Thème ~~5~~ 4	CALCUL MATRICIEL (1)	Mathématiques pour l'informatique

I) Qu'est-ce qu'une matrice ?

1) Introduction

Voici les tarifs postaux, en euros, valables ~~depuis~~ au le 1er janvier 2020 (au départ de la France Métropolitaine) :

LETTRE GRISE		LETTRE VERTE		LETTRE PRIORITAIRE		LETTRE PRIORITAIRE INTERNATIONALE	
Poids jusqu'à	Tarif (vers France métrop.)	Poids jusqu'à	Tarif (vers France métrop.)	Poids jusqu'à	Tarif (vers France métrop.)	Poids jusqu'à	Tarif (vers monde entier)
20g	0,95€	20g	0,97€	20g	1,16€	20g	1,40€
100g	1,90€	100g	1,94€	100g	2,32€	100g	2,80€
250g	3,80€	250g	3,88€	250g	4,64€	250g	7,00€

On peut résumer ces informations dans un tableau plus synthétique :

ENVOI LETTRE (en euros)			
Poids jusqu'à	20g	100g	250g
Lettre grise	0,95	1,90	3,80
Lettre verte	0,97	1,94	3,88
Lettre prioritaire vers France	1,16	2,32	4,64
Lettre prioritaire vers reste du monde	1,40	2,80	7,00

On obtient ainsi un tableau comportant :

- un titre
- une première ligne et une colonne de gauche qui précisent la nature des entrées : poids et nature de l'envoi
- un tableau de 12 nombres (exprimés en euros) constitué de 4 lignes et 3 colonnes (sans unités).

Définition

Ce tableau est appelé une matrice et se note entre parenthèses :

$$\begin{pmatrix} 0,95 & 1,90 & 3,80 \\ 0,97 & 1,94 & 3,88 \\ 1,16 & 2,32 & 4,64 \\ 1,40 & 2,80 & 7,00 \end{pmatrix}$$

2) Cas Général

Une matrice est un tableau de nombres désigné généralement par une lettre majuscule. On note $a_{i,j}$ le nombre situé dans la i^ème^ ligne et la j^ème^ colonne.

Une matrice ayant n lignes et p colonnes est notée : $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ ou parfois

$A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n;\,1\leqslant j\leqslant p}$. a_{ij} est appelé terme général de la matrice.

II) Calcul matriciel

1) Égalité de deux matrices

Propriété

Deux matrices de même taille (même nombre de lignes et de colonnes) sont égales si, et seulement si, leurs coefficients de mêmes indices sont égaux.

2) Somme de deux matrices

a) Exemple

Imaginons qu'une nouvelle hausse des tarifs postaux soit envisagée le 1er octobre prochain. On note B la matrice donnant les augmentations pour chacun des tarifs envisagés :

$$B=\begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}31 \\ 0{,}30 & 0{,}32 & 0{,}37 \\ 0{,}39 & 0{,}41 & 0{,}44 \end{pmatrix}.$$

Soit C la matrice donnant les nouveaux tarifs. On a donc : $C=A+B$, c'est à dire :

$$C=\begin{pmatrix} 0{,}95 & 1{,}90 & 3{,}80 \\ 0{,}97 & 1{,}94 & 3{,}88 \\ 1{,}16 & 2{,}32 & 4{,}64 \\ 1{,}40 & 2{,}80 & 7{,}00 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0{,}44 & 0{,}06 & 0{,}09 \\ 0{,}25 & 0{,}28 & 0{,}31 \\ 0{,}30 & 0{,}32 & 0{,}37 \\ 0{,}39 & 0{,}41 & 0{,}44 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}39 & 1{,}96 & 3{,}89 \\ 1{,}22 & 2{,}22 & 4{,}19 \\ 1{,}46 & 2{,}64 & 5{,}01 \\ 1{,}79 & 3{,}21 & 7{,}44 \end{pmatrix}.$$

b) Définition

Définition

Soit $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices à n lignes et p colonnes. LA matrice C somme des matrices A et B $(C=A+B)$ est la matrice (c_{ij}) à n lignes et p colonnes telle que :
pour tout entier naturel i tel que $1\leqslant i\leqslant n$ et pour tout entier naturel j tel que $1\leqslant j\leqslant p$, on ait : $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
.

c) Quelques propriétés de l'addition de matrices

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices à n lignes et p colonnes on a :

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $A+0=A$, où 0 est la matrice à n lignes et à p colonnes dont tous les coefficients sont 0.
- $A+(-A)=0$ avec $-A$ la matrice opposée de A : si $A=(a_{ij})$ alors $-A=(-a_{ij})$.

d) Soustraction de deux matrices

Définition

$A-B=A+(-B)$ avec $-B$ la matrice opposée de B.

III) Produit d'une matrice par un nombre réel

3) Exemple

Autre possibilité, les autorités peuvent décider d'augmenter les tarifs de façon uniforme de 5%. Déterminer la matrice D donnant les nouveaux tarifs.

On aura : $D=1{,}05\times\begin{pmatrix}0{,}95 & 1{,}90 & 3{,}80\\0{,}97 & 1{,}94 & 3{,}88\\1{,}16 & 2{,}32 & 4{,}64\\1{,}40 & 2{,}80 & 7{,}00\end{pmatrix}=$

0,9975	1,995	3,99
1,0185	2,037	4,074
1,218	2,463	4,872
1,47	2,94	7,35

2. Définition

Définition

Soient $A=(a_{ij})$ une matrice à n lignes et p colonnes et k un nombre réel.
La matrice produit de la matrice A par le réel k est la matrice $D=k\times A=(d_{ij})$ à n lignes et p colonnes telle que : pour tout entier naturel i tel que $1\leqslant i\leqslant n$ et pour tout entier naturel j tel que $1\leqslant j\leqslant p$ on ait : $d_{ij}=k\times a_{ij}$.

3. Quelques propriétés

Propriétés

Si A et B sont deux matrices à n lignes et p colonnes et si k et k' sont deux réels on a :

- $k\times(A+B)=k\times A+k\times B$
- $(k+k')\times A=k\times A+k'\times \cancel{B} A$.
- $k\times(k'\times A)=(k\,k')\times A$.

IV) Produit de deux matrices

1) Exemple

Dans une entreprise, deux services s'occupent du courrier. Le tableau ci-contre indique le volume de courrier traité par chaque service dans la semaine :

Service / Poids	S_1	S_2
20g	50	7
100g	35	4
250g	15	3

On veut déterminer pour chacun des services, le coût global suivant les 4 tarifs. Pour cela, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 50 & 7 \\ 35 & 4 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{disposition pratique}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}95 & 1{,}90 & 3{,}80 \\ 0{,}97 & 1{,}94 & 3{,}88 \\ 1{,}16 & 2{,}32 & 4{,}64 \\ 1{,}40 & 2{,}80 & 7{,}00 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 & 7 \\ 35 & 4 \\ 15 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{171} & 25{,}65 \\ \boxed{174{,}6} & 26{,}19 \\ \boxed{208{,}8} & 31{,}32 \\ \boxed{273} & 42. \end{pmatrix}$$

S_1 Lettre grise

$50 \times 0{,}95 + 35 \times 1{,}90 + 15 \times 3{,}80 = 171$

Lettre verte

$50 \times 0{,}97 + 35 \times 1{,}94 + 15 \times 3{,}88.$

On obtient la matrice produit de la matrice A et de la matrice B notée $A \times B$ ou AB .

2) Définition

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice à n lignes et $\boldsymbol{p}$ colonnes et $B = (b_{jk})$ une matrice à $\boldsymbol{p}$ lignes et q colonnes.

La matrice produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $C = A \times B = (c_{ik})$ à n lignes et q colonnes telle que : pour tout entier naturel i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant q$ on ait :

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots\ldots + a_{ip} b_{pk} .$$

3) Quelques propriétés

Propriétés

Si A, B et C sont trois matrices (avec le nombre de lignes et de colonnes qui convient) on a :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$
- $A \times (kB) = (kA) \times B = k(A \times B)$ avec k un nombre réel quelconque.

4) Exercices

a) Calculer $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA . Que peut-on en déduire ?

c) Calculer $E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 1}$.

$\boxed{\cancel{3 \times 2}}$

d) On donne $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Calculer $A^2=A\times A$ et A^3. $= A\times A^2$

e) Calculer $F=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}}_{3\times 3}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{3\times 3}$. 1 en diagonale.

5) Matrice unité

a) Définition

Définition

La matrice $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & '' & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & '' & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$ (matrice carré d'ordre n) est appelé la matrice unité.

b) Propriétés

Propriétés

$A\times \boxed{I}\quad \boxed{I}\times A$

$A\times A$

- $A\times \boxed{I=I}\times A=A$
- pour tout entier naturel n, on a : $I^n=I$.

6) Matrice inverse

Application : utilisation des propriétés.

Une matrice A est telle que $A^2=-4A+2I$.

On se propose de trouver une matrice A' telle que $A\times A'=A'\times A=I$.

Si $A^2=-4A+2I$, alors $A^2+4A=2I$ donc $\frac{1}{2}A^2+2A=I$

et par suite : $A\left(\frac{1}{2}A+2I\right)=I$ ou $\left(\frac{1}{2}A+2I\right)A=I$.

La matrice cherchée est donc : $A'=\frac{1}{2}A+2I$.

Cette matrice est appelée matrice inverse de A.

$A^2=-4A+2I$

$A^2+4A=-4A+2I+4A$

$A^2+4A=2I$

$\frac{1}{2}(A^2+4A)=\frac{1}{2}\times 2I$

$\frac{1}{2}(A^2+4A=I$

Définition

Soit A une matrice carrée.

S'il existe une matrice B telle que $A\times B=B\times A=I$ où I est la matrice identité, alors la matrice A est dite inversible et B est sa matrice inverse, notée A^{-1}.

Fiche 1 Exercices	MATRICES (1)	Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1 (tiré de Nouvelle Calédonie 2013)

Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

- une formule F1 « clavier + souris » à 12 euros ;
- une formule F2 « clavier + souris + clé USB » à 16 euros ;
- une formule F3 « clavier » à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

	Formule F1	Formule F2	Formule F3
Coût d'achat en euro	3	4	2
Temps en minute	8	10	6
Prix de vente en euro	12	16	10

1. a. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 8 & 10 & 6\\ 12 & 16 & 10\end{pmatrix}$ et la matrice colonne $C=\begin{pmatrix}10\\ 8\\ 14\end{pmatrix}$.
   Effectuer le produit matriciel MC.
   b. On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.
   Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.
2. On considère la matrice $P=\begin{pmatrix}a & 2 & -1\\ 2 & -1{,}5 & 0{,}5\\ -2 & 0 & 0{,}5\end{pmatrix}$
   a. Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM.
   b. Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
3. Dans la suite de l'exercice on prend $a=-1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM=I$.
   Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes. Démontrer que si $MX=Y$ alors $X=PY$.
4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.
   Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

Exercice 2 (tiré de Nouvelle Calédonie 2014)

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans une société de service informatique, chaque client possède un numéro noté n, où n est un entier naturel non nul.
La notation $a\equiv b[k]$ signifie que le nombre a est congru au nombre b modulo k.

- Si $n\equiv 0[6]$, alors le client est suivi par le technicien A ;
- si $n\equiv 1[6]$ alors le client est suivi par le technicien B ;
- si $n\equiv 2[6]$ alors le client est suivi par le technicien C ;
- si $n\equiv 3[6]$ alors le client est suivi par le technicien D ;
- dans les autres cas, le client est suivi par le technicien E.

1. Par quel technicien est suivi le client numéro 51 ? Justifier la réponse.
2. Le client numéro 23 est-il suivi par technicien E ? Justifier la réponse.

Partie B

Pour permettre aux clients de la société d'accéder à leurs factures, le service comptable attribue un code à chacun d'entre eux. Pour tout entier naturel n, le code attribué au client numéro n se calcule avec la formule $x+ny+n^2z$, où x, y et z, sont trois nombres que les questions suivantes vont permettre de déterminer.

1. Sachant que le client numéro 1 a pour code le nombre 12, que le client numéro 2 a pour code le nombre 27 et que le client numéro 3 a pour code le nombre 50, écrire un système de trois équations vérifié par les nombres x, y et z.
2. On donne les matrices $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}12\\ 27\\ 50\end{pmatrix}$. Ligne x colonnes 3 x 1
   Le système précédent s'écrit alors sous la forme matricielle : $M\times X=Y$.
   Résoudre ce système revient à déterminer la matrice X, ce que proposent les questions suivantes.
   a. Soit $P=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5\\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5\end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel $P\times M$.
   b. En déduire que si $M\times X=Y$ alors $X=P\times Y$.
   c. Déterminer alors les nombres x, y et z.