Analiza matematyczna

Materiał ćwiczeniowy dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiIB AGH

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2022

Zestaw 1. Funkcje – wybrane własności

Zadanie 1. Niech $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Wykaż, że:

a) f, g – funkcje rosnące (malejące) $\Rightarrow g \circ f$ – funkcja rosnąca;

b) f – funkcja okresowa $\Rightarrow g \circ f$ – funkcja okresowa;

c) f – funkcja okresowa o okresie podstawowym T, g – injekcja $\Rightarrow g \circ f$ funkcja okresowa o okresie podstawowym T.

Zadanie 2.* Niech f, g będą funkcjami okresowymi o okresach podstawowych równych odpowiednio T_F oraz T_G. Czy $f + g$ jest również funkcją okresową? Jeżeli tak, jaki jest jej okres?

Zadanie 3. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

a) $y = \cos(2x - 3)$; **b)** $y = \dfrac{1}{\cos x}$; **c)** $y = \sin x \operatorname{tg} x$.

Zadanie 4. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji:

a) $f_1 : [-\pi/2, \pi/2] \ni x \to \sin x + 1 \in [0, 2]$;

b) $f_2 : (\pi/2, 3\pi/2) \ni x \to \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$;

c) $f_3 : [-3\pi/2, -\pi/2] \ni x \to \sin x \in [-1, 1]$;

d) $f_4 : \mathbb{R} \ni x \to \sinh x \in \mathbb{R}$;

e) $f_5 : [0, \infty) \ni x \to \cosh x \in [1, \infty)$.

Zadanie 5. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = \arcsin(\sin x)$; **b)** $y = \arcsin(\cos x)$; **c)** $y = \sin(\arcsin x)$;

d) $y = \cos(\arcsin x)$; **e)** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; **f)** $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

Zadanie 6. Rozwiąż równanie:

a) $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$; **b)** $\arcsin x + \arcsin(2x) = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$; **d)** $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Zestaw 2. Granice ciągów oraz funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Korzystając z definicji granicy ciągu, sprawdź równości

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+2} = 0$; **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2}{n+1} = +\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n-1)}{2n^2+1} = 2$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że nie istnieją granice ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1-n)^n$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$; **c)*** $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$.

Zadanie 3. Stosując twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym, wykaż zbieżność podanych ciągów (w przykładach a)–c) dodatkowo wyznacz granicę):

a) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

b) $b_1 = b > 0, \quad b_{n+1} = \dfrac{b_n}{1+b_n}$;

c) $u_1 = a > 0, \quad u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^3 - 1}{3u_n^2}$;

d) $c_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$;

e) $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

f) $f_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

Zadanie 4. Wyznacz granice podanych ciągów ($n \to +\infty$):

a) $\dfrac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$; **b)** $\left(1+\dfrac{n+1}{2-n}\right)^n$; **c)** $\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}\cos n!$;

d) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$; **e)** $n\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n}} - 1\right)$; **f)** $\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

h) $\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)^{6n}$; **i)** $\left(\dfrac{4n}{4n+1}\right)^n$; **j)** $(0,\underbrace{9\ldots9}_{\times n})^{10^n}$;

k) $\left[\dfrac{3n+1}{n+1}\right]$; **l)** $\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\sin\dfrac{x}{2^n}$; **m)** $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$.

Zadanie 5. Stosując twierdzenie o trzech ciągach, wyznacz podane granice:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin^2 n + 4n}{3n-1}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\ldots+\dfrac{n}{n+1}}$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n^2}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{2}{2+n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n+n^2}\right)$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\dfrac{1}{n}}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[\sqrt{2}n]}{n}$; **i)** $\lim\limits_{n\to\infty} (2\cos n - 5)\, n^2$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)$; **k)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_2 (2^n + 1)}{\log_2 (4^n + 1)}$.

Zadanie 6. Znajdź granicę L ciągu obwodów L_n oraz granicę S ciągu pól S_n wielokątów foremnych wpisanych w okrąg o promieniu r, gdy liczba boków wielokątów n wzrasta do nieskończoności.

Zadanie 7. Odcinek AB o długości d podzielono na n równych części. Na każdej z nich, z pominięciem pierwszej i ostatniej, zbudowano równoboczne trójkąty. Oblicz granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury granicznej (przy $n \to \infty$).

Zadanie 8. W stożek obrotowy o wysokości h i promieniu podstawy r wpisano ostrosłup prawidłowy w ten sposób, że wysokość ostrosłupa jest jednocześnie wysokością stożka, a podstawą ostrosłupa jest n–kąt foremny wpisany w podstawę stożka. Przez S_n oraz V_n oznaczono odpowiednio pole powierzchni całkowitej oraz objętość tak utworzonego ostrosłupa. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$.

Zadanie 9. Uzasadnij, że nie istnieją granice ($x \in \mathbb{R}$):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin x - \cos x)$; **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin 2\pi x$; **d)*** $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin [x]$.

Zadanie 10.* Uzasadnij równości:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Zadanie 11. Oblicz granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{1 - \sqrt{x+1}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(\arcsin x)^2}{1-x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(\arccos x)^2}{1-x}$; **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+mx} - 1}{x}$, $m \in \mathbb{R}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{8-x}{\sin (\pi x)}$;

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; **i)** $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$; **j)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right)^{1/x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-2)^{[x]}}{x}$; **l)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2}$; **m)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$;

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln (2^x + 1)}{\ln (3^x + 1)}$; **o)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{tg}^3 \sqrt{x}}{x}$; **p)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Zestaw 3. Ciągłość i różniczkowalność funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Wyznacz zbiór punktów ciągłości (lewostronnej i prawostronnej) funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & , x > 0 \\ \lim\limits_{t\to 1} \left(\dfrac{\pi}{4}(1-t)\operatorname{tg}\dfrac{\pi t}{2} \right) & , x \leqslant 0 \end{cases}$; **b)** $f(x) = x - [x]$;

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}(-1)^{[x]} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$; **d)** $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x-1) + 2x^2 & , |x| > 1 \\ -\dfrac{\pi}{4} & , x = 0 \end{cases}$; **f)** $f(x) = 1 + \sqrt{\ln\cos(2\pi x)}$.

Zadanie 2. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

a) $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\log_{x^2+1} e^{-2}\right) & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2 2x}}{2x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$;

c) $f(x) = \begin{cases} (ax+b)\sin\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$; **d)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & , x \neq 0 \\ a^2 - \dfrac{1}{2} & , x = 0 \end{cases}$.

Zadanie 3. Korzystając z definicji, oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; **b)** $g(x) = a^{-x}$; **c)** $h(x) = \operatorname{tg} x$; **d)** $f(x) = \arcsin x$.

Zadanie 4. Wyznacz pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & , x \geqslant 1 \\ 3x^2 & , x < 1 \end{cases}$;

c) $y = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; **d)** $y = \arcsin\sqrt[4]{1-5x}$; **e)** $y = \sin^7\dfrac{2^x+1}{3^x+1}$;

f) $y = \sin\left(x^{\operatorname{tg} x}\right)$; **h)** $y = (\sin x)^{\cos x}$; **i)** $y = \operatorname{arctg}\left(x \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$;

j) $y = x^{[x]} + [x+1]^x$; **k)** $y = x \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$; **l)** $y = x^{e^x} + e^{x^e}$.

Zadanie 5. Zakładając, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0, oblicz granicę

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$

Czy z istnienia tej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w punkcie x_0?

Zadanie 6. Udowodnij, że jeżeli funkcja f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie x_0, to

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

Zestaw 4. Zastosowanie pochodnych funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Stosując tw. Lagrange'a uzasadnij nierówności:

a) $e^x > 1+x$, dla $x>0$;

b) $|\ln(1+x)-\ln(1+y)| \leqslant |x-y|$, dla $x,y>0$;

c) $n(b-a)a^{n-1} < b^n-a^n < n(b-a)b^{n-1}$, dla $0<a<b, n\in\mathbb{N}$.

Zadanie 2. Uzasadnij, że symbolom

$$0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 1^\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0$$

nie można przypisać żadnej ustalonej wartości liczbowej (ani nieskończoności). Wyjaśnij dlaczego wśród symboli nieoznaczonych nie występują symbole 0^∞ oraz ∞^∞; łatwo o przykłady pokazujące, że im również nie możemy przypisać *na sztywno* ani wartości 0, ani ∞.

Zadanie 3. Oblicz poniższe granice; jeżeli to możliwe zastosuj regułę de l'Hospitala:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$; **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$; **c)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$; **d)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$; **f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^x$; **h)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{1/\sqrt{x}}$; **i)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Zadanie 4. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema (lokalne) funkcji:

a) $y=\frac{1}{3}x^3-4x^2+15x-15$; **b)** $y=x^2e^{-x}$; **c)** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$;

d) $y=x^x+[x+1]^x+x^{[x]}+[x+1]^{[x]}$; **e)** $y=3\sqrt[3]{x^2}-x^2$; **f)** $y=\sqrt{\ln\cos(2\pi x)}$;

h) $y=\arcsin\dfrac{x}{|x|-1}$; **i)** $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$; **j)** $y=\ln(\log_x \ln x)$.

Zadanie 5. Uzasadnij nierówności (wykorzystaj monotoniczność stosownie dobranej funkcji):

a) $e^x > x+1$, dla $x>0$;

b) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} < \dfrac{\operatorname{tg} y}{y}$, dla $0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$;

c) $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, dla $x\geqslant 0$ oraz $n\in\mathbb{N}$ (tzw. nierówność Bernoulliego);

d) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1} > e$, dla $x>0$.

Zadanie 6. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji w zadanym przedziale:

a) $y = \sin 2x - x,\ [-\pi/2, \pi/2]\,;$ **b)** $y = \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}, [-e, e];$

c) $y = x + \sqrt{|x|},\ [-1, 1]\,;$ **d)** $y = xe^{-x},\ [0, \infty)\,.$

Zadanie 7. Zbadaj przebieg zmienności funkcji

a) $y = x + 2\,\mathrm{arctg}\, x;$ **b)** $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2};$

c) $y = xe^{x^3};$ **d)** $y = (x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}.$

Zadanie 8. Wyznacz kąty przecięcia się krzywych:

a) $y = 4 - x$ i $y = 4 - 0,5x^2;$

b) $y = \sin x$ i $y = \cos x;$

c) $y = e^x$ i $x = 0;$

d) $x^2 + y^2 = r^2$ i $y = 1$, $(r \geqslant 1)$.

Zestaw 9. Dla funkcji f napisz wzór Taylora w otoczeniu punktu x_0 do rzędu n, tj. z resztą $r_n(f, x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi(x))}{n!}(x - x_0)^n$:

a) $y = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5;$

b) $y = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $n = 4;$

c) $y = \exp(ax)$, $x_0 = 0$, $n = N + 1;$

d) $y(b) = (a + b)^4$, $x_0 = b_0 = 0$, $n = 4$.

Zadanie 10. Oszacuj dokładność proponowanych przybliżeń:

a) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, dla $|x| < \dfrac{\pi}{6};$

b) $\mathrm{tg}\, x \approx x + \dfrac{1}{3}x^3$, dla $|x| < \dfrac{1}{10};$

c) $\ln(1 + x) \approx x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5$, dla $|x| < \dfrac{1}{10};$

d) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{4}$, dla $|x| < \dfrac{1}{10}$.

Zadanie 11. Uzasadnij nierówności (zapisując, dla stosownie dobranej funkcji, wzór Taylora odpowiedniego rzędu):

a) $e^x > x + 1$, dla $x \neq 0;$

b) $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, dla $x \geqslant 0$ oraz $n \in \mathbb{N};$

c) $(1 + x)^{1+x} \geqslant 1 + x + x^2$, dla $x \geqslant 0;$

d) $\sin x < x$, dla $x > 0$.

Zadanie 12. Oblicz wartości poniższych wyrażeń z zadaną dokładnością:

a) e, $d = 10^{-3}$; **b)** $\sin 10^\circ$, $d = 10^{-2}$; **c)** $\sqrt[3]{1,003}$; $d = 10^{-3}$;

d) $\cos 0,2$, $d = 10^{-4}$; **e)*** $0,98^{1,01}$, $d = 10^{-2}$; **f)*** $(1,01)^{0,51}$, $d = 10^{-1}$.

Zestaw 5. Całka nieoznaczona

Przydatne wzory

$$2\sin ax\cos bx = \sin((a+b)x) + \sin((a-b)x)$$
$$2\sin ax\sin bx = \cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)$$
$$2\cos ax\cos bx = \cos((a+b)x) + \cos((a-b)x)$$

Zadanie 1. Oblicz całki:

a) $\int \frac{(x^2-1)^3}{x}dx$; **b)** $\int \left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3 dx$; **c)** $\int \frac{x-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}dx$; **d)** $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$;

e) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$; **f)** $\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}du$; **h)** $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$; **i)** $\int \frac{e^{4x}-1}{e^x-1}dx$.

Zadanie 2. Stosując wzór na całkowanie przez podstawienie, oblicz całki:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}}dx$; **b)** $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$; **c)** $\int \frac{6x-7}{3x^2-7x+11}dx$; **d)** $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;

e) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$; **f)** $\int \sqrt{3x+7}dx$; **h)** $\int \sin^m x\cos^3 x dx$, $m \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. Stosując wzór na całkowanie przez części, oblicz całki:

a) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$; **b)** $\int \ln(x+1)\,dx$; **c)** $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

d) $\int x(\operatorname{arctg}x)^2\,dx$; **e)** $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$; **f)** $\int x^2\ln(1+x)\,dx$;

h) $\int \sin(\ln x)\,dx$; **i)** $\int (\arccos x)^3\,dx$; **j)** $\int \cos x\ln(\operatorname{ctg}x)\,dx$.

Zadanie 4. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{1}{(x+2)(x-5)}dx$; **b)** $\int \frac{4x-1}{x^2-x-2}dx$; **c)** $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$;

d) $\int \frac{1}{x^4-x^2}dx$; **e)** $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$; **f)** $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx$;

h) $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$; **i)** $\int \frac{2x+1}{(1-x^2)(1+x)}dx$; **j)** $\int \frac{dx}{2x^2-x+1}$.

Zadanie 5. Oblicz całki trygonometryczne:

a) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$; b) $\int \sin 2x \cos 4x dx$; c) $\int \frac{dx}{1 + 4\cos x}$; d) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$;

e) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} dx$; f) $\int \frac{(2\sin x + 3\cos x)}{\sin^2 x \cos x + 9\cos^3 x} dx$; h) $\int \sin x \sin 3x dx$; i) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$.

Zadanie 6. Oblicz całki funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} dx$; b) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{1}{x+1} dx$; c) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx$;

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-5} + \sqrt{x-7}}$; e) $\int \sqrt{x^2 + 4} dx$; f) $\int \frac{(x-2)\, dx}{\sqrt{1 + x^2}}$;

h) $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$; i) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}} dx$; j) $\int \sqrt{\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}} dx$;

k) $\int \frac{\sqrt{1+x}\,(x^2 - 1)}{\sqrt{1-x}} dx$; l) $\int \frac{2x^2 + x + 2}{\sqrt{1 + x^2}} dx$; m) $\int \frac{-\sin 4x}{\sqrt{6 + 2\cos 2x}} dx$.

Zadanie 7. Oblicz całki:

a) $\int \frac{x^2}{1 + x^2} \operatorname{arctg} x dx$; b) $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(x^2 - 1)^2} dx$; c) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1 + e^x)} dx$; d) $\int \sqrt{1 - x^2} \arcsin x dx$.

Zadanie 8. Wyprowadź wzory rekurencyjne (względem n) na podane całki:

a) $\int x^\alpha \ln^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$; b) $\int \sin^n x dx,\ n \in \mathbb{N}$; c) $\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,\ n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 9.* Dla całek postaci $\int x^p (ax^q + b)^r dx$, gdzie $p, q, r \in \mathbb{Q}$ stosuje się następujące podstawienia:

- jeżeli $r \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $x = t^s$, gdzie s to najmniejszy wspólny mianownik ułamków p i q;
- jeżeli $\frac{p+1}{q} \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $ax^q + b = t^s$, gdzie s – mianownik r;
- jeżeli $\frac{p+1}{q} + r \in \mathbb{Z}$ – podstawiamy $a + \frac{b}{x^q} = t^s$, gdzie s – mianownik ułamka r.

Stosując powyższe podstawienia oblicz całki:

a) $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$.

Zestaw 6. Całka oznaczona

Zadanie 1. Oblicz podane całki oznaczone:

a) $\int\limits_0^{\pi} x\sin x dx$; **b)** $\int\limits_0^{\ln 3} xe^{-x} dx$; **c)** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$; **d)** $\int\limits_0^1 e^x \sin \pi x dx$;

f) $\int\limits_{-1/2}^{\sqrt{3}/2} \arcsin x dx$; **h)** $\int\limits_0^2 [x^2]\sqrt{1+x} dx$; **i)** $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; **j)** $\int\limits_{-2}^2 |x|\, e^{|x-1|} dx$.

Zadanie 2. Korzystając z definicji całki oznaczonej, oblicz:

a) $\int\limits_{-1}^3 2dx$; **b)** $\int\limits_0^2 xdx$; **c)** $\int\limits_1^4 (1-3x)\, dx$; **d)** $\int\limits_{-1}^0 e^x dx$; **e)** $\int\limits_2^4 \frac{dx}{x}$.

Zadanie 3. Wyznacz granice podanych ciągów:

a) $a_n = \frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{n^5}$;

b) $a_n = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} + \operatorname{tg}\frac{2\pi}{4n} + \ldots + \operatorname{tg}\frac{n\pi}{4n}}{n}$;

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}$;

d) $a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}$;

e) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n}}$;

f) $a_n = \frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{2n^2}$;

h) $a_n = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$;

i) $a_n = \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \ldots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$;

j) $a_n = \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}$;

k) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbadaj zbieżność całek:

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$; **b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx$; **c)** $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} x\sin x dx$; **d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$;

e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$; **f)** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}$; **h)** $\displaystyle\int_0^{e} \frac{\sin\ln x}{x} dx$; **i)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^3-x}$.

Zadanie 5. Korzystając z kryterium porównawczego zbadaj zbieżność podanych całek:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2 x dx$; **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{3x}}{e^{4x}-5} dx$; **c)** $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\cos x}$; **d)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$;

e) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^5-3}}$; **f)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi^x-1} dx$; **h)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\pi^x-1} dx$; **i)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x} dx$.

Zestaw 7. Całka oznaczona – zastosowanie

I. Pole figury płaskiej:

a) Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$, $y \in \mathcal{C}_{[t_1,t_2]}$ oraz $x'(t)y(t) \neq 0$ dla $t \in [t_1, t_2]$ (tj. x jest funkcją monotoniczną, a y ma stały znak). Wówczas pole P figury ograniczonej krzywą Γ, osią O_x oraz prostymi $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)\, x'(t)|\, dt. \tag{1}$$

b) Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $r = f(\theta)$, gdzie $f \geqslant 0$, $f \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$ oraz $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Wówczas pole obszaru ograniczonego łukiem f oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α, β wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\, d\theta. \tag{2}$$

Zadanie 1. Oblicz pola figur ograniczonych podanymi krzywymi $(a, b > 0)$:

a) $y = x^2 - 6x + 7$ oraz $y = 3 - x$;

b) $x(t) = a\cos(t)$, $y(t) = b\sin(t)$; $t \in [0, 2\pi]$;

c) $x(t) = a(2\cos(t) - \cos(2t))$, $y(t) = a(2\sin(t) - \sin(2t)$; $t \in [0, 2\pi]$;

d) $r(\phi) = a\cos^2(\phi)$, dla $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$;

e) $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, dla $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$.

II. Długość krzywej:

a) Niech Γ będzie krzywą bez punktów wielokrotnych o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ gdzie $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{3}$$

b) Niech Γ będzie krzywą bez punktów wielokrotnych o parametryzacji $r = f(\theta)$, $f \in \mathcal{C}^1_{[\alpha,\beta]}$. Wówczas długość łuku Γ wyraża się wzorem:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta. \tag{4}$$

Zadanie 2. Oblicz długości podanych krzywych:

- **a)** $f(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
- **b)** $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;
- **c)** $r(\phi) = a(1 + \cos\phi)$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

III. Objetość bryły obrotowej:

Niech Γ oznacza krzywą o parametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $y \neq 0$, $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$. Wówczas objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót Γ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\, x'(t)\, dt. \tag{5}$$

IV. Pole powierzchni bryły obrotowej:

Niech Σ oznacza krzywą oparametryzacji $(x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, gdzie $x \nearrow$ lub $x \searrow$, $y \geqslant 0$, $x, y \in \mathcal{C}^1_{[t_1,t_2]}$. Wówczas pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej przez obrót Σ dookoła osi Ox w przedziale $x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2)$ wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \tag{6}$$

Zadanie 3. Wyznacz objętość oraz pole powierzchi (całkowitej) podanych figur:

- **a)** kuli o promieniu R;
- **b)** walca o wysokości h i promieniu R;
- **c)** stożka o wysokości h i promieniu R;
- **d)** obrotowego stożka ściętego o promieniach podstaw r_1 oraz r_2 i wysokości h.

Zadanie 4. Oblicz pola powierzchni powstałych przez obrót dookoła osi Ox krzywych o równaniach:

- **a)** $y^2 = 4ax$, $0 \leqslant x \leqslant 3a$;
- **b)** $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ $(a < b)$;
- **c)** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
- **d)** $x(t) = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y(t) = a(2\sin t - \sin 2t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$;
- **e)** $x(t) = a(\cos t + t\sin t)$, $y(t) = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Zestaw 8. Szeregi liczbowe; szeregi potęgowe

Zadanie 1. Dla podanych szeregów wyznacz ich sumy częściowe S_N:

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność podanych szeregów liczbowych:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n^2}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{2^{n/2}(n!)^2}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^n n!}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; **k)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-1}$; **l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\left(2+\varepsilon^2\right)}\ln(1+n)$; **m)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arccos^n\frac{1}{n^2}$;

n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{(2n)^n}}$; **o)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$; **p)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; **r)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}e^{1/n}$.

Zadanie 3. Wyznacz przedziały zbieżności podanych szeregów potęgowych:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(6-3x)^n}{3^n+2^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}(x+1)^n$; **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x+2)^n$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$; **f)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{x^n}{n\ln^2 n}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}x^{2n}}{n4^n}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

Zadanie 4. Uzasadnij poniższe równości:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, dla $|x|<1$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, dla $|x|<1$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x$, dla $|x|<1$.

Zadanie 5. Oblicz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{4^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+2)2^n}$.

Zadanie 6.* Podaną funkcję przedstaw jako sumę szeregu potęgowego w zadanym przedziale:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$, dla $|x| < \dfrac{2}{3}$; **b)** $g(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$, dla $|x+1| < 2$;

c) $h(x) = \sin^2 x$, dla $x \in \mathbb{R}$; **d)** $i(x) = \sinh^2 x$, dla $x \in \mathbb{R}$;

e) $j(x) = \dfrac{2x+2}{x^2+2x}$, dla $|x+1| < 1$; **f)** $k(x) = \ln\left(x^2+2x+3\right)$, dla $|x+1| < \sqrt{2}$.

Zestaw 9. Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+1}}{(x-2)}$; **b)** $f(x,y) = \log_{x^2+y^2}\left(1-x^2-y^2\right)$; **c)** $f(x,y) = \sqrt{\ln\cos(x-y)}$.

Zadanie 2. Jakie powierzchnie w układzie O_{xyz} opisane są poniższymi zależnościami?

a) $y = x^2 - 2x + 3$; **b)** $x^2 + y^2 = 1$; **c)** $2x + y - z + 1 = 0$; **d)** $z = 1 + \sqrt{x^2+y^2}$;

e) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$; **f)** $z = 4x^2 + y^2$; **h)** $z = 1 - 3x^2 - 3y^2$; **i)** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Zadanie 3. Wyznacz poniższe granice:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; **b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; **c)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2}$; **e)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{|x|+|y|}$; **f)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(x^y+y\right)^{1/y}$;

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$; **i)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^y$; **j)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{(y-2)^2}$;

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x\sin y)}{xy}$; **l)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(1,\frac{\pi}{2}\right)} \frac{\cos xy}{\left(y-\frac{\pi}{2}\right)^2}$; **m)** $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(x+y+z)}{x^2+y^2+z^2}$.

Zadanie 4. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y+x|y|}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{e^{x^2+y^2}-1} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; **d)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin|x+y|}{|x|+|y|} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; **f)** $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^4+y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x\cos x + y & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Zadanie 5. Wyznacz wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których podane funkcje są ciągłe:

a) $f(x,y) = \begin{cases} (ax+b)\dfrac{\sin y}{y} & \text{dla } y \neq 0 \\ x & \text{dla } y = 0 \end{cases}$; **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+ay)}{x-y} & \text{dla } x \neq y \\ x^2 & \text{dla } x = y \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2-1} & \text{dla } x^2+y^2 \geqslant 1 \\ ax+by & \text{dla } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$; **d)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{b\sin axy}{xy} & \text{dla } xy \neq 0 \\ a & \text{dla } xy = 0 \end{cases}$.

Zadanie 6. Wyznacz pochodne cząstkowe f'_x oraz f'_y podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2+2y}$; **b)** $f(x,y,z) = \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$;

c) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$; **d)** $f(x,y) = xy\,\mathrm{sgn}\,(xy)$;

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; **f)** $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$.

Zadanie 7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

a) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$;

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$;

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Zadanie 8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek $f''_{xy}(0,0) = f''_{yx}(0,0)$:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$; **b)** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Zadanie 9. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = (-3/5, -4/5)$;

b) $f(x,y) = x\ln y + y\ln x$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (1,0)$;

c) $f(x,y) = |x-y|$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\overrightarrow{v} = (3/5, 4/5)$;

d) $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\overrightarrow{v} = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

Zestaw 10. Wzór Taylora, ekstrema funkcji wielu zmiennych

Zadanie 1. Dla podanych funkcji wyznacz:

- **a)** $df_1(h)$, gdzie $f(x) = \ln|x| + \operatorname{arctg} x$;
- **b)** $df_{(1,1)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = x \ln y + x^y$;
- **c)** $df_{(0,0,0)}(h_1, h_2, h_3)$, gdzie $f(x, y, z) = xyz + x^2yz^2 + \ln(x + y + z + 1)$;
- **d)** $d^2f_{(0,0)}(h_1, h_2)$, gdzie $f(x, y) = xy + x^3 \ln(y + 1) + y^4 \operatorname{tg} x$.

Zadanie 2. Dla podanych funkcji zapisz rozwinięcie Taylora do rzędu n w otoczeniu punktu A:

- **a)** $f(x, y) = x^2y + xy + y^3,\ n = 3,\ A = (0, 1)$;
- **b)** $h(x, y, z) = (x + y + z)^3,\ n = 3,\ A = (0, 0, 0)$;
- **c)** $g(x, y, z) = xy \ln z + x^z \cos y,\ n = 2,\ A = (1, 0, 1)$;
- **d)** $k(x, y, z) = x^{y^z},\ n = 2,\ A = (1, 1, 1)$.

Zadanie 3. Korzystając z rozwinięcia Taylora (do rzędu drugiego), oblicz przybliżone wartości podanych wyrażeń:

- **a)** $\dfrac{\operatorname{arctg} 0,9}{\sqrt{4,02}}$;
- **b)** $1,02 \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 0,1\right)$;
- **c)** $0,98^{1,01}$;
- **d)** $\ln(1,05) \operatorname{tg}(46^\circ)$.

Zadanie 4. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:

- **a)** $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$;
- **b)** $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$;
- **c)** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;
- **d)** $f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2+2x\right)}$;
- **e)** $f(x, y) = xy$;
- **f)** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

Zadanie 5. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji w podanych obszarach:

- **a)** $f(x, y) = x^2 + y^2,\ |x| + |y| \leqslant 2$;
- **b)** $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ w trójkącie ograniczonym osiami Ox, Oy oraz prostą $x + y = 2\pi$;
- **c)** $f(x, y) = xy,\ (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$.

Zadanie 6. Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}$.

Zadanie 7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:

a) płaszczyzny $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$;

b) powierzchni $\gamma : z = \sqrt{(x+2)(y-1)}$.

Zadanie 8. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu r wybierz ten o największym polu.

Zadanie 9. Znajdź największą wartość iloczynu trzech nieujemnych liczb, których suma ma stałą wartość równą $3c$.

Zadanie 10. Znajdź najmniejszą wartość sumy trzech dodatnich liczb, których iloczyn ma stałą wartość równą c^3.

Zestaw 11. Funkcje uwikłane, ekstrema warunkowe

Zadanie 1. Zbadaj, czy podane równanie jednoznacznie określa ciągłą funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu wskazanych punktów:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $(2, 2)$;

b) $x^y = y^x$, $A(2, 4)$, $B(e, e)$, $C(3, 3)$;

c) $x - \sin y = 0$, $A\left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right)$, $B(1, \pi/2)$;

d) $x^2 = y^2$, $A(1, 1)$, $B(0, 0)$.

Zadanie 2. Wyznacz styczne do krzywych we wskazanych punktach:

a) $x^3 + x - y^3 - y = 0$, $A(2, 2)$;

b) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0$, $B(1, 1)$;

c) $xe^y + ye^x = e^{xy}$, $C(1, 0)$.

Zadanie 3. Dla podanych funkcji uwikłanych $y = y(x)$ wyznacz $y''(x)$:

a) $F(x, y) = 0$, dla funkcji F mającej pochodne cząstkowe drugiego rzędu;

b) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$;

c) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

d) $xe^y - y + 1 = 0$.

Zadanie 4. Znajdź przybliżenie podanej funkcji uwikłanej $y = y(x)$ wielomianem stopnia n w otoczeniu punktu (x_0, y_0) (wskazówka: zastosuj wzór Taylora):

a) $e^{xy} - x^2 y - 1 = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (2, 0)$;

b) $e^{xy} - x = 0$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$;

c) $\ln\left(y + x^3 + xy^3\right) - x^3 = 1 + xy^3$, $n = 2$, $(x_0, y_0) = (0, e)$;

d) $x^4 + \dfrac{4}{y^2} + \dfrac{4x^2}{y} - 1 = 0$, $n = 3$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

Zadanie 5. Znajdź ekstrema podanych funkcji uwikłanych y zmiennej x:

a) $x^2 + y^2 - 3axy = 0$, $(a \in \mathbb{R})$;

b) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$;

c) $x^5 + y^4 = 20xy^2$;

d) $x^2 e^y - y^4 + 1 = 0$;

e) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.

Zadanie 6. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji przy zadanych warunkach:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$, $2x^2 + y^2 = 4$;

b) $f(x, y) = \ln x + \ln y + xy$, $x^2y^2 - x^4 - 1 = 4x^3 + 6x^2 + 4x$;

c) $f(x, y) = x + y$, $e^{x+y} - xy - 1 = 0$;

d) $f(x, y) = y - \ln x$, $x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$

e) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 5$;

f) $f(x, y, z) = x + y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

g) $f(x, y, z) = xyz$, $x + y + z = a$, $(a > 0)$;

h) $f(x, y, z) = x + y + z$, $xyz = a$, $(a > 0)$.

Zestaw 12. Całki wielokrotne

Zadanie 1. Oblicz poniższe całki po podanych zbiorach:

a) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0, 2] \times [0, 1]$;

b) $\displaystyle\iint\limits_R xy \ln\frac{x}{y} dxdy$, $R = [1, e] \times [1, 2]$;

c) $\displaystyle\iint\limits_R e^{x-y} dxdy$, R – trójkąt o wierzchołkach $(1, 0), (3, 1), (2, 2)$;

d) $\displaystyle\iint\limits_R z^2 e^{x-y} dxdydz$, R – czworościan o wierzchołkach $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$.

e) $\displaystyle\iiint\limits_R \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}}$, $R = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

Zadanie 2. W podanych całkach zamień kolejność całkowania:

a) $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{|x|} f(x,y)\,dydx$;

b) $\int\limits_{0}^{4}\int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$.

Zadanie 3. Oblicz podane całki wprowadzając współrzędne biegunowe:

a) $\iint\limits_{D} xydxdy,\ D = \{(x,y) : x \geqslant 0, 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2\}$;

b) $\iint\limits_{D} x^2+y^2dxdy,\ D = \{(x,y) : y \geqslant 0, y \leqslant x^2+y^2 \leqslant x\}$.

Zadanie 4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi:

a) $y^2 = 4x,\ x+y = 3$;

b) $x^2+y^2-2y = 0,\ x^2+y^2-4y = 0$.

Zadanie 5. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami:

a) $x^2+y^2-2y = 0,\ z = x^2+y^2,\ z = 0$;

b) $x^2+y^2+z^2-2z = 0$.

Zadanie 6. Całkę potrójną $\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dxdydz$ zamień na całkę iterowaną, jeżeli U jest obszarem ograniczonym przez powierzchnie:

a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2},\ z = 6$;

b) $x^2+y^2+z^2 = 25,\ z = 4\ (z \geqslant 4)$;

c) $z = x^2+y^2,\ z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

Zadanie 7. Wprowadzając współrzędne walcowe lub sferyczne oblicz podane całki:

a) $\iiint\limits_{U} (x^2+y^2+z^2)^2\,dxdydz,\ U : x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

b) $\iiint\limits_{U} xyzdxdydz,\ U : \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

c) $\iiint\limits_{U} x^2+y^2dxdydz,\ U : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z$;

d) $\iiint\limits_{U} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ U : 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

e) $\iiint\limits_U x^2dxdydz,\ U: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x.$

Zestaw 13. Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

Zadanie 1. Oblicz podane całki krzywoliniowe (nieskierowane):

a) $\int\limits_K ye^{-x}dl$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach: $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,1)$;

b) $\int\limits_K \sqrt{x^2+y^2+4}dl$, gdzie K jest krzywą: $x(t)=2t\cos t$, $y(t)=2t\sin t$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$;

c) $\int\limits_K x-ydl$, gdzie $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 2y-x+2=0,\ x\in[0,4]\}$;

d) $\int\limits_K 4\sqrt{y}dl$, gdzie K jest łukiem paraboli $y=(x+1)^2$, $x\in[-1,1]$;

e) $\int\limits_K dl$, gdzie K jest krzywą powstałą w wyniku przecięcia się powierzchni $4z^2=x^2+y^2$ oraz $x^2+y^2+5z^2=9$ (dla $z\geqslant 0$).

Zadanie 2. Oblicz podane całki krzywoliniowe (skierowane):

a) $\int\limits_K xdx+ydy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,0)$;

b) $\int\limits_K \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, gdzie K jest elipsą $\frac{x^2}{4}+y^2=4$ zorientowaną ujemnie;

c) $\int\limits_K xe^ydx+ye^xdy$, gdzie K jest łukiem paraboli $x=y^2$, $y\in[-1,1]$ zorientowanym od punktu $(1,-1)$ do punktu $(1,1)$;

d) $\int\limits_K zdx+ydz+xdy$, gdzie K jest łukiem przestrzennym $x(t)=t^2+1$, $y(t)=t^2-1$, $z(t)=t$, $t\in[0,1]$ zorientowanym od punktu $(2,0,1)$ do punktu $(1,-1,0)$;

e) $\int\limits_K x^2y^2dx$, gdzie K jest brzegiem kwadratu $|x|+|y|\leqslant 4$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 3. Oblicz podane całki; jeżeli to możliwe zastosuj twierdzenie Greena:

a) $\int\limits_K ydx+(x+y)dy$, gdzie K jest zorientowanym dodatnio brzegiem figury ograniczonej krzywymi: $x=\sqrt{y}$, $x=0$, $y=4$;

b) $\iint\limits_G x^2 + y^2 dxdy$, gdzie $G = \{(x,y) : 1 \leqslant x \leqslant 2; x^2 \leqslant y \leqslant e^x\}$;

c) $\int\limits_K xydx + \left(\frac{1}{2}x^2 + \cos y\right) dy$, gdzie K jest krzywą o parametryzacji

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{2\,\mathrm{arctg}\left(\log_3\left(2\sin^2 t + 1\right)\right)}{\sin t + 1} \end{cases},$$

$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, zorientowaną od punktu $(0,0)$ do punktu $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$;

d) $\iint\limits_G 2dxdy$, gdzie G jest czworokątem o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(0,2)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$;

e) $\int\limits_K \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, gdzie K jest okręgiem $x^2 + y^2 = 1$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 4. Oblicz podane całki powierzchniowe (niezorientowane):

a) $\iint\limits_S x^2\sqrt{1 + 2z}dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z = \frac{1}{2}y^2$ zawartą między powierzchniami $|x| + |y| = 2$, $z = 0$;

b) $\iint\limits_S xyzdS$, gdzie S jest pobocznicą walca o promieniu $r = 2$, środku w punkcie $(0,0,0)$ zawartą między płaszczyznami $z = 0$ oraz $z = 4$;

c) $\iint\limits_S zdS$, gdzie S jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x + y + z = 1$, $2x = 1$, $2y = 1$, $2z = 1$;

d) $\iint\limits_S 2dS$, gdzie S jest powierzchnią $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$;

e) $\iint\limits_S \mathrm{arctg}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 8\right) dS$, gdzie S jest częścią powierzchni $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ zawartą w walcu $x^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 5. Oblicz podane całki powierzchniowe (zorientowane):

a) $\iint\limits_S ydydz - xdzdx + xydxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$;

b) $\iint\limits_S \ln xdydz + \ln ydzdx + \ln zdxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z = x + y$, $x > 1$, $y > 1$, $x + y < 4$;

c) $\iint\limits_S \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dydz$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią określoną zależnościami $z=2\sqrt{x^2+4y^2}$, $x^2+4y^2 \leqslant 4$.

d) $\iint\limits_S xy - x^2ydydz + y^2zdzdx - (z-x)\,ydxdy$, gdzie S jest dodatnio zorientowaną powierzchnią $x^2+y^2+z^2=9$, $z \geqslant \sqrt{5}$.

Zadanie 6. Oblicz podane całki stosując – jeżeli to możliwe – twierdzenie Stokesa lub twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego:

a) $\oint\limits_C xz^2dx + zy^2dy + yx^2dz$, gdzie C jest zorientowanym dodatnio brzegiem trójkąta o wierzchołkach $(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,0,1)\,;$

b) $\iint\limits_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną powierzchni $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

c) $\oint\limits_C (x+z)\,dx + \sin(y+z)\,dy + \cos zdz$, gdzie C jest zorientowaną ujemnie krzywą powstałą w wyniku przecięcia walca $x^2+y^2=4$ i płaszczyzny $x+y+z=1$;

d) $\iint\limits_S (x+y+z)\,dxdz$, gdzie S jest brzegiem czworościanu o wierzchołkach $(0,0,0)\,,\ (1,0,0)\,,$ $(0,1,0)\,,\ (1,1,1)$ zorientowanym dodatnio.

Zadanie 7. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie zamkniętą powierzchnią gładką. Co mierzy całka

$$\frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy?$$