Licence EEA 2ème année – Semestre 4

UE : Ondes, Propagation, Antennes (HLEE 404)

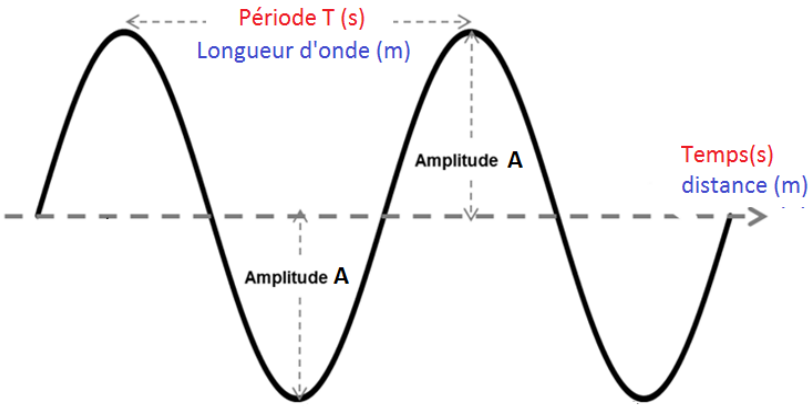
A : Ondes Matérielles/Acoustiques (P. CHRISTOL)

Introduction : Généralités sur les phénomènes ondulatoires

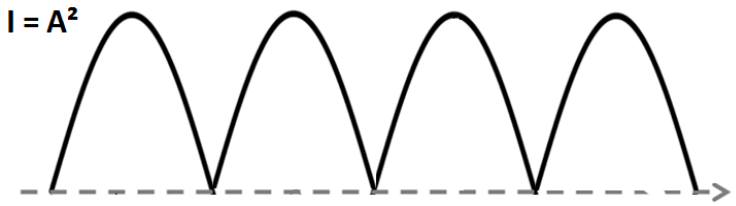
1°/ Les 2 grandes familles d'ondes - Définitions.

Le concept d'onde contient les notions de :

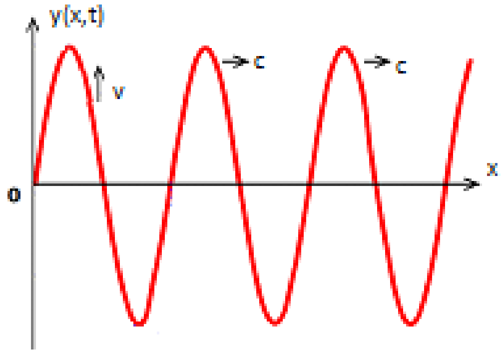
- vibration, propagation, transmission, réflexion, transport d'énergie d'une source à un récepteur ;
- période T (s), fréquence f = 1/T (s^{-1} ou Hertz), longueur d'onde λ = cT = c/f (m) où c est la vitesse de propagation de l'onde appelée célérité (m/s) ;
- pulsation ω =2πf =2π/T (rad/s), de direction de propagation suivant le vecteur $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ ($\vec{n}$ vecteur unitaire)
- amplitude A de l'onde, Intensité I = A^2
- Etat vibratoire de l'onde : y(r,t) et équation de propagation $\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}$



T : période temporelle (s) : espace temporel (observation à une position x)
λ : période spatiale (m) : espace des dimensions (observation à un instant t)



Intensité de l'onde I = A^2



Rq : Ne pas confondre **célérité c = dx/dt** de l'onde (vitesse de déplacement de l'onde dans un milieu) avec **vitesse v = dy/dt** (vitesse d'un point de l'onde)

2 grandes familles d'ondes

a) Ondes acoustiques : ondes matérielles, mécaniques ou de pression

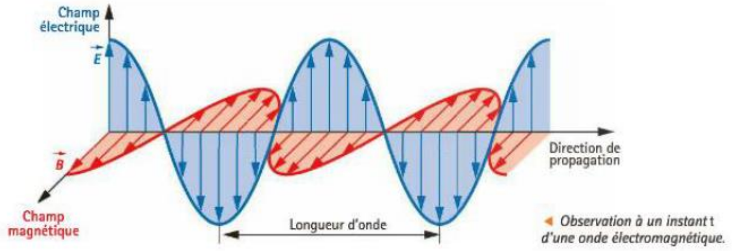
- besoin d'un milieu matériel (air, eau, métaux...) pour se propager (pas de propagation dans le vide).
- mettent en jeu les propriétés mécaniques du milieu : densité, élasticité, rigidité, viscosité, température, pression ...
- propagation par variation de pression (compression/dilatation) de proche en proche.

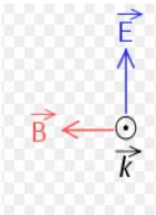
Exemple : Ondes sonores, une partie des ondes acoustiques : 20 Hz < f < 20 kHz
Infra-son Son Ultra-son

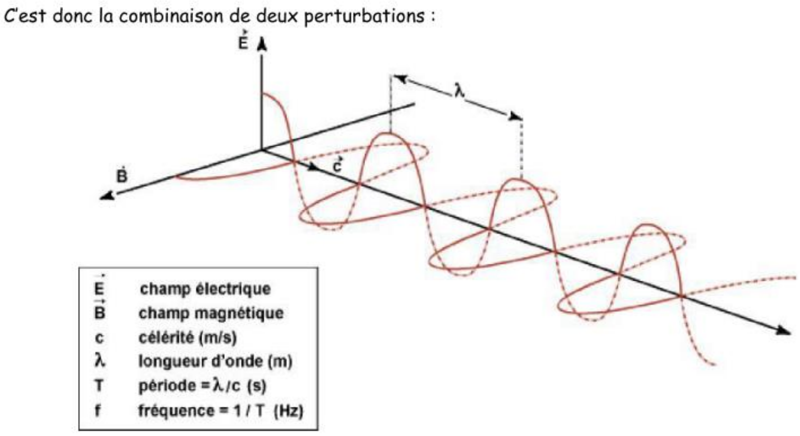
Pour une pression P = 1 atm, T = 20°C ==> c_{son}(**air**) ≈ 340 m/s ; c_{son}(**eau**) ≈ 1500 m/s

b) Ondes electromagnétiques :

Les ondes électromagnétiques résultent de la vibration d'un champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$) se propageant suivant $\vec{k}$





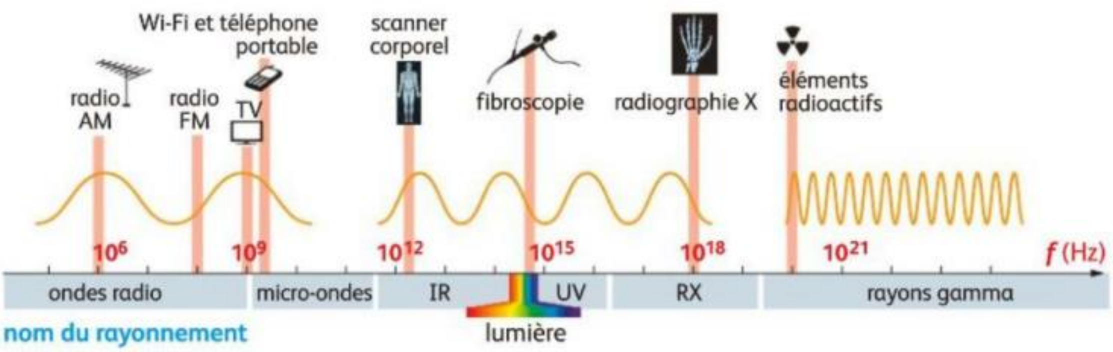


Ces ondes n'ont pas besoin de support matériel pour se propager.

Elles se propagent dans tous les milieux et d'autant mieux que le milieu est le vide.

Vitesse de propagation c ≈ $3x10^8$m/s Energie E =hf = hc/λ

La lumière visible est une partie des ondes électromagnétiques



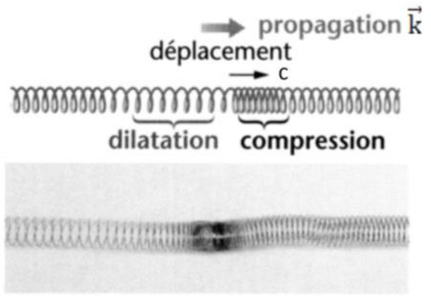
Grandes Ondes
(très peu énergétiques)

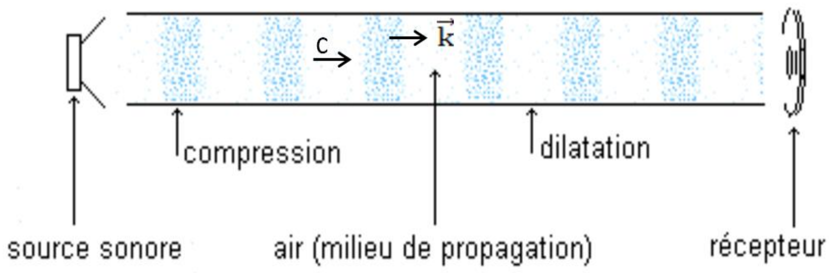
Petites Ondes
(très énergétiques)

2°/ Ondes longitudinales.

Des ondes caractérisées par des déplacements des points de l'onde suivant la direction de propagation.
Des ondes générées par des variations de pression (compression / dilatation) :

- Une onde dans un ressort : chaque spire du ressort est successivement comprimée et dilatée dans la direction de propagation
- Une onde sonore qui se propage par compression/dilatation des molécules d'air entre la source et le récepteur

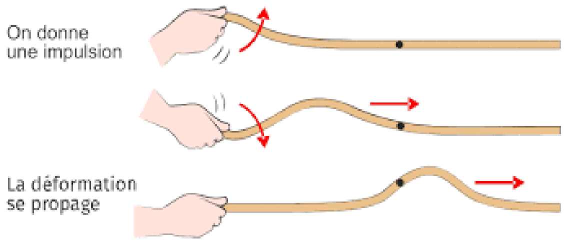


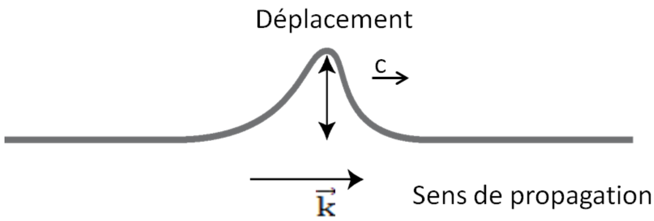


3°/ Ondes transversales.

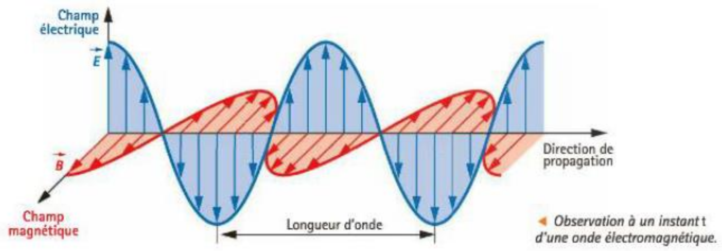
Des ondes caractérisées par des déplacements des points de l'onde perpendiculaires à la direction de propagation.

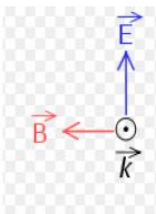
- Une onde sur une corde :



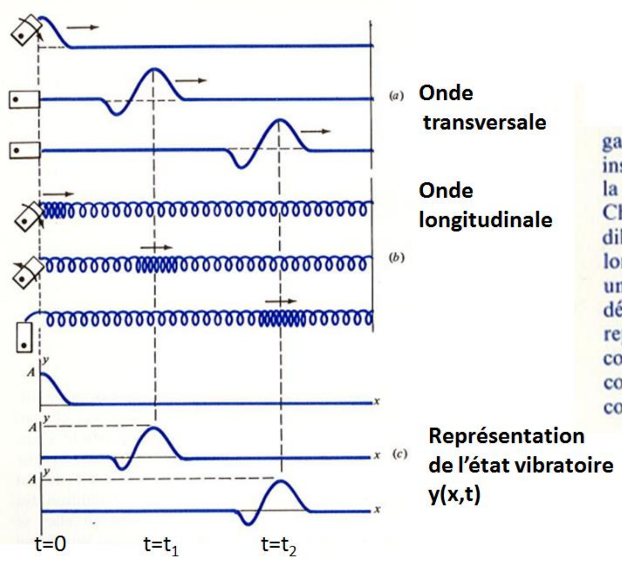


- l'onde électromagnétique : $(\vec{E}, \vec{B})$ sont perpendiculaires à $\vec{k}$





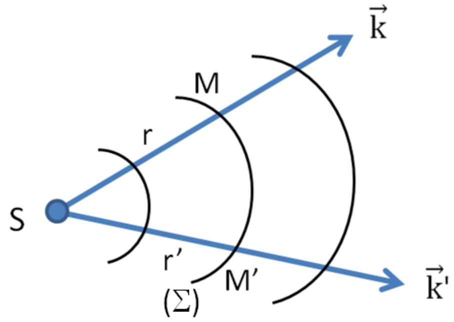
☞ Représentation Ondes longitudinales et ondes transversales



(*a*) Une impulsion isolée est produite à l'extrémité gauche de la corde. L'état de la corde est montré à trois instants différents. Noter le mouvement transversal des points de la corde. (*b*) Une impulsion semblable sur un ressort à boudin. Chaque spire du ressort est successivement comprimée et dilatée dans la direction de propagation, et l'onde est longitudinale. (*c*) Chacune de ces ondes peut être représentée par un même diagramme. Dans le cas de la corde, *y* est le déplacement d'un point de la corde par rapport à sa position de repos; les déplacements au-dessus de la position d'équilibre sont comptés positivement. Dans le cas du ressort, *y* mesure la compression ou la dilatation du ressort. La dilatation est considérée comme un déplacement positif.

4°/ Ondes sphériques (3D) ou circulaires (2D).

Suivant le support matériel : onde sphérique si milieu 3D. Exemple d'une onde sonore
Onde circulaire pour un milieu 2D. Exemple de la propagation de l'onde à la surface d'un plan d'eau.



Onde transversale car déplacement des points de l'onde perpendiculaire aux directions de propagation $\vec{k}$ et $\vec{k}'$

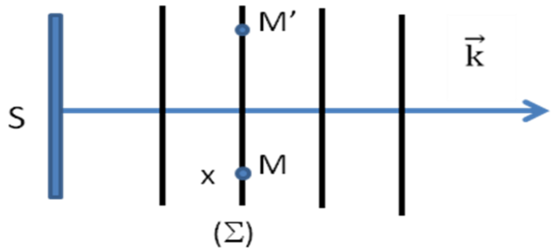
Les points M et M' sont en phases car appartiennent au même plan d'onde (Σ)

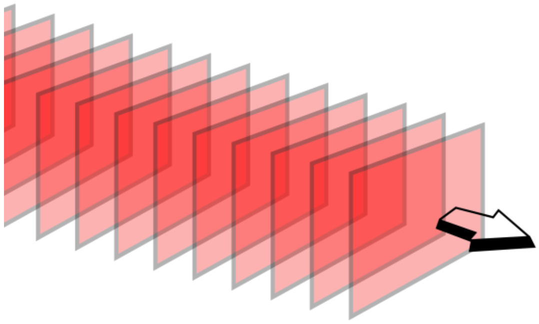
L'état vibratoire de l'onde est fonction de la distance r (entre le point M et la source S) et du temps t : $y_M(r,t)$

5°/ Ondes planes ou rectilignes.

Propagation de l'onde à une dimension (suivant Ox). Les points de l'onde sont sur des segments // : des plans d'onde.

M et M' appartiennent au même plan d'onde : ils sont en phase. L'état vibratoire au point M : $y_M(x,t)$.



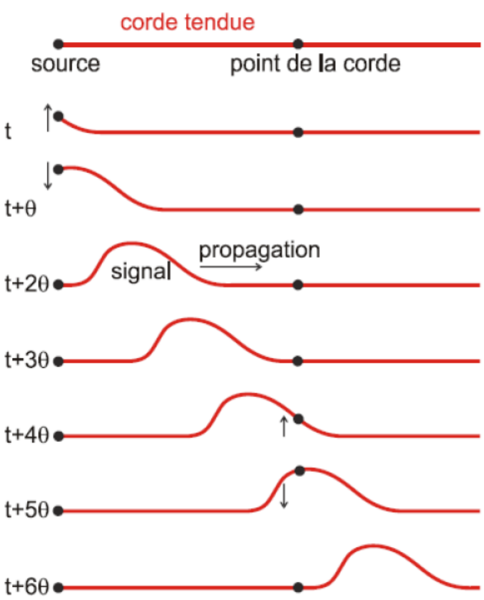


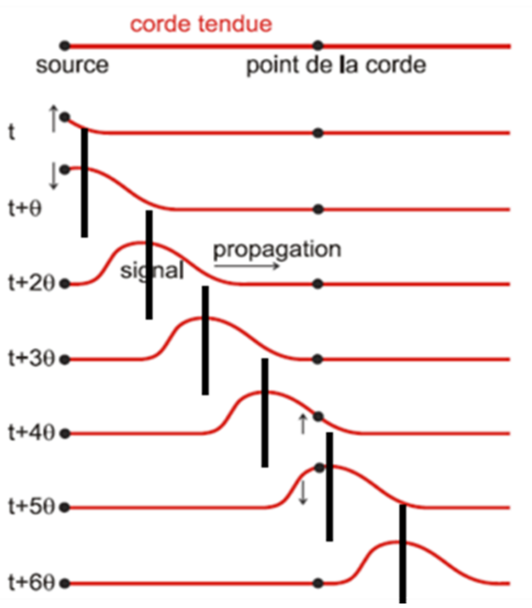
<u>Vibration d'une onde sur une corde</u> :

☞ Un système d'ondes planes (plans d'onde) suivant une direction de propagation.

☞ L'état vibratoire dépend de la distance à la source et du temps : $y_M(x,t)$.

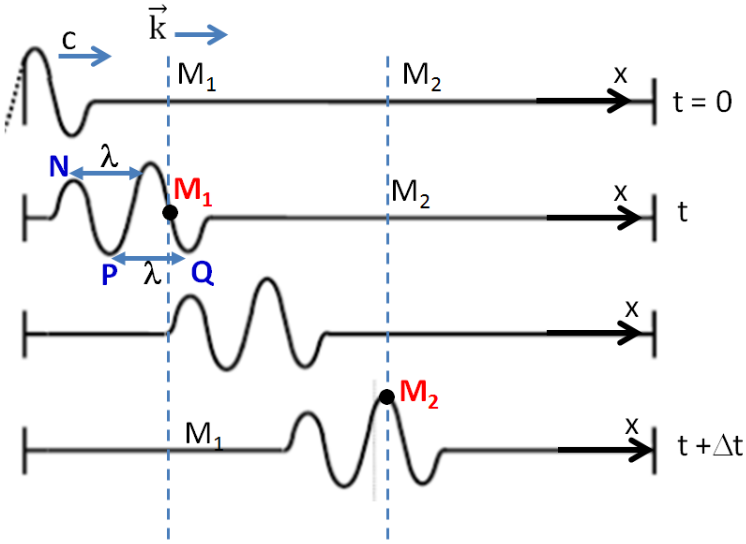
☞Ondes planes transversales.





6°/ Ondes progressives.

Des ondes qui progressent au cours du temps et qui vérifient l'équation de propagation : $\frac{d^2y}{dr^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

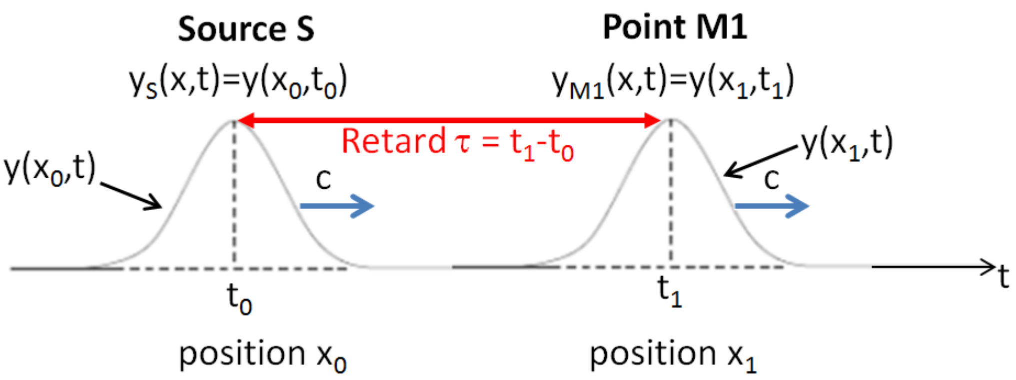


A l'instant t, l'onde atteint le point M_1.
Les points P et Q sont en phase : différence de marche $\Delta x = n\lambda$;
N et P sont en opposition de phase : $\Delta x = (n+1/2)\,\lambda$
A l'instant $t+\Delta t$, l'onde atteint le point M_2.

On remarque que les amplitudes de l'onde restent constantes au cours du temps, au cours de la propagation.

L'état vibratoire de l'onde en un point quelconque M est $y_M(x,t)$
Cet état vibratoire vérifie l'équation de propagation à 1 dimension $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{C^2}\frac{d^2y}{dt^2}$

a) Etat vibratoire : Espace temporel



Chaque point M du milieu reproduit le mouvement de la source S avec un retard temporel τ (Le point M est en retard par rapport à S car l'onde l'atteint après).

Pour le point M1, ce retard $\tau = t_1 - t_0 = (x_1 - x_0)/c$

Par rapport à la source S, l'état vibratoire du point M1 s'écrit : $y_{M1}(x,t) = f(t-\tau) = f(t-(x_1-x_0)/c)$

Si la source est à l'origine des positions ($x_0 = 0$), le point S : $y_S(0,t) = f(t)$

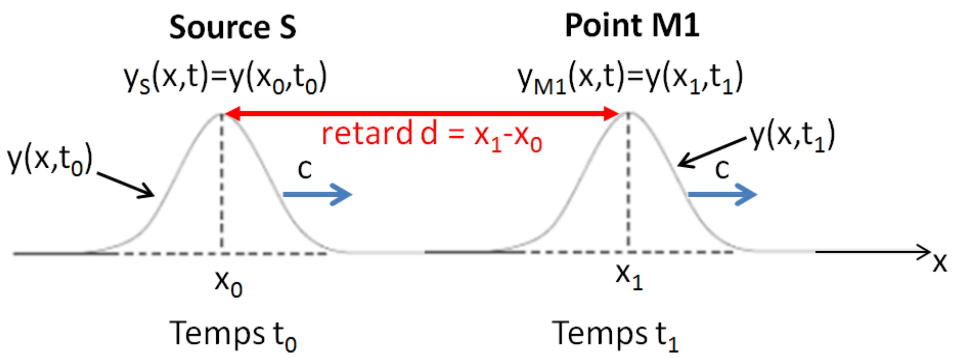
Le point M_1 : $y_{M1}(x_1,t) = f(t - x_1/c)$

Généralisation pour un point quelconque M :

$y_M(x,t) = f(t-x/c)$: propagation suivant les x croissants ($x > 0$)

$y_M(x,t) = f(t+x/c)$: propagation suivant les x décroissants ($x < 0$)

b) Etat vibratoire : Espace des dimensions



Chaque point M du milieu reproduit le mouvement de la source S avec un retard de distance $d = x_1-x_0$.

Pour le point M1, ce retard $d = x_1-x_0 = c(t_1-t_0)$

Par rapport à la source S, l'état vibratoire du point M1 s'écrit : $y_{M1}(x,t)= f(x-c(t_1-t_0))$

Si la source est à l'origine des temps ($t_0 = 0$), le point S : $y_S(x,0)= f(x)$

Le point M_1 : $y_{M1}(x,t_1)= f(x-ct_1)$

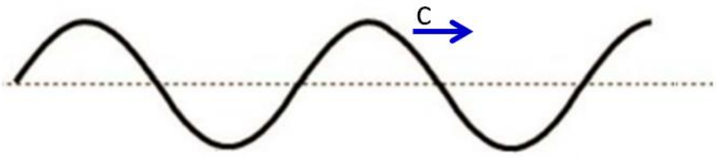
Généralisation pour un point quelconque M :

$y_M(x,t)= f(x-ct)$: propagation suivant les x positifs (x > 0)

$y_M(x,t)= f(x+ct)$: propagation suivant les x négatifs (x < 0)

7°/ Ondes planes progressives sinusoïdales.

De nombreux phénomènes physiques sont représentés par ce type d'onde : propagation sur une corde, dans un ressort, une onde acoustique une onde électromagnétique ...



a) Etat vibratoire : Espace temporel

Pour établir l'état vibratoire, d'une onde se propageant suivant les x croissants,

il faut composer $y(t) = A \cos\omega t$ ou $A \sin \omega t$ avec $y(x,t) = f(t-x/c)$

Soit $y(x,t) = A \cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$

amplitude

pulsation de la vibration $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (rad/s)

Phase à l'origine (on prend $\varphi = 0$)

Rq : $\left[\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\varphi\right]$ = phase instantanée du mouvement (en radian).

$$y(x,t) = A \cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) = A\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}x\right)$$

or $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\lambda = cT \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda}c \Rightarrow \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$

vecteur d'onde

donc $\boxed{y(x,t) = A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos(\omega t-kx)}$

Généralisation état vibratoire (espace temporel)

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})$$

→ x positifs ⇒ $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$

→ x négatifs ⇒ $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ (vecteur d'onde ou vecteur de propagation).

b) Etat vibratoire : Espace des dimensions

Pour établir l'état vibratoire, d'une onde se propageant suivant les x croissants,

il faut composer cette fois y(x) = A cos kx ou A sin kx avec y(x,t) = f(x-ct)

$$\hookrightarrow y(x,t) = A\sin[k(x-ct)]$$
$$= A\sin[kx - kct] = A\sin(kx - \omega t)$$

pour $x > 0$.

Dans le cas des $x < 0$.

$$y(x,t) = A\sin(-kx - \omega t) = A\sin[-(kx+\omega t)] = -A\sin(kx+\omega t)$$

pour $x < 0$

$\sin(-x) = -\sin x$

Généralisation état vibratoire (espace des dimensions)

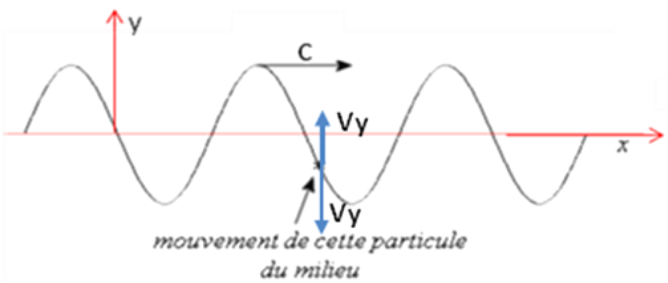
$$y(x,t) = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$$

→ $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ pour $x > 0$

→ $y(x,t) = -A\sin(kx + \omega t)$ pour $x < 0$

Remarque :

Ne pas confondre vitesse de propagation de l'onde ou célérité avec la vitesse d'une particule du milieu



$c = \frac{\partial x}{\partial t}$ et $v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

avec $y(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$

$$v_y = -\omega A\cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} =$$

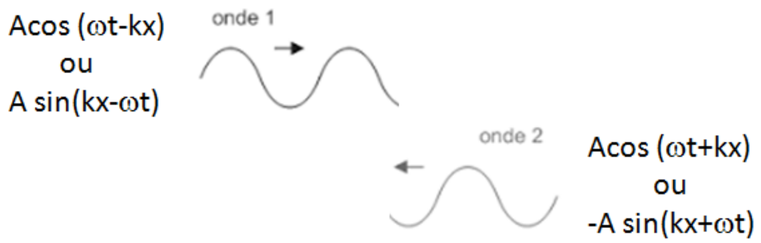
accélération

$$a_y = -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)$$

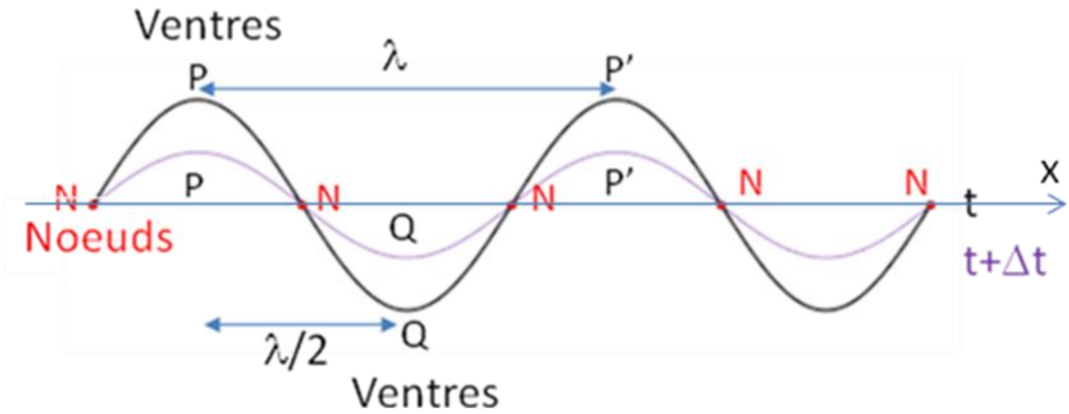
donc $a_y(x,t) = -\omega^2\, y(x,t)$

8°/ Ondes stationnaires.

On peut obtenir une onde stationnaire en superposant 2 ondes sinusoïdales progressives de même amplitude A, de même pulsation ω, se propageant dans une même direction mais en sens opposées.



Onde résultante : Onde stationnaire



- Pour l'onde stationnaire, l'amplitude de l'onde n'est pas toujours la même (point P et Q). C'est l'inverse de l'onde progressive pour laquelle l'amplitude A est constante.

- Pour une position x donnée, au cours du temps, l'onde ne progresse pas. Il y a stationnarité.

- Deux points en phases (P et P') ou en opposition de phase (P et Q) le restent au cours de temps.

- Certains points vibrent avec une grande amplitude (résonance), d'autres restent immobiles (noeuds N d'amplitude) pour tout temps t.

- L'amplitude ne dépend que de la position x : nulle aux noeuds, max aux ventres mais varie au cours du temps pour une position x donnée.

Pour un noeud : $y(x,t) = 0$.
Ailleurs : $y(x,t) = A'(x) \cos\omega t$ avec $A'(x) = 2A \cos kx$

a) Etat vibratoire de l'onde stationnaire : Espace temporel

$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$ $\longrightarrow$ et $y_2 = A\cos(\omega t + kx)$ $\longleftarrow$

$e^{jx} = \cos x + j \sin x$

Onde stationnaire : composition de 2 ondes progressives sinusoïdales $y = y_1 + y_2$

→ utilisation de la notation complexe

y_1 et y_2 sont les parties réelle (PR) de $\begin{cases} \underline{y_1} = Ae^{j(\omega t - kx)} \\ \underline{y_2} = Ae^{j(\omega t + kx)} \end{cases}$

$$\bar{y}_T = \bar{y_1} + \bar{y_2} = A e^{j\omega t}\left[e^{-jkx} + e^{+jkx}\right] \qquad \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos x$$

$$= 2A e^{j\omega t} \cos kx .$$

$$= 2A \cos kx \left(\cos\omega t + j \sin\omega t\right] .$$

d'où $y(x,t) = $ PR de $\bar{y} \longrightarrow y(x,t) = \underbrace{2A\cos kx}_{\text{Amplitude } \mathcal{A}(x)} \cos\omega t$

donc $\boxed{y(x,t) = \mathcal{A}(x)\cos\omega t}$. onde stationnaire

↳ l'Amplitude ne dépend que de la position x.

* cas particuliers

→ $y(x,t) = 0$ si $\mathcal{A} = 0 \Rightarrow \cos kx = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$

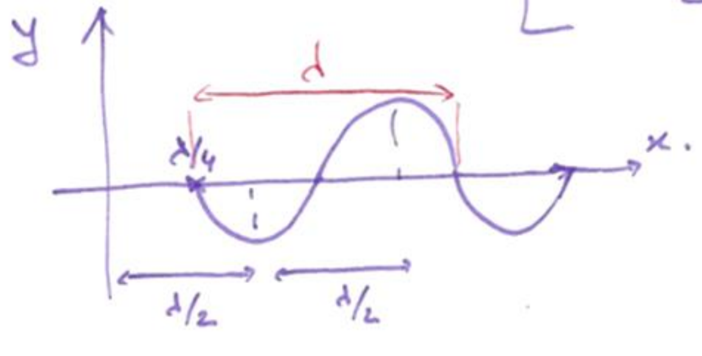
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

d'où $\boxed{x = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}}$ | $\mathcal{A}(x) = 0$ 1 noeud.

→ $y(x,t)$ est max si $\mathcal{A}$ est max soit $\cos kx = \pm 1 \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = 0 + n\pi$$

d'où $\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}}$ | 1 ventre chaque $\frac{\lambda}{2}$



1 noeud et 1 ventre sont séparés de $\lambda/4$.

b) Etat vibratoire de l'onde stationnaire : Espace des dimensions

Soit 2 ondes $y_1(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ et $y_2(x,t) = -A\sin(kx+\omega t)$

$\longrightarrow$ $\longleftarrow$

$$y_T = y_1 + y_2 = A\sin(\underbrace{kx-\omega t}_{p}) - A\sin(\underbrace{kx+\omega t}_{q})$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\frac{p-q}{2} = \frac{-2\omega t}{2} = -\omega t \qquad \frac{p+q}{2} = \frac{2kx}{2} = kx.$$

$$y_T = 2A\left[\sin(-\omega t)\cos(kx)\right] = -2A\sin\omega t\cos kx$$

$$= -2A\cos kx\sin\omega t$$

$$\boxed{y_T(x,t) = \mathcal{A}(x)\sin\omega t.}$$

* cas particuliers.

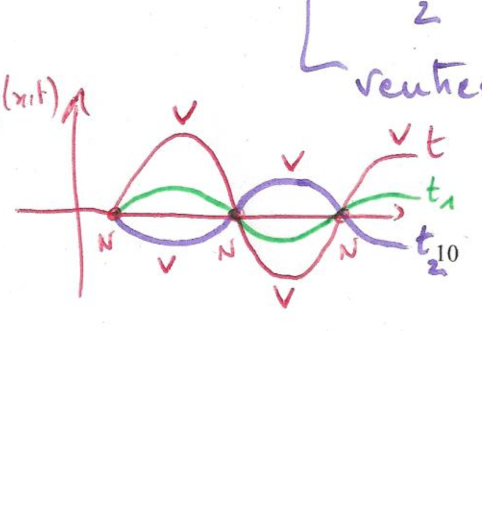
→ 1 noeud pd $y(x,t)=0$ soit $\mathcal{A}(x)=0$ → $\cos kx = 0$

$x = \frac{\lambda}{4} + n\lambda/2$ noeuds.

→ 1 ventre pd $y(x,t)$ est max soit $\mathcal{A}(x)$ est max

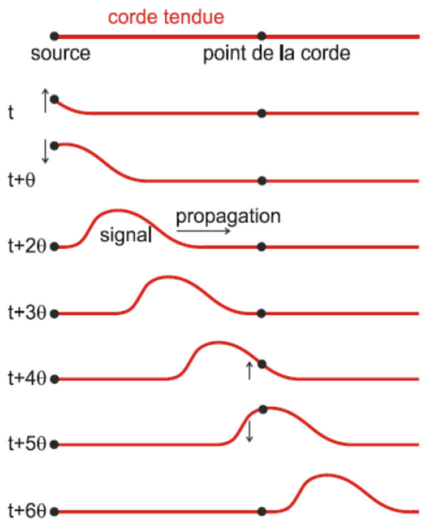
soit $\cos kx = \pm 1$ → $x = n\frac{\lambda}{2}$ ventres.

Conclusion Etat vibratoire onde stationnaire.

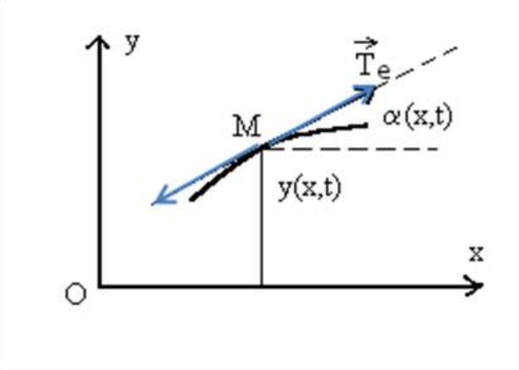


$y(x,t) = \mathcal{A}(x)\cos\omega t$ ou $y(x,t) = \mathcal{A}(x)\sin\omega t$.

9°/ Cordes vibrantes.



Onde plane transversale



a) Vitesse de propagation

La vitesse de propagation ou célérité de l'onde sur la corde est donnée par $c = \sqrt{\frac{T_e}{\mu}} = \frac{\omega}{k}$

avec T_e la tension de la corde et μ la masse linéïque (masse par unité de longueur) de la corde

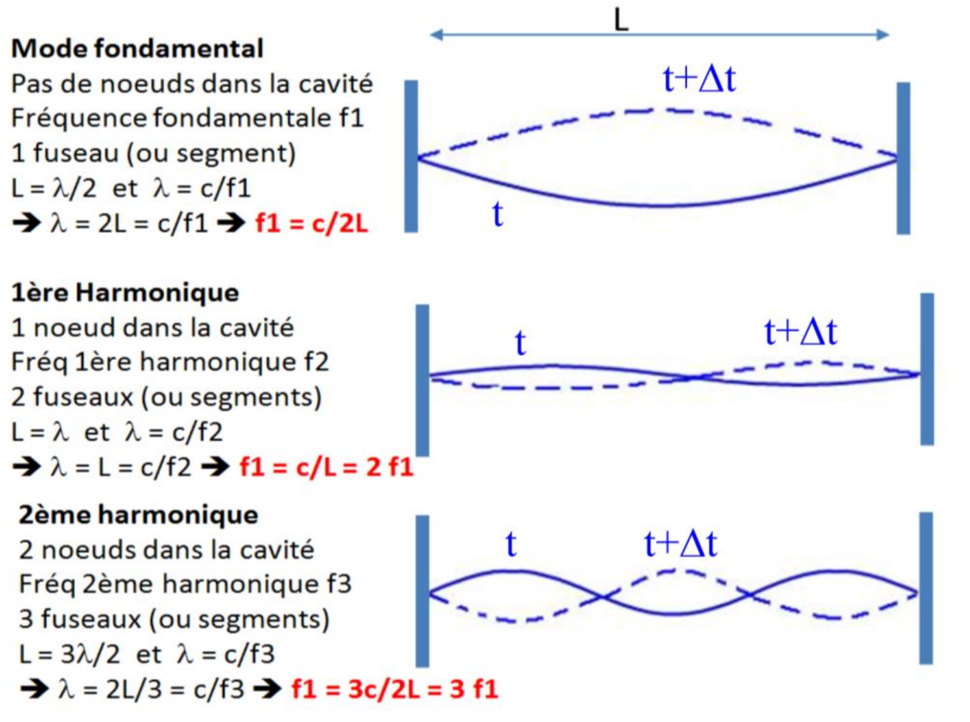
Equation aux dimensions :

Tension T_e (1 force) : $[T_e] = [MLT^{-2}]$; masse linéïque $[\mu] = [MLT^{-1}]$

$$\left[\sqrt{\frac{T_e}{\mu}}\right] = [MLT^{-2}] / [ML^{-1}]^{1/2} = [L^2 T^{-2}]^{1/2} = [L T^{-1}] = [\text{ vitesse}]$$

b) Ondes stationnaires résonantes sur une corde

Composition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie : une Onde Stationnaire



Conclusion : cavité de longueur L

$$f_n = n\,f1 = n\,c/2L = n\,\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_e}{\mu}}$$ et dimension de la cavité $x = n\,\lambda/2$

n=1 : fréquence fondamentale ; $x = \lambda/2$
n= 2 : 1ère harmonique ; $x = \lambda$
n=3 : 2ème harmonique ; $x = 3\lambda/2$
n=4 : 3ème harmonique ; $x = 2\lambda$

Application : instruments à corde
μ : dimension de la corde ; Te : tension de la corde accordée ;
L : position sur le manche d'une guitare (x) : si x ↓ → λ ↓ et f ↑

c) Propagaration de l'énergie sur une corde
Soit une onde sinusoïdale $y(x,t)=y_0 \sin(kx - \omega t)$ qui se propage le long d'une corde.
A chaque instant, on fournit une quantité d'énergie pour entretenir la propagation de l'onde.
Cette énergie pourra être utilisée à l'extrémité de la corde.

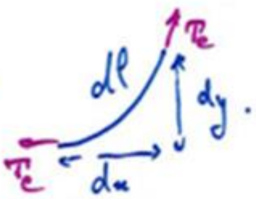
La Puissance moyenne fournie par la source pour créer et entretenir l'onde est égale à :

$$P_{moy} = \frac{1}{2}\mu\,(\omega\,y_0)^2\,c$$

Démonstration

Démonstration :

soit 1 élt de corde soumis à l'influence de l'onde sur la corde



$\mathcal{E}_{totale} = \mathcal{E}_M = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$.

pour $dl \rightarrow dm = \mu\,dx$ (longueur avant tension) et vitesse d'1 pt de la corde $v = \frac{dy}{dt}$.

* $d\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}(\mu\,dx)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

* $d\mathcal{E}_p$ est l'énergie potentielle correspondant à l'allongement de dx à dl.

$d\mathcal{E}_p = T_e\,(dl - dx)$

avec $dl = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$
$= dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ car $(1+z)^n \underset{z\to 0}{=} 1+nz$

donc $d\mathcal{E}_p = T_e (d\ell - dx)$ avec $d\ell = dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$.

soit $\left[d\mathcal{E}_p = T_e \frac{1}{2} dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right.$

d'où $d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\left[\mu\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T_e dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$

$$d\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}\left[\mu\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + T_e\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx.$$

$\sin' = \cos$

Pour $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \rightarrow \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = y_0 k \cos(kx-\omega t)$

$\hookrightarrow \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -y_0\omega \cos(kx-\omega t)$

d'où $d\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\left[\mu(\omega y_0)^2 + T_e(k y_0)^2\right]\cos^2(kx-\omega t)\right] dx.$

or $C = \sqrt{\frac{T_e}{\mu}} \rightarrow c^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow T_e = c^2\mu.$ $\left\{ \mu\omega^2 = \mu k^2 c^2 = \mu k^2 \frac{T_e}{\mu} \right.$

célérité

et $\omega = kc \rightarrow \omega^2 = k^2c^2$ donc $\left[T k^2 = \mu\omega^2 \,!!\right.$

d'où $d\mathcal{E} = 2\times\frac{1}{2}[\quad]\,dx \rightarrow \left[d\mathcal{E} = \underline{\mu(\omega y_0)^2\cos^2(kx-\omega t)\,dx}.\right.$

$d\mathcal{E}/dx$ est la densité d'énergie linéique en J/m.

$d\mathcal{E}_{moy} = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} d\mathcal{E}\,dt = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}\mu(\omega y_0)^2\cos^2(kx-\omega t)\,dx\,dt$

période

$$d\mathcal{E}_{moy} = \mu(\omega y_0)^2 dx \underbrace{\frac{1}{T_p}\int_0^{T_p}\cos^2(kx-\omega t)\,dt}_{1/2}$$

d'où $d\mathcal{E}_{moy} = \frac{1}{2}\mu(\omega y_0)^2 dx$

célérité

Puissance moyenne $= \left[P_{moy} = \frac{d\mathcal{E}_{moy}}{dt} = \frac{1}{2}\mu(\omega y_0)^2 \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\mu(\omega y_0)^2 c\right.$ Puissance moyenne de l'onde sur 1 corde.