Thème 1	SYSTÈMES DE NUMÉRATION	Mathématiques pour l'informatique

I) Qu'est-ce qu'un système de numération ?

Notre système de numération moderne, appelé **système décimal**, est fondé sur plusieurs idées :

- dix symboles (chacun des chiffres de 0 à 9)
- un principe de numération de position, c'est à dire qu'un même chiffre a une signification différente selon sa position dans l'écriture du nombre.

A chaque position est associée un "poids", d'autant plus important que le chiffre est plus à gauche.
Ce poids est une puissance de la base utilisée, pour nous la base 10.
Ainsi : $1789=1\times10^3+7\times10^2+8\times10^1+9\times10^0=1000+700+80+9$.
On étend ce procédé aux nombres « décimaux » en utilisant les exposants négatifs des puissances de 10 pour la partie décimale. Par exemple : $18{,}51=1\times10^1+8\times10^0+5\times10^{-1}+1\times10^{-2}$.
Pour les nombres négatifs, un signe moins « - » précède l'écriture.
Cette écriture est exceptionnellement économique en symboles, puisqu'on évite l'utilisation de symboles représentant 10, 100,... Elle permet surtout de réaliser efficacement les opérations dont nous avons le plus besoin dans la vie courante : interprétation d'une quantité, comparaison de deux quantités, addition, soustraction, multiplication... (*Vous mettrez en œuvre ces méthodes en TP d'algorithmique lorsque vous programmerez les opérations usuelles sur des "grands" entiers*).

Pour résumer donc... qu'est-ce qu'un système de numération ?

Définition
Pour définir un système efficace, il faut trois données :

- la base du système
- les symboles ou digits (leur nombre correspond à la base)
- les poids de chaque digit selon son rang.

Ces systèmes sont dits **pondérés**.
Tous les systèmes que nous allons étudier dans ce cours possèdent ces trois caractéristiques.

II) Un premier cas particulier : le système décimal, de base 10.

De nombreuses civilisations ont utilisé (et utilisent encore) cette base 10. Le choix a très certainement été dicté par des raisons physiologiques : le nombre de doigts des deux mains !

Exemple préliminaire

1) En reprenant la méthode abordée dans l'introduction avec 1789, décomposer l'écriture de 257.
2) Quels sont les symboles du système décimal utilisés dans ce nombre 257 ?
3) Quels sont leurs rangs associés ?

Pour généraliser :

Définition
Le **système décimal** a :

- pour base : 10
- pour symboles les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9
- pour poids : les puissances de 10.

Remarque

Les chiffres dont le poids est le plus important (on parle des chiffres les plus significatifs) sont à gauche dans l'écriture du nombre. Ainsi, si l'on veut obtenir une bonne approximation d'un grand nombre, il suffit de ne conserver que les chiffres les plus à gauche, et de remplacer les autres par des 0 (pour conserver la signification des positions !).

III) D'autres cas particuliers à connaître.

1) Le système binaire

a) Caractérisation

Définition

Le **système binaire** est caractérisé par :

- pour base : 2 (plus petite base envisageable)
- pour symboles les chiffres : 0 et 1
- ses poids : les puissances de 2.

Un chiffre binaire est appelé « bit » en informatique, ce qui est la contraction de *binary digit*, autrement dit « chiffre binaire » en anglais.

Exemples

Donner la représentation des premiers entiers en binaire (base 2) :

$2_{10} = 2^1 = 1\times 2^1 + 0\times 2^0$

En décimal (base 10)	En binaire (base 2)	En décimal (base 10)	En binaire (base 2)
0	0	11	1011
1	1	12	1100
2	10	13	1101
3	11	14	1110
4	100	15	1111
5	101	16	10000
6	110	17	10001
7	111	18	10010
8	1000	19	10011
9	1001	20	10100
10	1010	21	10101

Vocabulaire

- Un nombre binaire à 4 ~~octets~~ bits est appelé un **quartet**.
- Un nombre binaire à 8 ~~octets~~ bits est appelé un **octet**.
- On s'intéresse parfois au bit de poids le plus faible dans un nombre binaire, on parle alors de **LSB** (*Least Significant Bit*), c'est celui qui se trouve le plus à droite du nombre ou encore au bit de poids le plus fort : le **MSB** (*Most Significant Bit*), c'est celui qui se trouve le plus à gauche.

b) « Nombres à virgule fixe »

Comme dans le système décimal, les puissances de 2 d'exposant négatif permettent des nombres avec virgule en binaire. Les exposants négatifs correspondant à des fractions ($2^{-1}=\frac{1}{2}$, $2^{-2}=\frac{1}{4}$, ...) on parlera de partie fractionnaire et non plus de partie décimale.

$2^{-1} = \frac{1}{2}$

Exemple

$$0{,}75_{10}=0{,}5+0{,}25=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=2^{-1}+2^{-2}=0{,}11_2 .$$

c) Conversions Binaire ↔ Décimal

Conversion binaire → décimal

Pour déterminer l'écriture en base 10 d'un nombre binaire, on applique la méthode suivante :

- On commence par multiplier chaque bit avec son poids (*ça nous donne la valeur du digit*)
- On ajoute le tout.

Appliquons par *exemple* la méthode sur le nombre $11101{,}01_2$:

$$11101{,}01_2=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+0\times2^{-1}+1\times2^{-2}=16+8+4+0+1+0+0{,}25=29{,}25$$

On a donc :

$$11101{,}01_2 = 29{,}25_{10}.$$

Exercice

Donner l'écriture des nombres binaires suivants en décimal : 1011_2 ; 1et $110{,}1011_2$.

Conversion décimal → binaire

Pour les entiers :

Pour déterminer l'écriture en base 2 d'un nombre en base 10, on raisonne par divisions successives par 2 (base).

Développons sur un *exemple* :

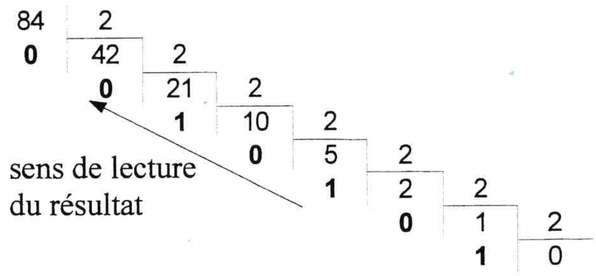
cherchons l'écriture en base 2 du nombre 84_{10} .

On s'arrête lorsque l'on obtient un quotient nul.

Pour lire le résultat, on remonte les divisions en écrivant successivement tous les restes.

On a donc :

$$84_{10} = 1010100_2.$$



Exercice

Déterminer l'écriture en binaire des nombres décimaux suivants : 27 ; 31 et 128.

Pour les « nombres à virgule fixe » :

On sépare le nombre en deux : partie entière et partie fractionnaire.

La partie entière se gère comme ci-dessus. Passons donc à la partie décimale.

Rappel : écriture décimale

On peut obtenir les chiffres de la partie « décimale » en effectuant des multiplications successives par 10 et en ne gardant que le chiffre des unités :

$$0,38457\times10=3,8457$$
$$0,8457\times10=8,457$$
$$0,457\times10=4,57$$
$$0,57\times10=5,7$$
$$0,7\times10=7$$ ... ça tombe juste !

Pour effectuer la conversion décimal → binaire, on effectue des multiplications successives par 2, ce qui revient, en binaire, à décaler la virgule vers la droite et à traiter les chiffres de la partie fractionnaire un par un.

Exemple : 0,3515625$_{10}$.

0,3515625	→ chiffre des unités : 0
0,3515625 × 2=**0**,703125	→ 0,0
0,703125 × 2=**1**,40625	→ 0,01
0,40625 × 2=**0**,8125	→ 0,010
0,8125 × 2=**1**,625	→ 0,0101
0,625 × 2=**1**,25	→ 0,01011
0,25 × 2=**0**,5	→ 0,010110
0,5 × 2=**1**	→ 0,0101101

-1.2.3.4.5-6.7

Ainsi, l'écriture exacte de 0,3515625$_{10}$ est 0,0101101$_2$.

Vérification : $2^{-2}+2^{-4}+2^{-5}+2^{-7}=0,3515625$.

Exercice

Convertir en ~~décimal :~~ binaire $a=0,578125_{10}$ et $b=0,85_{10}$.

Remarque importante

En décimal, certains nombres réels ont une partie décimale infinie, d'autres non... Il en est de même en binaire, mais ce ne sont pas forcément les mêmes !

Par exemple, le nombre 0,1$_{10}$ se traduit par une écriture infinie en binaire : on note : $0,0\overline{0011}_2$ ou encore sur 8 bits : $0,00011001_2$.

On constate qu'un nombre aussi simple que 0,1 ne peut pas être représenté exactement en machine puisqu'en base 2 il s'écrit avec une infinité de chiffres ! Les conséquences sont multiples et sources de nombres erreurs de programmation.

Exemples à tester :

- *si $x=0,4$ en maths $x^2=\dfrac{4x}{10}$ ... ce n'est pas le cas en Python !*
- *la suite (u_n) définie par $u_0=0,2$ et $u_{n+1}=6u_n-1$ en maths est constante... ce n'est pas le cas sous Excel !*

2) Le système hexadécimal

a) Caractérisation

Définition

Le **système hexadécimal** est caractérisé par :

- pour base : 16
- pour symboles les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
- ses poids : les puissances de 16.

On utilise généralement cette base pour “communiquer” avec le microprocesseur d’un ordinateur.

Exemples

Donner la représentation des premiers entiers en hexadécimal (base 16) :

En décimal (base 10)	En hexadécimal (base 16)	En décimal (base 10)	En hexadécimal (base 16)
0	0	11	B
1	1	12	C
2	2	13	D
3	3	14	E
4	4	15	F
5	5	16	10
6	6	17	11
7	7	18	12
8	8	19	13
9	9	20	14
10	A	21	15

$16_{10} = 1 \times 16^1 + 0 \times 16^0 = 10_{16}$

b) Conversions Hexadécimal ↔ Décimal

Conversion hexadécimal → décimal

C'est exactement la même méthode que pour le binaire, en modifiant les poids avec les puissances de 16.

Exemple avec $1A6_{16}$:

$1A6_{16} = 1 \times 16^2 + 10 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = 256 + 160 + 6 = 422$. On a donc : $1A6_{16} = 422$.

Exercice

Donner l'écriture des nombres suivants en décimal : $1DE_{16}$; 72_{16} et AAA_{16}.

Conversion décimal → hexadécimal

Là encore, même méthode que pour le binaire... en divisant (pour la partie entière) ou multipliant (pour la partie fractionnaire) par 16 !

Vous vérifierez que 422 est bien 1A6 en hexadécimal.

Exercice

Les nombres suivants étant donnés en décimal, déterminer leurs écritures en base 16 : 27 ; 31 et 128.

c) Conversions Hexadécimal ↔ Binaire

On peut bien sûr passer par la base 10, mais il y a un moyen beaucoup plus rapide...
Une division (entière) par 16 en binaire revient à effectuer un décalage de quatre bits vers la droite. Ainsi, chaque paquet de quatre bits correspond à un chiffre hexadécimal. Il suffit donc de connaître l'équivalence entre les nombres de quatre bits en binaire et les "chiffres" hexadécimaux pour obtenir une conversion immédiate.

Binaire	Hexadécimal	Binaire	Hexadécimal
0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Conversion binaire → hexadécimal

Développons la méthode sur un *exemple* : convertissons le nombre binaire 101111110110110 en hexadécimal.
Pour cela, on commence par découper le nombre en "paquets" de 4 bits à partir de la droite, en complétant éventuellement le dernier paquet pour obtenir un bloc complet de 4 bits, puis on écrit en dessous le chiffre hexadécimal correspondant :

0101 1111 1011 0110
5 F B 6

Ainsi, $101111110110110_2 = 5FB6_{16}$.

Conversion hexadécimal → binaire

Même principe « à l'envers ».
Par *exemple*, convertissons le nombre hexadécimal FEC5 en binaire.
Il suffit pour cela d'écrire en dessous de chaque chiffre hexadécimal sa correspondance en binaire :

F E C 5
1111 1110 1100 0101

Ainsi, $FEC5_{16} = 1111111011000101_2$.

Exercice

Déterminer l'écriture en base 16 des nombres binaires suivants : 11 ; 1001 et 1110110.

Exercices divers

1) Convertir en base 10 les nombres suivants :
   - $A = 101001_2$
   - $B = 10110011_2$
   - $C = 1100101_2$
   - $D = 100010111_2$
   - $E = 81A_{16}$
   - $F = 20BF3_{16}$
   - $G = C0039_{16}$
   - $H = ABCD_{16}$
   - $I = E3F5_{16}$
2) Donner l'écriture en base 2 les nombres suivants : $J = 19_{10}$; $K = 31_{10}$; $L = 256_{10}$ et $M = 729_{10}$.
3) Donner l'écriture en base 16 des nombres suivants : $N = 70_{10}$; $O = 471_{10}$; $P = 718_{10}$ et $Q = 51727_{10}$.

4) Pour chacune des questions, on passera directement d'une base à l'autre sans passer par la base 10.
   a) Donner l'écriture en base 16 des nombres suivants :
      $R = 101101_2$ $S = 101101011110_2$ $T = 1001110011101111_2$.
   b) Donner l'écriture en base 2 des nombres suivants :
      $U = 24D_{16}$; $V = 70EC_{16}$; $W = 8BA_{16}$ et $X = EF36_{16}$.

IV) Opérations sur les entiers naturels

1) L'addition en binaire

Les nombres binaires s'additionnent de la même manière que les nombres décimaux en remarquant que la retenue a lieu à partir de 2, puisqu'en binaire : $1+1=10$.

Exemple :

				1			1		← retenues
	1	0	0	0	1	1	0	1	
+					1	0	0	1	
	1	0	0	1	0	1	1	0	

A retenir :

- $0+0=0$
- $0+1=1+0=1$
- $1+1=0$ avec une retenue de 1
- $1+1+1=1$ avec une retenue de 1.

2) La soustraction en binaire

Ici encore, la méthode est la même qu'en décimal en utilisant les règles suivantes :

- $0-0=0$
- $1-0=1$
- $1-1=0$
- $0-1=1$ avec une retenue de 1.

Exemple :

	1	1	1	1	0	
-	1	1	0	0	1	
-				1		← retenues
	0	0	1	0	1	

3) La multiplication en binaire

Même méthode qu'en décimal avec $0\times0=0\times1=1\times0=0$ et $1\times1=1$.

Exemple :

		0	1	1	1	1	1
*					1	1	0
		0	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1		
1	0	1	1	1	0	1	0

4) La division en binaire

Même méthode qu'en décimal.

Exemple :

	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1				
-		1	0	1	1							0	1	1	0	1	0	0	1
	0	0	1	1	1	0													
		-	1	0	1	1													
			0	0	1	1	0	0											
				-	1	0	1	1											
					0	0	0	1	1	1	1								
							-	1	0	1	1								
								0	1	0	0								

Exercice

Dans cet exercice, tous les nombres donnés sans précision sont en base 2.
On calculera directement en binaire, puis on vérifiera le résultat en convertissant en base 10.

1) Addition
   Calculer : $N_1 = 1011 + 101$; $N_2 = 1010101010111001 + 1111011011011110$
2) Soustraction
   Calculer : $N_3 = 11001101 - 1001011$.
3) Multiplication
   Calculer le produit : $N_6 = 11000 \times 11$.
4) Division
   Calculer le quotient : $N_8 = 11110100/1101$.
5) Multiplication ou division par une puissance de 2
   Calculer le produit N_4 de 11000_2 par 8_{10}, puis le quotient N_5 de 111011101_2 par 32_{10}.
6) Si l'on effectue le calcul de N_2 sur un microprocesseur dont les registres ont 16 bits, que se passe-t-il ?

5) La multiplication ou division par des puissances de 2 en binaire

Méthode

Pour multiplier (resp. diviser) par $2^n = 100\ldots0_2$ (n zéros) un nombre écrit en base 2, on décale tous ses chiffres de n rangs vers la gauche (resp. vers la droite).
On peut ainsi être amené à supprimer (resp. introduire) ou déplacer la virgule et à ajouter (resp. supprimer) des 0.

6) En hexadécimal

Une fois encore, le raisonnement est le même mais les calculs nous apparaissent plus compliqués car on ne connaît pas les tables correspondantes. Nous n'allons faire qu'un exemple d'addition.

Exemple

Vérifier que $5A1_{16} + B43_{16} = 10E4_{16}$.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E