Fiche 1	Thème : FONCTIONS **SECOND DEGRÉ**	Mathématiques Approfondies

Partie I. Fonction carré

DÉFINITION

La fonction **carré** est la **fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.**

f est **strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.**

Son tableau de variation est :

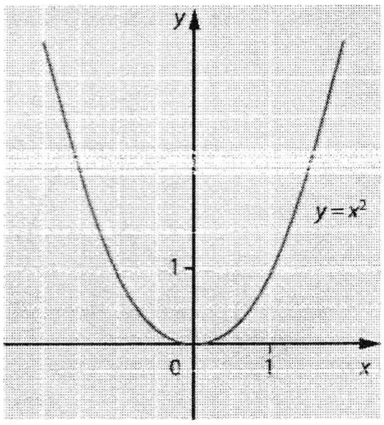
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

f admet un minimum égal à 0 pour $x = 0$.

Pour tout nombre réel x, $f(x) = x^2 \geq 0$.

La représentation graphique de f est une **parabole**.

L'axe des ordonnées est axe de symétrie de cette parabole car deux points d'abscisses opposées ont la même ordonnée.



Remarque

Le sens de variation de la fonction f : $x \mapsto x^2$ est un outil pour le calcul algébrique sur les inégalités.
Pour tous nombres réels **positifs** a, b, si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.
Pour tous nombres réels **négatifs** a, b, si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.

Partie II. Cas général : fonctions du second degré

DÉFINITION

Les **fonctions polynômes de degré 2** sont les **fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$**, où a, b et c sont des nombres réels donnés, indépendants de x, et où a n'est pas nul.

Le sens de variation de chacune de ces fonctions peut être obtenu à partir du signe de sa dérivée.

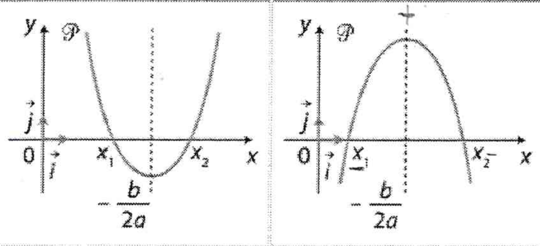
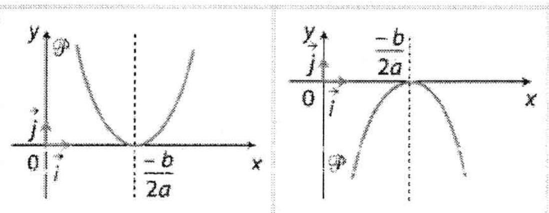
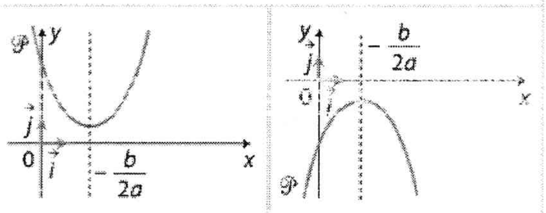
La représentation graphique de chacune de ces fonctions et une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$.

Elle permet d'interpréter graphiquement la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et le signe $f(x) = ax^2 + bx + c$ suivant le signe du discriminant $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Remarque

La résolution d'une équation du second degré peut être effectuée à la main ou en utilisant un ordinateur ou une calculatrice.

A RETENIR :

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
	Tous les points de la parabole $\mathcal{P}$ dont l'abscisse est comprise entre x_1 et x_2 ont une ordonnée qui a le même signe que $-a$.	
$\Delta = 0$		
	Tous les points de la parabole $\mathcal{P}$ dont l'abscisse est différente de $-\dfrac{b}{2a}$ ont une ordonnée qui a le même signe que a.	
$\Delta < 0$		
	Tous les points de la parabole $\mathcal{P}$ ont une ordonnée qui a le même signe que a.	

	Solutions de l'équation $f(x) = 0$	Factorisation
$\Delta > 0$	deux solutions distinctes : x_1 et x_2 $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
	Signe de $f(x)$	

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

	Solutions de l'équation $f(x) = 0$	Factorisation
$\Delta = 0$	une solution double : $x_1 = x_2 = x_0$ $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	$f(x) = a(x-x_0)^2$
	Signe de $f(x)$	

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

	Solutions de l'équation $f(x) = 0$	Factorisation
$\Delta < 0$	pas de solution	pas de factorisation
	Signe de $f(x)$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Exercice :

Un artisan fabrique des vases qu'il met en vente. On suppose que tous les vases fabriqués sont vendus.

L'artisan veut faire une étude sur la production d'un nombre de vases compris entre 0 et 60.

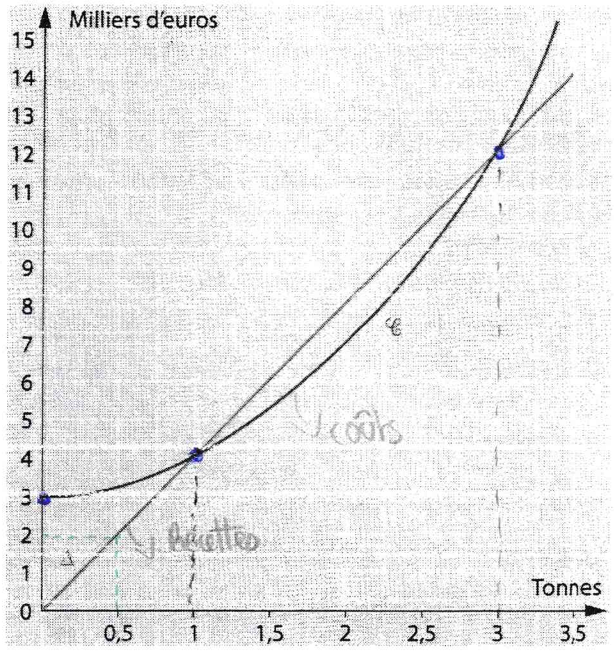
Il estime que le coût de production de x vases fabriqués est modélisé par la fonction C dont l'expression est $C(x) = x^2 - 10x + 500$, où x appartient à l'intervalle $[0;60]$.

Chaque vase est vendu 50 euros.

1. Représenter sur un graphique, d'unités 1 cm pour 5 vases en abscisses et 2 cm pour 500 euros en ordonnées, la courbe représentative de la fonction C et la droite D d'équation : $y = 50x$.
1. Par lecture graphique, déterminer :
   a) le coût de production de 40 vases fabriqués ;
   b) la production, à une unité près, qui correspond à un coût total de 1 300 euros.
2. On note $R(x)$ la recette, en euros, correspondant à la vente de x vases fabriqués.
   a) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
   b) Déterminer graphiquement le nombre de vases que l'artisan doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.
   c) Résoudre par le calcul sur $[0;60]$ l'inéquation $R(x) \geqslant C(x)$.
3. a) Montrer que le bénéfice, en euros, réalisé par la fabrication et la vente de x vases, est donné par la fonction B dont l'expression est $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, où x appartient à l'intervalle $[0;60]$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0;60]$.
   c) En déduire le nombre de vases à fabriquer et à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.

Exercices	**SECOND DEGRÉ**	Mathématiques approfondies

Exercice d'application



Une entreprise qui fabrique et commercialise un produit, a une capacité de production limitée à 3,5 tonnes par jour.

On note C la fonction définie sur $[0;3,5]$ par $x \mapsto C(x)$, où $C(x)$ est le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes de ce produit.

On note R la fonction définie sur $[0;3,5]$ par $x \mapsto R(x)$, où $R(x)$ est la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit.

On désigne par B la fonction définie sur $[0;3,5]$ par $x \mapsto B(x)$, où $B(x)$ est le bénéfice en milliers d'euros obtenu pour la production et la vente de x tonnes de ce produit.
La courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ de la figure ci-contre sont les représentations graphiques respectives des fonctions C et R.

Partie A: Étude graphique

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.

1) Déterminer le montant en euros des coûts lorsque la production est nulle. 3 milliers d'euros.
2) Quel est le montant en euros de la recette si l'entreprise produit et vend 0,5 tonnes de produit ? Réalise-t-elle un bénéfice dans ce cas ?
3) Pour quelles valeurs de x, le bénéfice est-il nul ?
4) Déterminer les quantités de produit pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.
5) Déterminer la quantité de produit qui assure à l'entreprise un bénéfice maximal.

Partie B : Étude de la fonction B

Dans cette partie, on admet que la courbe $\mathscr{C}$ est une parabole.

1) Montrer que pour tout $x \in [0;3,5]$, $C(x) = x^2 + 3$ et $R(x) = 4x$.
2) En déduire que pour tout $x \in [0;3,5]$, $B(x) = -x^2 + 4x - 3$.
3) Retrouver par le calcul l'ensemble des réponses de la partie A.