

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej  
Informatyka, rok II  
Zespół numer 3  
Piotr Kucharski  
Dominik Zabłotny

### **Sprawozdanie z ćwiczenia nr 29**

Fale podłóżne w ciałach stałych.

18 października 2017r

# 1 Wstęp

## 1.1 Cele ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie modułu Younga dla prętów różnych materiałów na podstawie pomiarów ich częstotliwości harmonicznych.

## 1.2 Wprowadzenie teoretyczne

### 1.2.1 Fala podłużna

Fala podłużna jest to fala powstająca przez gwałtowne wychylenie ciała z położenia równowagi oraz dalszemu jego drganiu aż do momentu odzyskania równowagi. Szybkość rozchodzenia się tej fali zależy od bezwładności i sprężystości ciała.

### 1.3 Fala stojąca

Fala, której grzbiety i doliny nie przemieszczają się. Powstaje na skutek interferencji dwóch takich samych fal podłużnych, w przypadku pręta przez odbicie fali o przeciwny koniec do uderzonego młotkiem. Falę stojącą określa się równaniem:

$$y = 2A \sin kx \quad (1)$$

#### 1.3.1 Moduł Younga

Wielkość charakteryzującą sprężystość materiału, będąca jego integralną częścią nazywamy modułem Younga oraz oznaczamy go jako  $E$ . Ogólny wzór na moduł Younga określa się jako stosunek naprężenia  $\sigma$  do względnego odkształcenia liniowego  $\varepsilon$  materiału:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2)$$

Po uwzględnieniu, że ćwiczenie przeprowadzane jest na prętach różnych materiałów, interferencji fali padającej i fali odbitej oraz prawa Hooke'a uzyskujemy wzór:

$$E = 4\rho l^2 f^2 \quad (3)$$

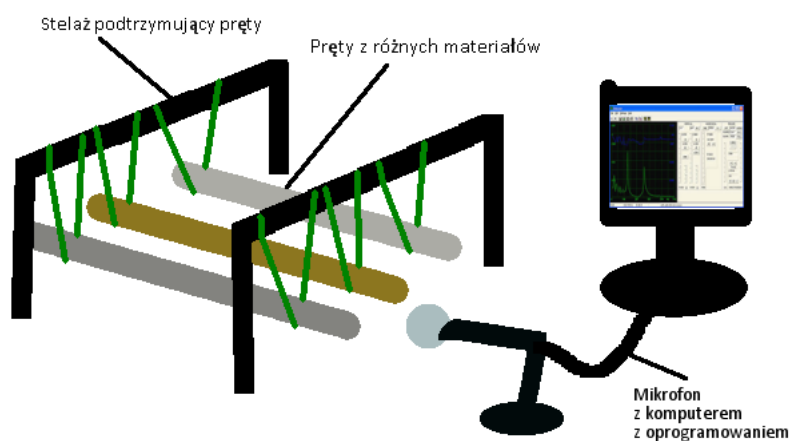
gdzie  $\rho$  to gęstość materiału,  $l$  - odległość między węzłami fali oraz  $f$  częstotliwość fali podłużnej. Tego wzoru będziemy używać do wykonania ćwiczenia.

#### 1.3.2 Analiza Fouriera

Jest to proces badania drgań harmonicznych, polega na przedstawieniu funkcji okresowej w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego (szeregu Fouriera). W naszym doświadczeniu wykorzystujemy program Zelscope, który realizuje algorytm FFT pozwalający na szybkie obliczenie transformaty Fouriera i przedstawia ją jako widmo fali na ekranie (analogicznie do oscyloskopu znanego z elektroniki). Będziemy odczytywać kolejne wartości drgań harmonicznych z ekranu.

## 1.4 Układ pomiarowy

Układ pomiarowy składa się z komputera z zainstalowanym oprogramowaniem Zelscope, mikrofonu podłączonego do komputera, długich prętów wykonanych z różnych materiałów zawieszonych na nitkach w dwóch miejscach. Do wprowadzenia ciał w drgania użyjemy młotka, do pomiaru długości prętów użyjemy miary milimetrowej zwijanej, do pomiaru masy prętów użyjemy wagi elektronicznej firmy RAWAG model WTB 200 oraz do zmierzenia grubości materiałów w celu wyznaczenia ich objętości użyjemy suwmiarki.



Rysunek 1: Schemat układu pomiarowego

## 2 Wykonanie ćwiczenia

Wykonanie ćwiczenia dzieli się na dwa kroki stosowane dla każdego badanego pręta oraz jednej wspólnej analizy wyników.

### 2.1 Pomiary specyfikacji prętów

- Pomiar długości pręta za pomocą miary zwijanej.
- Pomiar grubości pręta za pomocą suwmiarki (w przypadku otwartego walca mierzymy promień zewnętrzny i wewnętrzny).
- Zważenie pręta w najlepszy możliwy sposób za pomocą wagi elektronicznej.
- Zapisanie wyników o danym ciele do tabeli.

## 2.2 Pomiar częstotliwości harmonicznych

- Osadzenie preta w niciach zamontowanych do stelaża.
- Przybliżenie mikrofonu do badanego pręta.
- Uderzenie młotkiem w pręt aby wprawić go w drganie.
- Zamrożenie odczytu programu Zelscope w momencie najlepszej widoczności widma fal harmonicznym.
- Odczyt sześciu pierwszych harmonicznych (jeżeli taką ilość udało się zaobserwować).

W przypadku niejednoznacznego odczytu częstotliwości harmonicznych należy powtórzyć pomiar.

## 2.3 Obliczanie koniecznych wartości

Z zapisanych danych pomiarowych należy obliczyć gęstość ciała daną wzorem:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4)$$

gdzie  $m$  to zmierzona masa ciała oraz  $V$  to objętość ciała obliczona odpowiednio dla każdego pręta z odpowiednich wielkości. Pręty są różnymi figurami przestrzennymi, przez wykorzystujemy odpowiedni wzór dla:

- walca o promieniu podstawy  $r$  oraz wysokości  $h$

$$V = \pi r^2 h \quad (5)$$

- prostopadłościanu prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy  $a$  oraz wysokości  $h$

$$V = a^2 h \quad (6)$$

- otwartego walca o promieniu zewnętrznym podstawy  $R$ , promieniu wewnętrznym podstawy  $r$  oraz wysokości  $h$

$$V = \pi(R^2 - r^2)h \quad (7)$$

Do obliczenia długości fali  $\lambda$  zastosujemy zależność stosunku długości pręta  $L$  do numeru harmonicznej fali  $n$ :

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (8)$$

Odległość  $l$  między węzłami fali stojącej stanowi połowę jej długości:

$$l = \frac{1}{2}\lambda \quad (9)$$

Do obliczenia predkości rozchodzenia się fali zastosujemy wzór:

$$V = 2lf \quad (10)$$

### 3 Opracowanie danych pomiarowych

#### 3.1 Wyniki pomiarów

Zmierzone wielkości zostały zapisane w tabeli 1, gdzie zapisano również wyniki wyliczonych wartości obliczonych za pomocą wzorów (3), (4), (5) i (6). W kolejnych tabelach przedstawione zostaną wyniki pomiarów dla każdego materiału.

Materiał	Kształt	Masa [kg]	Długość [m]	Objętość [m <sup>3</sup> ]	Gęstość [kg/m <sup>3</sup> ]
Aluminium	Walec	0.030	0.561	$1.102 \cdot 10^{-5}$	2720.326
Mosiądz	Walec	0.237	0.998	$2.821 \cdot 10^{-5}$	8401.275
Stal	Prostopadłościan	2.794	1.802	$3.710 \cdot 10^{-4}$	7529.529
Stal	Walec	1.138	1.800	$1.470 \cdot 10^{-4}$	7741.496
Żeliwo szare	Walec otwarty	0.760	1.800	$1.095 \cdot 10^{-4}$	6940.639

Tablica 1: Dane pomiarowe dla pięciu próbek

Analiza Aluminium $l = 0.561$ [m]			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	2411.76	1.122	2705.994
2	4941.18	0.561	2772.001
3	7382.35	0.374	2760.998
4	9823.53	0.281	2760.411

Tablica 2: Wyniki pomiarów i obliczeń dla aluminium (z 4 pomiarów)

Prędkość średnia fali:

$$v_{sr} = 2749.851 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla aluminium:

$$E = 20.570 \text{ [GPa]}$$

Analiza Mosiądzu $l = 0.998$ [m]			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	1776.47	1.996	3545.834
2	3458.82	0.998	3451.902
3	5152.94	0.665	3426.705
4	6835.29	0.499	3410.810
5	8653.53	0.399	3452.758
6	10294.12	0.333	3427.942

Tablica 3: Wyniki obliczeń dla mosiądzu

Prędkość średnia fali:

$$v_{sr} = 3452.659 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla mosiądzu:

$$E = 100.15 \text{ [GPa]}$$

Analiza Stali nr 1 $l = 1.802 \text{ [m]}$			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f \text{ [Hz]}$	Długość fali $\lambda \text{ [m]}$	Prędkość fali $v \text{ [m/s]}$
1	1400.00	3.604	5045.600
2	2905.88	1.802	5236.396
3	4305.88	1.201	5171.362
4	6670.59	0.901	6010.202
5	7905.88	0.721	5700.139
6	8623.53	0.601	5182.742

**Tablica 4:** Wyniki obliczeń dla stali w kształcie prostopadłościanu

Prędkość średnia fali:

$$v_{sr} = 5391.074 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla stali w kształcie prostopadłościanu:

$$E = 218.836 \text{ [GPa]}$$

Analiza Stali nr 2 $l = 1.800 \text{ [m]}$			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f \text{ [Hz]}$	Długość fali $\lambda \text{ [m]}$	Prędkość fali $v \text{ [m/s]}$
1	1400.00	3.600	5040.000
2	2905.88	1.800	5230.584
3	4305.88	1.200	5167.056
4	5811.76	0.900	5230.584
5	7211.78	0.720	5192.482
6	8623.53	0.600	5174.118

**Tablica 5:** Wyniki obliczeń dla stali w kształcie prostopadłościanu

Prędkość średnia fali:

$$v_{sr} = 5172.471 \text{ [m/s]}$$

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla stali w kształcie walca:

$$E = 207.119 \text{ [GPa]}$$

Prędkość średnia fali:

$$v_{sr} = 3701.881 \text{ [m/s]}$$

Analiza Żeliwa Szarego $l = 1.800$ [m]			
Nr harmonicznej	Częstotliwość $f$ [Hz]	Długość fali $\lambda$ [m]	Prędkość fali $v$ [m/s]
1	1023.53	3.600	3684.708
2	2058.82	1.800	3705.876
3	3082.35	1.200	3698.820
4	4117.65	0.900	3705.885
5	5152.94	0.720	3710.117
6	6176.47	0.600	3705.882

**Tablica 6:** Wyniki obliczeń dla żeliwa szarego

Z podanych wartości możemy obliczyć wartość modułu Young'a ze wzoru (3) dla żeliwa szarego w kształcie walca otwartego:

$$E = 95.114 \text{ [GPa]}$$

### 3.2 Analiza niepewności

## 4 Podsumowanie

## 5 Wnioski