Fiche 1	Thème : PROBABILITÉS **PROBABILITÉS CONDITIONNELLES**	Mathématiques Approfondies

Ce qu'il faut savoir…

Vocabulaire des événements (Rappels)

- Dans une **expérience aléatoire**, l'**univers Ω** est l'ensemble de tous les résultats possibles.
- Un **événement** est une partie de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.
- Deux événements A, B sont **disjoints** ou **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
- L'**événement contraire** d'un événement A est l'**événement $\bar{A}$** constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

Calculs des probabilités (Rappels)

- La **probabilité d'un événement** d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A. La probabilité de Ω est 1.
- Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.
- L'**équiprobabilité** correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement élémentaire est :

$$\frac{1}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}$$

et pour tout événement A,

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombres de cas possibles}}$$

- Pour tous événements **disjoints** A, B, → c'est précis.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Pour tout événement A,

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. En particulier $P(\varnothing) = 0$.

- Pour tous événements A, B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Probabilités conditionnelles

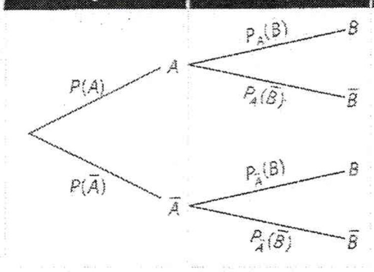
- $P(A)$ $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, $\times P(A)$

$P_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A (est réalisé).

- Pour tous événements A et B de probabilités non nulles,

$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.

Arbre de probabilité



Étape 1	Étape 2	Résultat	Probabilité du résultat
		$A \cap B$	$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
		$A \cap \bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B})$
		$\bar{A} \cap B$	$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$
		$\bar{A} \cap \bar{B}$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$

- La probabilité d'un « résultat » est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui conduisent à ce résultat.
- La probabilité d'un événement apparaissant à l'étape 2 est égale à la somme des probabilités des « résultats » dans lesquels cet événement figure.

Événements indépendants

- Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou : $P_B(A) = P(A)$.

Exercice 1.

1. Soient A et B deux événements incompatibles tels que : $p(A)=0,3$ et $p(B)=0,5$.
   a) Calculer $p(A\cap B)$.
   b) Calculer $p(A\cup B)$.
   c) Calculer $p(\overline{A})$.
   d) Calculer $p(\overline{B})$
2. Soient A et B deux événements qui ne sont incompatibles tels que : $p(A)=0,3$; $p(B)=0,5$ et $p(A\cap B)=0,1$.
   a) Calculer $p(A\cup B)$.
   b) Calculer $p(\overline{A})$.
   c) Calculer $p(\overline{B})$.

Exercice 2.

Un sondage est effectué dans une société comprenant 40 % de cadres et 60 % d'employés. On sait que 20 % des cadres et 10 % des employés de cette société parlent anglais.

1. On considère un groupe de 100 salariés. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de salariés parlant anglais	Nombre de salariés ne parlant pas anglais	TOTAL
Nombre de cadres	$40\times\frac{20}{100}$ 8.	40−8 32	40.
Nombre d'employés	$60\times\frac{10}{100}$ 6.	60−6. 54	60
TOTAL	8+6. 14	32+54 86.	100

2. On choisit un salarié au hasard parmi les 100. Tous les employés ont la même probabilité d'être choisis. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   a) E : " le salarié est un employé " ;
   b) E_1 : " le salarié est un cadre sachant parler anglais " ;
   c) E_2 : " le salarié est un employé sachant parler l'anglais " ;
   d) E_3 : " le salarié sait parler anglais ".
3. Calculer $p_{E_3}(E)$. Arrondir à 10^{-3}.

Exercice 3.

Une maladie atteint 3 % d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
Parmi les bien portants, 2 % ont un test positif.
Parmi les personnes malades, 49 ont un test négatif.

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de personnes malades	Nombre de bien portants	TOTAL
Test positif	900−49 851	$29100\times\frac{2}{100}$ 582	851+582 1433
Test négatif	49	29100−582 28 518	49+28518 28 567
TOTAL	$30000\times\frac{3}{100}$ 900	30 000−900 29 100	30 000

Dans les questions suivantes, les résultats numériques demandés seront à arrondir à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard une personne de cette population.
   On considère les événements T et M suivants :
   - T : " le test est positif pour la personne choisie "
   - M : " la personne choisie est malade ".

   a) Traduire par une phrase chacun des événements suivants : $\overline{T}$, $T\cap M$ et $\overline{T}\cap M$.
   b) Calculer les probabilités : $p(\overline{T})$, $p(T\cap M)$ et $p(\overline{T}\cap M)$.
   c) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade ou ait un test positif.
   d) Déterminer, à l'aide du tableau, les probabilités conditionnelles $p_T(M)$ et $p_M(T)$.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'elle a eu un test négatif.

Exercices	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	Mathématiques Approfondies

Exercice 1

Un grossiste spécialisé dans le jardinage reçoit des sachets de graines d'aubergines « bio » (c'est-à-dire issues de l'agriculture biologique).
Le grossiste reçoit ces sachets en grande quantité. Chaque sachet peut présenter deux défauts notés respectivement « a » et « b ».
Le défaut « a » consiste en la présence de désherbants chimiques.
Le défaut « b » consiste en la présence de pesticides.
On prélève un sachet au hasard dans une importante livraison.
L'événement « le sachet présente le défaut « a » est noté A et l'événement « le sachet présente le défaut « b » est noté B.
Des études statistiques ont permis d'établir que $P(A)=0,02$ et $P(B)=0,03$.
On suppose que ces deux événements sont indépendants.

1. On note E_1 l'événement : « le sachet présente les deux défauts « a » et « b » ». Calculer $P(E_1)$.

2. On dit qu'un sachet est défectueux s'il présente au moins un des deux défauts.
   On note E_2 l'événement : « le sachet est défectueux ». Calculer $P(E_2)$.

3. On note E_3 l'événement : « le sachet ne présente aucun défaut ». Calculer $P(E_3)$.

4. Calculer la probabilité que le sachet présente les deux défauts sachant qu'il est défectueux.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-4} .

Exercice 2

Un garagiste a acheté 70 % de son stock de pneus à un premier fournisseur et 30 % à un deuxième fournisseur.
Il observe que :

- 5 % des pneus provenant du premier fournisseur ont un défaut,
- 10 % des pneus provenant du deuxième fournisseur ont un défaut.

On prélève au hasard un pneu dans le stock.
Tous les pneus ont la même probabilité d'être prélevés.
On considère les événements suivants :

- F : « le pneu provient du premier fournisseur » ;
- G : « le pneu provient du deuxième fournisseur » ;
- D : « le pneu a un défaut ».

1. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $P(F)$, $P(G)$, $P_F(D)$ et $P_G(D)$.

2. a) Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(F\cap D)$ et $P(G\cap D)$.
   b) Déduire de ce qui précède que $P(D)=0,065$.

3. Calculer la probabilité que le pneu provienne du deuxième fournisseur sachant que le pneu choisi a un défaut. Arrondir à 10^{-4} .