第 4 讲：总平均费率厘定 (overall ratemaking)

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

1. 纯保费
   - 免赔额
   - 赔偿限额
2. 总平均费率厘定
   - 纯保费法
   - 赔付率法
   - 纯保费法 v.s. 赔付率法

有限期望值 (limited expected value)

Consider a positive random variable $X \in \mathbb{R}^+$, with pdf $f(x)$ and cdf $F(x)$, for $d > 0$, the limited expected value is defined as

$$\mathbb{E}(X \wedge d) = \int_0^d x f(x) dx + d\left[1 - F(d)\right] \tag{1}$$

对索赔次数的影响

- 不计免赔时, 保单持有人提出索赔的概率为

$$\Pr(\text{发生损失})$$

- 假设免赔额为 d, 保单持有人提出索赔的概率为

$$\Pr(\text{发生损失}) \times \Pr(X > d)$$

- 已知发生损失, 保单持有人提出索赔的条件概率为

$$v = \Pr(X > d) = 1 - F_X(d)$$

对索赔次数的影响

- 假设某保单发生了 N 次损失, 则累计索赔次数为

$$N^* = \sum_{i=1}^{N} I_i$$

其中 $I_i = 1_{\text{第 i 次损失引起索赔}} = 1_{x_i > d}$ 为指示函数.

- 由风险模型的知识可知, N^* 为一个复合分布, 其首分布为损失次数 N 的分布, 其次分布为参数为 v 的伯努利分布. 可以证明 N^* 的概率母函数 (pgf)为

$$P_{N^*}(z) = P_N(P_I(z)) = P_N(1 + vz - v),$$

这里, $P_{N^*}(z), P_N(z), P_I(z)$ 分别表示 N^*, N, I 的概率母函数.

- 假设 $N \sim \text{Poi}(\lambda)$, 则 $P_{N^*}(z) = e^{v\lambda(z-1)}$. 即 $N^* \sim \text{Poi}(v\lambda)$.

对索赔次数的影响

- 假设 N 服从 $(a,b,0)$ 或者 $(a,b,1)$ 分布 (见教材 2.2 损失次数模型), 则 N^* 和 N 同分布, 只是参数发生变化 (见表 3-15).
- $\mathbb{E}(N^*) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(I) = v\mathbb{E}(N) = [1 - F_X(d)]\,\mathbb{E}(N)$
- 假设 N 的概率母函数为 $P_1(P_2(z))$, 即 N 为一个复合分布, 则 $P_{N^*}(z) = P_1(P_2(1 + vz - v))$. 可知, N^* 也为复合分布, 其首分布次分布跟随 N 的首分布次分布, 但次分布参数发生变化. (见例 3-2, 3-3)

对索赔金额的影响

- 超额损失随机变量，含零赔款 (payments per loss)服从混合分布

$$Y^L = X - X \wedge d$$

$$\Pr(Y^L = 0) = \Pr(X \leq d) = F_X(d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y + d), y > 0$$

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y + d), y > 0$$

- 非零赔款 (payment per payment)服从连续分布

$$Y^P = X - d | X > d$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y + d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y + d)}{1 - F_X(d)}$$

对索赔金额的影响

- 期望公式

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X(d)}$$

- 假设通货膨胀率为 r, 免赔额不变则

$$\mathbb{E}(Y^L) = (1 + r)\left[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1 + r}\right)\right]$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

Under deductible, the pure premium(纯保费) is

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^L\right] = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N^*} Y_i^P\right] = \mathbb{E}(N^*)\mathbb{E}(Y^P)$$

.

假设赔偿限额为 u, Y 表示应用赔偿限额 u 所生成的随机变量, 则$Y = X \wedge u$的 cdf 和 pdf(混合分布) 分别为

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y = u \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y \geq u \end{cases}$$

- 假设赔偿限额为 u, 免赔额为 d, 则含零赔款为

$$Y^L = X \wedge (u+d) - X \wedge d,$$

非零赔款为

$$Y^P = X \wedge (u+d) - X \wedge d | X > d.$$

它们的期望分别为

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}\left[X \wedge (u+d)\right] - \mathbb{E}(X \wedge d)$$
$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X(d)}$$

- 假设通货膨胀率为 r, 赔偿限额和免赔额不变, 则

$$\mathbb{E}(Y^L) = (1+r)\left[\mathbb{E}\left(X \wedge \frac{u+d}{1+r}\right) - \mathbb{E}\left(X \wedge \frac{d}{1+r}\right)\right]$$
$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}$$

纯费率 (纯保费, pure premium)= 索赔频率 × 索赔强度 + 理赔费用

理赔费用 = ALAE + ULAE

承保费用 = 固定费用 + 变动费用 (随保费变化)

基本保险方程 (fundamental insurance equation)

保费 (R) = 赔款 + 理赔费用 (P) + 承保费用 (F+$R \times V$) + 承保利润附加 ($R \times Q$)

$$R = \frac{P+F}{1-V-Q}$$

其中, R 表示新费率, P 表示单位风险的赔款和理赔费用总和(纯保费), F 表示单位风险的固定费用, V 表示变动费用比率, Q 表示利润附加比率.

$$A = \frac{R}{R_0} = \frac{P/R_0 + F/R_0}{1 - V - Q}$$

其中, A 表示费率调整因子, R_0 表示**当前费率**, P/R_0 表示经验赔付率, F/R_0 表示固定费用比率.

- 两种方法**等价**, 因为其原理都是基本保险方程.
- 纯保费法适用于**风险单位数容易确定**. 商业火灾保险的风险单位在不同个体风险之间难以保持一致, 不适宜用纯保费.
- **新业务**的费率厘定最好用纯保费.
- 经验期费率变化较大, **等水平已赚保费不好求时**, 宜用纯保费法.

1. 阅读教材 77-92 页.
2. 完成 93 页习题 3.7-3.11. 3.9: 求 2014 年的**每次损失**的期望赔款.
3. 在 3 月 28 日之前, 完成大作业一.