Fiche 2	Thème : FONCTIONS **FONCTIONS LN ET EXP**	Mathématiques Approfondies

Partie I. Fonction ln

- La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui a pour fonction dérivée la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ et qui prend la valeur 0 pour $x=1$.

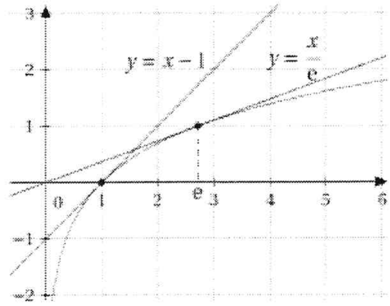
  $\ln(x)$ $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

- Pour tous nombres réels strictement positifs a et b, pour tout nombre entier relatif n, on a :
  - $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$
  - $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
  - $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
  - $\ln(a^n)=n\ln(a)$
  - $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln(a)$.

- Variations et courbe représentative :
  - Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
signe de ln '		+	
ln		↗ 0 ↗	

  - Courbe représentative :



- On note **e** le nombre réel défini par $\ln(e)=1$ $(e\approx2{,}718)$.

Partie II. Fonction exp

- La fonction **exponentielle**, notée exp, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a tout nombre réel x associe le nombre strictement positif unique y tel que $x=\ln(y)$.

- Pour tout nombre réel x, pour tout nombre réel strictement positif y, pour tous nombres réels a et b, pour tout nombre entier relatif n, on a :
  - on note e^x le nombre $\exp(x)$
  - $e^x>0$
  - $y=e^x$ si et seulement si $x=\ln(y)$
  - $\ln(e^x)=x$
  - $e^{\ln(y)}=y$
  - $e^{a+b}=e^a\times e^b$
  - $e^{-a}=\frac{1}{e^a}$
  - $e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b}$
  - $(e^a)^n=e^{a\times n}$

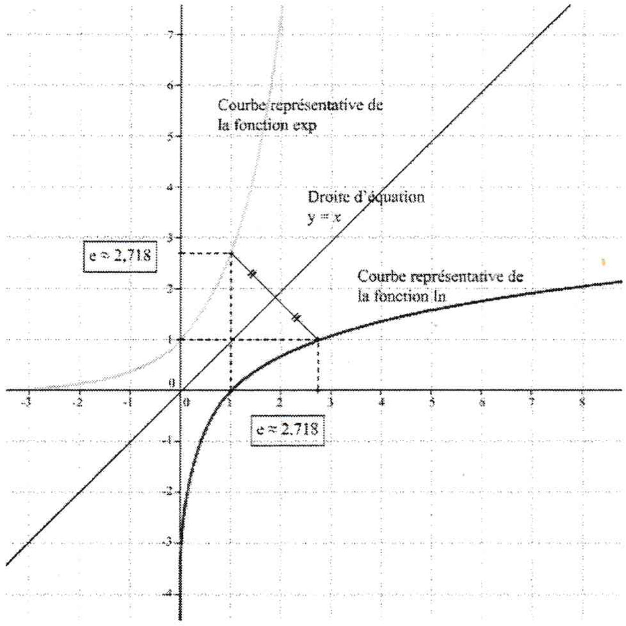
- La fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée : $\exp'=\exp$.

- <u>Variations et courbe représentative :</u>

  - <u>Tableau de variations :</u>

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de exp'		+	
exp	↗	1	↗

  - <u>Courbe représentative :</u>
    Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien se déduisent l'une de l'autre par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y=x$.



- Soit a un nombre réel **strictement positif**, pour tout nombre réel x, $a^x = e^{x\ln(a)}$.

Fiche 2	Thème : FONCTIONS **FONCTIONS LN ET EXP**	Mathématiques Approfondies

Exercice 1

Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

1) $\ln(3\,\mathrm{e})$
2) $\ln(\mathrm{e}^2)$
3) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}})$
4) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{7}\right)+\ln\left(\frac{7}{9}\right)$
5) $\ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right)+\ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$.

Exercice 2

Résoudre les équations proposées après avoir fourni l'ensemble d'étude.

1) $\ln(3x)=8$
2) $\ln(x)=-2$
3) $\ln(x^2)=1$
4) $\ln\left(\frac{x}{3}\right)=2$
5) $\ln(x^3)=-3$
6) $\ln(3x-2)=0$
7) $\ln(x^2-1)=\ln(4)+\ln(2)$
8) $\ln(x^2-3x+2)=\ln(9)$
9) $\ln(2x+1)+\ln(-x+1)=0$
10) $\ln((x-1)^2)-\ln(x+1)=0$
11) $\mathrm{e}^{3x+4}=2$
12) $\mathrm{e}^{-x\ln 4}=2$
13) $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-6=0$.

Exercice 3

Résoudre les inéquations proposées après avoir fourni l'ensemble d'étude.

1) $1-2\ln(2x)\geqslant 0$
2) $3-\ln(x)\leqslant 0$
3) $2+3\ln(2x)\leqslant 0$
4) $\ln(5-x)-\ln(3)+\ln(x-1)\geqslant 0$
5) $\ln(3x^2-x-2)\geqslant\ln(6x+4)$.

Exercice 4

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble sur lequel la fonction *f* est dérivable puis calculer sa dérivée et enfin dresser son sens de variation.

1) $f(x)=x\ln x$.
2) $f(x)=\sqrt{\ln x}$
3) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$
4) $f(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2$
5) $f(x)=(\ln x)^3$.

Exercice 5

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x$.

1) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x\,\mathrm{e}^x-1$.
2) En déduire qu'il existe un unique réel α tel que $\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha}=1$.
   Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.
3) Étudier le signe de $g(x)$.
4) Calculer la fonction dérivée f' de *f* et étudier son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) En déduire les variations de la fonction *f*.
6) Montrer que *f* admet un minimum *m* égal à $\alpha+\alpha^{-1}$.

Exercice 6

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-2x+3}$.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Étudier les variations de *f*.
3) Résoudre l'équation $f(x)=1$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^x$.

1) Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x)$ a le même signe que $x+1$.
2) Étudier les variations de f.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

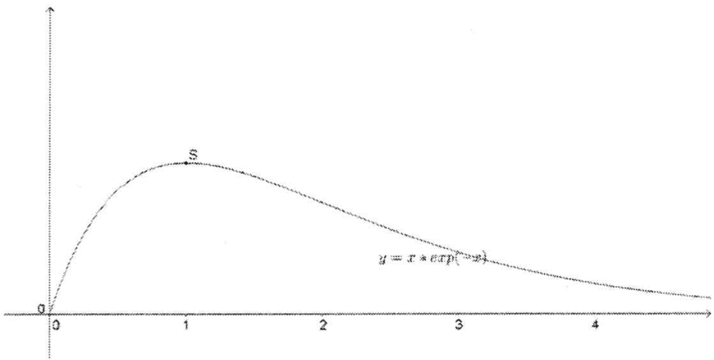
1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le signe de $f'(x)$.
2) Calculer $f'(x)$.
3) Établir les variations de f et construire son tableau de variations.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=45\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{x}{4}}\right)$.

1) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
2) Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
3) Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 40$.

Exercice 10



Ci-contre est donnée une courbe représentant la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$ ainsi que son sommet S.

1) À l'aide du graphique, conjecturer les variations de f.
2) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $1-x$.
3) Construire le tableau de variations de f et préciser la valeur exacte de l'ordonnée de S.

Exercice 11

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

1) $f(x)=\ln(-3x+1)$
2) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$
3) $f(x)=\ln(\ln x)$
4) $f(x)=(\ln x)^2$.