第五章习题答案更正

5.1 某保单的索赔频率为常数，请计算信度因子为 0.5 的期望索赔次数。假设可靠程度要求达到 90%，波动幅度控制在 5% 以内。

答案: 请参考孟生旺老师新浪微博上的答案. 答案正确.

5.3 某公司拥有的汽车数目年每年不同。假设该公司每辆车每年出险的次数服从泊松分布，且泊松参数每年保持恒定。再假设不同车辆的泊松参数服从 [0，2] 上的均匀分布。该公司过去三年的经验索赔次数如下表所示。假设该公司 2007 年拥有三辆汽车，请应用 Bühlmann-Straub 信度模型估计该公司在 2007 年的总索赔次数。

答案: 请参考孟生旺老师新浪微博上的答案. 答案正确.

5.4 已知有四个风险等级的被保险人，每人可能发生的损失为 2 或 4，其分布如下表所示。随机选定某一风险等级（概率为 1/4），并从中选取四个被保险人，总的损失为 10。如果从同一风险等级再抽取一个被保险人，应用 Bühlmann-Straub 信度模型估计这五个被保险人的总损失。

答案: μ, v, a, z 的计算请参考孟生旺老师新浪微博上的答案. $z \times 2.5 + (1-z) \times 2.85 = 2.64$. 这五个被保险人的总损失估计为 10+2.64=12.64.

5.6 已知两份保单在过去三年的索赔次数如下表所示。假设每份保单的被保险人数在年度间保持不变，且分别为 20, 50，请计算：

(1) 单位风险 (每人) 索赔次数的过程方差的均值。

(2) 单位风险 (每人) 索赔次数的假设均值的方差。

(3) 每份保单年度索赔次数的信度估计值。

答案: 因为保单 AB 含有不同的风险单位数 (被保险人数), 所以需要使用 Bühlmann-Straub 模型.

(1)
$$\bar{Y}^1 = \frac{15}{60} = 0.25, \bar{Y}^2 = \frac{21}{150} = 0.14, \bar{Y} = \frac{36}{210} = 0.1714$$

$$\hat{v}^1 = \frac{20}{2}\left(0.05^2 + 0^2 + 0.05^2\right) = 0.05, \hat{v}^2 = \frac{50}{2}\left(0.02^2 + 0.02^2\right) = 0.02$$

$$\hat{v} = \frac{0.05 + 0.02}{2} = 0.035$$

(2)

$$\hat{a} = \left[210 - \frac{60^2 + 150^2}{210}\right]^{-1}\left[60 \times 0.0786^2 + 150 \times 0.0314^2 - 0.035\right]$$
$$= 0.0056$$

(3) Bühlmann 参数为 $\hat{K} = 0.035/0.0056 = 6.25$ 两份保单的信度因子分别为

$$\hat{Z}_1 = \frac{3 \times 20}{3 \times 20 + 6.25} = 0.9057$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{3 \times 50}{3 \times 50 + 6.25} = 0.9600$$

保单 A 和 B 年度索赔次数的信度估计分别为

$$20 \times (0.25 \times 0.9057 + 0.1714 \times 0.0943) \approx 5$$

$$50 \times (0.14 \times 0.9600 + 0.1714 \times 0.0400) \approx 7$$

5.7 题目不变

答案: $\hat{Z}$ 取零是因为 $\hat{a} < 0$, 而不是 $\hat{a}$ 接近于 0. 因为, 即使 $\hat{a}$ 接近于 0, 也无法确定 $\hat{K}$ 的大小.

5.8 题目不变

答案:

$$\hat{a} = \frac{(72 - 69.5)^2 + (67 - 69.5)^2}{2 - 1} - \frac{34.33}{4} = 3.9175$$

$$\hat{Z} = 0.3134$$

B 的信度保费为

$$0.3134 \times 67 + (1 - 0.3134) \times 69.5 = 68.72$$

5.9 已知两个风险 A 和 B 的损失金额服从下表所示的分布。风险 A 发生损失的概率是风险 B 的两倍。如果已知某个风险在某次事故中的损失额为 400，求该风险下次损失额的 Bühlmann 信度估计值。

答案: 请参考孟生旺老师新浪微博上的答案. 最后一步为:

$$\frac{1}{12} \times 400 + \frac{11}{12} \times 460 = 455$$

5.10 假设某奖惩系统有三个折扣等级：0，20%，30%，转移规则如下：

(1) 如果保单持有人在保险年度内无索赔发生，续保时将上升一个等级或保持在最高等级

(2) 如果保单持有人在保险期内发生了索赔，续保时将降低一个等级或维持在最低等级。

假设全额保费为 1000 元，每张保单的出险次数服从 $\lambda = 0.2$ 的泊松分布，并且每次损失的金额服从参数 $\mu = 5, \sigma = 3$ 的对数正态分布。如果该奖惩系统已经达到稳定状态，请计算每份保单的平均保费。

答案: 对处于 0% 折扣组 (第 $i = 1$ 等级) 的被保险人: 若无索赔, 将来的保费为 800, 700, 700, 700,...; 若有索赔, 将来保费为 1000, 800, 700, 700,.... 损失临界值为 $m_1 = (1000 + 800 + \cdots) - (800 + 700 + \cdots) = 300$. 即若发生比 300 小的损失, 处于第 1 等级被保险人选择不报案. 这里, 我们假设被保险人在考虑是否报案时, 采用了乐观的态度, 即认为未来不会再发生事故.

同理, 20% 折扣组 (第 $i = 2$ 等级) 的损失临界值为 $m_2 = 400$, 30% 折扣组 (第 $i = 3$ 等级) 的损失临界值为 $m_3 = 100$.

对于第 i 等级的被保险人, 当无损失发生或者发生损失且每次损失都小于 m_i时, 会选择不报案, 其概率为

$$e^{-0.2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-0.2} \frac{0.2^n}{n!} \left[\Phi \left(\frac{\ln m_i - 5}{3} \right) \right]^n,$$

可以得到处于 $i = 1, 2, 3$ 等级的被保险人不报案的概率分别为 0.9218, 0.9286, 0.8954. 这里的一个隐含假设是, 被保险人在出险时无法上报先前已发生未报案的事故, 只能决定是否上报此次事故.

转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0782 & 0.9218 & 0 \\ 0.0714 & 0 & 0.09286 \\ 0 & 0.1046 & 0.8954 \end{pmatrix} \tag{1}$$

可得

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 0.0078 & 0.1004 & 0.8918 \\ 0.0078 & 0.1004 & 0.8918 \\ 0.0078 & 0.1004 & 0.8918 \end{pmatrix} \tag{2}$$

所以稳态分布为 $(0.0078, 0.1004, 0.8918)$. 平均保费为

$$0.0078 \times 1000 + 0.1004 \times 800 + 0.8918 \times 700 = 712.$$

5.0 证明 为了使得信度保费总和等于实际损失的总和, 即

$$\sum_{r=1}^{R} m^r \bar{Y}^r = \sum_{r=1}^{R} m^r \left[\hat{Z}^r \bar{Y}^r + (1-\hat{Z}^r)\tilde{\mu}\right] \tag{3}$$

证明风险集合的总平均保费 $\tilde{\mu}$ 为:

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r \bar{Y}^r}{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r} \tag{4}$$

答案:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{R} m^r \bar{Y}^r &= \sum_{r=1}^{R} m^r \left[\hat{Z}^r \bar{Y}^r + (1-\hat{Z}^r)\tilde{\mu}\right] \\
\sum_{r=1}^{R} m^r (1-\hat{Z}^r) \bar{Y}^r &= \sum_{r=1}^{R} m^r (1-\hat{Z}^r)\tilde{\mu} \\
\sum_{r=1}^{R} \frac{m^r \hat{K}}{m^r + \hat{K}} \bar{Y}^r &= \tilde{\mu} \sum_{r=1}^{R} \frac{m^r \hat{K}}{m^r + \hat{K}} \\
\sum_{r=1}^{R} \frac{m^r}{m^r + \hat{K}} \bar{Y}^r &= \tilde{\mu} \sum_{r=1}^{R} \frac{m^r}{m^r + \hat{K}} \\
\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r \bar{Y}^r &= \tilde{\mu} \sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r \\
\tilde{\mu} &= \frac{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r \bar{Y}^r}{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r}
\end{aligned}$$