Rozdział 5

Macierze

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) $(i = 1, ..., n; j = 1, ..., m)$ przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $a_{ij} \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nazywamy **macierzą** (rzeczywistą, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zespoloną w drugim przypadku). Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

będziemy też stosować uproszczoną notację $A = [a_{ij}]_{n\times m}$. Macierz (5.1) to macierz wymiaru $n\times m$ – ma ona n wierszy (poziome) i m kolumn (pionowe). Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach ze zbioru $\mathbb{F}$ będziemy oznaczać $\mathbb{F}^{n\times m}$. Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n. **Macierz zerowa** to macierz złożona z samych zer: $\mathbf{0} = [0]_{n\times m}$. Macierz kwadratowa, której wszystkie elementy – za wyjątkiem być może tych stojących na przekątnej – są równe zero nazywamy **macierzą diagonalną**:

$$\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną z jedynkami na przekątnej nazywamy **macierzą jednostkową** (ozn. I):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy kwadratowej stojące pod (nad) przekątną są równe zero to macierz tę nazywamy **macierzą trójkątną górną (trójkątną dolną)**. Macierze diagonalne są jednocześnie trójkątne górne i trójkątne dolne.

5.1. Działania na macierzach

5.1.1. Dodawania macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar

W zbiorze macierzy $\mathbb{F}^{n\times m}$ wprowadza się naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar:

- jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ to $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}$;
- dla $\alpha \in \mathbb{F}$: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{n\times m}$.

Przykład 5.1. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy prostokątnych ustalonego wymiaru (możemy dodawać tylko te macierze, które mają ten sam wymiar) z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

5.1.2. Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times k}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{k\times m}$. Możemy wówczas zdefiniować macierz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times m}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \quad (i = 1, ..., n;\ j = 1, ..., m) \tag{5.2}$$

będącą iloczynem macierzy A i B; ozn. $C = AB$.

Uwaga Aby można było wyznaczyć macierz AB, liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B.

Przykład 5.2. *Mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu macierzy:
Zakładamy, że wymiary macierzy A, B, C występujących w poniższych warunkach są takie, że wszystkie wyrażenia mają sens.

(i) *Działanie określone wzorem (5.2) jest:*
- *łączne:* $A(BC) = (AB)C$;
- *rozdzielne względem dodawania:* $A(B+C) = AB + AC$;
- *posiada element neutralny – jest nim macierz jednostkowa.*

(ii) *Na ogół:* $AB \neq BA$.
(iii) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ *lub* $B = 0$.
(iv) $AB = AC, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$.

Ćwiczenie Do punktów (ii)–(iv) podać stosowne przykłady.

5.1.3. Macierz transponowana

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^T \in \mathbb{F}^{m\times n}$, gdzie

$$A^T = [a_{ij}]^T \stackrel{df}{=} [a_{ji}],$$

nazywamy **macierzą transponowaną**.
Kolumny (wiersze) macierzy A są więc wierszami (kolumnami) macierzy A^T.

Własności operacji transponowania macierzy:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, dla $\alpha \in \mathbb{F}$;
- $(AB)^T = B^T A^T$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

5.1.4. Macierz sprzężona

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ określoną wzorem

$$A^* = [a_{ij}]^* \stackrel{df}{=} [\overline{a_{ji}}],$$

nazywamy **macierzą sprzężoną**.

Własności operacji sprzężenia macierzy:

- $(A+B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, dla $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $(AB)^* = B^* A^*$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

5.2. Wyznacznik macierzy

5.2.1. Definicja aksjomatyczna

Niech $\mathbb{F}^{n\times n}$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicja 5.1. *Funkcję* $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ *spełniającą warunki:*

(i) *dla macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}] = [A_1, \ldots, A_n]$, *gdzie* A_i *oznacza* $i-$*tą kolumnę* A, *przekształcenie* $A_i \to \det[A_1, \ldots, A_n]$ $(i = 1, ..., n)$ *jest liniowe, tzn. dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$\det[A_1, ..., \alpha A_i + \beta B_i, ..., A_n] = \alpha \det[A_1, ..., A_i, ..., A_n] + \beta \det[A_1, ..., B_i, ..., A_n];$$

(ii) $\det$ *jest funkcją alternującą, tzn. dla* $A_i = A_j$ *(dla wszystkich* $i \neq j$*):*

$$\det[A_1, ..., A_i, ..., A_j, ..., A_n] = 0,$$

(iii) $\det(I) = 1.$

Z powyższej definicji wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.1. *Jeżeli w macierzy kwadratowej zamienimy miejscami dwie kolumny (wiersze), to jej wyznacznik zmieni znak na przeciwny.*

Dowód: Rozważmy macierz powstałą z macierzy A przez dodanie do jej i–tej oraz j–tej kolumny odpowiednio kolumny j–tej oraz i–tej:

$$[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots].$$

Z warunku (ii) powyższej definicji wynika

$$\det[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] = 0.$$

Dodatkowo, z warunków (i) oraz (ii):

$$\begin{aligned} 0 &= \det[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] \\ &= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_i + A_j, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] \\ &= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots] + \det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] + \\ &\quad + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots] \\ &= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots], \end{aligned}$$

skąd ostatecznie wynika

$$\det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] = -\det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots].$$

■

Przykład 5.3. *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie definicji 5.1 mamy

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$- \left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$=2\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$- 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ 2\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$- 2\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +$$

$$- \left(-2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Kolumny macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ są elementami przestrzeni $\mathbb{F}^n$; możemy więc wyrazić je jako kombinacje liniowe wektorów bazy kononicznej $e_1, ..., e_n$:

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k, \quad \text{dla } i = 1, ..., n.$$

Stąd

$$\det A=\det\left[\sum_{k_1=1}^{n}a_{k_1 1}e_{k_1},\ldots,\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_n n}e_{k_n}\right]\overset{(i)}{=}\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}a_{k_1 1}\ldots a_{k_n n}\det\left[e_{k_1},...,e_{k_n}\right]$$
$$\overset{(ii)-(iii)}{=}\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n},$$

gdzie S_n to zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1,...,n\}$; $\operatorname{sgn}(\sigma)$ to znak permutacji σ ([1]).

Twierdzenie 5.2. *Istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki (i)–(iii) definicji 6.1; funkcja ta określona jest wzorem*

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\,a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}. \tag{5.3}$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $i\in\{1,...,n\}:\sigma(i)<i$, to dla pewnego $j\in\{1,...,n\}:\sigma(j)>j$. Stąd oraz ze wzoru (5.3) wynika następujący

Wniosek 5.3. *Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej.*

Własności wyznacznika macierzy ($A,B\in\mathbb{F}^{n\times n},\ \alpha\in\mathbb{F}$)**:**

- $\det A=\det A^T$;
- $\det(AB)=\det A\cdot\det B$;
- $\det(\alpha A)=\alpha^n\det A$;
- *jeżeli do któregoś wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn) to wyznacznik się nie zmieni;*
- *zamiana kolejności dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

5.2.2. Metoda Laplace'a

Niech $A=[a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n.

Definicja 5.2. ***Minorem*** *elementu a_{ij} macierzy $A=[a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} macierzy kwadratowej stopnia $n-1$ utworzonej z macierzy A przez usunięcie z niej $i-$tego wiersza oraz $j-$tej kolumny.*

Definicja 5.3. *Liczbę $(-1)^{i+j}M_{ij}$, gdzie M_{ij} jest minorem elementu a_{ij}, nazywamy* ***dopełnieniem algebraicznym*** *elementu a_{ij}.*

Twierdzenie 5.4 (Laplace). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A=[a_{ij}]$ stopnia $n\geq 2$:*

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\quad \textit{dla każdego } j=1,...,n$$

oraz

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}\quad \textit{dla każdego } i=1,...,n.$$

[1] $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^s$, gdzie s to liczba transpozycji (transpozycja to zamiana kolejności dwóch elementów) tworzących permutację σ.

Przykład 5.4. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, ze wzoru (5.3) otrzymujemy:*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Przykład 5.5. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ zastosujemy metodę Laplace'a (do pierwszej kolumny). Mamy*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$+ a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Ten sam wynik uzyskamy stosując tzw. schemat Sarrusa:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & + & + & & \\ \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ciekawostka Stosując do macierzy kwadratowej stopnia n metodę Laplace'a obliczania wyznacznika, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy stopnia $n-1$; każdy z tych wyznaczników wymaga z kolei obliczenia $n-1$ wyznaczników stopnia $n-2$, itd. Obliczenie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n wymaga więc obliczenia $\frac{1}{2}n!$ wyznaczników macierzy kwadratowych stopnia 2; dla macierzy stopnia $n = 20$ daje to ponad 10^{18} wyznaczników 2×2. Najszybszy obecnie komputer w Polsce, wykonujący prawie $4 \cdot 10^{13}$ operacji na sekundę, potrzebowałby na obliczenie tego wyznacznika ponad 126 dni! **Dla dużych n metoda Laplace'a jest więc wysoce niepraktyczna.**

5.2.3. Metoda Gaussa

Metoda Gaussa obliczania wyznacznika polega na przekształceniu danej macierzy do postaci trójkątnej. W przekształceniu tym wykorzystujemy tylko te operacje, które nie zmieniają wartości wyznacznika.

Przykład 5.6. *Mamy:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \to w_3 - w_1 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 10w_2 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = 35.$$

Metoda Gaussa jest jedną z najbardziej efektywnych metod obliczania wyznaczników macierzy. Jej numerycznie akceptowalna wersja wymaga wykonania tylko około n^3 operacji arytmetycznych!

5.3. Macierz odwrotna

Definicja 5.4. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ taką że $\det A \neq 0$ nazywamy* ***macierzą nieosobliwą****; w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest* ***macierzą osobliwą****.*

Przypomnijmy, że iloczyn macierzy jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n. Łatwo sprawdzić, że jest to również działanie łączne, którego elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n stopnia n (dowód przez bezpośredni rachunek). Nasuwa się więc następujące pytanie: *Czy każda macierz kwadratowa posiada element odwrotny (względem mnożenia)?*

Przykład 5.7. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że nie dla każdej macierzy istnieje element odwrotny.

Definicja 5.5. *Jeżeli dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ istnieje macierz $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ taka że:*

$$AX = XA = I_n,$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n, to macierz tę nazywamy ***macierzą odwrotną*** *do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Twierdzenie 5.5. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ posiadała macierz odwrotną jest warunek* $\det A \neq 0$.

Własności operacji odwracania macierzy $(A, B \in \mathbb{F}^{n\times n})$:

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ oraz $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Metoda macierzy dopełnień algebraicznych

Poniżej przedstawimy algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} oparty na macierzy dopełnień algebraicznych.

Krok 1. *Obliczamy* $\det A$. *Jeżeli* $\det A = 0$ *to macierz A^{-1} nie istnieje; jeżeli* $\det A \neq 0$, *przechodzimy do kroku drugiego.*
Krok 2. *Wyznaczamy macierz minorów $A_1 = [M_{ij}]$*;

Krok 3. *Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych* $A_2 = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]$;
Krok 4. *Wyznaczamy macierz* $A_3 = A_2^T$;
Krok 5. *Wyznaczamy macierz* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_3$.

Przykład 5.8. *Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Ponieważ $\det A = -5$ *zatem macierz odwrotna istnieje. Mamy więc:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_{ij}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)^{i+j}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{T}$$

$$\xrightarrow{T} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\det A}} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Metoda Gaussa

Metoda Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej polega na tym, aby z danej macierzy uzyskać macierz jednostkową. Te same operacje, które wykonujemy na macierzy A przeprowadzamy jednocześnie na macierzy jednostkowej. W momencie gdy wyjściowa macierz przyjmuje postać macierzy jednostkowej, macierz jednostkowa staje się macierzą A^{-1}.

Przykład 5.9. *Rozważmy ponownie macierz z poprzedniego przykładu. Mamy:*

$$[A\,|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 - \frac{1}{2} w_1 \\ w_3 \to w_3 - w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + \frac{4}{5} w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 \to -w_3 \\ w_2 \to w_2 - \frac{5}{2} w_3 \\ w_1 \to w_1 + w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 \to w_3 \\ w_2 \to \frac{2}{5} w_2 \\ w_1 \to w_1 + \frac{2}{5} w_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 \to \frac{1}{2} w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right] = \left[I\,|A^{-1}\right].$$

5.4. Rząd macierzy

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Można pokazać, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest taka sama jak liczba jej liniowo niezależnych wierszy. Liczbę tę, dla macierz A, oznaczamy $\operatorname{rank}(A)$ i nazywamy **rzędem** macierzy A.

Własności rzędu macierzy:

- dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A^T\right)$;
- dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy kombinacji liniowej pozostałych kolumn (wierszy) nie zmienia jej rzędu;
- dowolna zmiana kolejności kolumn (wierszy) macierzy nie zmienia jej rzędu.

Przykład 5.10. *Wyznaczymy rząd macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stosując metodę sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej, mamy:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{1}{2} w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - \frac{2}{3} w_2 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ tylko dwa pierwsze wiersze ostatniej macierzy są liniowo niezależne, zatem $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Twierdzenie 5.6. *Rząd macierzy A równy jest największemu stopniowi (wymiarowi) niezerowego minora macierzy A.*

Przykład 5.11. *Rozważmy ponownie macierz*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ zatem $\operatorname{rank}(A) \leq 3$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

zatem $\operatorname{rank}(A) \leq 2$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

zatem $\operatorname{rank}(A) = 2$.