# Exchange Argument란?

- 임의의 상태에서 매순간 손해보지 않으면서, 원소끼리의 교환을 ~~통해~~ 얻어지는 상태로 나아가는 것을 반복하면 최적의 상태를 얻을 수 있다는 greedy 한 argument.

- 1. 임의의 상태 Q 가정.
  2. Q에서 매순간 손해보지 않으면서 원소들을 교환하여 상태 p를 얻을 수 있음을 보임.
  3. p가 아닌 임의의 최적해 p*을 가정.
     p* 에서 매순간 손해보지 않으면서 원소들을 교환하여 p를 얻을 수 있음을 보임 → 따라서 p는 최적해.

- greedy algorithm correctness ~~증명~~ 기법의 일종

- The idea of greedy exchange proof is to ==incrementally modify a solution== produced by any other algorithm into the solution produced by your greedy algorithm in a way that ==doesn't worsen the solution's quality.==

# 구두 수선공 (Boj 14908)

◦ 문제 요약

: N개의 작업, 하루에 한 작업만 수행 가능. ($1 \le N \le 1000$)

i번째 작업을 완료하는 데 $T_i$일이 걸림. ($1 \le T_i \le 1000$)

i번째 작업을 시작하기 전에 하루가 지연될 때마다

보상금 $S_i$센트를 지불해야 함. ($1 \le S_i \le 10000$)

최저 보상금을 지불하는 작업 순서를 출력하라.

◦ 임의의 작업 순서가 정해졌을 때 비용은

$T_1 \times S_2 + (T_1 + T_2) \times S_3 + (T_1 + T_2 + T_3) \times S_4$

$+ \cdots + (T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1}) \times S_n$

i 번째와 (i+1)번째 작업의 순서를 바꾸는 경우

- [1, i-1] 번째 작업의 비용은 그대로.

- [i+2, N] 번째 작업의 비용은 그대로.

$\Rightarrow$ i, (i+1) 번째 작업의 비용만 고려.

$\sum_{k=1}^{i-1} T_k \times S_i + \sum_{k=1}^{i} T_k \times S_{i+1}$

$\ge \sum_{k=1}^{i-1} T_k \times S_{i+1} + (\sum_{k=1}^{i-1} + T_{i+1}) \times S_i$ 가 성립하면 교환

$\Leftrightarrow$ $T_i \times S_{i+1} \ge T_{i+1} \times S_i$ 가 성립하면 교환.

$\Leftrightarrow$ $T_i / S_i \ge T_{i+1} / S_{i+1}$ 가 성립하면 교환.

$\therefore \frac{T_i}{S_i}$ 기준 오름차순 정렬한 것이 답.

# SW 역량 테스트 (Boj 13448)

- 문제 요약
  : 총 T분 동안 시험이 치뤄짐. N개의 문제가 주어짐.
  i번 문제를 t분에 제출했을 때 $M_i - t \times p_i$ 점 얻음.
  i번 문제를 푸는데에는 $R_i$분이 걸림.
  얻을 수 있는 점수의 최댓값을 구하시오.

- naive solution : $O(\underbrace{2^N}_{\text{시험 때 푸는 문제 집합 경우의 수}} \times \underbrace{N!}_{\text{문제 푸는 순서}} \times N)$ 설계로 풀어봄

- 풀이 요약 : exchange argument + knapsack dp.

- Exchange Argument
  - 일단 시간 제한이 없다고 가정 + 모든 문제를 푼다고 가정

  - 임의의 상태 Q에서 점수 합,
    $\sum_{k=1}^{N} M_k - R_1 \times P_2 - (R_1+R_2) \times P_3 - \cdots - (R_1+R_2+\cdots+R_{n-1}) \times P_n$

  - i, (i+1)번째 문제의 푸는 순서 교환.
    $-(R_1+R_2+\cdots+R_{i-1}) \times P_i - (R_1+R_2+\cdots+R_i) \times P_{i+1}$
    $\le -(R_1+R_2+\cdots+R_{i-1}) \times P_{i+1} - (R_1+R_2+\cdots+R_{i+1}) \times P_i$
  $\Leftrightarrow -R_i \times P_{i+1} \le -R_{i+1} \times P_i$
  $\Leftrightarrow R_i \times P_{i+1} \ge R_{i+1} \times P_i$
  $\Leftrightarrow R_i / P_i \ge R_{i+1} / P_{i+1}$

  $\therefore \frac{R_i}{P_i}$ 기준 오름차순 정렬한 것이 답.

- Knapsack DP로 제한시간 내 풀 수 있는 $\underbrace{\text{모든}}_{\text{문제 집합의}}$ 경우의 수 검토.

# 직사각형 (BOJ 16207)

◦ 문제 요약

: N개의 막대가 있다. 막대의 길이는 $A_1, A_2, \ldots, A_N$이며, 모두 2보다 크거나 같은 자연수이다.

막대들을 활용해서 직사각형을 만들고자 한다.

각 막대는 최대 한 번 활용될 수 있고, 여러 개의 막대를 이용해서 직사각형의 한 변을 만드는 것은 불가능하다.

각 막대의 길이를 1 줄일 수 있다. ($A_i := A_i - 1$)

이 연산은 막대당 최대 1번 적용할 수 있다.

직사각형들의 넓이의 합의 최댓값을 구하라.

◦ Exchange Argument

- 막대들이 임의로 짝지어져 직사각형을 만든 상태 Q를 가정.

- 임의의 두 직사각형을 고름.
  사용된 막대쌍들을 각각 A, B, C, D ($A \le B \le C \le D$)라 할 때, 막대쌍들을 최적으로 분배하는 방법은 $A \times B + C \times D$로 짝지는 것.
  이를 반복하면 길이 순으로 막대쌍들을 짝짓게 됨.

∴ 길이 순으로 짝지은 것이 정답