三角形的中位线微课教学讲稿

郭雨阳 江苏大学 数学与应用数学(师范)
顾佳伟 江苏大学 数学与应用数学(师范)
薛茹 江苏大学 数学与应用数学(师范)

1 情境引入

在小明同学的生日聚会上,4名小朋友正在讨论如何分配一块三角形的蛋糕,如何平均分配蛋糕呢?💥
我们从数学的角度来分析一下这个问题.可以先把这个蛋糕抽象成一个三角形💥,要想将其分割成4个面积相等的图形,我们很容易就会想到利用三角形其中一条边的四等分点💥,通过其与所对顶点的连线💥可以顺利将三角形分成面积相等的4份💥.
但是,虽然分出的4个三角形蛋糕面积相同,但是它们的形状却不相同.💥其中一个小朋友就有些不乐意,我的蛋糕和其他小朋友的蛋糕形状不一样,这不公平.那为了让大家都满意,就需要分割出四个形状、大小都相同的三角形,这该怎么分呢?💥

2 概念引入

要解决这个问题,首先我们要来认识一下三角形中的一条重要的线段--中位线.那么什么是三角形的中位线呢?💥
从图形上看,在 $\triangle ABC$ 中, D,E 分别是 AB,AC 的中点💥,连接 D,E 💥,则线段 D,E 就是 $\triangle ABC$ 的一条中位线💥.
像这样,连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线💥.
现在,我们已经初步认识了三角形的中位线💥,那么请同学们思考一下,在三角形中一共有几条中位线呢?💥
既然中位线是连接两边中点所得的线段💥,在三角形ABC中,除了 D,E 外💥, B,C 边上也有一个中点 F 💥,连接 DE,EF 💥, DE,DF,EF 都是中位线💥,所以三角形一共有3条.
中位线是连接两边中点所得的线段,包含了 2 层含义,稍微解释一下,一是...💥,二是...💥

3 概念辨析

💥通过刚刚的学习,我们知道💥中位线是连接三角形两边中点的线段,此时,聪明的小明同学忽然有一个疑惑,他想到之前学习过的三角形的中线,他认为中线和中位线二者仅有一字只差,那他们之间是否具有相同的意义呢?💥,这当然是不正确的💥.
我们来看图中的三角形,做出 BC 的中点F💥,连接 AF 💥,这里的AF就是 $\triangle ABC$ 中 BC 的中线,而

BC 的中位线是 DE ,很明显,中位线和中线是不同的.
从定义上讲,💥,中线是连接三角形一个顶点与它对边中点的线段,要注意,中位线的端点是两边中点💥,,而中线的端点分别是三角形的顶点💥,和对边的中点💥,所以中线与中位线,虽然只有一字之差,但是其表示的数学含义是完全不同的.在我们学习数学知识过程中,也要注意💥,到数学语言所具有的严谨性.💥

4 定理探究

我们学习完中位线的定义之后,不禁思考, DE 💥和第三边 BC 💥之间是否有特殊的关系呢?💥.
探究线段之间的关系要从两个方面考虑💥,一方面就是位置关系💥,另一方面是数量关系💥,因此,接下来我们就来讨论 DE 与 BC 之间的的数量关系和位置关系💥.
爱动手的小明同学仔细观察了这两条线段,接着动手量了一下 DE 和 BC 的长度,他猜想这两边之间的关系是💥: $DE=\frac{1}{2}BC, DE \parallel BC$

5 定理证明

小明同学的猜想是否正确呢?💥, $DE \parallel BC, DE=\frac{1}{2}BC$是否成立?我们一起来证明一下吧.如图,
💥,在 $\triangle ABC$ 中,DE 为中位线,求证: $DE \parallel BC, DE=\frac{1}{2}BC$
首先,💥我们延长 DE 到 F ,使 $DE=EF$.连接 CF 💥
💥因为E点是AC的中点,所以AE=CE💥
💥要注意 $\angle AED$ 和 $\angle CEF$ 是对顶角,所以角AED等于角CEF💥
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle CEF$ 中
$\because \angle AED=\angle CEF, AE=CE, DE=EF$
根据SAS,💥可以得到 $\triangle ADE \cong \triangle CEF$💥
又 $\because \triangle ADE \cong \triangle CEF$
💥 $\therefore AD=CF, \angle DAE=\angle FCE,$💥
💥又 $\because \angle DAE$和$\angle FCE$是一对内错角,我们知道内错角相等两直线平行
$\therefore CF \parallel BD$💥
同理 💥 $\because D$为AB的中点
$\therefore AD=BD,$因此可得$CF=BD$💥
💥 $\therefore$ 四边形 $BCFD$ 是平行四边形💥
这样💥在数量关系上我们就有 $DE=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}BC,$而在位置关系上,$DE \parallel BC$💥
于是通过我们的证明,小明同学的猜想是正确的💥

6 定理总结

我们将猜想整理一下💥,用文字来叙述,就是💥三角形的中位线平行于第三边,且等于第三边的一半.在数学界中,这就是非常重要的,三角形中位线定理💥.
我们来进一步探究在这个三角形中还有什么其他奥秘💥.如果我们标出BC边上的中点F💥,并将D、E、F两两相连💥,来看一看,在这个三角形中,一共有几个平行四边形呢?
你找到的是不是四边形ADFE、BDEF、DECF💥,从图形上来看,就是这三个四边形💥.
我们再来看一看在这个三角形内,一共出现了几个全等三角形?
通过观察和相关定理的判定,我们可以看到,💥三角形ADE、DBF、EFC、DEF这四个三角形都是全等的,也就是图形中闪烁的这四个三角形💥.
所以聪明的小朋友,你知道该如何平均分配小明的生日蛋糕了吗?💥

7 主题升华

7.1 数学史

7.1.1 古巴比伦

其实呀,在数学史的发展历程上,中位线早就备受各国数学研究者关注.早在古巴比伦时期💥就在石板上💥记载了这样的三角形分割问题:
💥三角形的高为 50,用平行于底边的直线将其分割成高分别为 30 和 20 的小三角形和梯形,求原来的三角形与分割得到的小三角形的底边的比.
💥这个问题中所运用的知识实际上是三角形中位线定理的一般情况,也就是💥"平行线分线段成比例定理”的应用.
如果我们将条件稍加改动,💥用平行于底边的直线将三角形分割成高均为 25 的小三角形和梯形,求原来的三角形以及分割得到的小三角形的底边之比.这时候可以发现💥D、E是三角形两条边上的中点,💥而线段DE则是以BC为第三边的中位线.BC与DE的比就是2：1💥,也就是中位线定理中所说的,三角形中位线是第三边的一半.

7.1.2 古希腊

在此之后,古希腊的大数学家欧几里得💥似乎也注意到了这个有趣的数学现象,他在《几何原本》中并没有直接讨论中位线定理,而是给出了更一般性的规律,即💥:
"将三角形两腰分割成成比例的线段,则分点连线段平行于三角形的底边.”
从图形的角度来看,D、E分别为AB、AC上的两点💥,若满足AD比BD💥💥,等于AE比CE💥💥,那么,根据共边定理及相似的相关知识,就可以推出💥DE平行于BC.
当D、E分别为AB、AC中点时💥,这就是中位线定理的结论.因为欧几里得所研究的正是中位线定理的一般情况,平行线分线段成比例的问题💥.

7.1.3 汉代

事实上,不仅是外国数学家对中位线有所研究,我国在汉代数学典籍《九章算术》💥 💥 方田章也载有相关问题💥:

💥"今有圭田广十二步,正从二十一步.问:为田几何?”

有趣的是,刘徽在书中给出的面积公式是:💥

"术曰:半广以乘正从.”

对于这样的方法刘徽是这样注释的:💥

"半广知,以盈补虚为直田也.亦可半正从以乘广.按半广乘从,以取中平之数,故广从相乘为积步.”

我们用数学的语言来简单解读一下,💥"广”就是三角形的底边,💥"正从”就是三角形的高.术文说的就是:三角形的面积等于底边的一半乘以高:.

说到这里,💥小明同学还是对刘徽的证明有着疑问.实际上,💥刘徽是通过割补的方法来推导三角形面积公式的:取三角形两腰的中点D、E💥,过这两点作底边的垂线💥,将构成的小三角形DBM与ECN💥分别绕点D和E顺时针旋转180度💥,得到一个矩形💥,该矩形的面积等于原来的三角形的面积,它的长等于原三角形的高,它的宽等于原三角形底边的一半,即三角形面积等于半底乘以高.

💥刘徽的第二种方法是取三角形两腰中点💥并连接💥,过顶点作中位线的垂线💥,将中位线上方的小三角形分割成两个小直角三角形💥,与左图方法相同,将两个小直角三角形旋转拼补到对应位置💥,就可以得到一个矩形💥,矩形的长为原三角形的底边长,宽为原三角形高的一半,故三角形的面积等于底乘以半高.这也是另一种三角形中位线定理的证明方法.💥

7.2 证明方法多样性

除了刘徽的证明方法之外,还有法国数学家勒让德的反证法💥、菲利普斯的同一法💥、苏格兰数学家莱斯利的欧氏面积法💥、维纳布尔的平行四边形法💥等等,真是让人大开眼界💥.

💥下图给出了 50 种教科书中各种证法的频数分布,💥这也恰恰说明,数学定理的证明方法多种多样,古今中外,源远流长,因此学习数学一定要开拓思维,多学习各种不同的思想,💥站在巨人的肩膀上纵观整个数学世界.