Travaux Dirigés NÂ°2 d'Algèbre Commutative

Exercice 1

1. Démontrer que tout groupe abélien a une structure de $\mathbb{Z}-$module.
2. On désigne par $\mathcal{A}^S$ l'ensemble des applications d'un ensemble non vide S dans un anneau commutatif $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{A}^{(S)}$ l'ensemble des $u \in \mathcal{A}^S$ telles que les $x \in S$ vérifiant $u(x) \neq 0$ soient en nombre fini.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}^S$ est un $\mathcal{A}-$module et que $\mathcal{A}^{(S)}$ en est un sous-module.
   (b) Préciser $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.
3. Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif et soit M un $\mathcal{A}-$module. On appelle annulateur de M et on note $Ann(M)$, l'ensemble défini par

$$Ann(M) = \{a \in \mathcal{A} / \forall x \in M, \quad ax = 0_M\}.$$

   On dit qu'un module sur $\mathcal{A}$ est fidèle si son annulateur est réduit au singleton $\{0_{\mathcal{A}}\}$.
   (a) Le $\mathbb{Z}-$module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est-il fidèle ? de torsion ? sans torsion ?
   (b) Montrer que l'annulateur $Ann(M)$ est un idéal de $\mathcal{A}$.
   (c) Montrer que pour toute famille finie $(N_i)_{1\leq i\leq n}$ de sous-modules de M, l'on a :

$$Ann\left(\sum_{i=1}^{n} N_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} Ann(N_i).$$

   (d) Montrer que si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ contenu dans $Ann(M)$, alors M a une structure de $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$module.

Exercice 2

Soit $M = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x + y \equiv 0 \pmod 2, x - y \equiv 0 \pmod 4\}$.

1. Prouver que M est un $\mathbb{Z}-$ module libre de rang 2 dont on donnera une base.

2.(a) Expliciter le module quotient $\mathbb{Z}^2/M$.

(b) Ce module est-il fidèle ? de torsion ? sans torsion ?

Exercice 3

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. Un $\mathcal{A}-$module $\mathcal{M}$ de $\mathcal{A}$ est dit simple lorqu'il n'admet pas de sous-module propre non trivial (c'est-à-dire les seuls sous-modules de $\mathcal{M}$ sont $\{0_M\}$ et M lui-même.)

1. Montrer que tout $\mathcal{A}-$module simple est monogène. En déduire que si E un $K-$ espace vectoriel et que $\mathcal{A} = End(E)$, alors E est un $\mathcal{A}-$module simple.
2. Soient $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}-$module et $\mathcal{N}$ un sous-module de M.

   Prouver que le module quotient $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ est simple si et seulement si $\mathcal{N}$ est un sous-module maximal dans l'ensemble des sous-modules de $\mathcal{M}$ distincts de $\mathcal{M}$.

   Examiner le cas particulier où $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{A}$.
3. Prouve que tout $\mathcal{A}-$module simple est isomorphe àÂ $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, pour un certain idéal maximal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$.
4. Montrer que tout $\mathcal{A}-$morphisme $f : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$ entre deux $\mathcal{A}-$modules simples $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ est soit nul, soit un isomorphisme.
5. Montrer que l'anneau des endomorphismes d'un module simple est un corps.

Exercice 4

1. Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif.

   Montrer qu'un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ est un sous-module libre de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{I}$ est principal engendré par un élément non diviseur de zéro de $\mathcal{A}$.
2. On suppose que $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, $\mathcal{K}$ son corps des fractions et que $\mathcal{K} \neq \mathcal{A}$. Montrer que $\mathcal{K}$ n'est pas libre comme $\mathcal{A}-$module.

Exercice 5

$\mathcal{A}$ un anneau intègre.

1. Montrer que l'ensemble $T(M)$ des torsion d'un $\mathcal{A}-$module M est un sous-module de M.

2. Démontrer que si

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M"$$

est une suite exacte de $\mathcal{A}-$morphismes, alors

$$0 \longrightarrow T(M') \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M")$$

est aussi une suite exacte.

3. Soit

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M"$$

une suite exacte de $\mathcal{A}-$morphismes de modules. Comparer $Ann(M)$, $Ann(M')$ et $Ann(M")$.

Exercice 6

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. On considère le diagramme commutatif suivant de $\mathcal{A}-$morphismes, où les deux lignes sont des suites exactes courtes.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{s} & N & \xrightarrow{t} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow \omega & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{s'} & N' & \xrightarrow{t'} & P' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1. Montrer que si u et ω sont injectifs, alors v l'est aussi.
2. Montrer que si u et ω sont surjectifs, alors v l'est aussi.

Exercice 7(Lemme de la puissance domptée)

On dit qu'un module sur un anneau est fidèle lorsque son annulateur est réduit ùÂ $\{0\}$. Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif et soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}-$ module. Pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, on définit l'ensemble $\mathcal{IM}$ par :

$$\mathcal{IM} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i / n \in \mathbb{N}, (a_i, x_i) \in \mathcal{A} \times \mathcal{M}, \forall i \in \{0,1,...,n\} \Big\}.$$

1. Démontrer que pour tout idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, $\mathcal{IM}$ est un sous-module de $\mathcal{M}$ et que le module quotient $\mathcal{M}/\mathcal{IM}$ est $\mathcal{A}/\mathcal{I}-$module.

2. On suppose que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}-$ module de type fini engendré par n éléments, $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ deux idéaux de A.
   (i) Démontrer le lemme de la puissance domptée : Si $\mathcal{I}\mathcal{M} \subset \mathcal{J}\mathcal{M}$, alors $\mathcal{I}^n \subset \mathcal{J} + \ Ann(\mathcal{M})$.
   (ii) Examiner le cas particulier lorsque $\mathcal{M}$ est $\mathcal{A}-$ module monogène et fidèle.

Exercice 8

Soit A un anneau commutatif. Un module sur A est dit noethérien si toute suite ascendante de ses sous-modules est stationnaire.

Soient M et N deux A-modules.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
   (i) M est noethérien.
   (ii) Tout sous-module de M est de type fini.
   (iii) Tout ensemble non vide sous-modules de M admet un élément maximal (pour l'inclusion).
2. On note $Hom_A(M,N)$ l'ensemble des morphismes de M dans N.
   Justifier que $Hom_A(M,N)$ a une structure de A-module.
3. (a) Soit $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$ une suite exacte de morphismes de A-modules.
   Prouver que si M_1 et M_3 sont noethériens, alors M_2 l'est.
   (b) En déduire que si M est noethérien, alors pour tout entier naturel non nul n, M^n est un $A-$module noethérien.

Exercice 9

Soit A un anneau commutatif, M un A-module, I, J des idéaux de A, K,N des sous-modules de M. On appelle résiduel de I par J ou le transporteur de J dans I noté $I : J$ et défini par $I : J = \{a \in A/aJ \subset I\}$. On définit de même le transporteur de N dans K par $K : N = \{a \in A/aN \subset K\}$ et $K : I = \{x \in M/Ix \subset K\}$. Le sous-module N est dit primaire si :

$N \neq M$ et $\forall a \in A, \forall x \in M, (ax \in N$ et $x \notin N) \Longrightarrow \exists r \in \mathbb{N}^\star : a^rM \subseteq N$. $a^rM \subset N \Longleftrightarrow a^r \in N : M$. En posant $M = A$ et $N = I$, idéal de A, on retrouve la définition d'idéal primaire.

1. Démontrer que $K : N$ est un idéal de A, $I : J$ un idéal de A contenant I et que $K : I$ est un sous-module de M contenant K.
2. Démontrer que la division résiduelle est croissante à gauche et décroissante àÂ droite.
3. Démontrer que :
   (a) $(I : J)J \subset I$,
   (b) $(N : I) : J = N : IJ$,
   (c) si I et J sont de type fini, alors pour toute partie multiplicative S de A, on a : $S^{-1}(I : J) = S^{-1}I : S^{-1}J$.
4. Déterminer le transporteur de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$ et celui de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{Z}-$ modules.
5. Démontrer que si N est un sous-module primaire de M, alors $N : M$ est un idéal primaire et en déduire que $\sqrt{N : M}$ est un idéal premier P de A. On dit alors que N est $P-$ primaire.
6. Soit P un idéal premier de A, N un sous-module $P-$ primaire de M, I un idéal de A, K un sous-module quelconque de M.
   (a) Démontrer que : $\forall a \in A, \forall x \in M, ax \in N \Longrightarrow a \in P$ ou $x \in N$.
   (b) En déduire que si $IK \subset N$, alors $I \subset P$ ou $K \subset N$.
   (c) Justifier que si I n'est pas contenu dans P, alors $N : I = N$.
7. Soit N un sous-module propre de M et soit P un idéal de A. On suppose vérifiées les conditions suivantes :
   (i) $\forall a \in A, \forall x \in M, ax \in N \Longrightarrow a \in P$ ou $x \in N$.
   (ii) $\forall a \in P, \exists r \in \mathbb{N}^\star / a^r M \subset N$.

   Démontrer que P est un idéal premier de A et N un sous-module $P-$ primaire de M.
8. Soit P un idéal premier de A, N un sous-module $P-$ primaire de M.

   Démontrer que pour tout sous-module K de M non contenu dans N et pour tout idéal I de A non contenu dans $M : N$, $N : K$ est un idéal $P-$ primaire de A et $N : I$ un sous-module $P-$ primaire de M.

9. Soient $\varphi : M \longrightarrow M'$ un épimorphisme de $A-$ modules, N' un sous-module de M', P un idéal premier de A et $N = \varphi^{(-1)}(N')$.

   Prouver que N' est $P-$ primaire si et seulement si N est $P-$ primaire.

10. Démontrer qu'une intersection finie de sous-modules $P-$ primaires de M est un sous-module $P-$ primaire de M.

11. Une décomposition primaire de N est une écriture de N sous la forme $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$, où $\forall i \in \{1,2,...,n\}$, N_i est un sous-module primaire de M. Une telle décomposition, où $\forall i \in \{1,2,...,n\}$, N_i est P_i primaire est dite réduite si aucun des N_i n'est superflu dans l'intersection et pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$, avec $i \neq j$, on a $P_i \neq P_j$.

    (a) Dans l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, l'idéal $n\mathbb{Z}$ admet une décomposition primaire dont on précisera.

    (b) Prouver que si N admet une décomposition primaire, alors N admet une décomposition primaire réduite.

    (c) On suppose que M est un $A-$ module noethérien et N un sous-module propre de M et non primaire.

    Démontrer qu'il existe deux sous-modules propres N' et N'' de M contenant strictement N tels que $N = N' \cap N''$.

    (d) Prouver que si M est un $A-$ module noethérien, alors tout sous-module propre de M admet une décomposition primaire.

    En déduire que si A est un anneau noethérien, alors tout idéal propre de A admet une décomposition primaire.

Exercice 10

1. Soit M un groupe abélien et $EndM$, l'anneau des endomorphismes de M.

   (a) Montrer que M est un $EndM$-module.

   (b) Soit A un anneau. Montrer que M est un A-module si et seulement s'il existe un morphisme d'anneaux de A vers $EndM$.

   (c) Montrer que $End\mathbb{Q}$ est isomorphe au corps $\mathbb{Q}$.

2. Soit $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des A-morphismes et R et S des A sous modules de M et N respectivement. Etablir :

(a) ${}^{-1}f(f(R)) = R + kerf$

(b) $f({}^{-1}f(S)) = S \cap Imf$

(c) $f(R \cap^{-1} f(S)) = f(R) \cap S$

(d) $Imf \cap Kerg = f(Ker(g \circ f))$

(e) $Imf + Kerg =^{-1} g(Im(g \circ f))$

3. Un A-morphisme $f : M \to N$ est dit *essentiel* lorsque pour tout sous module non nul S de N, ${}^{-1}f(S)$ est un sous module non nul de M et un A-module L est une *extension essentielle* de M lorsque M est un sous module de L et l'injection canonique est essentielle. Montrer que :

   (a) $\mathbb{Q}$ est une extension essentielle de $\mathbb{Z}$.

   (b) $\mathbb{R}$ n'est pas une extension essentielle de $\mathbb{Q}$.

4. Soit M un A module. Pour tout A-morphisme $f : A \to M$, on définit $\lambda f : A \to M \quad / \quad a \mapsto f(\lambda a), \quad \forall \lambda \in A$

   (a) Montrer que $\lambda f \in Mor_A(A, M)$ et montrer que $Mor_A(A, M)$ est un A-module.

   (b) Montrer que $\varphi : Mor_A(A, M) \to M \quad / \quad f \mapsto \varphi(f) = f(1_A)$ est un $A-$isomorphe.

5. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}\backslash\{0, 1\})^2$ et $\Phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \quad / \quad x + m\mathbb{Z} \mapsto nx + nm\mathbb{Z}$

   (a) Montrer que Φ est un $\mathbb{Z}-$ morphisme.

   (b) Montrer que le $\mathbb{Z}$ module $Mor_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})$ est monogène et engendré par $\{\Phi\}$

   (c) En déduire que $Mor_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

Exercice 11(Lemme du serpent)

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif. On rappelle que pour tout $\mathcal{A}-$morphisme $f : M \longrightarrow N$, le conoyau de f est défini par $Cokerf = N/Imf$.

1. Montrer que pour tout carré de commutatif de $\mathcal{A}-$ module,

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ N' & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

on a des applications induites naturelles $Kerv \longrightarrow Keru$ et $Cokerv \longrightarrow Cokeru$.

2. Soit un diagramme commutatif avec des suites exactes :

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & M" \arrow[r] \arrow[d, "\omega"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "h"] & N \arrow[r, "k"] & N" & \end{tikzcd}$$

Démontrer qu'avec les applications définies à la question précédente, il existe un $\mathcal{A}-$morphisme $\varphi : Ker\omega \longrightarrow Cokerv$ telle que la suite

$$Kerv \longrightarrow Keru \longrightarrow Ker\omega \longrightarrow Cokerv \longrightarrow Cokeru \longrightarrow Coker\omega$$

est exacte.

Fais un dessin du diagramme commutatif complet.

Exercice 12

1. $M' \xrightarrow{\tau} M \xrightarrow{\pi} M''$ est une suite exacte telle que ${}^{-1}\tau(N) = {}^{-1}\tau(P)$ et $\pi(N) = \pi(P)$
   (a) Donner un exemple où $N \neq P$
   (b) Montrer que si $N \subset P$ alors $N = P$
2. Etablir que la suite ci-après est exacte :
   $0 \longrightarrow N{\cap}P \xrightarrow{f} N{\oplus}P \xrightarrow{g} N{+}P \longrightarrow 0$ où $f : x \mapsto (x,x)$ et $g : (y,z) \mapsto y{-}z$
3. Etablir l'existence d'une suite exacte :
   $0 \longrightarrow M/N \cap P \longrightarrow M/N \oplus M/P \longrightarrow M/(N + P) \longrightarrow 0$

Exercice 13

Soit A un anneau commutatif. Pour tout $A-$ module M, on désignera par $Tor(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M et par $End_A(M)$ l'ensemble des endomorphismes de M. Soient M et N deux $A-$ modules.

1. Montrer $Tor(M)$ est le plus petit sous-module de M tel que le $A-$ module quotient $M/Tor(M)$ est sans torsion.

2. Démontrer que si $\varphi : M \longrightarrow N$ est un $A-$ morphisme, alors $\varphi(Tor(M)) \subset Tor(N)$.

3. Soit $(u,\omega) \in (End_A(M))^2, v \in End_A(N)$.

   (a) Démontrer qu'il existe une unique structure de $A[X]-$ module sur M telle que $X.m = u(m)$ et $1_{A[X]}.m = m$ pour tout $m \in M$. On note M_u le $A[X]-$ module muni de cette structure.

   (b) Montrer que l'application $u \longmapsto M_u$ induit une bijection entre l'ensemble des $A[X]-$ modules sur M et l'ensemble $End_A(M)$ des endomorphismes de M.

   (c) Déterminer tous les $A[X]-$ morphismes de M_u dans N_v puis préciser à quelle condition $M_u \cong M_\omega$.

   (d) Examiner la condition précédente dans le cas particulier où $A = \mathbb{K}$ est un corps et $M = \mathbb{K}^n$ est l'espace vectoriel standard de dimension n sur $\mathbb{K}(n \in \mathbb{N}^\star)$.

   Prouver que le $A[X]-$ module M_u est de torsion dans ce cas.