发式教学方法, 通过设置层层递进的问题, 启发引导学生由浅入深、由简至繁地进行学习.

(6) 策略设计

创设情境、探索归纳、引出新知、总结提升.

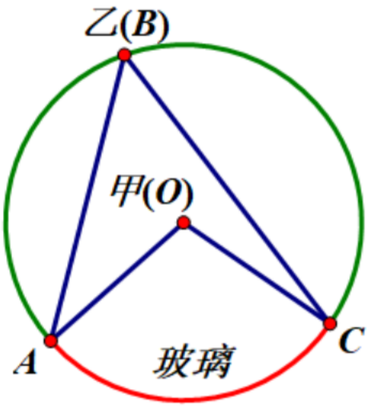

图 4.4: 圆周角定理教学情境引入

(7) 教学过程设计

① 创设情境, 感知概念

图4.4是一个圆柱形的海洋馆横截面的示意图, 人们可以通过圆弧形玻璃窗 $\overset{\frown}{BC}$ 来观察海洋动物. 现同学甲站在圆心 O 处, 乙同学站在正对玻璃窗的靠墙位置 B 处.

引出问题: "同学甲和同学乙观察海洋动物的视角, 即 $\angle AOC$ 与 $\angle ABC$ 之间有什么关系?"

设计意图: 数学来源于生活, 通过生活实例导入内容容易引起学生对数学课堂的关注, 拉近数学与学生的距离. 同时这样设计也能将教学内容转化为具有潜在意义的问题, 让学生产生强烈的问题意识, 使学生的整个学习过程成为"猜想", 继而紧张地沉思, 期待寻找理由和证明过程.

② 观察归纳, 形成概念

教师利用几何画板演示, 引导学生观察发现, 并进一步提问: "在上述过程中, 如果同学乙开始绕墙走动, 观察同学甲所在位置和同学乙的视角, 一共有几种情况? 在这些情况中, $\angle AOC$ 与 $\angle ABC$ 的满足的关系是否保持不变?"

设计意图: 在教学中, 充分发挥学生的主观能动性, 利用多媒体演示使其经历从实际背景中抽象出几何概念的全过程, 从而形成完整和正确的概念, 最后, 通过讨论归纳加深学生对概念的理解. 既有助于学生对概念本质的理解, 又使学生的抽象思维得到发展, 培养学生的几何直观能力.

③ 引出定理, 给出证明

见探索证明.

3. 逻辑框图

定理发现的逻辑框图如图4.5所示.

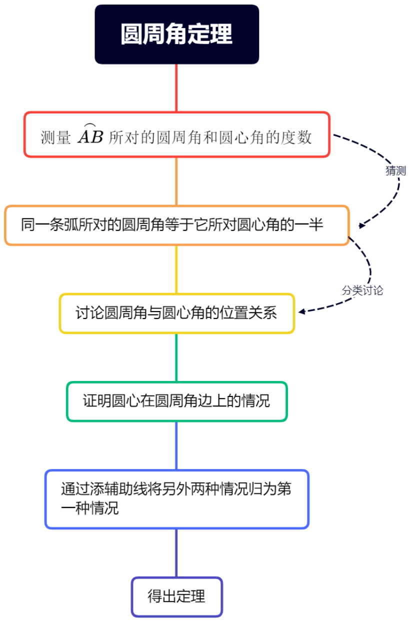

图 4.5: 定理发现逻辑框图: 圆周角定理

4.3 设计" 科学记数法" 课堂教学情境【必考】

(1) **初识大数**

首先从引入一个时政问题出发: 例如最近刚出的世界总人口突破 80 亿新闻, 让学生进行朗读. 为了抓住学生在朗读时所遇到的数学困难, 从而能够顺利展开教学环节, 所以要将 80 亿写成数字形式, 作为本课的第一个大数.

(2) **读大数难**

接着给出世界的饥饿人口总数, 还是请同学进行朗读, 抓住两位同学在朗读时所遇到的障碍, 给出大数的定义, 从而给出第一个障碍, 大数读起来困难.

(3) **写大数难**

再然后进行提问, "有同学知道月亮距离地球有多少米?" "地球的直径有多少米?" 等到学生说出答案时候, 请同学上台写下这些数字. 让台下的同学看台上同学写这些大数, 同时自己在下面写, 感受到大数书写上的困难.

(4) **算大数难**

已经有两难了, 但还需要进一步深化. 老师再给出问题, 进行提问——给出中国今年的总人口数, 再给出世界总人口数目, 请问中国在世界总人口数中占比多少? 请同学在台下计算, 观察学生的计算方法. 在大家算的差不多的时候请学生起来分享自己的答案, 让学生亲自感受大数在计算上的困难.

(5) **总结大数三大难**

最后给出一则寓言故事 ("传说西塔发明了国际象棋而使国王十分高兴, 他决定要重赏西塔, 西塔说: '我不要你的重赏, 陛下, 只要你在我的棋盘上赏一些麦子就行了. 在棋盘的第 1 个格子里放 1 粒, 在第 2 个格子里放 2 粒, 在第 3 个格子里放 4 粒, 在第 4 个格子里放 8 粒, 依此类推, 以后每一个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍, 直到放满第 64 个格子就行了' . 区区小数, 几粒麦子, 这有何难, '来人' , 国王令人如数付给西塔.") 教师给出具体的数字, 并且告诉学生世界现在粮食年产量是多少, 让学生进行计算——需要多久才够凑齐这些米. 让学生感受到"崩溃", 在感到大数的三难之后引出科学计数法的内容.

参考文献

[1] 张伟. 祖暅原理的由来及证明. 重庆教育学院学报, 23(3):3, 2010.

[2] 许万成. 直线与平面垂直的判定定理的探究式教学. 数理化解题研究：高中版, (3X):2, 2016.

[3] 俞求是. 直线与平面垂直判定定理教学的讨论. 中学数学教学参考：上半月高中, (6):2, 2008.

[4] 胡蓉. 圆周角定理的教学设计. 江苏教育, 1989.

[5] 徐永宁. 由椭圆的长轴和长轴长想到的——谈谈中专数学的严谨性和量力性. 成都教育学院学报, 14(6):2, 2000.