



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

# **Projektowanie układów regulacji za pomocą linii pierwiastkowych**

## **Podstawy Automatyki**

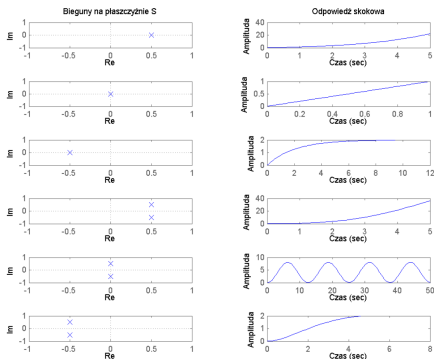
Piotr Kucharski i Dominik Zabłotny

<https://github.com/AGH-Kucharski-Zablotny/Podstawy-Automatyki>

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

13 kwietnia 2018

- Wpływ sprzężenia zwrotnego na dynamikę układu zamkniętego określa się za pomocą pierwiastków jego biegunów na płaszczyźnie zespolonej.
- Przykłady:



W dziedzinie Laplace'a wnioskujemy:

- ❶ Jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej, to układ jest stabilny.
- ❷ Jeżeli wszystkie pierwiastki leżą na osi rzeczywistej to układ jest przetłumiony lub tłumiony krytycznie.
- ❸ Im większe ujemne wartości pierwiastków równania charakterystycznego układu tym szybsza jest dynamika układu.
- ❹ Im bliżej osi urojonej leżą pierwiastki równania charakterystycznego tym większy wpływ na dynamikę mają one.
- ❺ Im większe współczynniki części urojonej pary sprzężonej pierwiastków równania charakterystycznego tym bardziej oscylacyjny jest układ.



Linie pierwiastkowe - wykres pierwiastków równania charakterystycznego układu zamkniętego zależnych od wartości wzmocnienia  $K$ .

Własności linii pierwiastkowych:

- ❶ Początek linii pierwiastkowych leży w miejscu odpowiadającym biegunom układu otwartego.
- ❷ Linie kończą się w zerach transmitacji.
- ❸ Liczba linii pierwiastkowych odpowiada liczbie biegunów.
- ❹ Linie będące wykresami pierwiastków zespolonych występują w postaci par sprzężonych.



Częstotliwość własna - szybkość drgań układu po wytrąceniu z położenia równowagi oraz pozostawionego bez żadnego wpływu z zewnątrz. Liczbowo jest ona równa odległości biegunów od początku układu współrzędnych:

$$\omega = \frac{1}{T}$$



## Zadanie 1

### Badanie linii pierwiastkowych

Zbadaj wykresy linii pierwiastkowych dla następujących układów:

$$a) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(5s+1)}$$

$$b) \quad G(s) = \frac{0,5s+1}{(s+1)(5s+1)}$$

$$c) \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(5s+1)(0,5s+1)}$$



## Zadanie 1

AGH

Badanie linii pierwiastkowych - algorytm i kod

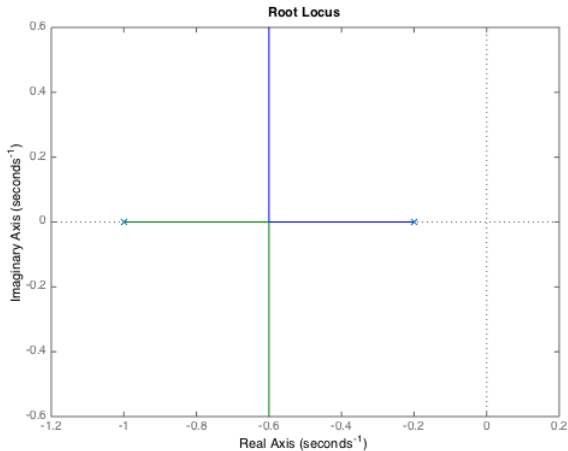
```
1 % Zadanie 1a
2 % Utworzenie układu dynamicznego
3 sys = zpk([], [0 -1 -5], 5);
4
5 % Narysowanie linii pierwiastkowych
6 rlocus(sys);
7
8 %-----
9
10 % Zadanie 1b
11 % Utworzenie układu dynamicznego
12 sys = zpk(-2, [-1 -1/5], 1/5);
13
14 % Narysowanie linii pierwiastkowych
15 rlocus(sys);
16
17 %-----
18
19 % Zadanie 1c
20 % Utworzenie układu dynamicznego
21 sys = zpk([], [-1 -1/5 -2], 10/25);
22
23 % Narysowanie linii pierwiastkowych
24 rlocus(sys);
25
26 % Obliczenie K dla zadanego kata
27 [K, bieguny] = rlocfind(sys);
```



AGH

## Zadanie 1a

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie



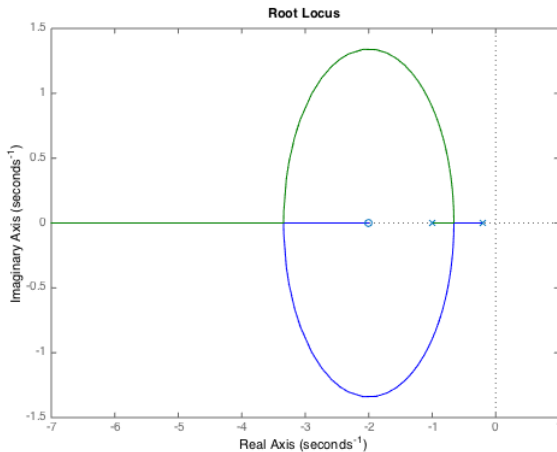




AGH

## Zadanie 1b

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie

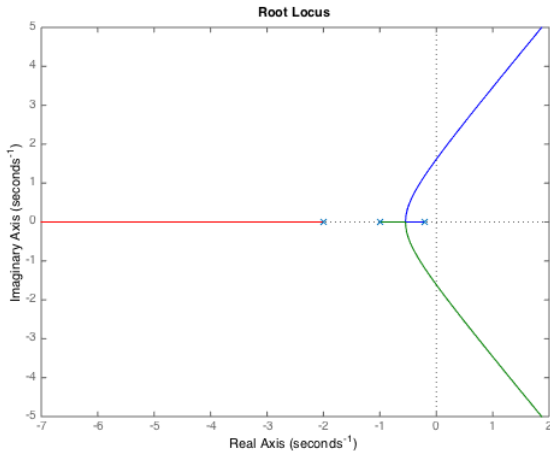




AGH

## Zadanie 1c

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie

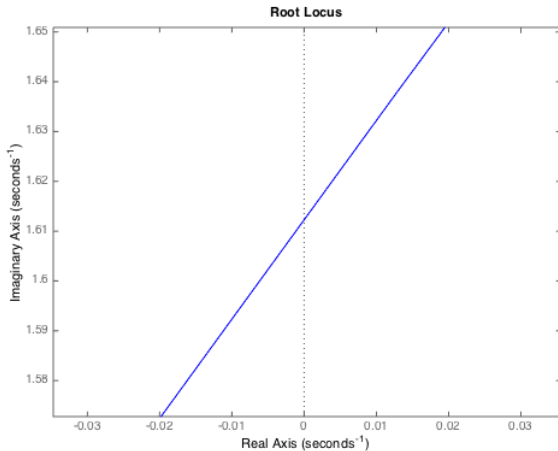




AGH

## Zadanie 1c

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie

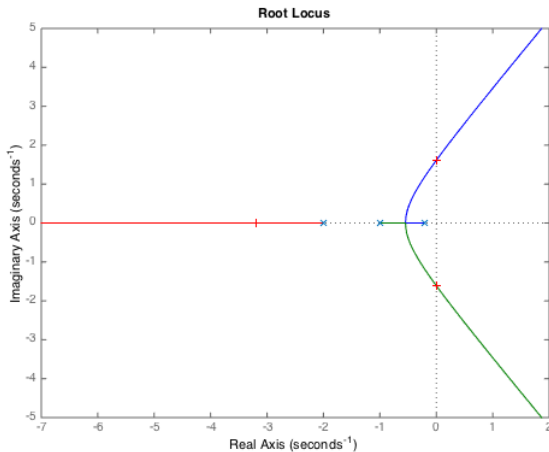




AGH

## Zadanie 1c

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie





AGH

## Zadanie 1c

### Badanie linii pierwiastkowych - wykonanie

Z sytemu z podpunktu c wynika, że układ staje się niestabilny dla wzmacnienia krytycznego równego:

```
1 >> zadanie_1.m
2 Select a point in the graphics window
3
4         selected_point =
5
6         0.0002 + 1.6126i
```

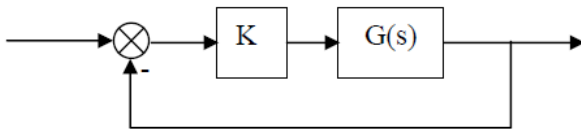
## Zadanie 2

### Dobór regulatora proporcjonalnego

Dany jest układ:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.2s+1)}$$

- a) Wykorzystując poznane narzędzia dobierz regulator proporcjonalny (wzmocnienie  $K$ ) aby układ zamknięty miał współczynnik tłumienia  $\xi = 0.707$  (wtedy  $\phi = 45^\circ$ ). Narysuj odpowiedź skokową układu zamkniętego.





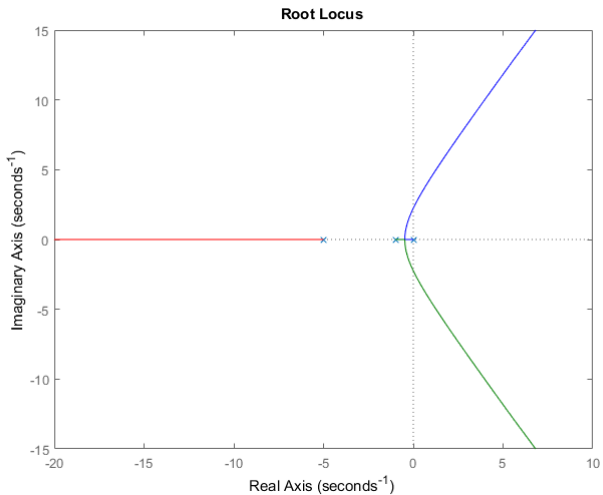
```
1 % Utworzenie układu dynamicznego
2 sys = zpk([], [0 -1 -5], 5);
3
4 % Narysowanie linii pierwiastkowych
5 rlocus(sys);
6
7 % Pomocnicza linia pod zadaniem kątem 45 stopni
8 line([0 -15], [0 15]);
9
10 % Zatrzymanie w celu przybliżenia
11 pause();
12
13 % Obliczenie K dla zadanego kąta
14 [K, bieguny] = rlocfind(sys);
15
16 % Zamknięcie układu dynamicznego
17 sys_zamk = feedback(K * sys, 1);
18
19 % Odpowiedz układu zamkniętego na skok jednostkowy
20 step(sys_zamk);
21
22 % Wyświetlenie K w tytule wykresu
23 title(['Step response, K = ' num2str(K)]);
```



AGH

## Zadanie 2a

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wykonanie



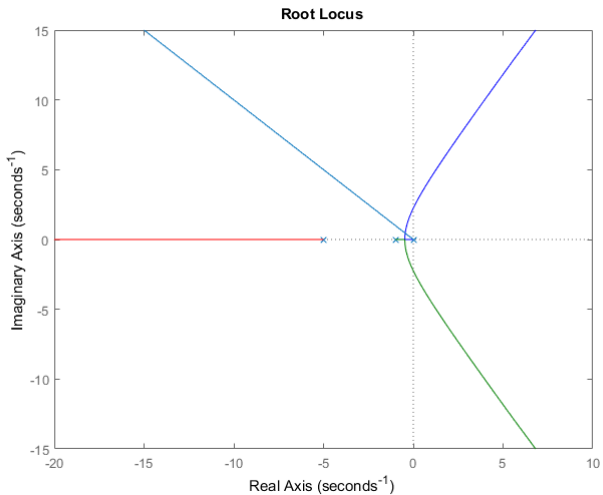




AGH

## Zadanie 2a

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wykonanie

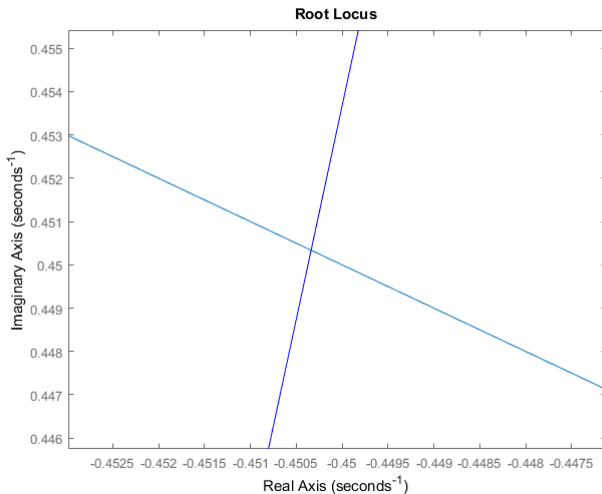




AGH

## Zadanie 2a

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wykonanie

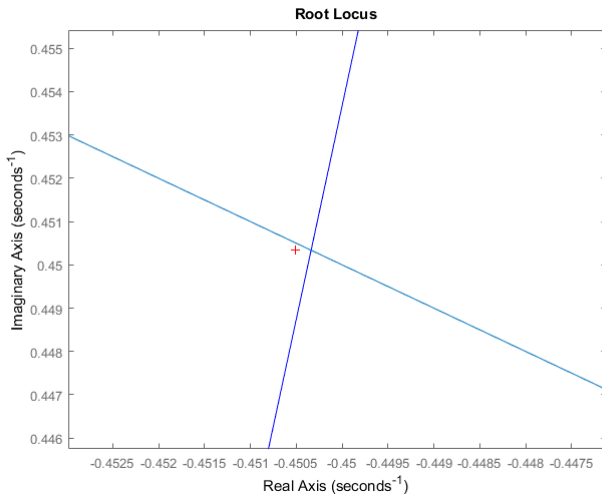




AGH

## Zadanie 2a

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wykonanie

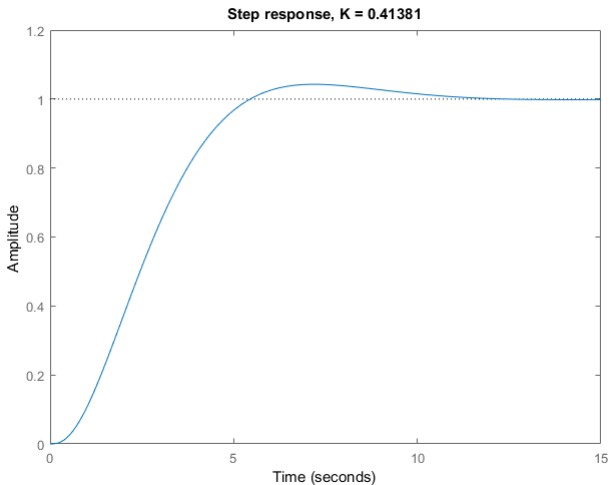




AGH

## Zadanie 2a

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wykonanie



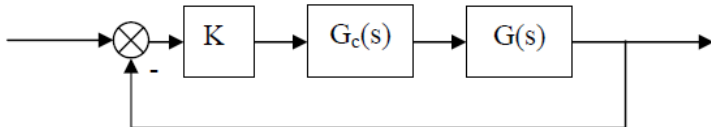
## Zadanie 2b

### Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem

- b) Dodaj do układu kompensator (człon przyspieszająco-opóźniający fazę) o transmitancji:

$$G_c(s) = \frac{(s + 1)}{(0.1s + 1)}$$

czyli utwórz następujący układ:



Dobierz wzmacnienie  $K$  aby układ zamknięty miał taki sam współczynnik tłumienia jak w punkcie a). Narysuj odpowiedź skokową układu zamkniętego.



## Zadanie 2b

AGH

Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - algorytm i kod

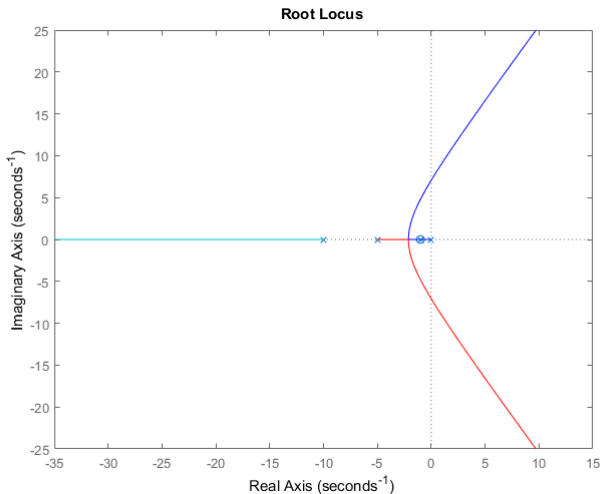
```
1 % Oryginalny system dynamiczny
2 sys = zpk([], [0 -1 -5], 5);
3 % Utworzenie kompensatora
4 Gc = zpk(-1, -10, 1/10);
5 % Utworzenie systemu zastępczego
6 system_zastepczy = series(sys, Gc);
7 % Narysowanie linii pierwiastkowych układu zastępczego
8 rlocus(system_zastepczy);
9 % Narysowanie linii pomocniczej
10 line([0, -15], [0, 15]);
11 % Zatrzymanie wykonywania w celu przybliżenia
12 pause();
13 % Obliczenie wzmocnienia dla układu zastępczego
14 [K, bieguny] = rlocfind(system_zastepczy);
15 % Stworzenie układu zamkniętego
16 sys_zamk_b = feedback(K * system_zastepczy, 1);
17 % Odpowiedź układu zastępczego na skok jednostkowy
18 step(sys_zamk_b);
19 % Wyświetlenie K w tytule wykresu
20 title(['Step response, K = ' num2str(K)]);
```



AGH

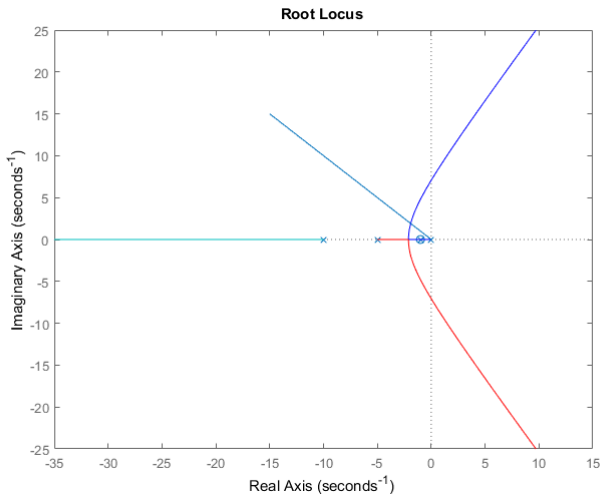
## Zadanie 2b

Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - wykonanie



## Zadanie 2b

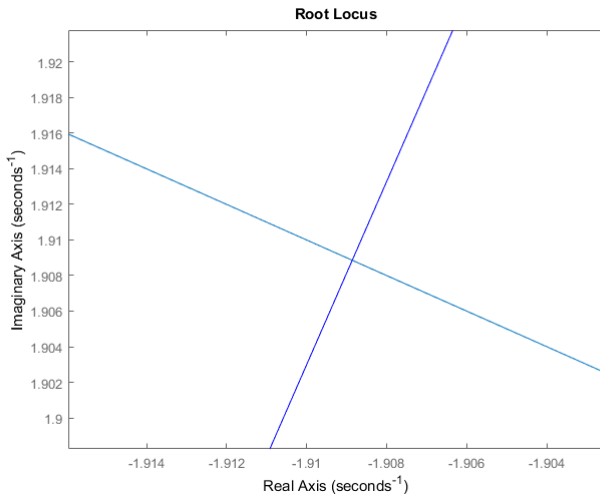
### Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - wykonanie





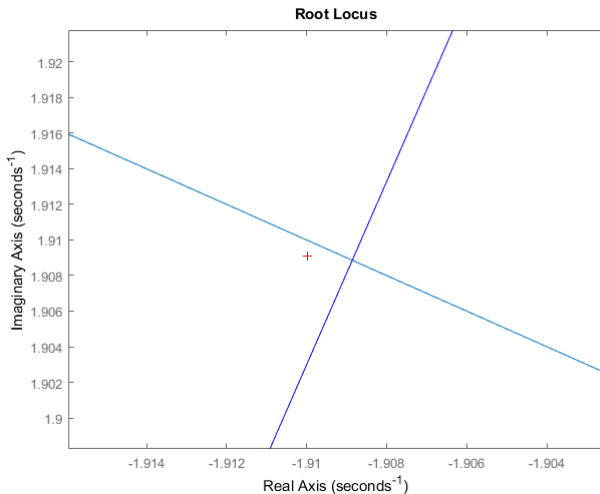
## Zadanie 2b

### Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - wykonanie



## Zadanie 2b

### Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - wykonanie

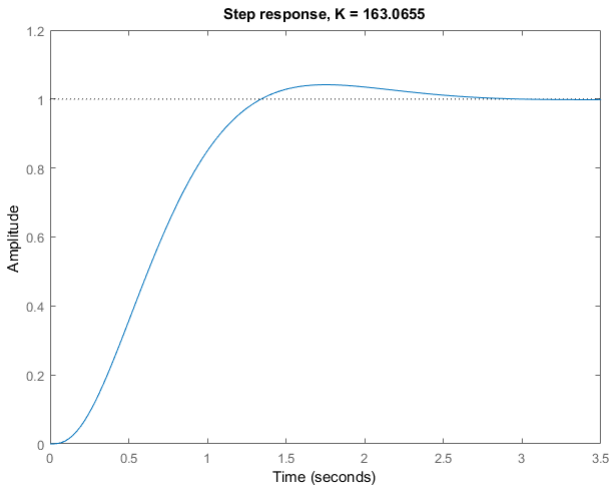




AGH

## Zadanie 2b

Dobór regulatora proporcjonalnego z kompensatorem - wykonanie

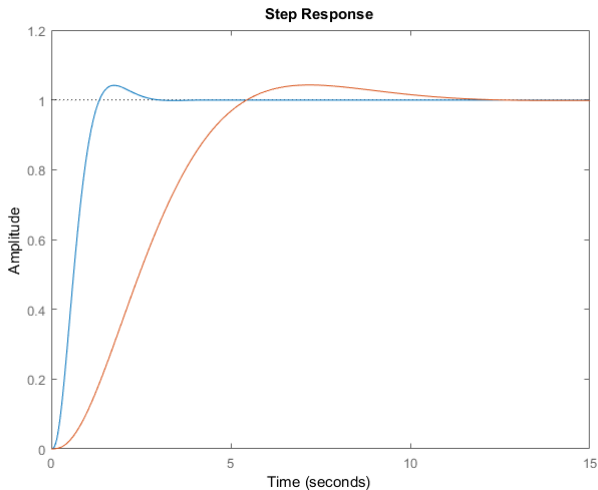




AGH

## Zadanie 2

### Dobór regulatora proporcjonalnego - porównanie





Z uzyskanych systemów za pomocą polecenia pole obliczone zostają bieguny. Pary sprzężone wynoszą odpowiednio:

- Układ a:  $-0.4505 \pm 0.4504i$
- Układ b:  $-1.91 \pm 1.9091i$

Częstotliwości własne:

- Układ a:  $|-0.4505 \pm 0.4504| \approx 0.0001$
- Układ b:  $|-1.91 \pm 1.9091| \approx 0.8199$



## Zadanie 2

### Dobór regulatora proporcjonalnego - wnioski

- Układ zamknięty z zadany współczynnikiem tłumienia, z kompensatorem oraz bez niego jest stabilny.
- Dodanie kompensatora do systemu spowodowało polepszenie właściwości dynamicznych układu - szybszą stabilizację.
- Układ b wykonuje szybsze drgania w stanie stabilnym.

- *„Metoda projektowania układów regulacji za pomocą linii pierwiastkowych”* - dr inż. Maciej Klemiato
- Wikipedia: hasło „Częstość własna”
- berleburger.com: hasło „Częstotliwość własna”