

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej  
Informatyka, rok II  
Zespół numer 3  
Piotr Kucharski  
Dominik Zabłotny

### **Sprawozdanie z ćwiczenia nr 29**

Fale podłużne w ciałach stałych.

18 października 2017r

# 1 Wstęp

## 1.1 Cele ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu Younga dla prętów różnych materiałów na podstawie pomiarów ich częstotliwości harmoniczných.

## 1.2 Wprowadzenie teoretyczne

### 1.2.1 Fala podłużna

Fala podłużna jest to fala powstająca przez gwałtowne wychylenie ciała z położenia równowagi oraz dalszemu jego drganiu aż do momentu odzyskania równowagi. Szybkość rozchodzenia się tej fali zależy od bezwładności i sprężystości ciała.

### 1.3 Fala stojąca

Fala, której grzbiety i doliny nie przemieszczają się. Powstaje na skutek interferencji dwóch takich samych fal podłużnych, w przypadku pręta przez odbicie fali o przeciwny koniec do uderzonego młotkiem. Falę stojącą określa się równaniem:

$$y = 2A \sin kx \quad (1)$$

#### 1.3.1 Moduł Younga

Wielkość charakteryzującą sprężystość materiału, będąca jego integralną częścią nazywamy modułem Younga oraz oznaczamy go jako  $E$ . Ogólny wzór na moduł Younga określa się jako stosunek naprężenia  $\sigma$  do względnego odkształcenia liniowego  $\varepsilon$  materiału:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2)$$

Po uwzględnieniu, że ćwiczenie przeprowadzane jest na prętach różnych materiałów, interferencji fali padającej i fali odbitej oraz prawa Hooke'a uzyskujemy wzór:

$$E = 4\rho l^2 f^2 \quad (3)$$

gdzie  $\rho$  to gęstość materiału,  $l$  - odległość między węzłami fali oraz  $f$  częstotliwość fali podłużnej. Tego wzoru będziemy używać do wykonania ćwiczenia.

#### 1.3.2 Analiza Fouriera

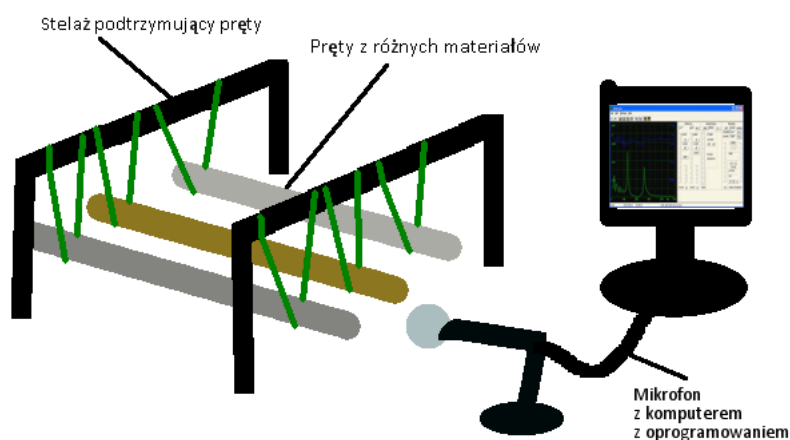
Jest to proces badania drgań harmoniczných, polega na przedstawieniu funkcji okresowej w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego (szeregu Fouriera). W naszym doświadczeniu wykorzystujemy program Zelscope, który realizuje algorytm FFT pozwalający na szybkie obliczenie transformaty Fouriera i przedstawia ją jako widmo fali na ekranie (analogicznie do oscyloskopu znanego z elektroniki). Będziemy odczytywać kolejne wartości drgań harmoniczných z ekranu.

### 1.3.3 Niepewności pomiarowe

Podczas naszego doświadczenia będziemy analizować wyniki z niepewnościami pomiarowymi typu A (związane z niedokładnością przyrządów pomiarowych, odczytywana ze specyfikacji produktu) oraz B (spowodowane wieloma pomiarami, które każde obarczone jest błędem). Są one spowodowane hałasem otoczenia podczas wykonywania pomiaru widma fali dźwiękowej, wielokrotnym pomiarem tej wielkości, złym refleksem osoby zamrażającej pomiar programu Zelscope oraz niedokładnością przyrządów pomiarowych takich jak suwmiara, miara zwijana czy też waga. Wiele nieudanych prób pozyskania widma fali harmonicznego została pominięta, ponieważ nie wnoszą one niczego do wyników doświadczenia. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na niedokładność wyników jest wykorzystanie ciał nie wykonanych całkowicie z danego materiału, lecz zawierających pewne czynniki zaburzające, np. naklejkę. Następną obliczaną niepewnością jest niepewność złożona z racji obliczania kolejnych wartości z wielkości, które już są obarczone pewnym błędem. Wszelkie wzory zostaną przedstawione w rozdziale 3.2

### 1.4 Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składa się z komputera z zainstalowanym oprogramowaniem Zelscope, mikrofonu podłączonego do komputera, długich prętów wykonanych z różnych materiałów zawieszonych na nitkach w dwóch miejscach. Do wprowadzenia ciał w drgania użyjemy młotka, do pomiaru długości prętów użyjemy miary milimetrowej zwijanej, do pomiaru masy prętów użyjemy wagi elektronicznej firmy RAWAG model WTB 200 oraz do zmierzenia grubości materiałów w celu wyznaczenia ich objętości użyjemy suwmiarki.



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego

## **2 Wykonanie ćwiczenia**

Wykonanie ćwiczenia dzieli się na dwa kroki stosowane dla każdego badanego pręta oraz jednej wspólnej analizy wyników.

### **2.1 Pomiary specyfikacji prętów**

- Pomiar długości pręta za pomocą miary zwijanej.
- Pomiar grubości pręta za pomocą suwmiarki (w przypadku otwartego walca mierzymy promień zewnętrzny i wewnętrzny).
- Zważenie pręta w najlepszy możliwy sposób za pomocą wagi elektronicznej.
- Zapisanie wyników o danym cieple do tabeli.

### **2.2 Pomiar częstotliwości harmonicznych**

- Osadzenie pręta w niciach zamontowanych do stelaża.
- Przybliżenie mikrofonu do badanego pręta.
- Uderzenie młotkiem w pręt aby wprowadzić go w drganie.
- Zamrożenie odczytu programu Zelscope w momencie najlepszej widoczności widma fal harmonicznym.
- Odczyt sześciu pierwszych harmonicznych (jeżeli taką ilość udało się zaobserwować).

W przypadku niejednoznacznego odczytu częstotliwości harmonicznych należy powtórzyć pomiar.

### 2.3 Obliczanie koniecznych wartości

Z zapisanych danych pomiarowych należy obliczyć gęstość ciała daną wzorem:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4)$$

gdzie  $m$  to zmierzona masa ciała oraz  $V$  to objętość ciała obliczona odpowiednio dla każdego pręta z odpowiednich wielkości. Pręty są różnymi figurami przestrzennymi, przez co wykorzystujemy odpowiedni wzór dla:

- walca o promieniu podstawy  $r$  oraz wysokości  $h$

$$V = \pi r^2 h \quad (5)$$

- prostopadłościanu prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy  $a$  oraz wysokości  $h$

$$V = a^2 h \quad (6)$$

- otwartego walca o promieniu zewnętrznym podstawy  $R$ , promieniu wewnętrznym podstawy  $r$  oraz wysokości  $h$

$$V = \pi(R^2 - r^2)h \quad (7)$$

Do obliczenia długości fali  $\lambda$  zastosujemy zależność stosunku długości pręta  $L$  do numeru harmonicznego fali  $n$ :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (8)$$

Odległość  $l$  między węzłami fali stojącej stanowi połowę jej długości:

$$l = \frac{1}{2}\lambda \quad (9)$$

Do obliczenia predkości rozchodzenia się fali zastosujemy wzór:

$$V = 2lf \quad (10)$$

### 3 Opracowanie danych pomiarowych

#### 3.1 Wyniki pomiarów

Zmierzone wielkości próbek zostały zapisane w tabeli 1, gdzie zapisano również wyniki wyliczonych wartości obliczonych za pomocą wzorów (3), (4), (5) i (6). W kolejnych tabelach przedstawione zostaną wyniki pomiarów zarejestrowanych częstotliwości dla kolejnych harmonicznych każdego materiału.

Materiał	Kształt	Masa [kg]	Długość [m]	Objętość [m <sup>3</sup> ]	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]
Aluminium	Walec	0.030	0.561	$1.102 \cdot 10^{-5}$	2720.326
Mosiądz	Walec	0.237	0.998	$2.821 \cdot 10^{-5}$	8401.275
Stal	Prostopadłościan	2.794	1.802	$3.710 \cdot 10^{-4}$	7529.529
Stal	Walec	1.138	1.800	$1.470 \cdot 10^{-4}$	7741.496
Żeliwo szare	Walec otwarty	0.760	1.800	$1.095 \cdot 10^{-4}$	6940.639

**Tablica 1:** Dane pomiarowe dla pięciu próbek

Analiza Aluminium $l = 0.561$ [m]			
Nr harmoniczej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	2411.76	1.122	2705.994
2	4941.18	0.561	2772.001
3	7382.35	0.374	2760.998
4	9823.53	0.281	2760.411

**Tablica 2:** Wyniki pomiarów i obliczeń dla aluminium (z 4 pomiarów)

Prędkość średnia fali dla aluminium:

$$v_{sr} = 2749.851 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla aluminium:

$$E = 20.570 \text{ [GPa]}$$

Analiza Mosiądzu $l = 0.998$ [m]			
Nr harmoniczej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	1776.47	1.996	3545.834
2	3458.82	0.998	3451.902
3	5152.94	0.665	3426.705
4	6835.29	0.499	3410.810
5	8653.53	0.399	3452.758
6	10294.12	0.333	3427.942

**Tablica 3:** Wyniki obliczeń dla mosiądzu

Prędkość średnia fali dla mosiądzu:

$$v_{sr} = 3452.659 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla mosiądzu:

$$E = 100.152 \text{ [GPa]}$$

Analiza Stali nr 1 $l = 1.802 \text{ [m]}$			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f \text{ [Hz]}$	Długość fali $\lambda \text{ [m]}$	Prędkość fali $v \text{ [m/s]}$
1	1400.00	3.604	5045.600
2	2905.88	1.802	5236.396
3	4305.88	1.201	5171.362
4	6670.59	0.901	6010.202
5	7905.88	0.721	5700.139
6	8623.53	0.601	5182.742

**Tablica 4:** Wyniki obliczeń dla stali w kształcie prostopadłościanu

Prędkość średnia fali dla stali nr 1:

$$v_{sr} = 5391.074 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla stali w kształcie prostopadłościanu:

$$E = 218.836 \text{ [GPa]}$$

Analiza Stali nr 2 $l = 1.800 \text{ [m]}$			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f \text{ [Hz]}$	Długość fali $\lambda \text{ [m]}$	Prędkość fali $v \text{ [m/s]}$
1	1400.00	3.600	5040.000
2	2905.88	1.800	5230.584
3	4305.88	1.200	5167.056
4	5811.76	0.900	5230.584
5	7211.78	0.720	5192.482
6	8623.53	0.600	5174.118

**Tablica 5:** Wyniki obliczeń dla stali w kształcie prostopadłościanu

Prędkość średnia fali dla stali nr 2:

$$v_{sr} = 5172.471 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla stali w kształcie walca:

$$E = 207.119 \text{ [GPa]}$$

Analiza Żeliwa Szarego $l = 1.800$ [m]			
Nr harmoniczej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	1023.53	3.600	3684.708
2	2058.82	1.800	3705.876
3	3082.35	1.200	3698.820
4	4117.65	0.900	3705.885
5	5152.94	0.720	3710.117
6	6176.47	0.600	3705.882

**Tablica 6:** Wyniki obliczeń dla żeliwa szarego

Prędkość średnia fali dla żeliwa szarego:

$$v_{sr} = 3701.881 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla żeliwa szarego w kształcie walca otwartego:

$$E = 95.114 \text{ [GPa]}$$

### 3.2 Analiza niepewności

Mamy do czynienia z niepewnością typu B, ponieważ pomiar był wykonywany tylko raz. Znana jest dokładność przyrządów mierniczych równa działką elementarnym, stąd wnioskujemy że dokładności pomiarów są równe ich wartości, dlatego:

#### 3.2.1 Niepewności pomiaru długości prętów (miarka w rolce)

$$u(l) = \text{działka elementarna} = 1 \text{ [mm]} \quad (11)$$

#### 3.2.2 Niepewności pomiaru promienia/szerokości prętów (suwmiarka)

$$u(r) = \text{działka elementarna} = 0.1 \text{ [mm]} \quad (12)$$

#### 3.2.3 Niepewności pomiaru masy prętów (waga RADWAG WTB 200)

$$u(m) = \text{działka elementarna} = 1 \text{ [g]} \quad (13)$$

#### 3.2.4 Niepewności pomiaru zarejestrowanej częstotliwości (komputer z podłączonym mikrofonem)

$$u(f) = 25 \text{ [Hz]} \quad (14)$$



Niepewność obliczeń wykonanych na podstawie pozyskanych danych możemy przedstawić za pomocą wzorów:

### 3.2.5 Niepewność gęstości

$$u(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} u(m)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} u(r)\right)^2}$$

Materiał	Aluminium	Mosiądz	Stal nr 1	Stal nr 2	Żeliwo szare
Niepewność gęstości $u(\rho)$ [kg/m <sup>3</sup> ]	236.206	773.854	105.059	303.677	562.319

Tablica 7: Wyniki obliczeń niepewności gęstości

### 3.2.6 Niepewność długości fali

$$u(\lambda) = \sqrt{\left(\frac{2}{n} u(l)\right)^2}$$

### 3.2.7 Niepewność prędkości fali

$$u(v) = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f} u(f)\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} u(\lambda)\right)^2} = \sqrt{\left(\lambda u(f)\right)^2 + \left(f u(\lambda)\right)^2}$$

Materiał	Aluminium	Mosiądz	Stal nr 1	Stal nr 2	Żeliwo szare
Niepewność prędkości fali $u(v)$ [m/s]	28.461	50.026	90.143	90.044	90.023

Tablica 8: Wyniki obliczeń niepewności prędkości fali

### 3.2.8 Niepewność modułu Young'a

$$u(E) = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial \rho} u(\rho)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v} u(v)\right)^2} = \sqrt{\left(v^2 u(\rho)\right)^2 + \left(2\rho v u(v)\right)^2}$$

Materiał	Aluminium	Mosiądz	Stal nr 1	Stal nr 2	Żeliwo szare
Niepewność modułu Young'a $u(E)$ [GPa]	1.836	9.6707	7.929	10.863	8.987

Tablica 9: Wyniki obliczeń niepewności modułu Young'a

## 4 Podsumowanie otrzymanych wyników końcowych

Materiał	Wartość tabelaryczna [GPa]	Wartość wyznaczona [GPa]
Aluminium	69	20.570
Mosiądz	100	100.152
Stal nr 1	205-210	218.836
Stal nr 2	205-210	207.119
Żeliwo szare	125	95.114

**Tablica 10:** Porównanie wartości tabelarycznych z otrzymanymi podczas wykonywania doświadczenia

W powyższej tabeli porównano wartości tabelaryczne z wartościami wyznaczonymi. Przy rozszerzonej niepewności pomiaru (dla  $k = 2$ ), wyniki mosiądzu oraz stali nr 1 i 2 zgadzają się z wartościami tabelarycznymi. Wartości otrzymane dla aluminium i żeliwa szarego znacznie odbiegają od wartości tabelarycznej. Spowodowane jest to wadliwymi próbkami pomiarowymi (widocznie zanieczyszczonymi oraz odgiętymi), niedokładnymi pomiarami. Wynik końcowy aluminium uznajemy ostatecznie za błąd gruby.

## 5 Wnioski

Przeprowadzone doświadczenie pozwoliło nam nabrać doświadczenia w pomiarach związanych z dźwiękiem, pomiarów wymiarów fizycznych ciał oraz finalnie zbadanie modułu Younga dla różnych materiałów. Z racji, że dwa z mierzonych ciał wykonane były z tego samego materiału (stal), lecz o różnym kształcie, dowiedliśmy się, że (w granicy dopuszczalnego błędu) kształt ciała nie ma wpływu na wartość modułu Younga. Niepewności pomiarowe wywodzą się z hałasu otoczenia w sali laboratoryjnej oraz zastosowania mikrofonu nie najwyższej jakości. Dodatkowo mogą one wynikać z problemów z zatrzymaniem odczytu programu Zelscope w momencie, w którym najlepiej widać w jakich częstotliwościach występują kolejne harmoniczne widma fali dźwiękowej, co prowadziło do wielokrotnego powtarzania pomiaru. Wszelkie niedoskonałości czy zabrudzenia materiałów również miały wpływ na wynik końcowy. Na szczególną uwagę zasługuje badane aluminium, którego wynik zdecydowanie odbiega od wartości tablicowych i uznajemy go za niewłaściwy. Sam pręt wyróżniał się wśród wszystkich mierzonych swoją krzywizną, miał naklejoną nalepkę na jednym z końców oraz jego przekrój nie tworzył idealnego koła. Aby osiągnąć najdokładniejszy wynik należy zadbać o jak najlepszą jakość badanych ciał.