Thème 2	LOGIQUE (1)	Mathématiques pour l'informatique

I) Proposition

Définition

Une **proposition** est une affirmation à laquelle on peut associer une unique valeur de vérité parmi les deux valeurs possibles : Vrai (V ou 1) ou Faux (F ou 0). (Il n'y a pas d'autres possibilités.)

Exemples de propositions

P_1 : « Chartres est la préfecture d'Eure et Loir. »

P_2 : « $10110_2=22_{10}$ »

P_3 : « $5<4$ »

Remarques

Certaines affirmations ne sont pas des propositions. on peut citer par exemple « 4+5 » ou encore « x=2 ».
En algorithmique, on utilise souvent les propositions, elles sont appelées « conditions » (lors des structures de test, les boucles, ...)
En mathématiques, certaines propositions sont données « vraies » a priori, car elles constituent le fondement d'une théorie. Elles sont appelées « axiomes ». Par exemple, le classique « par deux points distincts, il ne passe qu'une seule droite » est un axiome de la géométrie euclidienne mais qui peut être faux dans d'autres géométries dites non euclidienne.
Les autres propositions d 'une théorie mathématique (celles dont on « démontre » la vérité) sont appelées théorèmes ou tout simplement propositions (sous-entendu « propositions vraies »).

II) Connecteurs logiques

A partir de propositions P, Q, R, ... on peut en construire d'autres dont la valeur de vérité ne dépend que de celle des propositions initiales. On décrit de telles constructions à l'aide de tables de vérité, qui donnent, en fonction des valeurs de vérité des propositions initiales, la valeur de vérité de la construction.

1) La négation

Définition

A toute proposition P, on peut associer une nouvelle proposition, notée $\neg P$ ou $\overline{P}$ (se lit ***non P***), dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Remarques

- La négation est un connecteur logique unitaire, il agit sur une seule proposition.
- Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de démontrer que sa négation est vraie.
- Pour toute proposition P, $\neg\neg P$ (ou encore $\overline{\overline{P}}$) a la même valeur que P :

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
V	F	V
F	V	F

2) La conjonction (« et »)

Définition

A tout couple de propositions (P, Q), la conjonction associe la proposition, notée $P \wedge Q$ ou « P et Q » (se lit ***P* et *Q***), dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-après :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Remarque

$P \wedge Q$ est vraie dans le seul cas où P et Q sont vraies toutes les deux.

3) Disjonction

Définition

A tout couple de propositions (P, Q), la disjonction associe la proposition, notée $P \vee Q$ ou « P ou Q » (se lit ***P* ou *Q***), dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarques

- $P \vee Q$ est fausse dans le seul cas où P et Q sont fausses toutes les deux.
- Attention à ne pas confondre le « ou » connecteur logique du « ou » du langage courant. En fait, en français, le « ou » a deux sens soit exclusif (fromage ou dessert) soit inclusif (qu'il pleuve ou qu'il vente, arrose quand tu plantes !), en logique il n'y en a qu'un, le « ou inclusif ».

4) Implication

Définition

A tout couple de propositions (P, Q), l'implication associe la proposition, notée $P \Rightarrow Q$ (se lit ***P* implique *Q***), dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarques

- Le faux implique toujours le vrai !
- En mathématiques, on utilise souvent la première ligne du tableau de l'implication lors des raisonnements. En effet, on a P vraie, on démontre que $P \Rightarrow Q$ (que l'on écrit souvent « si P alors Q ») et on en déduit que Q est vraie.

5) Équivalence

Définition

A tout couple de propositions (P, Q), l'équivalence associe la proposition, notée $P \Leftrightarrow Q$ (se lit « P équivaut à Q » ou encore « ***P* est équivalent à *Q*** »), dont la valeur de vérité est donnée par la table ci-dessous :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Remarque

- $P \Leftrightarrow Q$ est vrai dans les cas où P et Q ont la même valeur de vérité.

6) Connecteurs « nand » et « nor »

Définitions

- Pour tout couple de propositions (P,Q), on note $P \uparrow Q$ (se lit **nand**, pour « non et ») la proposition $\neg(P \wedge Q)$ (c'est à dire $\overline{P \wedge Q}$).
- Pour tout couple de propositions (P,Q), on note $P \downarrow Q$ (se lit **nor**, pour « non ou ») la proposition $\neg(P \vee Q)$ (c'est à dire $\overline{P \vee Q}$).

Les tables de vérités sont les suivantes (elles découlent immédiatement des paragraphes précédents) :

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	$P \uparrow Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

P	Q	$P \downarrow Q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

III) Propriétés des connecteurs logiques

1) Commutativité de $\wedge$ et $\vee$.

Pour toutes propositions P et Q :

- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$.
- $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.

2) Associativité de $\wedge$ et $\vee$.

Pour toutes propositions P, Q et R :

- $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$.
- $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$.

$P \Rightarrow Q$
$\neg Q \Rightarrow \neg P$
$Q \Rightarrow P.$

3) Tiers exclu et non contradiction.

Pour toute proposition P :

- $P \vee \neg P$ (c'est à dire $P \vee \overline{P}$) est toujours vraie.
- $P \wedge \neg P$ (c'est à dire $P \wedge \overline{P}$) est toujours fausse.

4) Double distributivité

Pour toutes propositions P, Q et R :

- $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.
- $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$.

5) Règles de De Morgan

$\vee$
$\neg(\neg P \neg\wedge \neg Q)$

Pour toutes propositions P et Q :

- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ soit encore $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$.
- $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ soit encore $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

6) Implication et équivalence

Pour toutes propositions P et Q :

- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$ soit encore $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ soit encore $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$. contraposée
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$. def équivalence.

Fiche 1 Exercices	**LOGIQUE (1)**	Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1

Démontrer que :

1) $P \vee \neg P$ est toujours vraie.
2) $P \wedge \neg P$ est toujours fausse.

Exercice 2

A l'aide de tables de vérité, démontrer les équivalences suivantes :

1) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ [on a de même : $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$]. commutativité du ∧ (et du ∨)
2) $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ [on a de même : $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$]. associativité du
3) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ distributivité du ∨ sur le ∧ (du ∧ sur le ∨) ∨ (et du ∧)
   [on a de même : $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$].
4) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ [on a de même : $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$]. loi de De Morgan
5) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. (déf à connaître)
6) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$. contraposée
7) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$. (def à connaître)

Exercice 3 : Le connecteur « nand »

1) Démontrer que pour toute proposition P, $\neg P \Leftrightarrow (P \uparrow P)$.
2) Déduire de la définition de $P \uparrow Q$ et du résultat du 1) une proposition équivalente à $P \wedge Q$ dans laquelle seul le connecteur $\uparrow$ apparaît.
3) Démontrer à l'aide d'une loi de Morgan que, pour toutes propositions P et Q :

$$(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)).$$

Conclusion : tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nand ».

Exercice 4 : Le connecteur « nor »

1) P étant une proposition quelconque, déterminer une proposition équivalente à $\neg P$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.
2) P et Q étant deux propositions quelconques, déterminer une proposition équivalente à $P \vee Q$ dans laquelle seul le connecteur $\downarrow$ apparaît.
3) Même question en remplaçant $\vee$ par $\wedge$.

Conclusion : tous les connecteurs binaires peuvent être obtenus à l'aide du seul connecteur « nor ».