



Universidad Nacional Autónoma de México

# Proyecto Final

Inferencia Bayesiana

ÁNGEL FERNANDO ESCALANTE LÓPEZ  
SHADANNA ORTEGA HERNÁNDEZ



**iimas**

DR. EDUARDO GUTIÉRREZ PEÑA

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>Ejercicio 1:</b>	<b>2</b>
Respuesta . . . . .	3
Definiendo modelo con <b>Stan</b> . . . . .	3
Sampleando el modelo con datos del estudio . . . . .	3
Diagnóstico del modelo . . . . .	4
Posterior de $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	5
<b>Ejercicio 2</b>	<b>6</b>
Respuesta . . . . .	8
Definiendo nuevos modelos en <b>Stan</b> . . . . .	8
Ajustando el modelo con los datos . . . . .	9
Diagnóstico del modelo . . . . .	11
Posterior de $\alpha$ y $\beta$ . . . . .	12
<b>Ejercicio 3: Modelo Jerárquico</b>	<b>13</b>
<b>Ejercicio 4: Modelos</b>	<b>14</b>
Comparación de modelos . . . . .	14
Discusión de resultados . . . . .	14
<b>Comentarios finales</b>	<b>15</b>
<b>Referencias</b>	<b>16</b>

## Introducción

En la actualidad, una de las principales causas de muerte es por la enfermedad conocida como cáncer. El cáncer comienza en una célula normal que cambia a una célula neoplásica<sup>1</sup> a través de varias mutaciones en varios genes a lo largo de mucho tiempo, podrían ser años, de estar expuesto a un agente carcinogénico<sup>2</sup>. No obstante, las mutaciones inducidas por los carcinógenos no son la única vía que afecta a la célula, sino que a lo largo de cada división celular se producen errores espontáneos en cada duplicación y los mismos se van acumulando constituyendo un factor intrínseco de riesgo (Martín de Civetta y Civetta, 2011). Por lo cual, es de suma importancia estudiar la cura para esta enfermedad.

En este contexto, el presente trabajo analizará desde una perspectiva bayesiana de un experimento de un tipo de tumor en un grupo de ratas, dadas diferentes dosis de una droga. En otras palabras, estudiar la tasa a la que el riesgo de tumor crece o decrece como función de la dosis.

Para ello, se examinarán tres perspectivas de acuerdo al tipo de información inicial, después se hará la una comparación entre modelos y por último unos comentarios finales.

## Ejercicio 1:

Con el propósito de estudiar la relación entre la dosis y la respuesta, se tienen los datos del experimento en el cuadro 1, donde  $x$  representa el nivel de la dosis, mientras que  $n_x$  y  $y_x$  denotan respectivamente, el número de ratas tratadas y el número de ratas que presentan tumor en cada nivel ( $x = 0, 1, 2$ ).

$x$	$n_x$	$y_x$
0	14	4
1	34	4
2	34	2

Tabla 1: Datos

Sea  $\pi_x$  la probabilidad de que una rata en el grupo  $x$  desarrolle un tumor. Entonces, se considera el modelo

$$Y_x \sim \text{Bin}(\pi_x, n_x) \quad (x = 0, 1, 2).$$

Dado que las investigadoras están interesadas en la forma como varía  $\pi_x$  en función de la dosis  $x$ , propusieron el modelo

$$\text{logit}(\pi_x) = \alpha + \beta x \quad (x = 0, 1, 2).$$

El parámetro de interés para las investigadoras es la pendiente  $\beta$ , pero no cuentan con información inicial sobre su valor.

Entonces, se realizará un resumen de la distribución final de  $\beta$  suponiendo una distribución inicial no informativa en la que  $\alpha$  y  $\beta$  se asumen independientes, con  $\alpha \sim N(0, 1000)$  y  $\beta \sim N(0, 1000)$ ; esto es, con media 0 y varianza 1000.

---

<sup>1</sup>Célula con una multiplicación o crecimiento anormal en un tejido del organismo.

<sup>2</sup>Agente capaz de causar cáncer.

## Respuesta

### Definiendo modelo con Stan

La declaración del modelo binomial se hace a través de la función `binomial_logit()` de Stan, que recibe como segundo parámetro la inversa de la función `logit`<sup>3</sup>, además se usa  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1000} = 31.62278$  ya que Stan recibe desviación estándar como parámetro y no la varianza.

```
model_string <-  
"  
data {  
  int<lower=0> N;  
  int<lower=0> n[N];  
  int<lower=0> y[N];  
  vector[N] x;  
}  
  
parameters {  
  real alpha;  
  real beta;  
}  
  
model {  
  alpha ~ normal(0, 31.62278);  
  beta ~ normal(0, 31.62278);  
  
  for (i in 1:N) {  
    y[i] ~ binomial_logit(n[i], alpha + beta * x[i]);  
  }  
}  
"
```

### Sampleando el modelo con datos del estudio

Para este modelo, se utilizaron los siguientes parámetros en Stan:

- Número de iteraciones = 5000
- Warmup (calentamiento) = 2000
- Thin = 3
- Número de cadenas = 4

```
## Inference for Stan model: anon_model.  
## 4 chains, each with iter=5000; warmup=2000; thin=3;  
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.  
##  
##           mean se_mean   sd  2.5%   25%   50%   75% 97.5% n_eff Rhat  
## alpha -1.01     0.01 0.56 -2.16 -1.37 -1.00 -0.63  0.03  2604    1  
## beta  -0.99     0.01 0.50 -1.98 -1.31 -0.98 -0.64 -0.06  2582    1
```

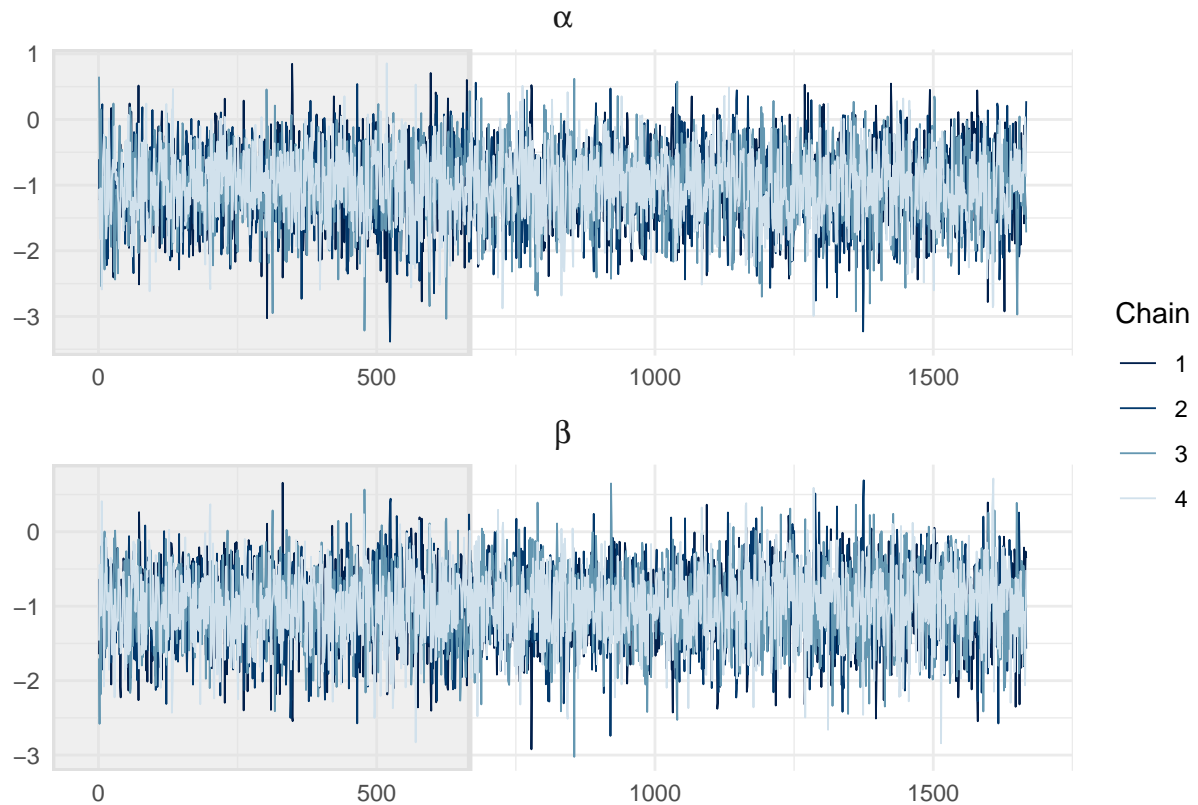
---

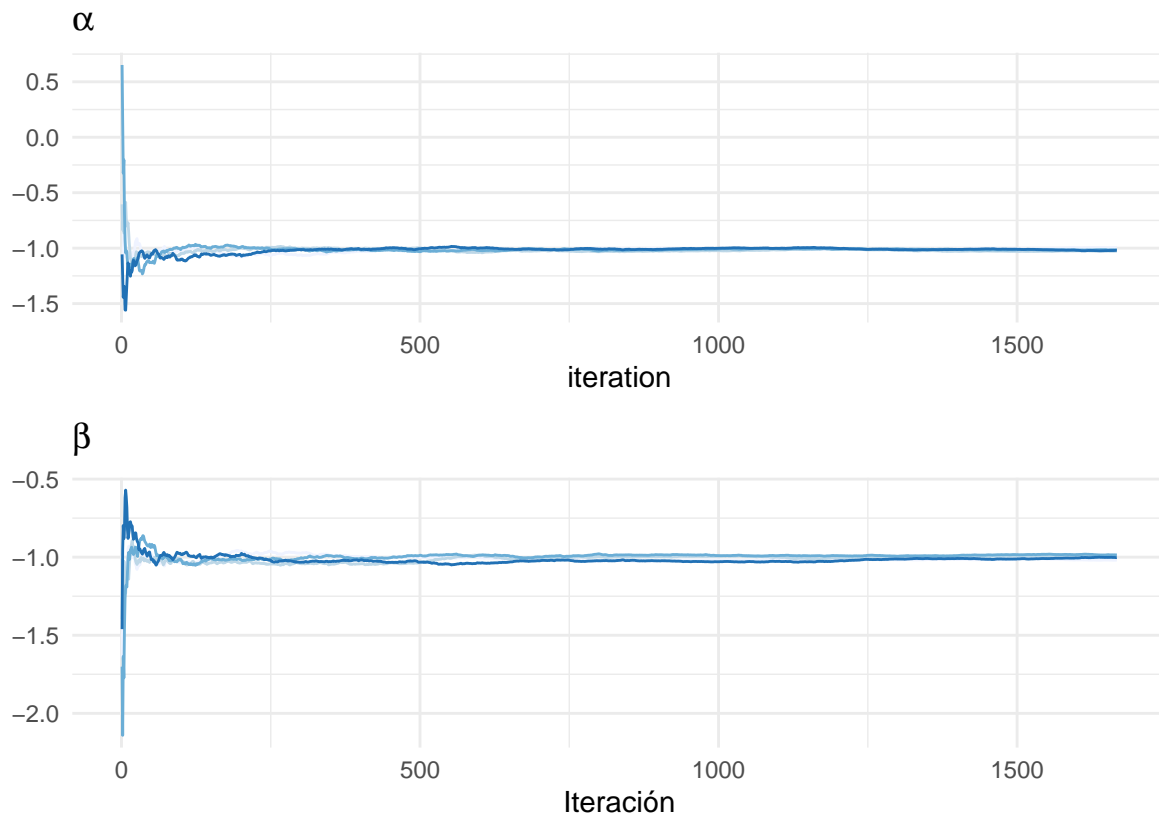
<sup>3</sup>Stan User Guide

```
##  
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Tue May 28 16:58:25 2024.  
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,  
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at  
## convergence, Rhat=1).
```

### Diagnóstico del modelo

Notamos que el **Rhat** es exactamente 1 para las cadenas de  $\alpha$  y  $\beta$ , lo cuál representaría convergencia para ambos parámetros. Esto se aprecia de igual manera en forma visual a través de los gráficos de las trazas:





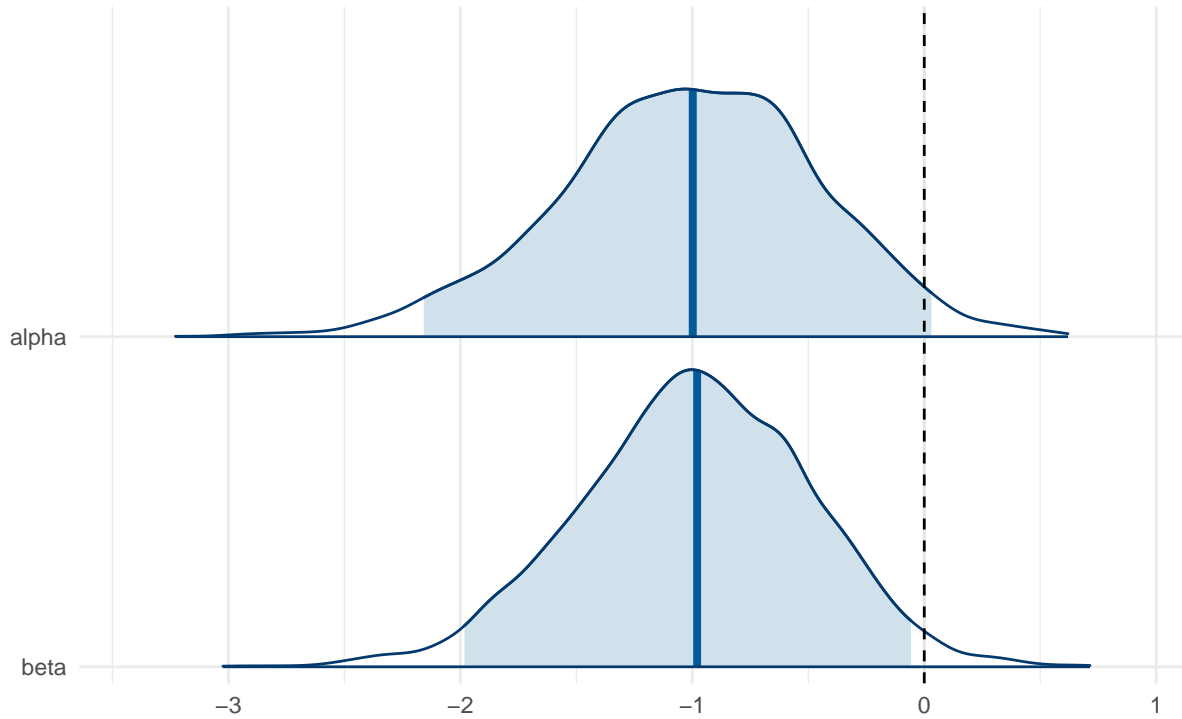
aquí, el área sombreada representa los samplings del calentamiento ( $n = 667$ ). Después de ese periodo, e incluso un poco antes, se aprecia el comportamiento estacionario. Este comportamiento se esclarece con los promedios ergódicos.

### Posterior de $\alpha$ y $\beta$

A continuación, visualizamos los muestras de las posteriores de  $\alpha$  y  $\beta$  con el modelo bayesiano.

## Distribuciones posteriores de $\alpha$ y $\beta$

Con medianas e intervalos de credibilidad de 95%



**Intervalo de credibilidad** De la gráfica anterior es fácil ver que,

$$E[\beta|x] \approx -0.99$$

El intervalo de credibilidad del 95 % de  $\beta$  sería de:

$$p(1.98 \leq \beta \leq -0.057|x) \approx 0.95$$

**Planteamiento de hipótesis** En particular, para la  $\beta$  notamos que el intervalo de credibilidad del 95 % se encuentra del lado izquierdo del cero, lo que significa que  $p(\beta < 0|x) > 0.95$ . Si planteáramos una hipótesis sobre la  $\beta$  diríamos que tenemos evidencia para afirmar que hay un efecto negativo entre los niveles de dosis y la probabilidad de que la rata desarrolle un tumor, de hecho, la probabilidad de que la pendiente  $\beta$  sea negativa sería  $p(\beta < 0|x) \approx 0.98$ .

En un planteamiento de hipótesis como el siguiente

$$H_0 : \beta < 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \beta \geq 0$$

la hipótesis  $H_0$  tiene mayor plausibilidad.

## Ejercicio 2

Dado que el tamaño de las muestras en el problema anterior es muy pequeño, y en vista de la falta de información inicial, las investigadoras se dieron a la tarea de buscar información

relevante en la literatura. Como producto de esta labor, encontraron datos de 10 estudios similares con ratas de la misma cepa. Desafortunadamente, todos estos datos correspondían a *controles*; es decir, ratas a las que no se les aplicó la droga. Los datos se presentan en la Tabla 2a. Aquí  $n_{0,i}$  y  $y_{0,i}$  denotan, respectivamente, el número total de ratas y el número de ratas que presentaron un tumor en el  $i$ -ésimo estudio ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ).

<i>Estudio</i> $i$	$n_{0,i}$	$y_{0,i}$
1	10	1
2	13	2
3	48	10
4	19	5
5	20	0
6	18	0
7	25	2
8	49	5
9	48	9
10	19	4

Tabla 2: Tabla 2a

No satisfechas con estos datos, las investigadoras siguieron buscando trabajos recientes (no publicados). Finalmente encontraron dos reportes muy relevantes, de donde extrajeron los siguientes datos:

$x$	$n_{x,11}$	$y_{x,11}$
0	7	3
1	16	5
2	18	2

Tabla 3: Tabla 2b

$x$	$n_{x,12}$	$y_{x,12}$
0	5	2
1	11	1
2	9	0

Tabla 4: Tabla 2c

En vista de que para los datos de la Tabla 2a sólo se recabó información de controles, el nivel de la dosis es  $x = 0$  en todos esos casos. Por lo tanto el modelo que propusieron para esos datos es

$$Y_x \sim \text{Bin}(\pi_{0,1}, n_{0,i}), \quad i = 1, 2, \dots, 10,$$

donde



$$\text{logit}(\pi_{0,i}) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10.$$

Por otra parte, para los datos de las Tablas 2b y 2c (Estudios 11 y 12), las investigadoras supusieron un modelo de la misma forma que el del problema 1, es decir:

$$Y_x \sim \text{Bin}(\pi_{x,i}, n_{x,i}) \quad (x = 0, 1, 2); \quad i = 11, 12,$$

con

$$\text{logit}(\pi_x) = \alpha_i + \beta_i x \quad (x = 0, 1, 2); \quad i = 11, 12.$$

Para simplificar el análisis en esta etapa, las investigadoras decidieron considerar todos estos estudios suficientemente similares como para suponer que los datos de las Tablas 1, 2a, 2b y 2c *proviene de un solo experimento*, de manera que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{12} = \alpha$  y  $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta$ .

Utilizando la misma distribución inicial que en el Ejercicio 1, se proporciona un resumen de la distribución final de  $\beta$ .

## Respuesta

Para abordar este problema, vamos a combinar los datos de todos los estudios (Tablas 1, 2a, 2b y 2c) en un solo modelo y realizar la inferencia bayesiana utilizando Stan. Mantendremos la misma distribución inicial no informativa para  $\alpha$  y  $\beta$ , y modelaremos los datos de manera que  $\alpha$  y  $\beta$  sean comunes a todos los estudios.

### Definiendo nuevos modelos en Stan

Primero, definimos todos los datos del experimento tal como se presentan en las tablas.

```
model_string_2 <- "
data {
  int<lower=0> N1;
  int<lower=0> n1[N1];
  int<lower=0> y1[N1];
  vector[N1] x1;

  int<lower=0> N0;
  int<lower=0> n0[N0];
  int<lower=0> y0[N0];

  int<lower=0> N11;
  int<lower=0> n11[N11];
  int<lower=0> y11[N11];
  vector[N11] x11;

  int<lower=0> N12;
  int<lower=0> n12[N12];
  int<lower=0> y12[N12];
```

```

    vector[N12] x12;
  }

  parameters {
    real alpha;
    real beta;
  }

  model {
    alpha ~ normal(0, 31.62278);
    beta ~ normal(0, 31.62278);

    for (i in 1:N1) {
      y1[i] ~ binomial_logit(n1[i], alpha + beta * x1[i]);
    }

    for (i in 1:N0) {
      y0[i] ~ binomial_logit(n0[i], alpha);
    }

    for (i in 1:N11) {
      y11[i] ~ binomial_logit(n11[i], alpha + beta * x11[i]);
    }

    for (i in 1:N12) {
      y12[i] ~ binomial_logit(n12[i], alpha + beta * x12[i]);
    }
  }
"

```

Aquí, al igual que en el modelo anterior, definimos las distribuciones a priori de los parámetros a estimar:  $\alpha \sim N(0, 31.62278)$  y  $\beta \sim N(0, 31.62278)$ , donde  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1000} = 31.62278$  ya que Stan recibe desviación estándar como parámetro y no la varianza. Además, definimos 4 verosimilitudes distintas para:

- Datos originales:  $y1[i] \sim \text{binomial\_logit}(n1[i], \alpha + \beta * x1[i])$ ;
- Estudios de controles:  $y0[i] \sim \text{binomial\_logit}(n0[i], \alpha)$ ;
- Estudio 11:  $y11[i] \sim \text{binomial\_logit}(n11[i], \alpha + \beta * x11[i])$ ;
- Estudio 12:  $y12[i] \sim \text{binomial\_logit}(n12[i], \alpha + \beta * x12[i])$ ;

Estos son usados en el modelo para estimar las distribuciones de  $\alpha$  y  $\beta$ .

### Ajustando el modelo con los datos

```

## Inference for Stan model: anon_model.
## 4 chains, each with iter=5000; warmup=2000; thin=3;
## post-warmup draws per chain=1000, total post-warmup draws=4000.
##
##           mean se_mean   sd  2.5%   25%   50%   75% 97.5% n_eff Rhat

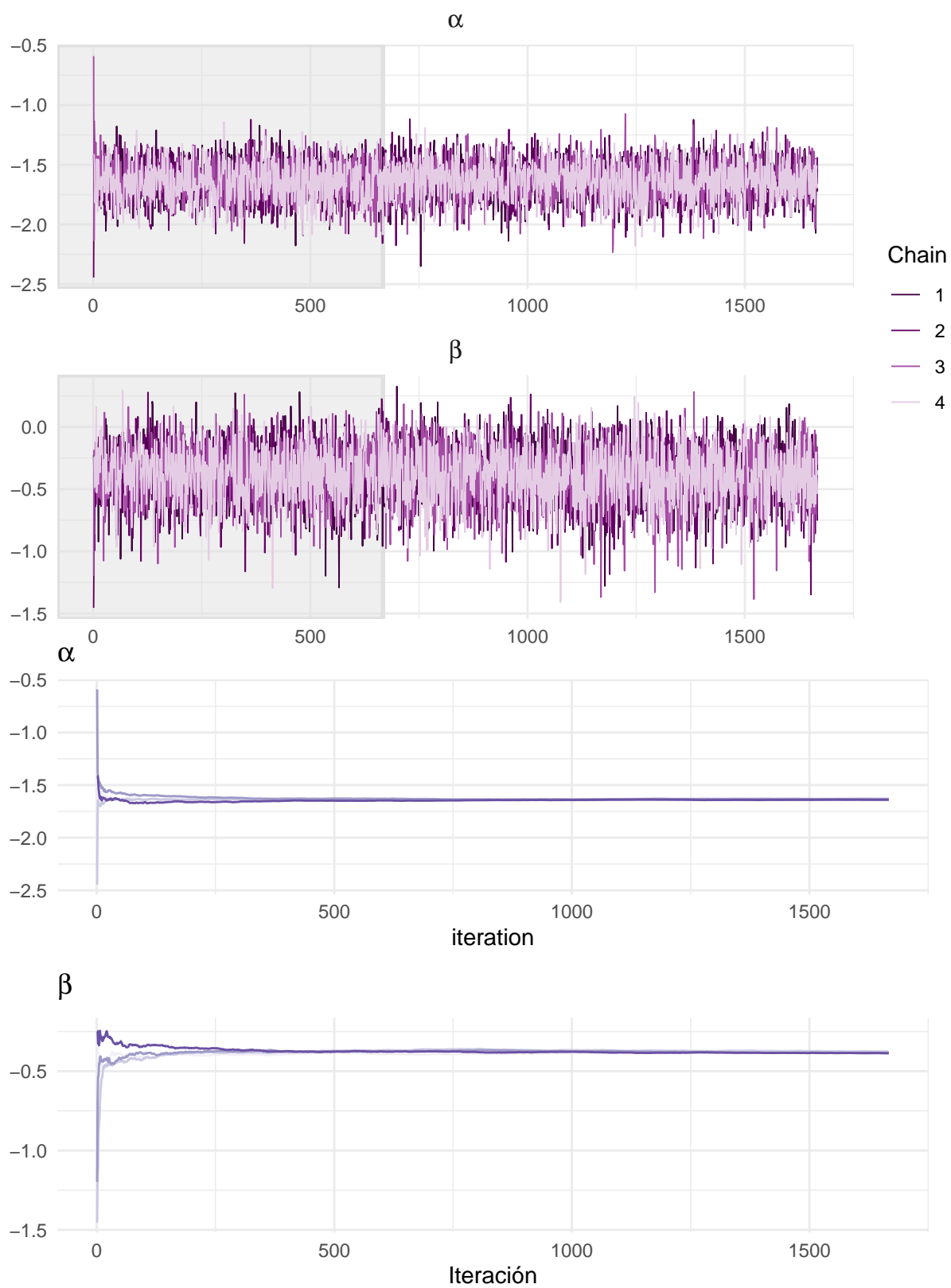
```

```

## alpha -1.64      0 0.16 -1.95 -1.74 -1.64 -1.53 -1.34 3369 1
## beta  -0.39      0 0.23 -0.86 -0.53 -0.38 -0.23 0.02 3308 1
##
## Samples were drawn using NUTS(diag_e) at Tue May 28 16:58:47 2024.
## For each parameter, n_eff is a crude measure of effective sample size,
## and Rhat is the potential scale reduction factor on split chains (at
## convergence, Rhat=1).

```

## Diagnóstico del modelo



## Posterior de $\alpha$ y $\beta$

A continuación, visualizamos los muestras de las posteriores de  $\alpha$  y  $\beta$  con el modelo bayesiano incluyendo los 12 estudios adicionales. Se aprecia que  $\alpha$  se diferencia de  $\beta$  volviéndose más negativo que en el resultado de Stan anterior, siendo aquí  $E[\alpha|x] \approx -1.635$

### Distribuciones posteriores de $\alpha$ y $\beta$ para el modelo combinado

Con medianas e intervalos de credibilidad de 95%



**Intervalo de credibilidad** De la gráfica anterior es fácil calcular el intervalo de credibilidad o high density interval (HDI por sus siglas en inglés).

$$P[-0.859 \leq \beta \leq 0.0226] \approx 0.95$$

**Planteamiento de hipótesis** Podemos plantear una hipótesis sobre la probabilidad de  $\beta$  como lo hicimos en la pregunta anterior. Si las investigadoras se plantearan si existe una relación negativa entre el nivel de dosis y la probabilidad de presentar el tumor para una rata, tendrían que calcular:

$$H_0 : \beta < 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \beta \geq 0$$

desde el enfoque bayesiano, esto equivaldría a calcular la plausibilidad de que la  $\beta$  sea negativa.

Con este modelo propuesto, observamos que:  $p(\beta < 0) \approx 0.9665$

### Ejercicio 3: Modelo Jerárquico

Poco tiempo después, una de las investigadoras tuvo la oportunidad de asistir a un curso de Análisis Bayesiano de Modelos Jerárquicos y convenció al resto del equipo de que ésa es la manera más apropiada de analizar los datos con los que contaban. Específicamente, dado que todos los estudios eran similares, consideraron que podían utilizar los 12 estudios que encontraron en la literatura para complementar la información de su experimento original (ver Tabla 1).

Las investigadoras supusieron entonces que los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}$  eran intercambiables, con distribución común  $N(\alpha^*, \sigma_\alpha^2)$ , y también que los parámetros  $\beta, \beta_{11}, \beta_{12}$  eran intercambiables con distribución común  $N(\beta^*, \sigma_\beta^2)$ . Finalmente, tanto para  $\alpha^*$  como para  $\beta^*$  supusieron una distribución  $N(0, 100)$ , mientras que para  $\tau_\alpha = 1/\sigma_\alpha^2$  y  $\tau_\beta = 1/\sigma_\beta^2$  consideraron una distribución *Gamma*(0.01, 0.01).

Se propone un resumen de la distribución final de  $\beta$  (la correspondiente al Ejercicio 1) bajo estas condiciones.

## **Ejercicio 4: Modelos**

**Comparación de modelos**

**Discusión de resultados**

## Comentarios finales



## Referencias

- Martín de Civetta MT y Civetta JD.(2011). Carcinogénesis. Salud Pública Mex;53:405-414.