Fiche 1	Thème : SUITES SUITES NUMÉRIQUES	Mathématiques Approfondies

I) Définitions et vocabulaire de base

1) Premières définitions

Définitions

- Une **suite numérique** (on simplifiera en disant simplement **suite**) est une fonction qui à tout entier naturel *n*, associe un nombre réel. En général, une suite est notée *u* ou (u_n).
- u_n est le **terme général** de la suite. On parle aussi de **terme de rang *n***.

Durant les deux années de BTS SIO, nous rencontrerons deux types de suites :

1. **Les suites définies de façon explicite**, c'est à dire telles que $u_n = f(n)$, où *f* est une fonction (numérique) définie sur $[0;+\infty[$.

   Exemple 1: La fonction définie par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ est de la forme $u_n = f(n)$ avec *f* la fonction définie sur $[0:+\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

   $-2n^2+168n-240$

   Exemple 2: La fonction définie par $u_n =$ n + 13000 est de la forme $u_n = f(n)$ avec *f* la

   $-2x^2+68x-240$

   fonction définie sur $[0:+\infty[$ par $f(x) =$ x + 13007.

2. **Les suites définies par récurrence**, c'est à dire celles pour lesquelles chaque terme s'écrit en fonction du (des) terme(s) précédent(s).

   Dans une grande majorité des cas, un terme sera donné en fonction du précédent, la forme générale est alors $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est une fonction donnée. On parle également de relation de récurrence. Pour définir de telles suites, donner une relation de récurrence ne suffit pas, il faut également donner le (les) premier(s) terme(s).

   Exemple 1: La fonction définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n)^2 - 1$ est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec *f* la fonction définie sur $[0:+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 1$.
   Les trois premiers termes de cette suite sont : $u_0 = 2$, $u_1 = (u_0)^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$, $u_2 = (u_1)^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$.

   Exemple 2: La fonction définie par $u_0 =$ 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} =$ $-2(u_n)^2+68u_n-240$ est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec *f* la fonction définie sur $[0:+\infty[$ par $f(x) =$ $-2x^2+68x-240$.
   Les trois premiers termes de cette suite sont : $u_0 =$ 1, $u_1 =$ 174 et

   $u_2 =$ ....

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 - 1 \end{cases}$

$u_1 = (u_0)^2 - 1$

$u_2 = (u_1)^2 - 1$

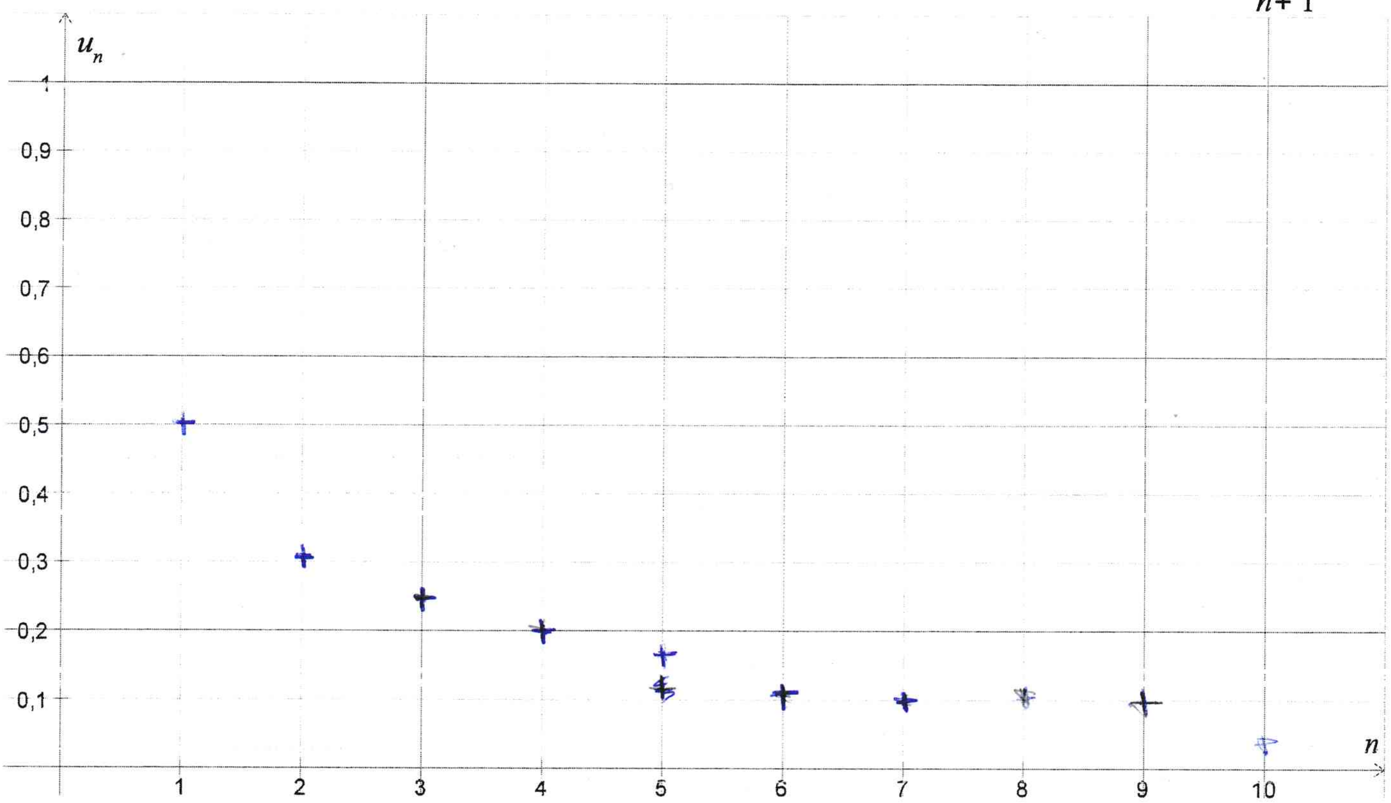
$u_5 = (u_4)^2 - 1$
$= ((u_3)^2 - 1)^2 - 1$
$= ((u_2)^2 - 1)^2 - 1)^2 - 1$
$= ((8^2 - 1) - 1)^2 - 1$
$= (63^2 - 1)^2 - 1$
$= (3969 - 1)^2 - 1$
$= 15745023$

2) Représentation graphique d'une suite

On représente graphiquement une suite en plaçant l'ensemble des points $M(n; u_n)$ dans un repère.

Exemple :

Tracer dans le repère ci-dessous la représentation graphique de la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.



3) Sens de variation (ou monotonie) d'une suite

Définitions :

Soit (u_n) une suite.

1. La suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. La suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. La suite (u_n) est dite **constante** si pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n$.

Quelques méthodes pour étudier la monotonie d'une suite (c'est à dire déterminer si la suite est croissante, décroissante ou constante ou « rien du tout ») :

1. PAR DIFFÉRENCE : on calcule pour tout entier n, la différence $u_{n+1} - u_n$.
   Si elle est toujours positive, alors la suite est croissante.
   Si elle est toujours négative, alors la suite est décroissante.

2. Dans le cas d'une suite $\boxed{\text{A TERMES STRICTEMENT POSITIFS}}$: on calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   S'il est supérieur ou égal à 1 alors la suite est croissante.
   S'il est inférieur ou égal à 1 alors la suite est décroissante.

3. Dans le cas où $\boxed{u_n = f(n)}$: si f est monotone que $[0;+\infty[$ alors (u_n) est de même monotonie.

4) Suites bornées

Définitions :

1. La suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un nombre m tel que pour tout entier *n*, $u_n \geqslant m$.
2. La suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un nombre M tel que pour tout entier *n*, $u_n \leqslant M$.
3. La suite (u_n) est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

II) Suites arithmétiques

Définition

Soient (u_n) une suite et *r* un nombre réel.
Si pour passer de n'importe quel terme de la suite à son suivant, on ajoute toujours le même nombre *r* alors la suite est dite **arithmétique de raison *r*.**
Dit plus rigoureusement :
Si pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=u_n+r$ (c'est à dire : $u_{n+1}-u_n=r$) alors (u_n) est une suite arithmétique de raison *r*.

Applications :

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme $u_0=5$.
   Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=5$ telle que $u_3=-2$.
   Déterminer u_5, u_7 et u_0.
3. (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5=16$ et $u_3=9$.
   Déterminer la raison *r*.

A retenir :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme u_0.
On a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=u_0+n\times r$.
- pour tous nombres entiers *m* et *p*, $u_m=u_p+(m-p)r$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\dfrac{u_0+u_n}{2}$.

Applications :

(u_n) est une suite arithmétique telle que : Exprimer u_{n+1} en fonction de n

1. $u_0=2$ et $r=5$. Déterminer u_n en fonction de *n* puis calculer u_{100}.
2. $u_3=-1$ et $r=0,5$. Calculer u_0.
3. $u_{21}=14$ et $u_{36}=59$. Déterminer *r* puis u_0 et u_{100}.
4. $u_0=1$ et $r=2$. Calculer u_{27} puis $S_{27}=u_0+u_1+\ldots+u_{27}$.

Représentation graphique d'une suite arithmétique :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme u_0 alors les points $M_n\ (n;u_n)$ sont tous situés sur la droite d'équation $y=rx+u_0$.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison *r*.

- Si $r>0$ alors (u_n) est une suite strictement croissante.
- Si $r<0$ alors (u_n) est une suite strictement décroissante.

III) Suites géométriques

Définition

Soient (u_n) une suite et r un nombre réel.
Si pour passer de n'importe quel terme de la suite à son suivant, on multiplie toujours par le même nombre q alors la suite est dite **géométrique de raison q**.

Dit plus rigoureusement :

Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n\times q$ (c'est à dire, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\neq 0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$) alors (u_n) est une suite géométrique de raison q.

Applications :

1. (u_n) est une suite géométrique de raison $q=2$ et de premier terme $u_0=5$.
   Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q=5$ telle que $u_3=-500$.
   Déterminer u_5, u_7 et u_0.
3. (u_n) est une suite géométrique telle que $u_4=12$ et $u_6=48$.
   Déterminer la raison q.

A retenir :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
On a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=u_0\times q^n$.
- pour tous nombres entiers m et p, $u_m=u_p\times q^{m-p}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $q\neq 1$ alors $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Si $q=1$ alors $S_n=(n+1)\times u_0$.

Applications :

(u_n) est une suite géométrique telle que :

1. $u_0=2$ et $q=5$. Déterminer u_n en fonction de n puis calculer u_{12}.
2. $u_3=-1$ et $q=0,5$. Calculer u_0.
3. $u_3=12$ et $u_6=324$. Déterminer q puis u_4, u_7 et u_0.
4. $u_0=1$ et $q=2$. Calculer u_{27} puis $S_{27}=u_0+u_1+\ldots+u_{27}$.

Représentation graphique d'une suite géométrique :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors les points $M_n\ (n;u_n)$ sont tous situés sur la courbe d'équation $y=u_0\times q^x$.

Variations

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $0<q<1$ alors (u_n) est une suite strictement décroissante.
- Si $q=1$ alors (u_n) est constante.
- Si $q>1$ alors (u_n) est une suite strictement croissante.
- Si $q<0$ alors (u_n) n'est pas monotone.

Exercices	SUITES NUMÉRIQUES	Mathématiques Approfondies

Exercice 1

A. En 1998, le chiffre d'affaires d'une entreprise *A* s'élevait à 230 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 15 000 euros.

1. Calculer le chiffre d'affaires u_1 en 1999.

cours

2. Soit u_n le chiffre d'affaires de l'année 1998 + *n*. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier terme u_0 et la raison *a* de cette suite.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2014 de l'entreprise *A*.

B. En 1998, le chiffre d'affaires d'une entreprise *B* s'élevait à 150 000 euros. Chaque année, ce chiffre d'affaires a augmenté de 7,4 %.

1. Calculer le chiffre d'affaires v_1 en 1999.

cours

2. Soit v_n le chiffre d'affaires de l'année 1998 + *n*. Justifier que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,074.

3. Calculer le chiffre d'affaires en 2014 de l'entreprise *B*.

C. 1. Que constate-t-on en 2014 pour les entreprises *A* et *B* ?

2. En 2014, le chef de l'entreprise *B* affirme qu'à ce rythme son entreprise aura dans 15 ans, un chiffre d'affaires pratiquement double de celui de l'entreprise *A*. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 2

Deux villes A et B ont décidé de lancer un programme ambitieux de construction de logements sociaux neufs.

En 2009, il y avait 3 460 logements sociaux dans la ville A et 2 740 dans la ville B.

Le projet de la ville A consiste en la construction à partir de 2010 de 160 logements sociaux supplémentaires chaque année. Celui de la ville B consiste à augmenter à partir de 2010 le nombre de logements sociaux de 7 % chaque année.

Pour comparer les deux projets, on utilise une feuille de calcul dont on donne un extrait ci-dessous. Les colonnes C et D sont au format nombre à zéro décimale.

	A	B	C	D
1	Année	Rang de l'année	Ville A	Ville B
2	2009	0	3 460	2 740
3	2010	1	3 620	2 932
4	2011	2	3 780	3 137
5	2012	3	3 940	3 357
6	2013	4	4 100	3 592
7	2014	5		
8	2015	6		
9	2016	7		
10	2017	8		
11	2018	9		
12	2019	10		

A. 1. Calculer le nombre de logements sociaux dans les villes A et B en 2014.

2. Donner des formules qui, entrées dans les cellules C3 et D3, permettent par recopie vers le bas d'obtenir la plage de cellule C3:D12.

3. Calculer le nombre de nouveaux logements sociaux construits dans la ville A durant la période 2010-2013.

B. 1. Pour tout entier naturel *n*, on note a_n le nombre total de logements sociaux dans la ville A au cours de l'année 2009 + *n*. On a donc $a_0 = 3\,460$.

a) Donner la nature de la suite (a_n).

b) En 2019, le nombre de logements sociaux de la ville A aura-t-il doublé ? Justifier.

2. On considère la suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel *n*, $b_n = 2\,740 \times (1{,}07)^n$. On a donc $b_0 = 2\,740$.

Indiquer la nature de la suite (b_n).

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Durant les dix années de 2010 à 2019, le nombre de logements sociaux de la ville B dépassera-t-il celui de la ville A ? Justifier.

Exercice 3

Partie A

La loi de Moore, énoncée en 1975 par Gordon Moore, co-fondateur de la société *Intel*, prévoit que le nombre de transistors des micro-processeurs proposés à la vente au grand public double tous les 2 ans. Les micro-processeurs fabriqués en 1975 comportaient 9 000 transistors.

Pour modéliser cette loi de Moore, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9\,000$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n.

Un terme u_n de cette suite correspond au nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué lors de l'année $1975 + 2n$.

1. Calculer u_1 et u_2 puis interpréter ces nombres.

2. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

3. Déterminer le nombre de transistors prévus par la loi de Moore pour un micro-processeur fabriqué en 2001.

4. Selon ce modèle, à partir de quelle année les micro-processeurs intégreront-ils plus de 100 milliards de transistors ?

Partie B

On considère l'algorithme suivant, où n est un entier naturel non nul.

```
Saisir n
u prend la valeur 9 000
Pour i allant de 1 à n
    u prend la valeur u × 2
FinPour
Afficher u
```

1. Quelle est la valeur affichée par cet algorithme pour $n = 3$?

2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 4

Une entreprise importe un certain type de matériel informatique. En 2014, elle aura importé 120 800 matériels. Elle prévoit que le nombre de matériels de ce type importés augmente de 20 % chaque année à partir de 2014. On note u_n le nombre de matériels importés l'année $(2014 + n)$.

On a donc $u_0 = 120\,\overset{8}{\cancel{0}}00$.

On utilise une feuille de calcul d'un tableur (*voir l'annexe*) pour observer l'évolution des importations.

Annexe

	A	B	C	D
1	Année	n	u_n	Total des importations
2	2014	0	120 800	120 800
3	2015	1	144 960	265 760
4	2016	2		
5	2017	3		
6	2018	4		
7	2019	5		
8	2020	6		

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

2. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer le nombre de matériels importés en 2020.

4. Déterminer en quelle année le nombre de matériels importés dépassera 300 000.

5. On rappelle que, pour une suite géométrique (u_n) de raison q, $q \neq 1$, et de premier terme u_0 on a :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Déterminer le nombre total de matériels importés de 2014 à 2020. Arrondir à l'unité.

6. a) Donner une formule qui, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C.

b) Parmi les formules suivantes, indiquer toutes celles qui, saisies dans la cellule D3, puis recopiées vers le bas, permettent d'obtenir les valeurs de la colonne D.

=SOMME(C2:C3) ; =SOMME($C$2:C3) ; =D2+C3 ; =$D$2+C3.