第 12 讲: 非寿险责任准备金评估模型 2

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

1. 未决赔款准备金评估模型
   - 案均赔款法 (PPCI, PPCF)
   - 准备金进展法 (projected case estimate)
   - 广义线性模型 (generalized linear model, GLM)

已报案案均赔款法

1. 计算已报案案均赔款 (payments per claim incurred)上三角:

$$PPCI_{ij} = C_{ij}/N_{ij}.$$

   其中, C_{ij} 表示累积已报案赔款, N_{ij} 表示累积已报案案件数.

2. 使用链梯法预测最终案均赔款: $\widehat{PPCI}_{i,\infty}$.
3. 使用链梯法预测最终案件数: $\widehat{N}_{i,\infty}$.
4. 估计未决赔款准备金:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,\infty} - C_{i,I-i} = \widehat{PPCI}_{i,\infty} \times \widehat{N}_{i,\infty} - C_{i,I-i}.$$

已结案案均赔款法一

1. 计算已结案案均赔款 (payments per claim finalized):

$$PPCF_{ij} = C_{ij}/M_{ij}.$$

其中, C_{ij} 表示累积已结案赔款, M_{ij} 表示累积已结案案件数.

2. 使用链梯法预测最终案均赔款: $\widehat{PPCF}_{i,\infty}$.
3. 使用链梯法预测最终案件数: $\widehat{M}_{i,\infty}$.
4. 估计未决赔款准备金:

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,\infty} - C_{i,I-i} = \widehat{PPCI}_{i,\infty} \times \widehat{M}_{i,\infty} - C_{i,I-i}.$$

已结案案均赔款法二

PPCI 和 PPCF1 都是基于累积数据. PPCF2 基于增量数据. PPCF2 假设已知已报案案件数, 已结案案件数 (或未结案案件数), 已结案赔款.

1. 基于已报案案件数, 使用链梯法预测最终案件数 $\hat{N}_{i,\infty}$.
2. 计算历史结案率 (disposal rates)$S_{i,j} = M_{i,j}/\hat{N}_{i,\infty}$, 其中, $M_{i,j}$ 表示累积已结案案件数. 比较 $(S_{i,j})_{i=1:I-j}$, 估计结案率 $\hat{s}_j$. 一般地, 令 $\hat{s}_{I-1} = 1$. 即假设所有赔案在进展年 $I-1$ 结案.
3. 预测未来结案的案件数 $\hat{M}_{i,j} = \hat{N}_{i,\infty} \times \hat{s}_j, i+j > I$.
4. 将累积结案案件数 $(M_{i,j}, \hat{M}_{i,j})$ 转化为增量结案案件数$(K_{i,j}, \hat{K}_{i,j})$.
5. 计算历史已结案案均赔款 $PPCF_{i,j} = Y_{i,j}/K_{i,j}$. 其中, Y_{ij} 为增量已结案赔款. 比较 $(PPCF_{i,j})_{i=1:I-j}$, 估计已结案案均赔款 $\widehat{ppcf}_j$.
6. 计算增量未决赔款 $\hat{Y}_{i,j} = \hat{K}_{i,j} \times \widehat{ppcf}_j$.

已结案案均赔款法二

- 一般地, 历史结案率 S_{ij} 随着进展年 j 增大而增大. 如果重立案件数过多时, S_{ij} 随着 j 增大可能减小.
- 已结案案件数受保险公司理赔部门工作效率的影响, 而已报案案件数相对稳定. 故使用已报案案件数估计最终案件数.
- 结案率的变化一般可以反映在 $(S_{i,j})_{i=1:I-j}$.

准备金进展法使用已付赔款和已报案未决赔款准备金 (aggregated case reserves)两个流量三角形.

1. 计算历史准备金支付率$A_{i,j}=Y_{i,j+1}/O_{i,j}$, 其中 $Y_{i,j+1}$ 为增量已付赔款, $O_{i,j}$ 为年末累积个案准备金. 比较 $(A_{i,j})_{i=1:I-j}$, 估计准备金支付率 $\hat{a}_j$.
2. 计算历史准备金转接率$B_{i,j+1}=O_{i,j+1}/O_{i,j}$. 比较 $(B_{i,j})_{i=1:I-j}$, 估计准备金转接率 $\hat{b}_j$.
3. 把 $(\hat{b}_j)_{j=0:I-2}$ 当做进展因子, 应用链梯法, 预测未来已报案未决赔款准备金:
$$\hat{O}_{i,k}=O_{i,I-i}\hat{b}_{I-i}\cdots\hat{b}_{k-1},\quad k>I-i.$$
4. 预测未来增量已付赔款
$$\hat{Y}_{i,k}=\begin{cases}O_{i,I-i}\hat{a}_{I-i}, & k=I-i+1\\ \hat{O}_{i,k-1}\hat{a}_{k-1}, & I-i+1<k\leq I-1\end{cases}\tag{1}$$

- $(a_j)_{j=0:I-2}$ 称为准备金支付率, 是指已付赔款占 (上一年末) 已报案未决赔款准备金的比率.
- $(b_j)_{j=0:I-2}$ 称为准备金转接率, 是指年末已报案未决赔款准备金和上一年末已报案未决赔款准备金的比率.
- 准备金进展比率 (paid to outstanding ratio, PO)为准备金支付率与转接率之和:

$$A_{i,j} + B_{i,j} = \frac{Y_{i,j+1} + O_{i,j+1}}{O_{i,j}}$$

- 如果不考虑报案延迟, 且假设个案准备金准确, 则准备金进展比率应为 1. 即上一年末的个案准备金刚好等于下一年内的应付赔款和下一年末应提取的个案准备金之和.

- 未决赔款是一个随机变量, 以上方法只给出了未决赔款的点估计.
- 在准备金评估中, 更重要的是量化未决赔款的分布.
- 准备金若设为未决赔款的中位数, 则准备金有一半的可能性不足以偿付未决赔款.
- 如果已知未决赔款的分布, 准备金可设为未决赔款的一些风险度量 (risk measure), 如 99% value-at-risk(VaR) 等. 这样准备金有极高的概率足够偿付未决赔款.
- 广义线性模型可以量化准备金评估中的估计方差和过程方差, 进而得到未决赔款的预测均方误差 (MSEP).
- GLM 结合Bootstrap, 可得到未决赔款的预测分布 (predictive distribution).

假设增量已付赔款$Y_{i,j}$ 服从过离散泊松 (over-dispersion Poisson, ODP)分布.

$$Y_{i,j} \overset{ind.}{\sim} \mathrm{ODP}(\mu_{i,j}, \phi) \tag{2}$$

- $\mathbb{E}(Y_{i,j}) = \mu_{i,j} = \alpha_i \beta_j$, $\mathrm{Var}(Y_{i,j}) = \phi \mu_{i,j}$
- 定义标准化后的参数:

$$\alpha_i^* = \alpha_i \sum_{j=0}^{I-1} \beta_j, \quad \beta_j^* = \frac{\beta_j}{\sum_{l=0}^{I-1} \beta_l}$$

- α_i^* 为期望最终赔款, β_j^* 为已付赔款比例.
- 使用过离散泊松分布为了刻画数据的离散程度. 如果 $\hat{\phi} \approx 1$, 可用泊松分布代替 ODP.
- 过离散泊松分布也可以换成伽马分布, 取决于数据的离散程度.

- 在 R 中, 通过如下命令建立 ODP-GLM:

$$glm(Y \sim acc + dev, family = quasipoisson)$$

- 这里 acc 和 dev 为离散型随机变量. glm 命令自动为每个水平建立哑变量 (dummy variable).
- 下三角中的未决赔款估计为 $\hat{Y}_{i,j} = \widehat{\mathbb{E}(Y_{i,j})} = \hat{\mu}_{i,j} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$.
- $\hat{Y}_{i,j}$ 的预测均方误差为 (见第 6 讲)

$$\mathbb{E}\left[\left(Y_{i,j} - \hat{Y}_{i,j}\right)^2\right] \approx \mathrm{Var}(\hat{Y}_{i,j}) + \mathrm{Var}(Y_{i,j}).$$

- $\mathrm{Var}(\hat{Y}_{i,j})$ 为估计方差, $\mathrm{Var}(Y_{i,j})$ 为过程方差.
- $\hat{Y}_{i,j}$ 的估计方差可通过 $predict$ 函数得到; $\hat{Y}_{i,j}$ 的过程方差由模型假设(2)决定.

- 在准备金评估中, 通常对某一事故年或者总的未决赔款的预测均方误差更感兴趣.
- $\hat{R}_i = \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \hat{Y}_{i,j}$ 的预测均方误差为

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(R_i - \hat{R}_i\right)^2\right] \\
\approx &\mathrm{Var}(\hat{R}_i) + \mathrm{Var}(R_i) \\
= &\sum_{j=I-i+1}^{I-1} \mathrm{Var}(\hat{Y}_{i,j}) + \sum_{l \neq k} \mathrm{Cov}(\hat{Y}_{i,l}, \hat{Y}_{i,k}) + \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \mathrm{Var}(Y_{i,j}).
\end{aligned}
$$

- 从上式可知 $\hat{R}_i$ 的 MSEP不等于$(\hat{Y}_{i,j})_{j=I-i+1}^{I-1}$ 的 MSEP 之和:

$$
\mathrm{MSEP}(\hat{R}_i) \neq \sum_{j=I-i+1}^{I-1} \mathrm{MSEP}(\hat{Y}_{i,j})
$$

Bootstrap

- 和 $\hat{Y}_{i,j}$ 的 MSEP 相比, $\hat{R}_i$ 的 MSEP 不容易得到. 因为需要考虑$\mathrm{Cov}(\hat{Y}_{i,l}, \hat{Y}_{i,k}), l \neq k$.
- 使用 Bootstrap 方法可以避免复杂的解析解.
- Bootstrap 通过抽样和模拟方法得到 R_i 的预测分布.
- 这里介绍non-parametric bootstrap方法.

Bootstrap

使用原始数据建立 ODP-GLM, Pearson 残差可计算为

$$r_{ij} = \frac{Y_{i,j} - \hat{\mu}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}}}, \quad i + j \leq I. \tag{3}$$

如果模型适当的话, 残差近似为白噪声, 即 r_{ij} 和下角标 i, j 没有明显的关系. Bootstrap 通过有放回抽样残差, 得到新的上三角.

Bootstrap

具体而言, 第 $t = 1, \ldots, T$ 步 bootstrap 包含以下三个过程:

1. 从残差集合 $r = \{r_{i,j} : i + j \leq I\}$有放回抽样, 得到新的残差集合 $r^t = \{r^t_{ij} : i + j \leq I\}$. 依据(3), 计算Bootstrap 上三角样本:

$$Y^t_{i,j} = \max\left(r^t_{ij}\sqrt{\hat{\mu}_{i,j}} + \hat{\mu}_{i,j}, 0\right), \quad i + j \leq I$$

2. 对上三角 $\{Y^t_{i,j} : i + j \leq I\}$ 建立新ODP-GLM, 求得参数的极大似然估计 $\hat{\alpha}^t_i, \hat{\beta}^t_j, \hat{\phi}^t$, 并依据下式预测下三角部分

$$Y^t_{i,j} \sim \hat{\phi}^t \cdot \mathrm{Poi}(\hat{\mu}^t_{i,j}/\hat{\phi}^t), \quad i + j \geq I + 1$$

3. 基于下三角 $\{Y^t_{i,j} : i + j \geq I + 1\}$, 计算

$$R^t_i = \sum_{j=I-i+1}^{I-1} Y^t_{i,j}, \quad R^t = \sum_{i=2}^{I} R^t_i$$

.

Bootstrap

- $(R_i^t)_{t=1}^T$ 和 $(R^t)_{t=1}^T$ 的经验分布 (empirical distribution)为其预测分布的估计.
- 事故年 i 未决赔款的预测值可取为样本均值

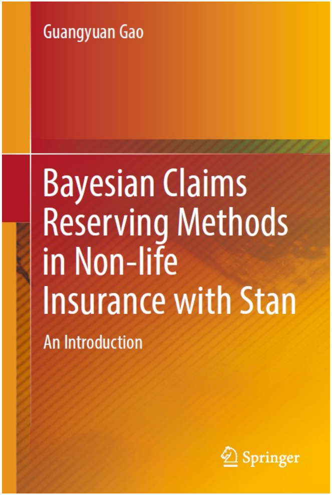
$$\bar{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_i^t.$$

- $\bar{R}_i$ 的预测均方误差可用样本方差估计:

$$\mathrm{MSEP}(\bar{R}_i) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_i^t - \bar{R}_i)^2.$$

- 事故年 i 未决赔款的95%VaR可用样本的 95% 分位数估计.

贝叶斯模型


Guangyuan Gao
Bayesian Claims Reserving Methods in Non-life Insurance with Stan
An Introduction
Springer

- 阅读教材 197-211 页, 215-220 页.
- 完成习题 8.3, 8.5.
- 注: 217 页最后一段话中, “则 $\mu = 5.5988$” 应为 “则 $\ln\hat{\mu} = 5.5988$”.
- 注: 表 8-45, 8-47 中列出的参数估计应该对应 $\ln(\hat{\alpha}_i), \ln(\hat{\beta}_j), i, j = 2, \ldots, 10$.