Thème 7	**ALGÈBRE DE BOOLE**	Mathématiques pour l'informatique

Pré-requis :

- Logique
- Prédicats et langage ensembliste.

I) Calcul booléen

1) Introduction.

Reprenons le tableau vu en fin de thème 8 :

$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$	$\overline{\ldots}$	$\vee$	$\wedge$	V	F
$=$	$\subset$	$\overline{\ldots}$	$\cup$	$\cap$	E	$\emptyset$

Cela rappelle la correspondance entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles.
En fait, ce sont là deux exemples d'une structure appelée **algèbre de Boole**.

2) Définition.

Définition

Un ensemble B (non vide) muni de deux lois de composition interne (notées additivement et multiplicativement), d'une opération unaire (notée $a \rightarrow \overline{a}$) et possédant deux éléments privilégiés (notés 0 et 1) a une **structure d'algèbre de Boole** si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies :

- pour tous éléments a et b de B, $a+b=b+a$ (commutativité de l'addition)
- pour tous éléments a et b de B, $ab=ba$ (commutativité de la multiplication)
- pour tous éléments a, b et c de B, $a(b+c)=ab+ac$ (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
- pour tous éléments a, b et c de B, $a+(bc)=(a+b)(a+c)$ (distributivité de l'addition par rapport à la multiplication)
- pour tout élément a de B, $a+0=a$ (0 élément neutre pour l'addition est appelé élément nul)
- pour tout élément a de B, $a1=a$ (1 élément neutre pour la multiplication est appelé élément unité)
- pour tout élément a de B, $a+\overline{a}=1$
- pour tout élément a de B, $a\overline{a}=0$.

Exemples

1) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble non vide E, muni des deux lois de composition interne $\cup$ et $\cap$, l'opération $A \rightarrow \overline{A}$, avec pour éléments privilégiés $\emptyset$ et E a une structure d'algèbre de Boole.
2) L'ensemble $B=\{0,1\}$, muni de l'addition booléenne, de la multiplication booléenne et de l'opération unaire définie par $\overline{0}=1$ et $\overline{1}=0$ a une structure d'algèbre de Boole.

Thème 7	**ALGÈBRE DE BOOLE**	Mathématiques pour l'informatique

Pré-requis :
- Logique
- Prédicats et langage ensembliste.

I) Calcul booléen

1) Introduction.

Reprenons le tableau vu en fin de thème 8 :

$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$	$\overline{\cdots}$	$\vee$	$\wedge$	V	F
$=$	$\subset$	$\overline{\cdots}$	$\cup$	$\cap$	E	$\varnothing$

Cela rappelle la correspondance entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles.
En fait, ce sont là deux exemples d'une structure appelée **algèbre de Boole**.

2) Définition.

Définition

Un ensemble B (non vide) muni de deux lois de composition interne (notées additivement et multiplicativement), d'une opération unaire (notée $a \rightarrow \bar{a}$) et possédant deux éléments privilégiés (notés 0 et 1) a une **structure d'algèbre de Boole** si et seulement si les propriétés suivantes sont vraies :

- pour tous éléments a et b de B, $a+b=b+a$ (commutativité de l'addition)
- pour tous éléments a et b de B, $ab=ba$ (commutativité de la multiplication)
- pour tous éléments a, b et c de B, $a(b+c)=ab+ac$
  (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
- pour tous éléments a, b et c de B, $a+(bc)=(a+b)(a+c)$
  (distributivité de l'addition par rapport à la multiplication)
- pour tout élément a de B, $a+0=a$ (0 élément neutre pour l'addition est appelé élément nul)
- pour tout élément a de B, $a1=a$ (1 élément neutre pour la multiplication est appelé élément unité)
- pour tout élément a de B, $a+\bar{a}=1$
- pour tout élément a de B, $a\bar{a}=0$.

Exemples

1) L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble non vide E, muni des deux lois de composition interne $\cup$ et $\cap$, l'opération $A \rightarrow \bar{A}$, avec pour éléments privilégiés $\varnothing$ et E a une structure d'algèbre de Boole.
2) L'ensemble $B=\{0,1\}$, muni de l'addition booléenne, de la multiplication booléenne et de l'opération unaire définie par $\bar{0}=1$ et $\bar{1}=0$ a une structure d'algèbre de Boole.

II) Propriétés

1) Idempotence.

Propriétés

- Pour tout élément a de B, $a+a=a$. → $B\{ a \}$ → on rajoute a
- pour tout élément a de B, $a\,a=a$.

On a toujours a

2) Propriétés des éléments nul et unité.

Le " + " c'est $\cup$ union.

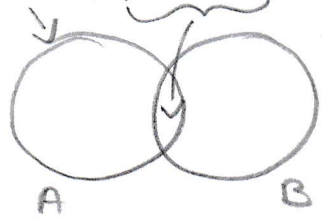
Propriétés

- Pour tout élément a de B, $a+1=1$.
- Pour tout élément a de B, $a\,0=0$.

ex : $a + ab$

$=$

$A \cap A \cup B$



3) Absorption.

Propriétés

- Pour tous éléments a et b de B, $a+a\,b=a$.
- Pour tous éléments a et b de B, $a(a+b)=a$.

4) Associativité.

Propriétés

- Pour tous éléments a, b et c de B, $(a+b)+c=a+(b+c)$ $= abc$
- Pour tous éléments a, b et c de B, $(a\,b)c=a(b\,c)$ $= abc$

On ajoute quelque chose qui existe déjà

5) Propriétés du complément.

Propriétés

- Pour tout élément a de B, $\overline{(\overline{a})}=a$.
- $\overline{0}=1$
- $\overline{1}=0$.

6) Lois de Morgan.

Propriétés

- Pour tous éléments a et b de B, $\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$.
- Pour tous éléments a et b de B, $\overline{a\,b}=\overline{a}+\overline{b}$.

Contraire de + → ×

″ de × → +

III) Tableaux de Karnaugh

1) Cas de deux variables booléennes.

	b	$\bar{b}$
a	ab	$a\bar{b}$
$\bar{a}$	$\bar{a}b$	$\bar{a}\bar{b}$

Exemple

Utiliser un tableau de Karnaugh pour simplifier l'expression booléenne : $ab+a\bar{b}+\bar{a}\bar{b}$. $(=a+\bar{b})$

	b	$\bar{b}$
a		
$\bar{a}$		

2) Cas de trois variables booléennes.

	b		$\bar{b}$	
a	abc	$ab\bar{c}$	$a\bar{b}\bar{c}$	$a\bar{b}c$
$\bar{a}$	$\bar{a}bc$	$\bar{a}b\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$	$\bar{a}\bar{b}c$
	c	$\bar{c}$		c

Exemple

Utiliser un tableau de Karnaugh pour simplifier l'expression booléenne :

$$abc+ab\bar{c}+\bar{a}b\bar{c}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{b}c\ .\ (=ab+b\bar{c}+\cancel{\bar{a}c})$$

$\bar{a}\bar{b}$

	b		$\bar{b}$	
a				
$\bar{a}$				
	c	$\bar{c}$		c

Fiche 1 Exercices	**ALGÈBRE DE BOOLE**	Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1 Calculs

En utilisant les règles du calcul booléen, simplifier les expressions suivantes, de variables *a*, *b* et *c* :

- $A=a\overline{b}(\overline{a}b+ab)ab$
- $B=a\overline{b}+(\overline{a}b+ab)ab$
- $C=(\overline{a}+\overline{\overline{a}})a+b(\overline{b}+\overline{\overline{b}})$
- $D=(\overline{\overline{a}}+\overline{a})a+\overline{\overline{b}}(b+\overline{b})$
- $E=\overline{a+\overline{b}}\,\overline{\overline{a}+\overline{b}}$
- $F=a(a+b)(a+1)$
- $G=ab(b+\overline{c})+ac(\overline{a}+b)$
- $H=ab\overline{c}+\overline{a}b+abc$
- $I=(a+c)(ab\overline{c}+\overline{b})+a$
- $J=(ab\overline{c}+a\overline{b}c+\overline{a}\overline{b}\overline{c})(\overline{a}bc+a\overline{b}c+\overline{a}b\overline{c}+abc)$
- $K=ab\overline{c}+\overline{a}b+abc$
- $L=abc+a\overline{c}+b\overline{c}+\overline{a}+a\overline{b}\overline{c}+a$
- $M=b+\overline{\overline{b}c}+\overline{a}b\overline{c}$
- $N=\overline{a}\overline{b}+\overline{a}\overline{b}c$
- $O=(a+b)(a+c)$
- $P=(a+\overline{a}c)(b+\overline{a}c)+\overline{b+\overline{c}}+c$
- $Q=ab+abc$
- $R=(a+b)(a+b+c)$
- $S=a(a+b)(a+b)$
- $T=b(a(1+c+\overline{c})+ac)$
- $U=a(bc+cc)$
- $V=a(bb+0c+\overline{1}+c\overline{c})$
- $W=\overline{a(b+\overline{c})}\,\overline{a}(\overline{a}+c)$
- $X=\overline{\overline{a}+\overline{b}+c}+a(\overline{b+c})+a\overline{c}$
- $Y=(a+a\overline{b})\overline{ac}+0(a+\overline{a}+1)$
- $Z=ab(c+1)+b(a\overline{c}+\overline{a}c)$.

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes à l'aide d'une table de Karnaugh ou d'un calcul direct :

- $A=a+\overline{a}+ab+\overline{a}bc$
- $B=ab+\overline{a}bc+a\overline{b}c$
- $C=a\overline{b}+abc+a\overline{b}cd$.

Exercice 3 Calculs de compléments

Utiliser les règles de Morgan pour écrire les compléments des expressions suivantes :

- $A=a+b\overline{c}$
- $B=\overline{a}(b+c)$
- $C=ab(\overline{a}+b+c)$
- $D=ab+b\overline{c}+c\overline{a}$.

Exercice 4 Simplifications

Simplifier les expressions booléennes suivantes par la méthode de votre choix :

- $A=ab+\overline{a}bc+\overline{ac}+a\overline{b}\overline{c}$
- $B=a\overline{b}c+\overline{a}+\overline{b}\overline{c}$
- $C=ab+\overline{(a+\overline{b})}c$
- $D=\overline{(\overline{a}+\overline{c})}b+a\overline{b}$
- $E=(ab+\overline{c})(\overline{\overline{a}+c}+\overline{\overline{b}+\overline{c}})$
- $F=cd+ab\overline{c}+\overline{a+\overline{c}}+bcd+\overline{c}+\overline{d}$
- $G=\overline{a}bc+ab+a\overline{b}c\overline{d}+\overline{b}\overline{c}+\overline{a}\overline{b}c+\overline{a}bc$
- $H=\overline{\overline{a}+c}\,\overline{a+\overline{b}}\,\overline{\overline{c}+d}\,\overline{\overline{a}b}$
- $I=b\overline{c}d+\overline{a}\overline{d}+\overline{c}\overline{e}+ab\overline{c}d+\overline{a}$.

Exercice 5 Opérateurs *nor* et *nand*

Dans une algèbre de Boole, on définit l'opération *nor*, notée avec le symbole ↓, par $a\downarrow b=\overline{a+b}=\overline{a}\,\overline{b}$ et l'opération *nand*, notée ↑, par $a\uparrow b=\overline{ab}=\overline{a}+\overline{b}$.

1) Montrer que les opérations *nor* et *nand* sont duales, c'est-à-dire qu'on a $a\downarrow b=\overline{a}\uparrow\overline{b}$.
2) Exprimer plus simplement :
   - $a\downarrow a$
   - $(a\downarrow a)\downarrow(b\downarrow b)$
   - $(a\downarrow b)\downarrow(a\downarrow b)$
3) En déduire des égalités similaires pour l'opérateur ↑.

Exercice 6 Opérateurs *nand* et opérateur d'équivalence

On définit l'opération *xor* (en français : ou exclusif), notée avec le symbole ⊕, par $a\oplus b=a\overline{b}+\overline{a}b$.

1) Écrire $a\oplus b$ à l'aide du seul opérateur ↑.
2) En déduire l'expression de $a\oplus b$ à l'aide du seul opérateur ↓.