Thème 6	PRÉDICATS ET LANGAGE ENSEMBLISTE	Mathématiques pour l'informatique

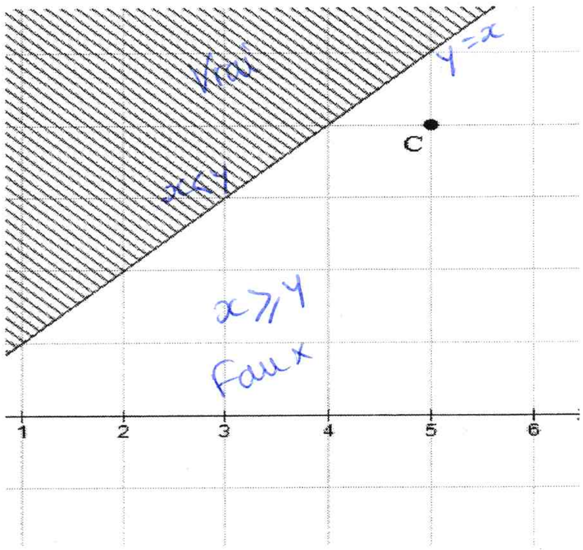
I) Prédicats

1) Introduction.

Dans la proposition $5<4$, les deux nombres situés de part et d'autre du symbole < sont des **constantes**. En mathématiques on rencontre des expressions du type, $x<4$; ici x peut varier par exemple dans $\mathbb{R}$.
Pour $x=5$, $x<4$ s'écrit : $5<4$. C'est une proposition dont la valeur de vérité est F.
Pour $x=0$, $x<4$ s'écrit : $0<4$. C'est une proposition dont la valeur de vérité est V.
Plus généralement, pour toute valeur numériquement fixée de x, $x<4$ devient une proposition dont la valeur de vérité est V si la valeur de x appartient à l'intervalle $]-\infty;4[$, et F si celle-ci appartient à $[4;+\infty[$.
On note $p(x)$ une expression (telle que $x<4$) dans laquelle figure une **variable** x.
A toute valeur numérique de x choisie dans $\mathbb{R}$, le **prédicat** p à une variable associe la proposition obtenue en remplaçant dans $p(x)$, x par sa valeur numérique.

Avec $x<y$, où x et y sont deux variables de $\mathbb{R}$,
on peut de même définir un prédicat q à deux variables.
Dans ce cas, $q(x;y)$ est $x<y$.
Pour $x=5$ et $y=4$, $q(5;4)$ est $5<4$ dont la valeur de vérité est F.
Pour $x=-1$ et $y=2$, $q(-1;2)$ est $-1<2$ dont la valeur de vérité est V.

Plus généralement, $q(x;y)$ est une proposition vraie lorsque le couple $(x;y)$ correspond aux coordonnées des points situés dans la zone hachurée :



On peut de même définir des prédicats à trois variables.

2) Quantificateur.

Exemple

Dans le cas où $p(x)$ est $x<4$, où x est variable dans $\mathbb{R}$, nous pouvons définir deux nouvelles propositions :

- *Proposition 1*
  « Il existe x tel que $x<4$ (soit vrai) ».
  Cela s'écrit à l'aide du symbole $\exists$ appelé quantificateur existentiel :
  $$\exists x, x<4.$$
  En mathématiques, on a l'habitude de rappeler l'ensemble dans lequel la variable prend ses valeurs et on écrit :
  $$\exists x\in\mathbb{R}, x<4.$$
  Cette proposition est vraie car, par exemple, 0 convient comme valeur de x.
  2, -1, ... conviennent aussi.

- *Proposition 2*
  « Pour tout x, (on a) $x < 4$ ».
  Cela s'écrit à l'aide du symbole $\forall$ appelé quantificateur universel :
  $$\forall x, x < 4 .$$
  Et en mathématiques :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, x < 4 .$$
  Cette proposition est fausse car, par exemple, pour $x=5$, $5 < 4$ est faux.

Plus généralement, p étant un prédicat à une variable, on peut définir les deux propositions suivantes :
$$\exists x, p(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x, p(x) .$$

Observons que la proposition « 3 est un nombre impair » peut s'écrire :
$$\exists k \in \mathbb{N}, 3 = 2k+1 .$$
Elle est vraie car $k=1$ convient.

Avec un prédicat à deux variables on peut, de même, définir de nouvelles propositions.
Par exemple, lorsque $p(x,y)$ est $x < y$ où x et y sont des variables réelles, nous pouvons notamment définir les propositions suivantes :

- $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
  Cette proposition est vraie car $x=0$ et $y=1$ conviennent.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$.
  Cette proposition est fausse car pour $x=3$ et $y=2$, la proposition $3 < 2$ est fausse.
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$.
  C'est une proposition fausse car, dans $\mathbb{R}$, il n'existe pas de nombre strictement inférieur à tous les nombres.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x < y$.
  C'est une proposition vraie car pour tout nombre réel x, $y = x+1$ est tel que $x < y$ puisque $0 < 1$, donc $x < x+1$.

<u>*Remarques :*</u>

- Permutons l'ordre des quantificateurs dans la proposition fausse :
  $$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y .$$
  Nous obtenons :
  $$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y .$$
  Cette proposition est vraie car, pour tout nombre réel y, $x = y-1$ convient.
  Ainsi en modifiant l'ordre des deux quantificateurs $\exists$ et $\forall$, nous sommes passés, dans cet exemple, d'une proposition fausse à une proposition vraie.

<u>A retenir</u> : **Dans une proposition comportant deux quantificateurs différents, ne pas modifier l'ordre des quantificateurs.**

- En mathématiques, pour démontrer qu'une proposition commençant par $\exists x \in E$ est vraie, il suffit de trouver un élément de E qui convient.
  Pour démontrer qu'une proposition commençant par $\forall x \in E$ est vraie, on doit considérer un élément quelconque de E.

3) Négation.

Reprenons la proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x < 4$.
Elle est vraie, sa négation est donc fausse.

Or « il n'existe pas de nombre réel inférieur à 4 » signifie que « tous les nombres réels sont supérieurs (ou égaux) à 4 ».
La négation de $\exists x \in \mathbb{R}, x < 4$ est donc : $\forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant 4$.
Un tel résultat est généralisable :

La négation de $\exists x, p(x)$ est $\forall x, \neg p(x)$.

> / -> Négation -> <

De même, soit la proposition $\forall x, p(x)$.
Elle signifie que tous les éléments x sont tels que $p(x)$ est vrai.
Sa négation signifie qu'au moins un des éléments x n'est pas tel que $p(x)$ est vrai.
Cela peut se traduire encore de la façon suivante :
« il existe au moins un x tel que $p(x)$ est faux »
c'est à dire :
« il existe au moins un x tel que $\neg p(x)$ est vrai »
qui s'écrit avec des symboles de logique :

$$\exists x, \neg p(x).$$

La négation de $\forall x, p(x)$ est donc $\exists x, \neg p(x)$.

II) Langage ensembliste

1) Notion d'ensemble.

Vous avez déjà utilisé le langage ensembliste, notamment en probabilités.
Vous savez par exemple qu'un ensemble peut être déterminé par la liste de ses éléments ou par une propriété caractéristique.
Ainsi, dans $\mathbb{R}$, $]-\infty;4[=\{x \in \mathbb{R}; x < 4\}$.
L'écriture $\{x \in \mathbb{R}; x < 4\}$ est de la forme $\{x, p(x)\}$ où $p(x)$ est défini à partir d'un prédicat à une variable.
Certaines propriétés des ensembles seront donc déduites des propriétés des propositions.

2) Appartenance.

On a déjà utilisé cette notion précédemment.
Reprenons la rapidement :
0 est un élément de l'ensemble $]-\infty;4[$, on note $0 \in]-\infty;4[$, où $\in$ se lit « appartient à ».
4 n'est pas un élément de l'ensemble $]-\infty;4[$, on note $4 \notin]-\infty;4[$, où $\notin$ se lit « n'appartient pas à ».
$4 \notin]-\infty;4[$ est la négation de $4 \in]-\infty;4[$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, E est un ensemble.

3) Inclusion.

Définition

Un ensemble A est inclus dans E si et seulement si :

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E.$$

Notation

On note $A \subset E$, ce qui se lit « A est inclus dans E ».
Lorsque $A \subset E$, on dit que A est un sous-ensemble de E ou une partie de E.
On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Cas particuliers

- $E \subset E$ car $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in E$.
- $\emptyset \subset E$ car $\forall x, x \in \emptyset \Rightarrow x \in E$.
  En effet, $x \in \emptyset$ est toujours faux, donc l'implication est toujours vraie d'après les deux dernières lignes de la table de vérité de $\Rightarrow$.
- E={a, b, c}. Alors $\mathscr{P}(E)$ = { $\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, E}

Remarques

- $E = F$ si et seulement si $\forall x, x \in E \Leftrightarrow x \in F$.
  Or nous avons déjà vu le lien entre équivalence et implication :
  $$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$
  Donc $E = F$ si et seulement si :
  $$\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in F) \wedge (x \in F \Rightarrow x \in E)$$
  ce qui se traduit par les deux inclusions :
  $$E \subset F \quad \wedge \quad F \subset E.$$
  Donc $\boldsymbol{E = F \Leftrightarrow (E \subset F \wedge F \subset E)}$.

- Il convient de distinguer : un élément qui appartient à un ensemble
  - le symbole d'appartenance $\in$ du symbole d'inclusion $\subset$. un ensemble qui est incluse dans un ensemble.
  - un élément x de l'ensemble $\{x\}$.
  - l'ensemble E de l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

  On a $x \in E$, $\{x\} \subset E$, $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$, $E \in \mathscr{P}(E)$, $\emptyset \subset E$ et $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$.

~~ensemble ∈ ensemble~~

ensemble ⊂ ensemble ✓

4) Complémentaire.

Définition

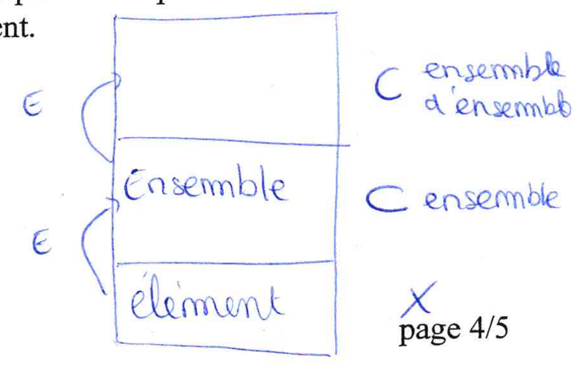
Soit A une partie de E.
Le **complémentaire de A par rapport à E** est l'ensemble $\{x \in E ; x \notin A\}$, noté $\overline{A}$.

Remarque

$\overline{A}$ est une partie de E, donc $\overline{A} \in \mathscr{P}(E)$.

Cas particuliers

- $\overline{\emptyset} = E$ car tous les éléments x de E sont tels que $x \notin \emptyset$ puisque $\emptyset$ n'a pas d'élément.
- $\overline{E} = \emptyset$ car $\overline{E} = \{x \in E ; x \notin E\}$; cet ensemble n'a pas d'élément.



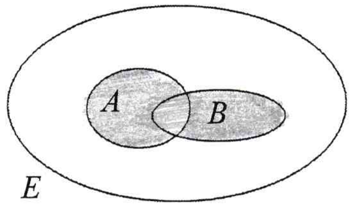
5) Union, intersection.

Définition

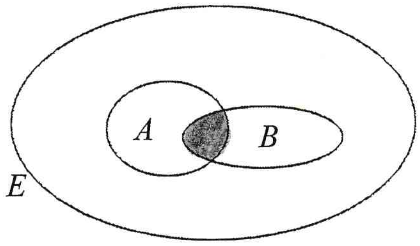
Soient A et B deux parties de E.

L'**union (ou la réunion) de A et B** est l'ensemble $\{ x \in E \,;\, x \in A \;\vee\; x \in B \}$, noté $A \cup B$.
Autrement dit, $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B (ou inclusif).
L'**intersection de A et B** est l'ensemble $\{ x \in E \;;\; x \in A \;\wedge\; x \in B \}$, noté $A \cap B$.
Autrement dit, $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B.

$A \cup B$

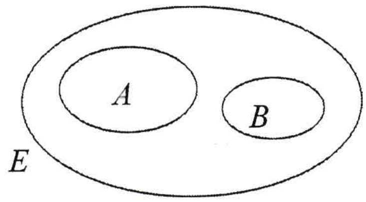


$A \cap B$



Deux parties A et B sont **disjointes** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

A et B disjoints



Propriétés

Nous observons la correspondance suivante entre les langages de la logique et de la théorie des ensembles :

complémentaire

$\Leftrightarrow$	$\Rightarrow$	$\overline{\cdots}$	$\vee$	$\wedge$	V	F
$=$	$\subset$	$\overline{\cdots}$	$\cup$	$\cap$	E	$\emptyset$

On peut donc déduire de nouvelles propriétés de celles vues en début d'année :

Logique, avec A, B et C trois propositions	**Théorie des ensembles, avec A, B et C trois parties de E**
$A \vee B \;\Leftrightarrow\; B \vee A$	$A \cup B = B \cup A$
$A \wedge B \;\Leftrightarrow\; B \wedge A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \wedge \text{F} \Leftrightarrow \text{F}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \wedge \text{V} \Leftrightarrow A$	$A \cap E = A$
$A \vee \text{F} \Leftrightarrow A$	$A \cup \emptyset = A$
$A \vee \text{V} \Leftrightarrow \text{V}$	$A \cup E = E$
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \text{V}$	$A \cup \overline{A} = E$
$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \text{F}$	$A \cap \overline{A} = \emptyset$

Fiche 1 Exercices	Thème : Logique (2) **PRÉDICATS ET LANGAGE ENSEMBLISTE**	Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1

1) a) Traduire en écriture symbolique la proposition suivante et déterminer sa valeur de vérité :
« Il existe un nombre entier naturel inférieur ou égal à tout nombre entier naturel. »
b) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de cette proposition.
2) a) Traduire en écriture symbolique la proposition suivante :
« Il existe un nombre entier naturel supérieur ou égal à tout nombre entier naturel. »
b) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de cette proposition.
c) Quelle est la valeur de vérité de cette négation ?

Exercice 2

1) Traduire en écriture symbolique chacune des propositions suivantes et déterminer sa valeur de vérité :
a) Tout nombre réel a un carré positif.
b) Il existe un nombre réel dont le carré est positif.
2) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de chacune des deux propositions du 1).

Exercice 3

1) Traduire en écriture symbolique chacune des propositions suivantes et déterminer la valeur de vérité de la première :
a) Toute somme de deux nombres réels a pour carré la somme des carrés de ces deux nombres.
b) Il existe deux nombres réels dont la somme a pour carré la somme des carrés de ces nombres.
2) Écrire en écriture symbolique, puis en une phrase en français, la négation de chacune des deux propositions du 1).
3) Donner la valeur de vérité de la négation de la proposition 1)a).

Exercice 4

Soit $A=\{a,b\}$ un ensemble. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier brièvement.

a) $a \in A$ b) $\{a\} \in A$ c) $\{a\} \subset A$ d) $\emptyset \in A$ e) $\emptyset \subset A$

Exercice 5

Soit $A=\{a,\{a\},\{a,b\}\}$ un ensemble. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier brièvement.

a) $\{a\} \in A$ b) $\{a\} \subset A$ c) $\{\{a\}\} \subset A$ d) $\{b\} \in A$ e) $\{b\} \subset A$

Exercice 6

1) Donner un exemple de trois ensembles A, B et C tels que $A \cap C = B \cap C$ et $A \neq B$.
Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme.
2) Même question en remplaçant $\cap$ par $\cup$.

Exercice 7

Soit $A=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2, x-y=1\}$ et $B=\{(t+2,t+1), t\in \mathbb{R}\}$. Montrer que $A=B$.

Exercice 8

Soit Ω un ensemble appelé univers. On appelle événement toute partie de Ω.

Soient A, B, C trois événements de Ω.

Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire) les événements suivants :

a) Seul A se réalise.
b) A et B se réalisent, mais pas C.
c) les trois événements se réalisent.
d) au moins l'un des trois événements se réalise.
e) au moins deux des trois événements se réalisent.
f) aucun des trois événements se réalise.
g) au plus l'un des trois événements se réalise.
h) exactement deux des trois événements se réalisent.

Exercice 9

Soit E un ensemble non vide. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E.

Montrer que si $A\subset B$, alors $\overline{B}\subset\overline{A}$.

Exercice 10

Soit E un ensemble non vide. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de E.

Montrer que :

$$A=B \text{ si et seulement si } A\cap B=A\cup B.$$

Exercice 11

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier les écritures suivantes :

a) $\underbrace{(A\cup(A\cap B))}_{A}\cap B$.

$= A\cap B$.

$(A\cup A)\cap(A\cup B)$

b) $\overline{A\cup B}\cap(B\cup\overline{A})$.

$=\bar{A}\cap\overline{B}$

c) $(A\cap B)\cup(\overline{A\cup\overline{B}})$.

$= B$