三角形中位线定理的历史

李 霞　汪晓勤

（华东师范大学数学系, 上海, 200241）

HPM 视角下的数学教学日益受到中学数学教师的关注，但历史材料的缺乏成了 HPM 教学实践的主要障碍，因此，笔者之一曾在多篇文章中提及教育取向的数学史研究的重要性[1][2][3]。三角形中位线定理是平面几何中的一个重要定理，教学实践中，人们往往只关注定理的证明和应用，而忽略其背后的历史文化内涵，因而未能充分挖掘它的教育价值。出于 HPM 视角下的教学实践的需要，本文对历史上的有关数学文献进行考察，试图回答以下问题：三角形中位线定理是如何发现的？西方早期几何教科书是如何呈现和证明该定理的？与今日教科书有何异同？中位线定理的历史有何教学启示？

1 古巴比伦泥版上的三角形分割问题

在古代两河流域，中位线知识来源于现实生活中的土地或财产分割。古巴比伦时期（公元前 1800-1600 年）的数学泥版 MLC 1950（图 1）上载有以下问题：三角形的高为 50，用平行于底边的直线将其分割成高分别为 30 和 20 的小三角形和梯形，求原来的三角形以及分割得到的小三角形的底边。这其实是现代的“平行线分线段成比例定理”的应用，用中位线来分割三角形，不过是其中特殊的问题而已。

图 1

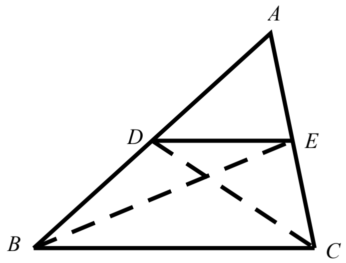
图 2

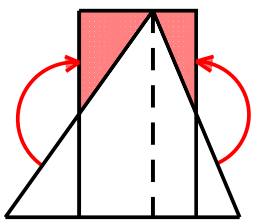
而在同时期的数学泥版 YBC 4608（图 2）上，记载着六兄弟分割三角形土地的问题，三角形的面积和高已知，三角形是用平行于底边、且间距相等的直线来分割的。古人已经知道，分割三角形的这些平行线段的长度是按照等差数列递增的。三角形中位线等于底边的一

半，这一性质已经为古人所熟知。

2《几何原本》中的有关命题

公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得在《几何原本》中并没有直接讨论中位线的性质，但卷六给出了更一般的命题（命题 VI.2）：“将三角形两腰分割成成比例的线段，则分点连线段平行于三角形的底边。”[4]欧几里得证明该定理的方法是：将线段之间的关系转化为三角形面积之间的关系，再将三角形面积之间的关系转化为直线的位置关系。这种方法同样适用于三角形中位线定理。如图 3，在ΔABC中，$AD = DB$，$AE = EC$。联结 BE 和 DC，因 $AD = DB$，$AE = EC$，故 $S_{\triangle EAD} = S_{\triangle EDB}$，$S_{\triangle EAD} = S_{\triangle CED}$。于是得 $S_{\triangle EDB} = S_{\triangle EDC}$，故知 $DE//BC$。另一方面，因为 $S_{\triangle EBC} = S_{\triangle ABE} = 2S_{\triangle BDE}$，而$\triangle EBC$和$\triangle BDE$是等高的，所以，$BC = 2DE$。





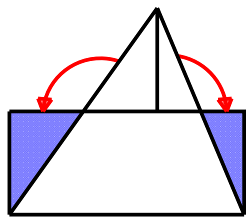


图 3　图 4　　　　　图 5

3 刘徽对三角形面积公式的推导

中国汉代数学典籍《九章算术》方田章载有如下问题：“今有圭田广十二步，正从二十一步。问：为田几何？”“又有圭田广五步二分步之一，从八步三分步之二。问：为田几何？”[5]书中给出的三角形面积公式是：“术曰：半广以乘正从。”这里，“广”就是三角形的底边，“正从”就是三角形的高。术文说的就是：三角形的面积等于底边的一半乘以高。

刘徽（3 世纪）注释说：“半广知，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广。按半广乘从，以取中平之数，故广从相乘为积步。[5]”这里，刘徽是通过割补的方法来推导三角形面积公式的：取三角形两腰的中点，过中点作底边的垂线，将垂线外侧的小三角形补到上方的相应位置（图 4），得到一个矩形，该矩形的面积等于原来的三角形的面积，它的长等于原

三角形的高，它的宽等于原三角形底边的一半，即三角形面积等于半底乘以高。刘徽的第二种方法是：连接两腰中点（中位线），过顶点作中位线的垂线，将中位线上方的小三角形分割成两个小直角三角形，分别将它们补到相应位置（图 5），得到一个矩形，矩形的长为原三角形的底边长，宽为原三角形高的一半，故三角形的面积等于底乘以半高。

从三角形面积公式的推导过程可以看出，中国古代数学家知道中位线与底边的位置关系和大小关系。事实上，在图 5 中，将中位线上方的两个小直角三角形分别补到相应位置时，所得到的四边形是矩形（因为一组对边平行且相等），故中位线与底边平行，且等于底边之半。

4 近现代几何教材中的三角形中位线定理

在我们所考察的 19-20 世纪出版的 50 种西方几何教科书中，有 41 种以定理或推论的形式给出三角形中位线性质，有 9 种则以习题形式给出该性质。31 种教科书中给出了证明，证明的方法有反证法、欧氏面积法、同一法和平行四边形法。

4.1 反证法

18 世纪法国数学家勒让德（A. M. Legendre, 1752～1833）在《几何基础》中首先证明平行线分线段成比例定理，据此证明以下定理：“一条直线截三角形两边成比例，则该条直线平行于第三边”[6]。如图 6，已知 $AD:DB=AE:EC$，若 DE 不平行于 BC，设 $DO//BC$，由平行线分线段成比例定理得 $AD:DB=AO:OC$，又已知 $AD:DB=AE:EC$，故 $AO:OC=AE:EC$，这是不可能的，因此 $DE//BC$。这里，勒让德利用反证法证明了欧几里得的命题 VI.2。

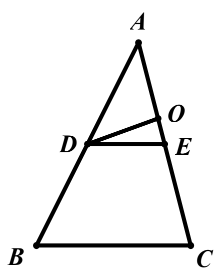


图 6

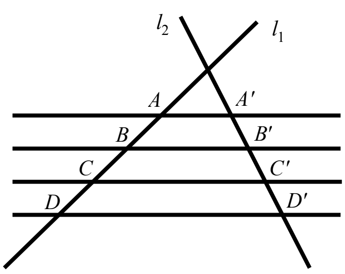


图 7

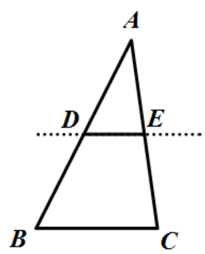


图 8

若不以“平行线分线段成比例”定理作为推理的基础，而运用欧几里得的面积法，则用勒让德的反证法依然可以证明三角形中位线定理中的位置关系。

4.2 欧氏面积法

苏格兰数学家莱斯利（J. Leslie, 1766～1832）在《几何和平面三角学基础》（1817）中沿用了欧几里得的面积方法来证明三角形中位线定理[7]。这是 50 种几何教科书中第一本不用"过三角形一边中点且平行于另一边的直线必平分第三边"这一定理，而直接证明中位线定理的几何教科书。

4.3 同一法

Phillips 在《几何基础》[8]（1878）中、Newcomb 在《几何基础》[9]（1899）中都利用"平行线等分线段"定理来证明三角形中位线定理。"平行线等分线段"定理说的是：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等。如图 7 所示。一组平行线截直线 l_1 所得线段 AB、BC、CD 两两相等，则它们截直线 l_2 所得线段 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$也两两相等。如图 8，已知 D 和 E 分别是 AB 和 AC 的中点，过 D 作 BC 的平行线，交 AC 于 E'，则 $AE'=E'C$，因此，DE 和 DE'重合，故有 $DE//BC$。

4.4 平行四边形法

Venable 在《几何基础》(1875)通过构造平行四边形证明："过三角形一边中点且平行于另一边的直线平分第三边"[10]。然后以推论形式给出三角形中位线定理，利用同一法证明了平行，利用上述平行四边形证明了数量关系。这也是 50 种教科书中第一本完整呈现并证明三角形中位线定理的教科书。

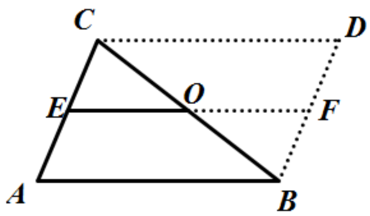
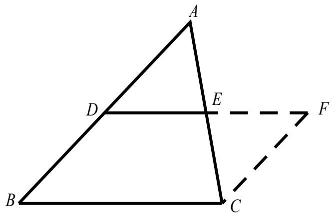
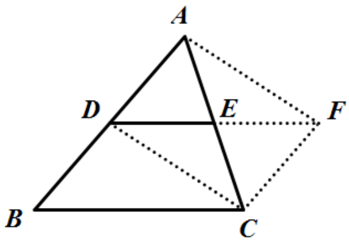


图 9

在 19 世纪末 20 世纪初的几何教科书中，大多数采用图 9 所示的方法来证明三角形中位线定理[11]：过 C 作 AB 的平行线，交 DE 的延长线于点 F，易证 $\Delta ADE \cong \Delta CFE$，四边形 $DBCF$ 为平行四边形，从而得到 $DE // BC$，$BC = DF = DE$。





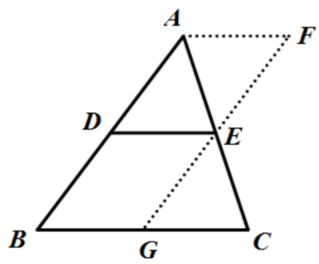


图 10　　　　图 11 图 12

上述方法在现代课堂教学中已经衍生出多种形式：如图 10，延长 DE 至 F 使得 $DE = EF$，连接 CF，可证 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$，进而四边形 $DBCF$ 为平行四边形得证，之后定理得证；如图 11，延长 DE 至 F 使得 $DE = EF$，连接 AF、CF、CD，则四边形 $ADCF$ 为平行四边形，再有四边形 $DBCF$ 为平行四边形,从而定理得证；如图 12，过 A 作 AF 平行于 BC，过 E 作 GF 平行于 AB，则四边形 $ABGF$ 为平行四边形，易证 $\triangle AEF \cong \triangle CEG$，另可证四边形 $ADEF$ 和 $DBGE$ 为平行四边形，之后定理得证。

4.6 各种方法的分布

图 13 和 14 分别给出了 50 种教科书中各种证法的频数分布以及年代情况。

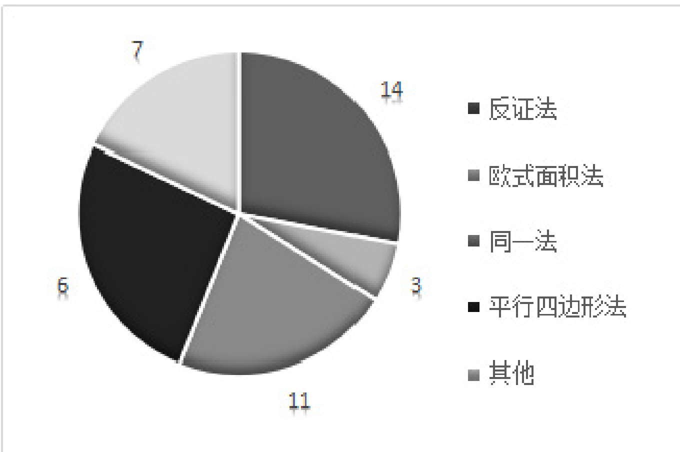


图 13

从图 13 和 14 可见，西方百年几何教科书主要利用平行线分线段成比例定理来证明中位线定理。到了 18 世纪末 19 世纪初，教科书中虽然淡化了中位线定理，但定理证明的方法更加多样。

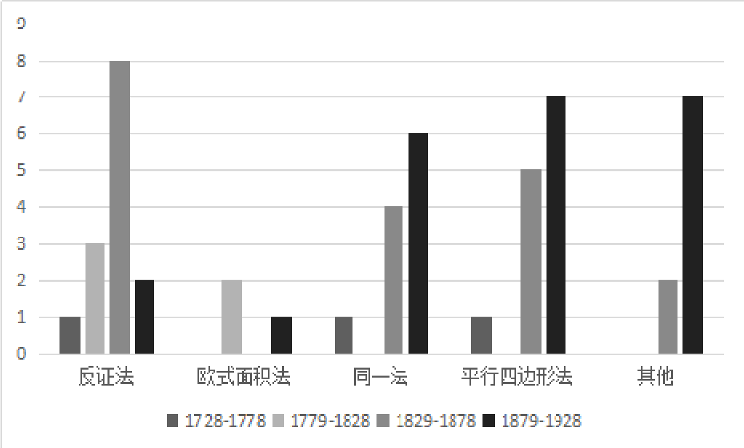


图 14

此外不同年代呈现中位线定理的方式也各有不同，如图 15 给出了 50 种教科书中三角形中位线定理的呈现方式的年代分布情况。

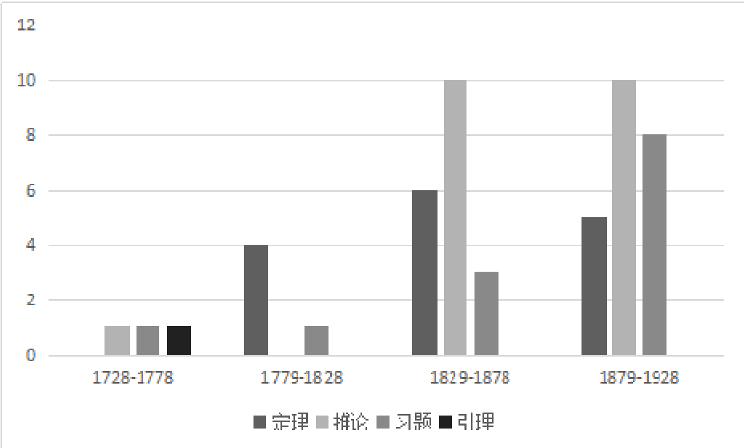


图 15

5 结论与教学启示

以上我们看到，古巴比伦人在三角形土地的分割实践中，已经知道三角形中位线定理。古希腊数学家欧几里得则证明了更一般的定理。中国数学家刘徽在推导三角形面积公式时，实际上也得出了这个定理，尽管他并未明确提出来。19-20 世纪的西方几何教科书中，该定理主要是以更一般的“平行线分线段成比例”定理或“平行线等分线段”定理的推论呈现的，是一个并不受特别关注的“配角”。相比之下，它在今日教科书的地位要高得多。今日教科书先讲三角形中位线定理，后讲“平行线分线段成比例”定理，更符合学生的认知规律。但今天教师在课堂上经常采用的反证法、同一法、平行四边形法都是历史上教科书作者们曾经使用过的方法。

三角形中位线定理的历史为今日课堂教学提供了许多启示。

一是知识之谐。为什么要学习三角形中位线定理？现行教科书和课堂教学并没有关注到学生的学习动机。教师可以从两河流域中的有关土地分割问题出发，引入中位线问题，使得该定理的出现更为自然。

二是方法之美。可以采用欧几里得的面积法、平行四边形法等多种方法对定理进行证明，拓宽学生的思维，让学生感受不同的转化思想。

三是探究之乐。教师可以从三角形面积公式的出入相补推导法出发，引导学生从中发现三角形中位线的性质，感受数学探究的乐趣，获得成功的体验。

四是文化之魅。古巴比伦、古希腊、古代中国以及近现代欧美的数学文献中都有关于三角形中位线的内容，让学生感悟数学的悠久历史以及数学文化的多元性。

五是德育之效。通过数学史的融入，教师可以创造机会，让学生穿越时空，与古人对话，从而亲近数学、增加数学学习的自信心。

参考文献

[1] 汪晓勤, 张小明. HPM 研究的内容与方法. 数学教育学报, 2006, 15(1): 16-18

[2] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望. 中学数学月刊, 2012, (2): 3-7

[3] 赵东霞, 汪晓勤. 关于数学文化教育价值与课堂运用现状的网上调查. 中学数学月刊, 2013, (3): 41-44

[4]欧几里得. 几何原本[M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2003: 153-154.

[5]郭书春. 汇校九章算术 [M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2009: 49-51.

[6] Legendre, A. M. *Elements of Geometry* [M]. Cambridge : Hilliard & Metcalf, 1825: 49-61.

[7] Leslie, J. *Elements of Geometry* [M]. Edinburgh: James Ballantyne & Co., 1817: 35-36.

[8] Phillips, W. H. H. *Elements of Geometry* [M]. New York: Sheldon & Co.,1878:31-32.

[9] Newcomb, S. *Elements of Geometry* [M]. New York: H. Holt, 1899: 59.

[10] Venable, Charles S. *Elements of Geometry* [M]. New York: University Publishing Co. ,1875: 67.

[11] Williams, C. L. *Syllabus of Plane Geometry*[M]. Berkeley: Standard Press, 1905: 52-53.