

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej  
Informatyka, rok II  
Zespół numer 3  
Piotr Kucharski  
Dominik Zabłotny

**Sprawozdanie z ćwiczenia nr 32**  
Mostek Wheatstone'a

25 października 2017r

# 1 Wstęp

## 1.1 Cele ćwiczenia

Celem wykonywanego ćwiczenia jest praktyczne zastosowanie prawa Kirchhoffa oraz sprawdzenie zależności określających opór zastępczy dla połączeń szeregowych i równoległych.

## 1.2 Wprowadzenie teoretyczne

### 1.2.1 Pierwsze Prawo Kirchhoffa

*Twierdzenie o punkcie rozgałęzienia.* Algebraiczna suma natężeń prądów przepływających przez punkt rozgałęzienia (węzeł) jest równa zero:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1)$$

Twierdzenie o punkcie rozgałęzienia wynika z zasady zachowania ładunku.

### 1.2.2 Drugie Prawo Kirchhoffa

*Twierdzenie o obwodzie zamkniętym.* Algebraiczna suma sił elektromotorycznych i przyrostów napięć na dowolnym obwodzie zamkniętym jest równa zero (spadek napięcia jest przyrostem ujemnym napięcia):

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i + \sum_{i=1}^m I_i R_i = 0 \quad (2)$$

Twierdzenie o obwodzie zamkniętym wynika z zasady zachowania energii.

### 1.2.3 Opór elektryczny

Opór elektryczny  $R$  (*Rezystancja*) to wielkość charakteryzująca relacje między napięciem a natężeniem prądu elektrycznego w obwodach prądu stałego. Najczęściej mówi się, że opór elektryczny jest to zdolność materiału do przewodzenia prądu, który definiujemy wzorem:

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] \quad (3)$$

gdzie:

- $R$  – opór elektryczny [ $\Omega$ ]
- $U$  – napięcie prądu [V]
- $I$  – natężenie prądu [A]

#### 1.2.4 Opór właściwy

Opór właściwy  $\rho$  (Rezystowność) to wielkość charakteryzująca materiały pod względem przewodnictwa elektrycznego. Określana jako trudność na jaką jaką natrafiają przemieszczające się elektrony. Opór właściwy zależy od długości przewodu, jego przekroju poprzecznego oraz materiału z jakiego został wykonany. Rezystowność definiujemy wzorem:

$$\rho = \frac{R \cdot S}{l} [\Omega \cdot \text{m}] \quad (4)$$

gdzie:

- $\rho$  – opór właściwy [ $\Omega \cdot \text{m}$ ]
- $R$  – opór elektryczny [ $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$ ]
- $S$  – pole przekroju poprzecznego [ $\text{m}^2$ ]
- $l$  – długość elementu [ $\text{m}$ ]

#### 1.2.5 Wyprowadzenie wzorów na opory zastępcze

1. dla połączenia równoległego:

$$R_z = R_1 + R_2 \quad (5)$$

2. dla połączenia szeregowego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_z} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_z} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2} \\ \frac{R_1 \cdot R_2}{R_z} &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1} + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2} \cdot \frac{1}{R_z} \\ R_1 \cdot R_2 &= R_1 \cdot R_z + R_2 \cdot R_z \\ R_z &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (6)$$

#### 1.2.6 Zależność oporności elektrycznej metali od temperatury

Pomiędzy opornością elektryczną w metalach a temperaturą zachodzi relacja, którą tłumaczymy zmianą oporności metalu przy zmianie temperatury o 1 K. Zależność rezystancji od temperatury dla większości metali definiujemy wzorem:

$$R_T = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad (7)$$

gdzie:

- $R_T$  – opór elektryczny w temperaturze  $T$  [ $\Omega$ ]
- $R$  – opór elektryczny w temperaturze odniesienia  $T_0$  [ $\Omega$ ]
- $\alpha$  – temperaturowy współczynnik rezystancji [ $K^{-1}$ ]
- $\Delta T$  – zmiana temperatury [K]

### 1.2.7 Przewodność właściwa

Przewodność właściwa (*Konduktywność*) to wielkość charakteryzująca przewodnictwo elektryczne materiału. Konduktywność wiąże gęstość prądu elektrycznego w materiale z natężeniem pola elektrycznego powodującego przepływ tego prądu:

$$\sigma = \frac{l \cdot G}{S} \text{ [S/m]} \quad (8)$$

gdzie:

- $\sigma$  – przewodność właściwa
- $l$  – długość elementu [m]
- $G$  – przewodnictwo elektryczne [S]
- $S$  – pole przekroju poprzecznego [ $m^2$ ]

### 1.2.8 Natężenie prądu

Natężenie prądu to wielkość charakteryzująca przepływ prądu elektrycznego, definiowaną jako stosunek ładunku przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika do czasu w jakim płynął. Natężenie prądu definiujemy wzorem:

$$I = \frac{\delta q}{\delta t} \text{ [A]} \quad (9)$$

gdzie:

- $I$  – natężenie prądu [A]
- $\delta q$  – zmiana ładunku w czasie jego przepływu [C]
- $\delta t$  – czas przepływu ładunku [s]

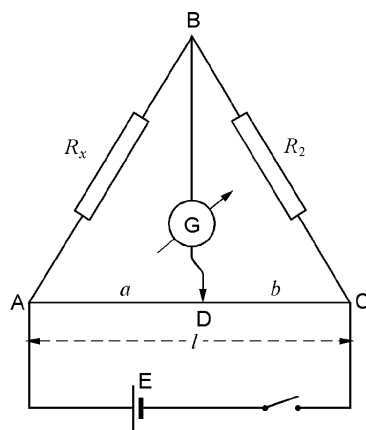
### 1.2.9 Niepewności pomiarów

W trakcie wykonywania ćwiczenia będziemy analizować wyniki z niepewnościami pomiarowymi typu A (związane z niedokładnością przyrządów pomiarowych, odczytywana ze specyfikacji produktu) oraz B (spowodowane wieloma pomiarami, które każde obarczone jest błędem). Niepewności wywołane są niedokładnym wyznaczaniem wartości przez opornicę dekadową, której różnice wartości oczekiwanej a wartości otrzymanej mogliśmy zbadać za pomocą multimetru. Kontakt ślizgowy na listwie z drutem oporowym utrudniała dokładny odczyt długości  $a$  oraz  $b$ .

## 2 Układ pomiarowy

Podczas wykonywania ćwiczenia korzystaliśmy z samodzielnie przygotowanego zestawu mostka Wheatstone'a. Schemat obwodu przedstawiony na rysunku 1. W skład obwodu wchodziły:

- listwa z drutem oporowym o długości  $l = 1$  [m], zaopatrzona w podziałkę milimetrową i kontakt ślizgowy, umożliwiający zmianę długości odcinków  $a$  i  $b$
- opornica dekadowa  $R_2$
- zestaw oporników wmontowanych w płytkę z pleksiglasu  $R_x$
- mikroamperomierz  $G$  jako wskaźnik zerowania mostka Wheatstone'a
- zasilacz stabilizowany  $E$  o właściwościach 3 [A]/30 [V]



**Rysunek 1:** Schemat elektryczny mostka

Źródło: Pracownia Fizyczna WFilS AGH - „Ćwiczenie nr 32: Mostek Wheatstone'a”

## 3 Wykonanie ćwiczenia

1. Połączenie układu elektrycznego według schematu
2. Wykonanie pomiarów wszystkich nieznanych oporników wmontowanych w płytkę z pleksiglasu oraz zapisanie wyników do tabeli
3. Wykonanie analogicznych pomiarów dla równoległego i szeregowego połączenia oporników oraz zapisanie wyników do tabeli

## 4 Opracowanie danych pomiarowych

Długość druta oporowego została zmierzona i wynosi 100 cm. Jest ona dana zmienną  $l$

$$l = 100 \text{ cm} \quad (10)$$

Rezystancja z danych podanych w tabelach zostaje obliczona za pomocą wzoru:

$$R_x = \frac{Ra}{l - a} \quad (11)$$

gdzie  $R$  to znana oporność,  $l$  to długość drutu oporowego i  $a$  to zmierzona odległość wysunięcia kontaktu ślizgowego. Krok zmiany znanej rezystancji został dostosowany do danego opornika aby zmiana wychylenia mikroamperomierza była zauważalna.

### 4.1 Pomiar dla opornika 1

W tabeli 1 zestawiono pomiary przeprowadzone dla opornika 1. Przyjęty został krok zmiany znanej rezystancji  $0.5 \Omega$ .

|   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Rezystancja opornika znanego $R [\Omega]$ | 12.5  | 13.0  | 13.5  | 14.0  | 14.5  | 12.0  | 11.5  | 11    | 10.5  | 10    |
| Długość $a [\text{mm}]$                   | 500   | 491   | 482   | 473   | 464   | 510   | 519   | 529   | 543   | 555   |
| Opór $R_1$ obliczona $[\Omega]$           | 12.50 | 12.54 | 12.56 | 12.57 | 12.55 | 12.49 | 12.41 | 12.35 | 12.48 | 12.47 |

Tablica 1: Wyniki pomiarów dla opornika nr 1

Aby uzyskać rezystancję opornika obliczamy średnią arytmetyczną z wyników z tabeli powyżej:

$$\overline{R_1} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{1i}}{10} \approx 12.49 \Omega \quad (12)$$

### 4.2 Pomiar dla opornika 2

W tabeli 2 zestawiono pomiary przeprowadzone dla opornika 2. Przyjęty został krok zmiany znanej rezystancji  $1 \Omega$  z wyjątkiem pierwszego pomiaru dla  $a = 500 \text{ mm}$  (celem uzyskania wyniku równego rezystancji znanej).

|   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Rezystancja opornika znanego $R [\Omega]$ | 35.8  | 36.0  | 37.0  | 38.0  | 39.0  | 35.0  | 34.0  | 33.0  | 32.0  | 31.0  |
| Długość $a [\text{mm}]$                   | 500   | 494   | 487   | 480   | 473   | 502   | 509   | 517   | 524   | 533   |
| Opór $R_2$ obliczona $[\Omega]$           | 35.80 | 35.15 | 35.12 | 35.08 | 35.00 | 35.28 | 35.25 | 35.32 | 35.23 | 35.38 |

Tablica 2: Wyniki pomiarów dla opornika nr 2

Aby uzyskać rezystancję opornika obliczamy średnią arytmetyczną z wyników z tabeli powyżej:

$$\overline{R_2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{2i}}{10} \approx 35.26 \Omega \quad (13)$$

### 4.3 Pomiar dla opornika 3

W tabeli 3 zestawiono pomiary przeprowadzone dla opornika 3. Przyjęty został krok zmiany znanej rezystancji  $2\ \Omega$  z wyjątkiem pierwszego pomiaru dla  $a = 500\text{ mm}$  (celem uzyskania wyniku równego rezystancji znanej).

|  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Rezystancja opornika znanego $R\ [\Omega]$ | 72.1  | 74.0  | 76.0  | 78.0  | 80.0  | 70.0  | 68.0  | 66.0  | 64.0  | 62.0  |
| Długość $a\ [\text{mm}]$                   | 500   | 491   | 481   | 476   | 469   | 506   | 508   | 513   | 520   | 527   |
| Opór $R_3$ obliczona $[\Omega]$            | 72.10 | 71.38 | 70.44 | 70.85 | 70.66 | 71.70 | 70.21 | 69.52 | 69.33 | 69.08 |

Tablica 3: Wyniki pomiarów dla opornika nr 3

Aby uzyskać rezystancję opornika obliczamy średnią arytmetyczną z wyników z tabeli powyżej:

$$\overline{R_3} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{3i}}{10} \approx 70.53\ \Omega \quad (14)$$

### 4.4 Połączenie szeregowe

#### 4.4.1 Obliczenie rezystancji

W połączeniu szeregowym opór zastępczy jest równy sumie oporów rezystorów na połączeniu, stąd wynika, że mierzony opór powinien wynosić:

$$R_{sobl} = R_1 + R_2 + R_3 = 118.28\ \Omega \quad (15)$$

#### 4.4.2 Pomiar rezystancji

W tabeli 4 zestawiono pomiary przeprowadzone połączenia szeregowego oporników  $R_1, R_2, R_3$ . Przyjęty został krok zmiany znanej rezystancji  $5\ \Omega$  z wyjątkiem pierwszego pomiaru dla  $a = 500\text{ mm}$  (celem uzyskania wyniku równego rezystancji znanej).

|  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Rezystancja opornika znanego $R\ [\Omega]$ | 116.3  | 120.0  | 125.0  | 130.0  | 135.0  | 110.0  | 105.0  | 100.0  | 95.0   | 90     |
| Długość $a\ [\text{mm}]$                   | 500    | 496    | 484    | 474    | 465    | 514    | 526    | 538    | 554    | 568    |
| Opór $R_s$ obliczona $[\Omega]$            | 116.30 | 118.10 | 117.25 | 117.15 | 117.34 | 116.34 | 116.52 | 116.45 | 118.00 | 118.33 |

Tablica 4: Wyniki pomiarów dla połączenia szeregowego

Aby uzyskać rezystancję opornika obliczamy średnią arytmetyczną z wyników z tabeli powyżej:

$$\overline{R_s} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{si}}{10} \approx 117.18\ \Omega \quad (16)$$

### 4.5 Połączenie równoległe

#### 4.5.1 Obliczenie rezystancji

W połączeniu równoległym opór zastępczy jest równy odwrotności sumy odwrotności oporów rezystorów układu. Wynika stąd, że spodziewana oporność połączenia będzie wynosić:

$$R_{robl} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \approx 8.16\ \Omega \quad (17)$$

#### 4.5.2 Pomiar rezystancji

W tabeli 5 zestawiono pomiary przeprowadzone połączenia równoległego oporników  $R_1, R_2, R_3$ . Przyjęty został krok zmiany znanej rezystancji  $0.5 \Omega$  z wyjątkiem pierwszego pomiaru dla  $a = 500 \text{ mm}$  (celem uzyskania wyniku równego rezystancji znanej).

|   |     |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Rezystancja opornika znanego $R [\Omega]$ | 8.0 | 8.5 | 9.0  | 9.5  | 10.0 | 7.5  | 7.0  | 6.5  | 6.0  | 5.5  |
| Długość $a [\text{mm}]$                   | 500 | 485 | 472  | 459  | 450  | 519  | 534  | 552  | 557  | 596  |
| Opór $R_r$ obliczona $[\Omega]$           | 8.0 | 8.0 | 8.05 | 8.06 | 8.18 | 8.09 | 8.02 | 8.01 | 7.95 | 8.11 |

Tablica 5: Wyniki pomiarów dla połączenia równoległego

Aby uzyskać rezystancję opornika obliczamy średnią arytmetyczną z wyników z tabeli powyżej:

$$\overline{R_r} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{r_i}}{10} \approx 8.05 \Omega \quad (18)$$

#### 4.6 Analiza niepewności

##### 4.6.1 Niepewność pomiarowa długości druta oporowego

Drut oporowy został rozciągnięty nad całą długością przymiaru milimetrowego, dlatego stosujemy niepewność typu B, czyli wartość działki elementarnej:

$$u(l) = 0.1 \text{ cm} \quad (19)$$

##### 4.6.2 Niepewność pomiarowa opornika o znanej rezystancji

Oporność rezystora jest ściśle określona oraz możliwa do regulacji pokrętkami na obudowie urządzenia. Niestety, urządzenie nie oferowało żadnej podanej niepewności na tabliczce znamionowej, przez co należy przyjąć, że ustawiona rezystancja nie jest obciążona żadnym błędem. Jest to nieprawdziwe, ponieważ po sprawdzeniu wartości oporu za pomocą multimetru ustawiona wartość odbiegała od rzeczywistej o niestały procent, przez co nie jest możliwe określić dokładnej niepewności pomiarowej znanej rezystancji.

##### 4.6.3 Niepewność mierzonego oporu

Niepewność mierzonego oporu należy obliczyć zgodnie z prawem przenoszenia niepewności uzależnione od niepewności pomiarowej druta oporowego zgodnie z wzorem:

$$u(R_{x_i}) = \left| \frac{dR_{x_i}}{da} u(a) \right| = R \frac{l}{(l-a)^2} u(a) \quad (20)$$

Powyższy wzór został zastosowany dla każdego pojedynczego pomiaru każdego opornika/zestawu oporników a z otrzymanych wyników została obliczona średnia arytmetyczna stanowiąca finalny wynik niepewności pomiarowej mierzonego oporu. Zatem wzór końcowy niepewności określony jest równaniem:

$$u(R_x) = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_{x_i}}{10} \quad (21)$$

Niepewność wynosi odpowiednio dla poszczególnych rezystorów:



- Opornik 1

$$u(R_1) = 0.05 \, \Omega \quad (22)$$

- Opornik 2

$$u(R_2) = 0.14 \, \Omega \quad (23)$$

- Opornik 3

$$u(R_3) = 0.28 \, \Omega \quad (24)$$

- Połączenie szeregowe

$$u(R_s) = 0.47 \, \Omega \quad (25)$$

- Połączenie równoległe

$$u(R_r) = 0.03 \, \Omega \quad (26)$$

#### 4.6.4 Niepewność złożona obliczonej rezystancji

Niepewność obliczenia rezystancji jest niepewnością złożoną uzależnioną od niepewności pomiaru oporności  $R_1$ ,  $R_2$  oraz  $R_3$  i wyraża się ją wzorem:

$$u(R) = \sqrt{\left(\frac{\delta R}{\delta R_1}\right)^2 u(R_1)^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta R_2}\right)^2 u(R_2)^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta R_3}\right)^2 u(R_3)^2} \quad (27)$$

Stąd dla połączenia szeregowego uzyskujemy niepewność określoną wzorem:

$$u(R_{sobl}) = \sqrt{u(R_1)^2 + u(R_2)^2 + u(R_3)^2} \approx 0.32 \, \Omega \quad (28)$$

Dla połączenia równoległego niepewność złożona, po podstawieniu do wzoru 27, wynosi:

$$u(R_{robl}) \approx 0.02 \, \Omega \quad (29)$$

## 5 Podsumowanie

Wyniki z uwzględnieniem niepewności pomiarowych zostały przedstawione w tabeli poniżej. Dla oporników 1, 2 oraz 3 wartość rezystancji jest wyznaczana tylko doświadczalnie.

| Opornik               | Oporność wyznaczona [ $\Omega$ ] |   |
|-----------------------|----------------------------------|---|
| Opornik 1             | $12.49 \pm 0.05$                 |   |
| Opornik 2             | $35.26 \pm 0.14$                 |   |
| Opornik 3             | $70.53 \pm 0.28$                 | <b>Oporność obliczona [<math>\Omega</math>]</b> |
| Połączenie szeregowe  | $117.18 \pm 0.47$                | $118.28 \pm 0.32$                               |
| Połączenie równoległe | $8.05 \pm 0.03$                  | $8.16 \pm 0.02$                                 |

**Tabela 6:** Podsumowanie wyników doświadczenia wraz z niepewnościami

## 6 Wnioski

Wykonanie tego ćwiczenia pozwoliło nam zrozumieć prawa Kirchhoffa oraz zależności określające opór dla połączeń szeregowych oraz równoległych ze strony praktycznej. W ciekawy sposób mogliśmy na nowo nauczyć się czegoś, co znaliśmy wyłącznie z książek. Wyniki przedstawione w tabeli 6 wskazują na to, że udało nam się wykonać doświadczenie poprawnie. Różnice między wartościami wyznaczonymi a obliczonymi wynikają z niedokładnością przyrządów pomiarowych (t.j. niedokładne wyznaczanie wartości przez opornicę dekadową, kontakt ślizgowy, który utrudniał dokładny odczyt wartości  $a$  i  $b$ ) oraz czynnika ludzkiego. Wadliwość elementów układu znacząco wpłynęła na wyniki końcowe. Mimo niedokładności przyrządów uzyskane wyniki nie pokrywają się z wyznaczonymi w stu procentach, jednak mieszczą się w zadawalającym przedziale.