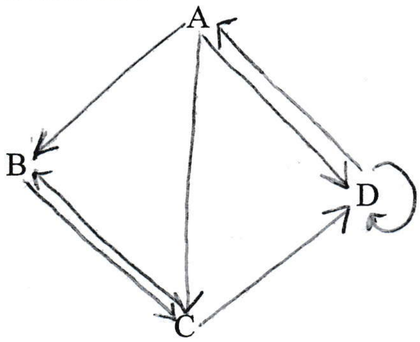
Thème 5	GRAPHES ORIENTÉS	Mathématiques pour l'informatique

I. Modes de représentation sur un exemple

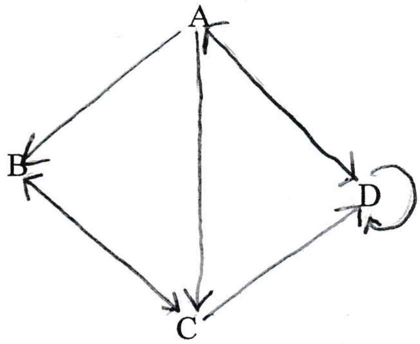
Dans une ville, on considère quatre carrefours A, B, C et D reliés par des rues où la circulation s'effectue en double sens ou en sens unique. On dispose des renseignements suivants :

- une rue en sens unique va directement de A à B
- une rue en sens unique va directement de A à C
- une rue en double sens va directement de A à D
- une rue en double sens va directement de B à C
- une rue en sens unique va directement de C à D
- une rue en sens unique va directement de D à D sans jamais passer par A, B ou C.

a) Nous pouvons représenter cette situation à l'aide d'un graphique.
On a deux possibilités :



ou



b) Nous pouvons également indiquer, pour chaque carrefour, les carrefours qui peuvent être atteints directement (les successeurs) et ceux qui permettent d'accéder directement à ce carrefour (les prédécesseurs) :

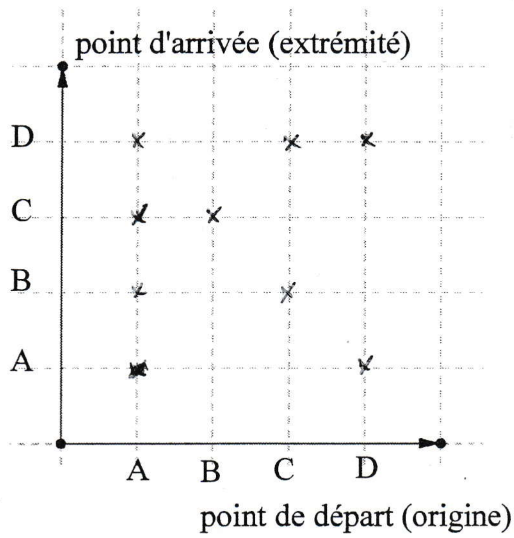
Carrefour	Successeurs
A	B, C, D
B	C
C	B, D
D	A, D

Carrefour	Prédécesseurs
A	D
B	A, C
C	A, B
D	A, C, D

c) Nous pouvons encore dresser la liste des couples de carrefours dont le premier élément est le point de départ d'un trajet fléché et le second élément le point d'arrivée du même trajet fléché :

Couples : (...A... , ...B...) ; ...
(A , C)   (D, D).
(A , D)
(B , C)
(C , B)
(C , D)
(D , A)

d) Nous pouvons également représenter graphiquement ces couples en convenant de représenter les carrefours de départ en abscisse et ceux d'arrivée en ordonnée :



e) Nous pouvons enfin donner les résultats dans un tableau à double entrée en adoptant la convention suivante :
« Si le trajet part du carrefour *x* et arrive au carrefour on *y* met un 1 à l'intersection de la ligne *x* et de la colonne *y* sinon on met un 0. »

extrémité / origine	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	0	0	1	0
C	0	1	0	1
D	1	0	0	1

Nous pouvons alors associer la matrice suivante au tableau précédent : $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. Graphe simple orienté

Définitions

Un graphe simple orienté est défini par :

- Un ensemble fini $X=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ dont les éléments sont appelés **des sommets**.

  En reprenant l'exemple précédent : $X=\{A;B;C;D\}$
- Un ensemble *U* de couples $(x_i;x_j)$ d'éléments de *X* dont les éléments sont appelés **des arcs**.

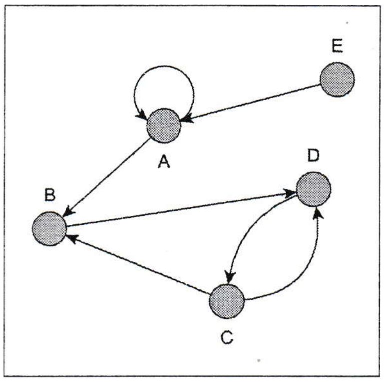
  Exemple : $U=\{(A;B);(A;C);\ldots\}$ (voir précédemment).
- L'arc $(D;D)$ a ses extrémités confondues, on parlera **de boucle**.
- Toujours dans l'exemple précédent, les arcs $(A;B)$, $(A;C)$ et $(A;D)$ ont pour origine *A*.
  On dit que *B*, *C* et *D* sont **des successeurs** de A.
- Les arcs $(A;B)$ et $(C;B)$ ont pour extrémité *B*.
  On dit que *A* et *C* sont **des prédécesseurs** de *B*.
- Plus généralement, dans un graphe orienté :
  - x_j est un successeur de x_i si et seulement si $(x_i;x_j)$ est un arc du graphe.
    On note $\Gamma^+(x_i)$ l'ensemble des successeurs du sommet x_i.
  - x_i est un prédécesseur de x_j si et seulement si $(x_i;x_j)$ est un arc du graphe.
    On note $\Gamma^-(x_j)$ l'ensemble des prédécesseurs du sommet x_j.

Matrice d'adjacence

> La **matrice d'adjacence** d'un graphe simple orienté comportant n sommets est la matrice carrée (a_{ij}) à n lignes n colonnes où :
>
> - $a_{ij}=1$ lorsque $(x_i;x_j)$ est un arc du graphe
> - $a_{ij}=0$ sinon.

La matrice $M=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$ est la matrice d'adjacence de l'exemple précédent.

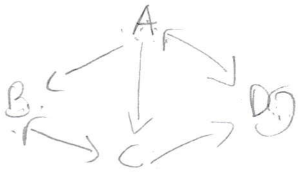
> - Sur une ligne, les 1 donnent les successeurs du sommet correspondant à cette ligne.
> - Sur une colonne, les 1 donnent les prédécesseurs du sommet correspondant à cette colonne.



Exercice : Donner la matrice d'adjacence du graphe ci-contre :

III. Chemin d'un graphe simple orienté

chemin :
A, D, A
long 2



1) Définitions

- Dans un graphe simple orienté, un **chemin** est une suite de sommets dont chacun a comme successeur le sommet suivant.

Exemple : Dans l'exemple initial, (A,C,D,A,D) est un chemin du graphe.

- Dans un graphe simple orienté, un **circuit** est un chemin dont le premier et le dernier sommet sont identiques.

Exemple : (A,B,C,D,A) est un circuit.

- Dans un graphe simple orienté, un **chemin hamiltonien** est un chemin passant par tous les sommets du graphe.

Exemple : (A,B,C,D) est un chemin hamiltonien.

2) Longueur d'un chemin

Définition

La longueur d'un chemin de n sommets est $n-1$.

Activité

Reprenons l'exemple initial.

1. Compléter le tableau ci-dessous donnant le nombre de chemins de longueur 2 du graphe avec x_i l'extrémité initiale du chemin et x_j l'extrémité finale du chemin :

x_i \ x_j	A	B	C	D
A	1	1	1	2
B	0	1	0	1
C	1	0	1	1
D	1	1	1	2

2. Calculer la matrice $M^2 = M \times M$. On obtient : $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Si on note $a_{ij}^{(2)}$ l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice M^2.
   ATTENTION : $a_{ij}^{(2)} \neq (a_{ij})^2$.
   Comparer le nombre de chemins de longueur 2 partant d'un sommet x_i obtenus dans le tableau ci-dessus avec $a_{ij}^{(2)}$.

4. Compléter le tableau donnant le nombre de chemins de longueur 3 du graphe :

x_i \ x_j	A	B	C	D
A	2	2	2	4
B	1	0	1	1
C	1	2	1	3
D	2	2	2	4

5. Calculer M^3. On obtient : $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

   Comparer $a_{ij}^{(3)}$ avec le nombre de chemins de longueur 3 partant du sommet x_i.

Propriété

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté comportant n sommets.
Le nombre de chemins de longueur p d'un sommet x_i à un sommet x_j est le nombre situé à la ligne i et à la colonne j de la matrice M^p.

3) Matrice booléenne d'un graphe

Addition et multiplication booléenne :

Somme booléenne $\boxplus$

$\boxplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

Produit booléen $\boxtimes$

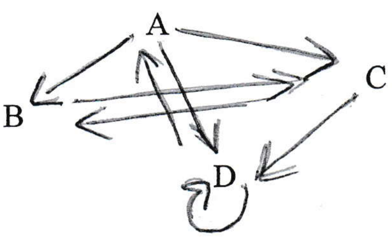
$\boxtimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Définition

M est la matrice d'adjacence d'un graphe et M ne comporte que des 0 et des 1.
Pour faire le produit booléen de la matrice M par la matrice M, noté $M \boxtimes M$, on fait le produit habituel des deux matrices mais en utilisant l'addition et la multiplication booléenne.

Exemple

Soit M la matrice $M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ et G le graphe associé :



1. Calculer $M \boxtimes M$, aussi noté $M^{[2]}$ et la comparer avec M^2.
2. Que signifie la présence du 1 à la 1ère ligne, 4ème colonne?
3. Calculer $M^{[3]} = M^{[2]} \boxtimes M$. Comparer $M^{[3]}$ et M^3.

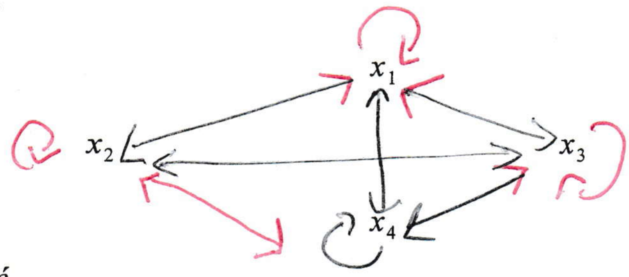
4) Fermeture transitive

Définition

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté est le graphe, obtenu en conservant les sommets et en ajoutant si nécessaire les arcs $(x;y)$ pour lesquels il existe un chemin de x à y (chemin direct).

$x_1 \to x_4$:

Exemple



Propriété

Un graphe simple orienté de matrice d'adjacence M a pour fermeture transitive un graphe de matrice d'adjacence $\widehat{M}$ telle que $\widehat{M} = M + M^{[2]} + M^{[3]} + \ldots + M^{[n]}$, avec n le nombre de sommets du graphe et où + est l'addition booléenne des matrices et $M^{[n]}$ est la puissance booléenne n-ième de la matrice M.

Fiche 1 Exercices	GRAPHES	Mathématiques pour l'informatique

Exercice 1

Soit G le graphe défini par le tableau de successeurs :

Sommets	Successeurs
a	a, b
b	a, c, d
c	b, c
d	d

1. Représenter le graphe G.

2. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

3. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$.

b) Quel est le nombre situé à l'intersection de la deuxième ligne et de la deuxième colonne de M^2 ?

Que signifie-t-il pour le graphe G ?

Donner la liste des chemins concernés.

4. a) Calculer la matrice $M^3 = M^2 \times M$.

b) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet a au sommet b ?

Donner la liste de ces chemins.

c) Quel est le nombre de chemins de longueur 3 issus du sommet c du graphe G ?

Exercice 2

Dans un centre de loisirs, parmi les nombreuses activités proposées figurent plusieurs jeux : la belote, les dames, les échecs et le tarot notés respectivement B, D, E et T.

Pour des raisons de disponibilité et d'affluence, certaines contraintes sont imposées :

- après une partie de belote (en 1 000 points), on peut jouer uniquement aux dames ou aux échecs ;
- après une partie de dames ou d'échecs, on peut jouer uniquement à la belote ou au tarot ;
- après une partie de tarot, on doit changer de jeu.

1. Dessiner une représentation du graphe orienté G correspondant.

2. Écrire la matrice d'adjacence M du graphe G.

3. a) Calculer les deux matrices booléennes $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$.

b) Quelle est la signification des « 1 » présents dans la matrice $M^{[3]}$?

4. a) Calculer la matrice $M^2 = M \times M$ et la matrice $M^3 = M^2 \times M$.

b) En déduire le nombre de chemins de longueur 3 ayant pour origine B et pour extrémité D.

Écrire ces chemins.

c) Écrire les six circuits de longueur 3.