Sujet 11

ASS Z ...

REPUPLIQUE DU BENIN

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN

Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

23 juin 2018

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2018

BAC : D **Durée : 4 heures**

Contexte : Les journées culturelles au collège privé DOGAN

Comme il est de coutume dans nos établissements d'enseignement secondaire, il est organisé au collège privé DOGAN des journées culturelles pour le compte de l'année scolaire qui s'achève. L'innovation apportée cette année est l'organisation d'une course de demi-fond ouverte à tous les élèves et de deux jeux dénommés respectivement jeu spécial et jeu populaire. Le jeu spécial est destiné aux élèves des classes terminales scientifiques tandis que le jeu populaire est ouvert à tous les élèves du collège.

Pour le jeu populaire, étalé sur quatre phases, chaque joueur dispose d'un unique essai par phase et tout échec à une phase fait arrêter systématiquement le jeu et fait déclarer le joueur perdant. Tout joueur pourra réussir les phases respectives avec les probabilités suivantes : $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}$ et $\frac{1}{5}$. Après une mise de 100 FCFA, chaque joueur reçoit une somme de 150 FCFA pour chaque phase gagnée.

Le vainqueur de la course gagne en dizaine de milliers de francs CFA une somme égale à la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = nI_n$, avec $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{t+1}dt$.

Tagnon, élève en classe de terminale D au collège privé DOGAN, est intéressé aussi bien par les deux jeux que par la course. Le montant à gagner par le vainqueur de la course, ainsi que l'optimisation de ses chances à gagner les jeux constituent des préoccupations de Tagnon.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Tagnon en résolvant les problèmes suivants.

Problème 1

1)
 a) Calcule I_0 et I_1.
 b) Démontre que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.
 c) Déduis-en, en dizaine de milliers de francs CFA, la valeur minimale et la valeur maximale du gain du vainqueur de la course.

2) Calcule la probabilité que, pour un joueur donné, le jeu populaire s'arrête :
 a) à la première phase.
 b) à la deuxième phase.
 c) à la troisième phase.

Scanné avec CamScanner

3) Dans le cas où un joueur du jeu populaire se retrouve à la dernière phase, détermine la probabilité de gagner le jeu et celle d'échouer.

4) Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur du jeu populaire.

a) Détermine la loi de probabilité de X.

b) Calcule l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

Problème 2

Après avoir réussi brillamment le jeu populaire, Tagnon devrait donner, dans le jeu spécial, à deux reprises et chaque fois après un temps de réflexion, le rapport de l'aire d'un triangle fixe ABC à l'aire de son image par une transformation plane. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$, les affixes des points A, B et C sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) ci-après :

$$z^3 - 3z^2 + z^2\bar{z} - 3z\bar{z} - (2+4i)z + 6 + 12i = 0.$$

5)

a) Démontre que (E) admet une solution réelle unique z_0 que tu préciseras.

b) Vérifie que :

$z^3 + z^2\bar{z} - 3z^2 - 3z\bar{z} - (2+4i)z + 6 + 12i = (z-3)(z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i)$.

c) Démontre que si un nombre complexe ω_0 est solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$, alors son opposé $-\omega_0$ en est aussi une solution.

d) Vérifie que $1 + 2i$ est solution de l'équation $z^2 + z\bar{z} - 2 - 4i = 0$ puis résous l'équation (E).

6) La transformation plane g proposée à Tagnon au cours de la première partie du jeu associe à tout point $M(x ; y)$ le point $M'(x' ; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

a) Prouve que l'écriture complexe de g est : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 1 - i\sqrt{3}$.

b) Démontre que g est une rotation dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

c) Déduis-en la valeur qu'aurait donnée Tagnon pour gagner la première partie du jeu.

7) La transformation h proposée à Tagnon, dans la deuxième partie du jeu, a pour écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$), laisse A invariant et transforme B en C.

a) Précise l'écriture complexe de h.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de h.

c) Quelle est la valeur qu'aurait donnée Tagnon pour gagner la deuxième partie du jeu ?

TESTAMB 2018

Scanné avec CamScanner

Problème 3

L'itinéraire de la course de demi-fond tel qu'il est indiqué par les organisateurs à Tagnon peut être modélisé par l'une des courbes $(\mathcal{C})$ de la famille $(\mathcal{C}_k)$ des courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, des fonctions (f_k) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_k(x) = \ln(1 + kxe^x),$$

où k est un nombre réel strictement positif appartenant à $]0; e[$.

La courbe $(\mathcal{C})$ est précisément celle qui passe par le point $H\left(-1;\ \ln\left(\frac{e-2}{e}\right)\right)$ et on note f la fonction dont $(\mathcal{C})$ est la représentation graphique.

8)

a) Étudie le sens de variation de la fonction u_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u_k(x) = 1 + kxe^x.$$

b) Déduis-en que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $u_k(x) > 0$.

c) Justifie que l'ensemble de définition de f_k est $\mathbb{R}$.

d) Détermine le nombre réel k pour que la courbe $(\mathcal{C}_k)$ passe par le point H.

9) Pour la suite, on pose $f(x) = \ln(1 + 2xe^x)$.

a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Justifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calcule $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

c) Étudie le sens de variation de f puis dresse son tableau des variations.

10)

a) Étudie les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Construis la courbe $(\mathcal{C})$.

-FIN-

TEST AMB 2018

Scanné avec CamScanner