UE : Energie Electrostatique (HLEE 204)

A- Outils mathématiques

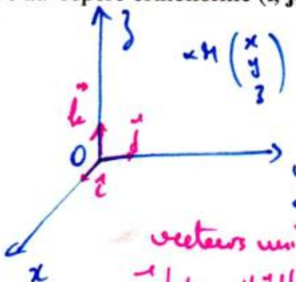
Les vecteurs sont notés en **gras**

I- Opérations sur les vecteurs

Soit un repère d'axes (Ox, Oy, Oz) associés à une base unitaire ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) orthonormée,

On peut repérer un point M par les 3 coordonnées cartésiennes x, y, z relative au repère orthonormé ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ $\qquad \vec{OM}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$



Soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (u_x, u_y, u_z) ;

soit un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (v_x, v_y, v_z)

$\vec{u}\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \qquad \vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$

Soit 2 points A et B de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B).

le vecteur $\vec{AB}\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$

vecteurs unitaires

$\vec{i}\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \|\vec{i}\| = 1$

$\vec{j}\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{k}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

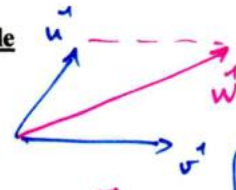
* Norme d'un vecteur

$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

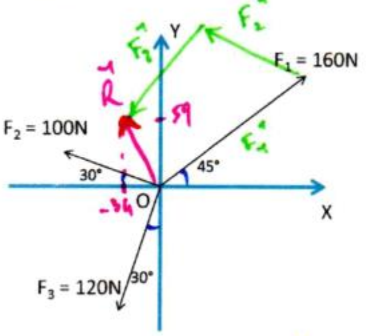
* Addition vectorielle



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}\begin{vmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{vmatrix}$

$\vec{w} = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k}$

Exemple : Déterminer la force résultante $\vec{R}$



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$.

Projection de chaque vecteur suivant (Ox, Oy).

$\vec{F_1}\begin{vmatrix} F_{1x} = F_1 \cos 45 = F_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 113 \\ F_{1y} = F_1 \sin 45 = F_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 113 \end{vmatrix}$

$\vec{F_2}\begin{vmatrix} F_{2x} = -F_2 \cos 30 = -F_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -87 \\ F_{2y} = F_2 \sin 30 = F_2 \dfrac{1}{2} = 50 \end{vmatrix}$

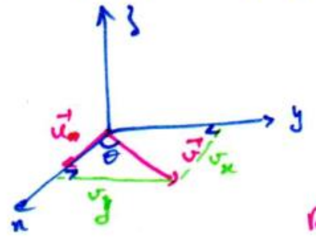
$\vec{F_T} = \vec{R}\begin{vmatrix} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_2 - \dfrac{1}{2}F_3 = R_x \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F_1 + \dfrac{1}{2}F_2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}F_3 = R_y \end{vmatrix}$.

$\vec{F_3}\begin{vmatrix} F_{3x} = -F_3 \sin 30 = -F_3 \dfrac{1}{2} = -60 \\ F_{3y} = -F_3 \cos 30 = -F_3 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -104 \end{vmatrix}$

$\vec{R}\begin{vmatrix} R_x = 113 - 87 - 60 = -34 \\ R_y = 113 + 50 - 104 = +59 \end{vmatrix}$

*** Produit scalaire** $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_x v_x) + (u_y v_y) + (u_z v_z)$.

Exemple : $\vec{u}\begin{vmatrix} u_x = u \\ u_y = 0 \\ u_z = 0 \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = v\cos\theta \\ v_y = v\sin\theta \\ v_z = 0 \end{vmatrix}$



$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = u\,v\cos\theta$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta$.

Résultat : 1 scalaire.

Exemple : travail T d'une force électrostatique

$\vec{F} = q\vec{E}$ et $\underbrace{dT}_{\text{scalaire}} = \vec{F}\cdot\vec{d\ell} \rightarrow T = \int_A^B \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = \vec{F}\cdot\vec{AB} = q\vec{E}\cdot\vec{AB} = q\,V_{AB} = q(V_A - V_B)$

$= \vec{F}\cdot[\vec{\ell}]_A^B$

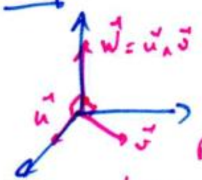
A, B ; V_A V_{AB} V_B ; $V_{AB} = V_A - V_B$; $V_{AB} > 0$ si $V_A > V_B$

*** Produit vectoriel**

$\vec{u}\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ u_x \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ v_x \end{vmatrix}$ $\longrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$ $\begin{vmatrix} w_x = u_y v_z - u_z v_y \\ w_y = u_z v_x - u_x v_z \\ w_z = u_x v_y - u_y v_x \end{vmatrix}$

$\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$

exemple. $\vec{u}\begin{vmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec{v}\begin{vmatrix} v\cos\theta \\ v\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$



$\hookrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ u\,v\sin\theta \end{vmatrix}$

⊛ $\vec{u}\wedge\vec{v} = 0$ si $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ⊛ $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$

Résultat 1 vecteur de norme $\|\vec{w}\| = u\,v\sin\theta$.

II- Intégrales curvilignes, de surface et de volume

Soit une fonction f(M) d'un point M(x, y, z) : f(M) = f(x, y, z)

- si M se déplace sur une courbe *C*, on définit l'intégrale curviligne par : $\int_{(C)} f(M)\,d\ell$
- si M se déplace sur une surface S, on définit l'intégrale de surface par : $\iint_{(S)} f(M)\,dS = \iint f(M)\,dx\,dy$

l'exemple d'intégrale de surface le plus simple est la surface elle même, pour f(M) =1 : $S = \iint dx\,dy$ S

- si M se déplace sur une surface V, on définit l'intégrale de volume par $\iiint_{(V)} f(M)\,dV = \iiint f(M)\,dx\,dy\,dz$

l'exemple d'intégrale de volume le plus simple est le volume lui même, pour f(M) =1 : $V = \iiint dx\,dy\,dz$. V

* Charges ponctuelles et distributions continues de charges

- Charge ponctuelle : dimension chargée infiniment petite vis-à-vis des dimensions auxquelles on se place.
- Distribution de charge : les dimensions sont non infiniment petites. 3 cas se présentent :

1- Pour un volume chargé V, on aura pour un volume élémentaire dV, la charge ponctuelle dq = ρ dV

dV V $dq = \rho\,dV$ densité volumique de charge $\rho = \frac{dq}{dV}$ $Q_{total} = \iiint_{vol} \rho\,dV$ si volume uniformément chargé

charge par unité de vol

2- Pour une surface chargés S, on aura pour une surface élémentaire dS, la charge ponctuelle dq = σ dS

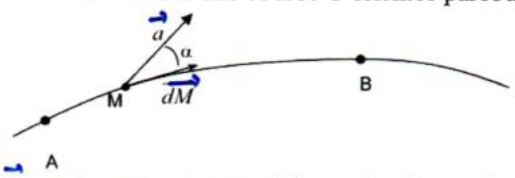
S dS $dq = \sigma\,dS$ densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dq}{dS}$ $Q_{total} = \iint_{surf} \sigma\,dS$ si surface uniformément chargée.

3- Pour une ligne chargée, on aura pour une longueur élémentaire dℓ, la charge ponctuelle dq = λ dℓ

dℓ $dq = \lambda\,d\ell$ densité linéique de charge $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$ $Q_{total} = \int_{\ell} \lambda\,d\ell$ si ligne uniformément chargée.

*Intégrale vectorielle ou circulation d'un vecteur sur une courbe orientée

Soit un arc AB sur une courbe C orientée parcouru par un point M. Soit $\vec{\mathbf{a}}$ un vecteur du point M.



On appelle circulation du vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ le long de l'arc AB, la valeur de l'intégrale curviligne du produit scalaire $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{dM}}$: $\int_A^B \vec{a}.\vec{dM} = \int_A^B a\, dM \cos\alpha$

$\vec{\mathbf{dM}}$ est le vecteur tangent à la courbe C au point M $\quad \vec{dM}\begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

α est l'angle entre $\vec{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{dM}}$

La circulation entre 2 pts dépend du chemin suivi

On notera la circulation du vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ suivant un contour fermé : $\oint \vec{a}.\vec{dM}$

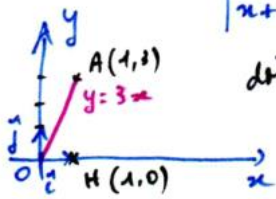
Rq si $\vec{a}$ est une force ⇒ travail de cette force entre A et B. → 1 scalaire

Exemple : Soit $\vec{\mathbf{a}}$ le champ de vecteur qui associe au point M (x, y) le vecteur $\vec{\mathbf{a}}(M) = -y\,\vec{\mathbf{i}} + (x+1)\,\vec{\mathbf{j}}$.
Soit les points A(1,3), H(1,0). Calculer les circulations de $\vec{\mathbf{a}}$ le long de [OA], [OH], [HA]

$\vec{a}\begin{vmatrix} -y \\ x+1 \end{vmatrix}$

Soit calculer $\int \vec{a}.\vec{dM}$ avec $\begin{cases} \vec{a}(M) = -y\vec{i} + (x+1)\vec{j} \\ \vec{dM} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}. \end{cases}$

↳ $\int -y\,dx + (x+1)\,dy$



$\vec{dM}\begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

* circulation de $\vec{a}$ suivant (OA].

Pour $x \in [0,1] \rightarrow y = 3x$ sur le segment (OA]

$I_1 = \int -y\,dx + (x+1)\,dy = \int_0^1 (-3x)\,dx + (x+1)\,3\,dx$ car $y = 3x \rightarrow dy = 3\,dx$.

$= \int_0^1 (-3x + 3x + 3)\,dx = \int_0^1 3\,dx = (3x)_0^1 = 3.$

* circulation de $\vec{a}$ suivant (OH] → $y = 0 \Rightarrow dy = 0$ donc $I_2 = 0$.

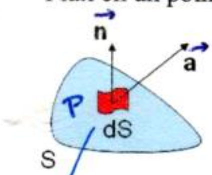
* circulation de $\vec{a}$ suivant (HA] → $x = 1 = cte \Rightarrow dx = 0$ et $y \in [0,3]$.

$I_3 = \int -\underbrace{y\,dx}_{0} + \underbrace{(x+1)}_{1}\,dy = \int_0^3 2\,dy = (2y)_0^3 = 6.$

* Flux d'un vecteur à travers une surface fermée

- Flux en un point P d'un vecteur $\vec{\mathbf{a}}$ à travers la surface S orientée.

Surface S orientée ⇒ $\vec{dS} = dS\,\vec{n}$.
vecteur unitaire $\|\vec{n}\| = 1$.
$\vec{n}$ est normal à la surface



surface élémentaire au point P.

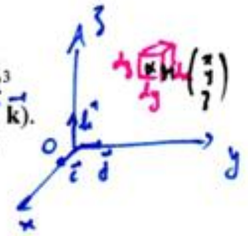
Le flux élémentaire
$d\Phi = \vec{a}(P).\vec{dS}$

$\Phi = \iint \vec{a}(P).\vec{dS}$

$= \iint \vec{a}(P)\,\vec{n}.dS.$

III- Fonctions de plusieurs variables

* Dérivées partielles - différentielles



Soit f(M) une fonction de point à valeurs scalaires définie sur un certain domaine de $\mathbb{R}^3$
Soit le point M repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes x, y, z relative au repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
La fonction f(M) est une fonction numérique des 3 variables scalaires x, y, z : f(x, y, z)

Si x varie de dx, y de dy et z de dz, alors $f \to f + df$

la différentielle df est égale : $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z\ cte} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z\ cte} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{y,x\ cte} dz$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x (on dérive f par rapport à x avec y et z constants)

Exemple : 2 variable : $f(x,y) = 2x^2 + xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2xy \longrightarrow df = (4x + y^2)\,dx + 2xy\,dy.$

* Dérivés partielles d'ordre supérieur

Soit f(x, y) qui admet des dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on peut calculer des dérivées secondes d'ordre :

$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$f(x,y) = 2x^2 + xy^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

* Différentielle logarithmique

La différentielle log d'un produit (quotient) est la somme (différence) des différentielles log de chaque terme.

Exemple : $y = \frac{uv}{w} \rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{uv}{w}\right) = \ln(u \cdot v) - \ln w = \ln u + \ln v - \ln w \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} - \frac{dw}{w}$

* Application au calcul d'incertitude

Soit 1 fonction f(x,y,z), on doit effectuer des mesures directes de x, y, z.

$x = x_0 + \Delta x$
$y = y_0 + \Delta y$ — erreur absolue de la mesure
$z = z_0 + \Delta z$

Résultat de la mesure ; x_0, y_0, z_0 : meilleure estimation de la mesure.

Pour déterminer l'erreur absolue Δf, on applique le calcul différentiel.

$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

où dx, dy et dz sont des infiniment petits

si les dx, dy, dz sont mesurables ⇒ prendre Δx, Δy et Δz ⇒ $\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z$

incertitude absolue

Exemples :

1- Soit la fonction $f = \frac{x}{x-y}$ donner l'expression de l'erreur absolue de f et de l'erreur relative de f.

et $\frac{\Delta f}{f}$ = incertitude relative en %

a) Méthode de la différentielle ordinaire. $f = \frac{x}{x-y}$.

1) → On exprime la différentielle

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

2) on calcule les dérivées partielles.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-y-x}{(x-y)^2} = \frac{-y}{(x-y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

$$\rightarrow df = -\frac{y}{(x-y)^2} dx + \frac{x}{(x-y)^2} dy.$$

3) on prend les valeurs absolues alors $df \rightarrow \Delta f$.

$$\Delta f = \left| -\frac{y}{(x-y)^2} \right| \Delta x + \left| \frac{x}{(x-y)^2} \right| \Delta y.$$ incertitude absolue.

Si on veut exprimer l'incertitude relative $\Delta f / f$

$$\Delta f / f = \left| \frac{-y}{x(x-y)} \right| \Delta x + \left| \frac{1}{(x-y)} \right| \Delta y.$$ incertitude relative.

b) Méthode de la différentielle logarithmique : $f = \dfrac{x}{x-y}$.

1) on prend le log népérien :

$\ln f = \ln x - \ln(x-y)$

2) on prend la différentielle sachant que $d[\ln(z)] = \dfrac{dz}{z}$

soit $\dfrac{df}{f} = \dfrac{dx}{x} - \dfrac{d(x-y)}{x-y}$

3) on groupe les termes semblables :

$$\frac{df}{f} = dx\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\right] + dy\left[+\frac{1}{x-y}\right]$$

$$\frac{df}{f} = dx\left[\frac{-y}{x(x-y)}\right] + dy\left[\frac{1}{x-y}\right]$$

4) on prend les valeurs absolues et on remplace les d^t petits par

des valeurs mesurables

$$\frac{\Delta f}{f} = \Delta x\left|\frac{-y}{x(x-y)}\right| + \Delta y\left|\frac{1}{x-y}\right|$$ incertitude relative.

$$\Delta f = f\left\{\Delta x\left|\frac{-y}{x(x-y)}\right| + \Delta y\left|\frac{1}{x-y}\right|\right\}$$ incertitude absolue

IV- Opérateurs mathématiques différentiels

* Vecteur Gradiant d'une fonction scalaire $\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z)$

Le"gradiant de f", noté $\overrightarrow{grad}$ f, est **le vecteur** dont les composantes sont les dérivées premières de la fonction f :

$$\text{grad}_x = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \qquad \text{grad}_y = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \qquad \text{grad}_z = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \qquad \text{noté } \vec{\nabla} \left| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right.$$

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \longrightarrow 1 \text{ vecteur}$$

Appliqué sur 1 scalaire

Si les coordonnées de M subissent des accroissements dx, dy, dz (ou composante de la différentielle $\overrightarrow{dM}$ du rayon vecteur de M), alors

$$\text{scalaire } df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \underbrace{\overrightarrow{grad}\, f.\overrightarrow{dM}}_{\text{produit scalaire}} \qquad \text{avec } \overrightarrow{dM} \left| \begin{matrix} dx \\ dy \\ dz \end{matrix} \right.$$

* Scalaire Laplacien d'une fonction scalaire

Le "Laplacien de f", noté Δf est **le scalaire** défini par : $\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2}$ → 1 scalaire

* Scalaire Divergence d'un champ de vecteurs

Soit un champ de vecteurs $\vec{U}$(M). Dans un repère orthonormé, M a pour coordonnées x, y, z et $\vec{U}$ pour composantes U_x, U_y, U_z (3 fonctions scalaires de x, y, z). On définit **le scalaire** "divergence de U" notée $\underbrace{\text{div}}\, \vec{U}$ ou bien $\underbrace{\vec{\nabla}.\vec{U}}_{PS}$ par :

appliqué à 1 vecteur.

$$\text{div}\,\vec{U} = \underbrace{\vec{\nabla}}_{1 \text{ vecteur}}.\vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \longrightarrow 1 \text{ scalaire.}$$

s'applique sur 1 vecteur

☞ Théorème de la divergence : *Si S est une surface fermée quelconque qui enferme un volume V, le flux sortant de $\vec{U}$ à travers S est égal à l'intégrale sur le volume de la divergence de $\vec{U}$.* dim 2 dim 3

$\vec{dS} = \vec{n}\, dS.$

surface élémentaire

$$\underbrace{\iint_S \vec{U}.\vec{dS}}_{\text{Flux de } \vec{U} \text{ à travers } S} = \iiint_V \text{div}.\vec{U}\, dV = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{U}\, dV$$

* VecteurRotationnel d'un champ de vecteurs

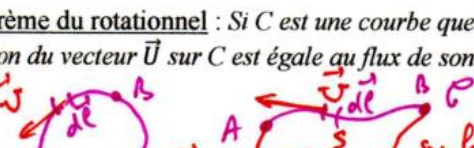
Soit un champ de vecteurs $\vec{U}(M)$. On appelle "rotationnel de U", noté $\overrightarrow{rot}\,\vec{U}$ ou bien $\vec{\nabla} \wedge \vec{U}$, le vecteur de composantes:

$$\vec{\nabla} \left| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right. \wedge \vec{U} \left| \begin{matrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{matrix} \right. \longrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \vec{\nabla} \wedge \vec{U}$$

s'applique sur 1 vecteur.

$$\left| \begin{matrix} (\vec{\nabla}\wedge\vec{U})_x = \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \\ (\vec{\nabla}\wedge\vec{U})_y = \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \\ (\vec{\nabla}\wedge\vec{U})_z = \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \end{matrix} \right. \longrightarrow 1 \text{ vecteur.}$$

☞ Théorème du rotationnel : *Si C est une courbe quelconque, S une surface quelconque s'appuyant sur C, la circulation du vecteur $\vec{U}$ sur C est égale au flux de son rotationnel à travers S :*



$$\oint_C \vec{U}.\vec{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{U}.\vec{dS} = \iint_S \vec{\nabla}\wedge\vec{U}.\vec{dS}$$

dim 1 dim 2

Remarque :

Si $\vec{U} = \overrightarrow{grad}\, f \Rightarrow \int_A^B \overrightarrow{grad}\, f.\vec{dl} = \int_A^B df = [f]_A^B = f(B) - f(A)$ si courbe fermée ⇒ la circulation est nulle

* Quelques relations entre les opérateurs différentiels

$$\Delta f = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) \qquad div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{U}) = 0 \qquad \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}\, f) = \vec{0}$$

donc si $div\,\vec{W} = 0\ alors\ \vec{W} = \overrightarrow{rot}\,\vec{U}$ si $\overrightarrow{rot}\,\vec{U} = \vec{0}\ alors\ \vec{U} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f$

$\circledast$ $\Delta f = \mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f)$

$$= \mathrm{div}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$$

$\circledast$ $\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\ \left|\begin{array}{l} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \mathrm{div}(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$\mathrm{div}(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}) = \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial y}} = 0$$

donc si $\mathrm{div}\,\vec{w} = 0$ alors $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}$

$\circledast$ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{\nabla}\wedge(-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f) = \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla} f)$

$$\vec{\nabla}\left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{array}\right. \wedge\ (-\vec{\nabla} f)\left|\begin{array}{l} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial f}{\partial z} \\ -\frac{\partial f}{\partial x} \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0 \end{array}\right.$$

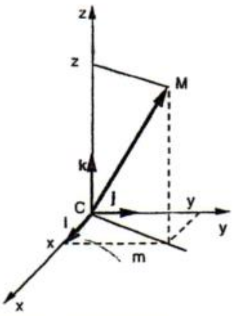
donc si $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$.

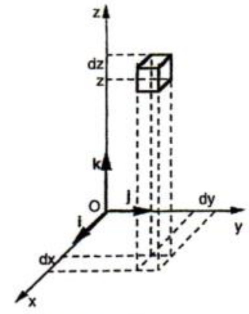
V- Systèmes de coordonnées

I- COORDONNEES CARTESIENNES : OM = x i + y j + z k

$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$d^3r = d\vartheta = dx\,dy\,dz = d^3r$





$$\boxed{\begin{array}{c} d\,OM = dr = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} \\ |dr|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ dV = dx\,dy\,dz \end{array}}$$

Rappel : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$ **grad f.dl**, d'où l'expression du gradient

$$\mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \mathbf{A} = \Delta A_x\,\mathbf{i} + \Delta A_y\,\mathbf{j} + \Delta A_z\,\mathbf{k}$$

II- COORDONNEES CYLINDRIQUES :

$\rho = |Om|$ $\quad x = \rho.\cos\theta$

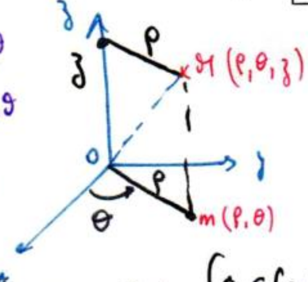
$\theta = (Ox, Om)$ $\quad y = \rho.\sin\theta$

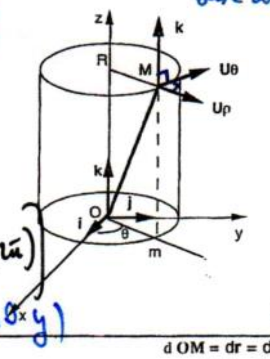
(ρ, θ, z)

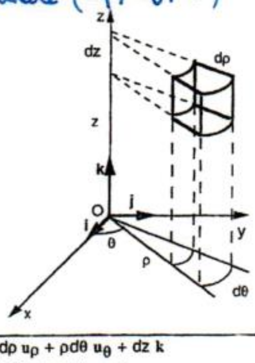
$$\boxed{OM = \rho.\mathbf{u}_\rho + z\,\mathbf{k}}$$

base directe $(\vec{u}_\rho ; \vec{u}_\theta ; \vec{k})$

$M \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$







$d\vartheta = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$. $[\theta \in [0, 2\pi]$

$\theta \in (x O y)$

Rq Coordonnées polaires dans le plan xOy

$\rightarrow (\theta, \rho)$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 0. \end{cases}$

$dS = \rho\,d\rho\,d\theta$

$$\boxed{\begin{array}{c} d\,OM = dr = d\rho\,\mathbf{u}_\rho + \rho d\theta\,\mathbf{u}_\theta + dz\,\mathbf{k} \\ |dr|^2 = d\rho^2 + (\rho d\theta)^2 + dz^2 \\ dV = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz \end{array}}$$

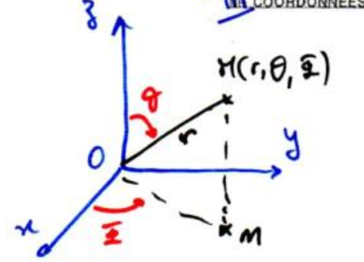
$$\mathbf{grad}\ f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

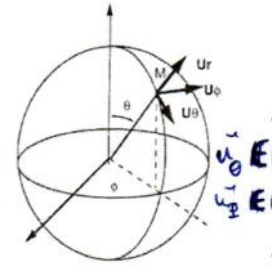
$$\mathrm{div}\ \mathbf{V} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{u}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta}\right]\mathbf{k}$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

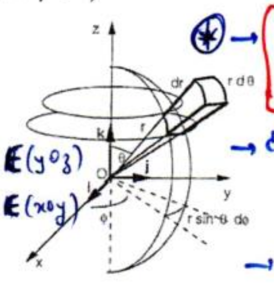
III COORDONNEES SPHERIQUES : OM = r.u_r (r, θ, Φ)





$\vec{u}_\theta \in (yOz)$

$\vec{u}_\Phi \in (xOy)$



Rq

(*) → él^t de surface à r = cte
$\boxed{dS_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\Phi}$

→ él^t de surface pour θ = cte
$dS_\theta = r\,dr\,d\Phi$

→ él^t de surface pour Φ = cte
$dS_\Phi = r\,dr \sin\theta \, d\theta$

$\theta \to [0, \pi] \in (yOz)$

$\Phi \to [0, 2\pi] \in (xOy)$

r = |OM|	$x = r \sin\theta \cos\phi$
θ = (Oz,OM)	$y = r \sin\theta \sin\phi$
ϕ = (Ox,Om)	$z = r \cos\theta$

$dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\Phi$

$$d\mathbf{OM} = d\mathbf{r} = dr.\mathbf{u}_r + r.d\theta\,\mathbf{u}_\theta + r.\sin\theta.d\phi.\mathbf{u}_\phi$$
$$|d\mathbf{r}|^2 = dr^2 + (r.d\theta)^2 + (r.\sin\theta.d\phi)^2$$
$$dV = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\phi$$

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\Phi \\ y = r \sin\theta \sin\Phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\mathbf{u}_\phi$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2.V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta.V_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r.\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{V} = \frac{1}{r.\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta.V_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rV_\phi)}{\partial r}\right]\mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{u}_\phi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

VI- Surfaces et volumes : Calculer surface et périmètre d'un disque, volume et surface d'une sphère.

Disque

coordonnées polaires (ρ, θ)

$$S = \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r [\theta]_0^{2\pi}$$

$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$

soit $\boxed{S = \frac{1}{2} r^2 \, 2\pi = \pi r^2}$

↳ $dS = 2\pi r\, dr = l\, dr$

⇒ périmètre $l = 2\pi r$

Sphère

coord sphériques

$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\Phi$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\Phi$$

$$V = \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^R \left(-\cos\theta\right)_0^\pi \left(\Phi\right)_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3}\left(-(-2)\right) 2\pi$$

soit $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

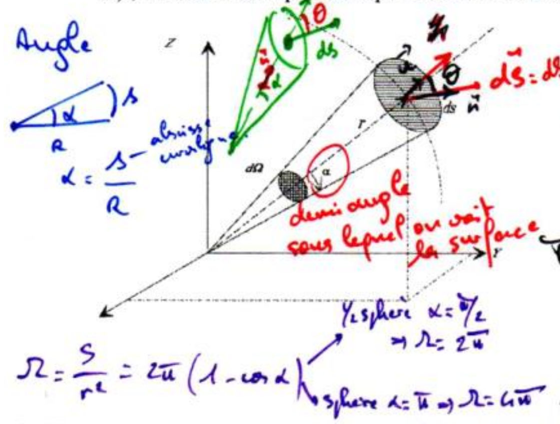
$S = \frac{dV}{dR} = 4\pi R^2$ surface d'1 sphère.

$dV = S\, dr = 4\pi r^2 dr$ (*)

VII-Angle solide : de même qu'un angle désigne une portion de plan limitée par 2 demi-droites issues d'un point, un angle solide dΩ désigne une portion de l'espace limitée par des demi-droites formant un cône : $d\Omega = dS/r^2$ (en stéradians Sr) ; dS étant l'aire que découpe le cône sur une sphère de rayon r dont le centre est au centre du cône

Angle

$\alpha = \frac{S}{R}$ — abscisse curviligne



$d\vec{S} = dS\,\vec{n}$

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}.\vec{n}.\vec{u}}{r^2} = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$$

$\vec{n}$ vecteur unitaire normal à la surface

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \text{ si } \vec{u} \parallel d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{S}{r^2}}$$

Tout l'espace $S = 4\pi r^2$

⇒ $\Omega = 4\pi$ (Sr)

½ espace $S = 2\pi r^2$

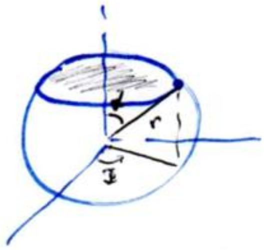
⇒ $\Omega = 2\pi$ (Sr)

$$\Omega = \frac{S}{r^2} = 2\pi(1 - \cos\alpha)$$

½ sphère $\alpha = \pi/2$ ⇒ $\Omega = 2\pi$

sphère $\alpha = \pi$ ⇒ $\Omega = 4\pi$

démonstration



α demi angle sous lequel on voit le cône

* coordonnées sphériques

Elt de surface à r = cte

$$\rightarrow dS_{r=cte} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\Phi .$$

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\Phi .$$

$$\Omega = \iint d\Omega = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta .$$

$$= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta \, d\theta = 2\pi \left[-\cos\theta \right]_0^{\alpha}$$

$$= 2\pi \left[1 - \cos\alpha \right] .$$

d'où $\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha)$

Ω : angle solide d'l calotte sphérique

α : demi angle sous lequel on voit la surface.

→ Pour 1 sphère complète ⇒ $\alpha = \pi$ → $\cos\pi = -1$ et $\Omega = 4\pi$ Sr

→ Pour 1 hemisphère ⇒ $\alpha = \pi/2$ → $\cos\pi/2 = 0$ et $\Omega = 2\pi$ Sr.

* Elt de surface à r = cte. $dS_{r=cte} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\Phi$.

$$S_{Boule} = \int dS = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\Phi = r^2 \, 2\pi \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} = 4\pi r^2$$