Exercice 1

1-) $X = \{0, 1\}$, $T = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$

Montrons que T est une topologie sur X.

On a : ~~$\emptyset$~~ $\emptyset \in T$ et $\{0,1\} \in T$ donc

i-) $\emptyset \in T$ et $X \in T$.

Vérifions que toute intersection finie d'éléments de T est un élément de T.

$\emptyset \cap \{1\} = \emptyset \in T$

$\emptyset \cap \{0,1\} = \emptyset \in T$

$\{1\} \cap \{0,1\} = \{1\} \in T$

donc (ii) toute intersection finie d'éléments de T est élément de T.

Montrons que toute réunion d'éléments de T est un élément de T. ~~il suffit de montrer que toute réunion la famille T étant finie,~~

Soit I un ensemble quelconque et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de T.

- Si $\forall i \in I$, $O_i = \emptyset$ alors $\bigcup_{i \in I} O_i = \emptyset \in T$
- Si $\forall i \in I$, $O_i = \{1\}$, alors $\bigcup_{i \in I} O_i = \{1\} \in T$
- ~~Si $\forall i \in I$~~, Si $\exists\, i \in I$ tel que $O_i = \{0,1\}$, alors $\bigcup_{i \in I} O_i = \{0,1\} \in T$
- S'il existe une partie J de I telle que $\forall j \in J$, $O_j = \emptyset$ et $\forall i \in I \setminus J$, $O_i = \{1\}$, alors $\bigcup_{i \in I} O_i = \{1\} \in T$.

Donc ~~$\$$~~ (iii) toute famille d'éléments de T est un élément de T. (2)

De (i), (ii) et (iii), on conclut que T est une topologie sur X.

2) a) Déterminons les suites d'éléments de X qui convergent vers 0.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers 0.

Le seul voisinage ouvert de 0 est $\{0, 1\}$.

Et comme (U_n) converge vers 0, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $U_n \in \{0, 1\}$. Alors on a :

- ou bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 0$
- ou bien $\forall n < n_0$, $U_n = 1$ et $\forall n \geq n_0$, $U_n = 0$
- ou bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1$. Car tout ouvert de X contenant 0 contient aussi 1.

Par conséquent, les suites d'éléments de X qui convergent vers 0 sont les suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1$; $\begin{cases} V_n = 1 \text{ si } n < n_0 \\ V_n = 0 \text{ si } n \geq n_0 \end{cases}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. et

~~$W_n = 1$,~~ $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = 1$.

2 b.) Déterminons les suites d'éléments de X qui convergent vers 1. ③

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers 1.
Alors ~~tout~~ pour tout ouvert O_1 de X contenant 1, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq n_0$, $U_n \in O_1$. Alors :

- ou bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1$.
- ou bien $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n < n_0$, $U_n = 0$ et $\forall n \geq n_0$, $U_n = 1$.

Donc les suites d'éléments de X qui convergent vers 1 sont les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1$ et $\begin{cases} V_n = 0 \text{ si } n < n_0 \\ V_n = 1 \text{ si } n \geq n_0 \end{cases}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

(c) Oui, on peut avoir des suites d'éléments de X qui convergent vers deux points distincts. En effet, pour tous voisinages ouverts O_0 et O_1 de X contenants respectivements 0 et 1, on a:

$O_0 \cap O_1 \neq \emptyset$.

En fait $O_0 = \{0,1\}$ et $O_1 \in \{\{1\}, \{0,1\}\}$.

Donc T n'est pas séparé. D'où le résultat.

3.) Montrons que f est continue si et seulement si A est ouvert dans E.

On a: $f^{-1}(\{1\}) = A$; $f^{-1}(\{0,1\}) = E$; $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Alors si f est continue, comme $\{1\}$ est ouvert dans X, A est ouvert dans E.

Réciproquement, si A est ouvert dans E, l'image réciproque par f de tout ouvert de X est un ouvert de E, d'où f est continue.

4.) On munit X de la topologie discrète, alors chaque singleton de X est à la fois ouvert et fermé dans X.

$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$. Alors $f^{-1}(\{1\}) = A$ et $f^{-1}(\{0\}) = A^C$.

Supposons f continue. Alors $f^{-1}(\{1\})$ est ouvert dans E, d'où A est ouvert dans E. De même $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert dans E, donc A^C est ouvert dans E. Par conséquent A est fermé dans E.

Réciproquement, supposons A à la fois ouvert et fermé dans E.

A étant ouvert, alors $f^{-1}(\{1\})$ est ouvert dans E.

A^C étant ouvert, $f^{-1}(\{0\})$ est ouvert dans E. Donc l'image réciproque par f de tout ouvert de X est un ouvert de E, i.e f est continue.

Exercice 2:

1.) Démontrons que si X est séparé alors les singletons $\{x\}$, $x \in X$ sont tous des fermés de X.

Supposons X séparé, et soit $x \in X$. Montrons que $X-\{x\}$ est ouvert dans X.

$\forall y \in X-\{x\}$, alors $x \neq y$. Et comme X est séparé, il existe des ouverts U_x et U_y contenant respectivement x et y et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Alors $X-\{x\} = \bigcup_{y \neq x} U_y$ où U_y est l'ouvert correspondant à U_x tel que $U_x \cap U_y = \emptyset$. Toute réunion d'ouvert étant ouverte alors $X-\{x\}$ est un ouvert. D'où $\{x\}$ est fermé.

2.) Démontrons que dans un espace séparé, toute suite convergente admet une unique limite.

Soit X un espace topologique séparé et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers deux éléments l et l' distincts de X.

Il existe deux ouverts V_1 et U_2 contenant respectivement l et l' tels que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

$U_n \to l$, alors $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $U_n \in U_1$.

$U_n \to l'$, alors $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_1$, $U_n \in U_2$.

En posant $N = \max(n_0, n_1)$, on a : $\forall n \geq N$, $U_n \in U_1 \cap U_2$, ce qui est absurde car $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

3) Soient X et Y des espaces topologiques.

a.) Démontrons que Y est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta = \{(y,y), y \in Y\}$ est fermé dans $Y \times Y$.

Supposons Y séparé et montrons que Δ^c est ouvert dans $Y\times Y$.
Soit $(x,y) \in \Delta^c$, alors $x \neq y$. Il existe deux ouverts U_x et U_y contenant respectivement x et y et $U_x \cap U_y = \emptyset$. Alors $U_x \times U_y$ est un ouvert dans $Y\times Y$. Montrons que $U_x \times U_y \subset \Delta^c$.
$\forall (z_1, z_2) \in U_x \times U_y$, alors $z_1 \neq z_2$ donc $(z_1, z_2) \in \Delta^c$, par suite $U_x \times U_y \subset \Delta^c$, d'où Δ^c est ouvert comme étant voisinage chacun de ses points. Par conséquent Δ est fermé dans $Y \times Y$.

Réciproquement, supposons Δ fermé et montrons que Y est séparé.
Soit $x, y \in Y$ avec $x \neq y$. Alors $(x,y) \in \Delta^c$ or Δ^c est ouvert.
Ainsi, il existe des ouverts U et V contenant respectivement x et y tels que $U \times V \subset \Delta^c$.
Soit $z \in U \cap V$, alors $(z,z) \in \Delta$, donc $U \times V \cap \Delta \neq \emptyset$, ce qui est absurde, donc $V \times V \subset \Delta^c$.
Δ^c étant voisinage de chacun de ses points, alors Δ est fermé dans $Y \times Y$.

Exercice 2 (suite).

3.b.) Supposons que Y est séparé. Démontrons que si l'application $f: X \to Y$ est continue, alors son graphe est fermé dans $X \times Y$.

On suppose f continue.

Soit $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.

~~La fonction~~ $\cancel{g : X\times Y \to Y,\ (x,y) \mapsto y - f(x)}$ ~~est continue sur~~ $\cancel{X \times Y}$.

~~Soit (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers x.~~
~~f étant continue, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.~~
~~Donc $((x_n, f(x_n)))$ est une suite de G qui converge vers~~
~~$(x, f(x)) \in G$, donc G est fermé.~~

Soit $((x_n, f(x_n)))$ une suite d'élément de G telle que (x_n) converge vers x et $f(x_n)$ converge vers $l \in Y$.
f étant continue, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x) \in Y$.
Et comme Y est séparé, l'unicité de la limite impose $f(x) = l$, donc $(x, f(x)) \in G$ et $((x_n, f(x_n)))$ converge vers $(x, f(x))$, alors G est fermé.

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En prenant $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}_+$, on a Y est séparé.
$G = \{(x, f(x)), x \in X\} = \{(x, \frac{1}{x}), x \in \mathbb{R}_+\}$ est fermé comme étant la réunion de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $\{(0,0)\}$. Et pourtant f n'est pas continue.

3-c) On suppose Y non séparé.

Soit $(x_n, f(x_n))$ une suite d'éléments du graphe de f telle que (x_n) converge vers x et $(f(x_n))$ converge vers $l \in Y$ avec $f(x) \neq l$.

~~f étant continue~~

f étant continue alors $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.

Alors la suite $((x_n, f(x_n)))$ converge vers (x, l) et (x, l) n'appartient pas au graphe de f, d'où G n'est pas fermé.

4.) Soit $f, g : (X, d) \to (Y, \delta)$ des applications continues.

a.) Démontrons que $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X.

Soit (x_n) une suite d'élément de $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$ qui converge vers $x \in X$. Les fonctions f et g étant continues alors les suites $(f(x_n))$ et $(g(x_n))$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$.

Comme $f(x_n) = g(x_n)$ alors les suites $(f(x_n))$ et $(g(x_n))$ sont les mêmes. L'espace métrique Y est séparé, donc la limite de la suite $(f(x_n))$ est unique, d'où $f(x) = g(x)$. Par conséquent x appartient à $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$. Par conséquent $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$ est fermé.

b.) Soit A une partie dense dans X. Supposons que f et g coïncident sur A et montrons que $f = g$.

A étant dense dans X, $\forall a \in A$, il existe une suite (a_n) d'éléments de X qui converge vers a. f et g étant continues alors $(f(a_n)) \to f(a)$ et $(g(a_n)) \to g(a)$, comme f et g coïncident sur A alors $f(a) = g(a)$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (g(a_n) - f(a_n)) = 0$ d'où $g(a_n) = f(a_n)$.

Exercice 3 :

1) $f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln(x)) & \text{si } x > 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

a) Démontrons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et $]0;+\infty[$, donc $x \mapsto \sin(\ln(x))$ est continue sur $]0;+\infty[$ comme composée de fonctions continues. La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$, donc $x \mapsto x\sin(\ln(x))$ est continue sur $]0;+\infty[$.

$\forall x > 0, \quad -x \leq x\sin(\ln(x)) \leq x$.

$\lim\limits_{x \to 0}(-x) = \lim\limits_{x \to 0}(x) = 0$. D'après le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b)

Exercice 2

2°) Démontrons que dans un espace topologique séparé, toute suite convergente admet une unique limite.

Soit (E, T) un espace topologique séparé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.

Supposons que la suite $(x_n)_n$ ait deux limites l_1 et l_2. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$\exists n_1 \in J \mid d(x_n, l_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1$. De même,

$\exists n_2 \in J \mid d(x_n, l_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2$. Il en résulte que, pour tout $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$d(l_1, l_2) \leq d(l_1, x_n) + d(x_n, l_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

On a alors : $d(l_1, l_2) \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Par conséquent $d(l_1, l_2) = 0$, soit $l_1 = l_2$.

3°) Soient X et Y des espaces topologiques

a) Démontrons que Y est séparé si et seulement si sa diagonale $\Delta = \{(y, y), y \in Y\}$ est fermée dans $Y \times Y$.

$\Rightarrow$) On va montrer que si Y est séparé, alors le complémentaire de la diagonale est ouvert.

Soit $(x, y) \notin \Delta$. Alors $x \neq y$ et lorsque Y est séparé il y a deux ouverts disjoints U et V qui contiennent respectivement x et y.

Alors $U \times V$ est ouvert dans $Y \times Y$, il contient (x,y) et il n'intersecte pas la diagonale.

$\Leftarrow$) Soit $x \neq y$ dans Y. Ça veut dire que $(x,y) \notin \Delta$. Alors il y a ~~deux~~ un ouverts de base de $Y \times Y$ qui contient (x,y) et qui n'intersecte pas la diagonale. Cela signifie que $(x,y) \in U \times V \subseteq Y \times Y \setminus \Delta$, pour quelques ouverts U et V dans X.
En particulier, on déduit que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

b) Y est séparé. Démontrons que si une application $f : X \to Y$ est continue sur X alors son graphe est fermé dans $X \times Y$