

第 5 讲：分类费率厘定 1

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

- ① 风险分类
 - 精算角度
 - 经营角度
 - 社会和法律角度

- ② 确定性分类费率厘定模型
 - 单变量分析法
 - 迭代法

- 总平均费率厘定 (overall indication) 从整体上保证了保费的充足性. 但它没有考虑不同个体间的风险差异.
- 对于大部分保险产品, 个体的经验损失数据很少, 需要把具有相近潜在损失的个体划分为一个风险集合, 并对其进行费率厘定, 称为**分类费率厘定 (classification rating)**.
- 对个体风险进行分类的特征通常称为**分类变量**或**费率因子 (rating factor)**.
- **风险分类**是通过**分类变量**将所有个体风险划分为若干个风险集合的过程.

注: 这里的分类变量指**风险分类变量**和统计学上的分类变量 (categorical variable) 不同.

- 风险分类有助于克服个体损失数据不足的问题.
- 风险分类的目的是获得相对同质 (homogeneous) 的风险子集.
- 分类费率厘定有利于消除逆选择 (anti-selection) 和道德风险 (morality risk).
- 选择分类变量时, 要从精算、经营、社会和法律等不同角度进行评价.

Statistical significance, Homogeneity, Credibility

- 通过建立统计模型, 评估不同风险类别的潜在损失是否具有显著的统计差异 (statistical significance).
- 每个风险类别中个体的潜在损失足够接近 VS 每个风险类别中的风险单位数足够多, 即

同质性 (homogeneity) VS 可靠性 (credibility)

市场机制和逆选择

恰当地选择分类变量有利于消除逆选择 (anti-selection)

例:

A 类被保险人的潜在损失为 100,

B 类被保险人的潜在损失为 200.

保险公司 1 未发现 AB 的差异性, 使用费率 150.

保险公司 2 发现了 AB 的差异性, 使用费率 100(A) 和 200(B).

结果, A 类被保险人更倾向于购买保险公司 2 的产品, B 类被保险人更倾向于购买保险公司 1 的产品.

最后, 保险公司 1 亏损, 保险公司 2 盈利.

Objective, Inexpensive to administer, Verifiable

- **Objective**: 分类变量的定义要清晰明了.
- **Inexpensive to administer**: 分类变量的度量成本不能过高.
- **Verifiable**: 分类变量容易度量, 不易受到人为操纵, 避免道德风险.

分类变量的度量成本

例:

A 类潜在损失 800,

B 类潜在损失 1000,

C 类潜在损失 1200,

度量该分类变量的费用为 200.

如果不使用该分类变量, 每类的保险成本为 1000.

如果使用该分类变量, 则 A, B, C 的保险成本为 1000, 1200, 1400, 都高于 1000.

保险公司和被保险人都愿使用该分类变量.

Affordability, Causality, Controllability, Privacy

- Affordability: 在强制性保险中, 风险分类需要考虑到所有被保险人对费率的承受能力.
- Causality: 分类变量和潜在损失有直接的因果关系.
- Controllability: 理想的分类变量满足可控性, 即被保险人可以控制自己所属的风险集合.
- Privacy: 分类变量不宜涉及个人隐私.
- 很多国家的法律规定, 风险分类不能有种族歧视和性别歧视, 即使它们和潜在损失有显著的关系.

乘法模型和加法模型

假设有两个费率因子 x_1, x_2 , 它们为分类变量, 分别有 I 和 J 个水平. 这两个分类变量可以把被保险人划分为 $I \times J$ 个风险集合. 计属于 $(i, j)_{i=1:I, j=1:J}$ 风险集合的被保险人风险单位数为 n_{ij} , 经验赔款为 C_{ij} , 经验纯保费为 $Y_{ij} = C_{ij}/n_{ij}$, 损失期望为 $\mu_{ij} = \mathbb{E}(Y_{ij})$.

乘法模型 (multiplicative model) 假设

$$\mu_{ij} = \alpha_i \times \beta_j.$$

加法模型 (additive model) 假设

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

乘法模型和加法模型

- 基于以上的模型, 可以用 $I + J$ 个相对费率 $(\alpha_i)_{i=1:I}, (\beta_j)_{j=1:J}$ 对 $I \times J$ 个风险集合进行分类费率厘定.
- 以上的模型有一个隐含假设是: 费率因子 x_1, x_2 之间没有交互作用 (interaction effect).

例

原则：每次仅计算一个分类变量的不同水平所对应的相对费率。

Table 1: 汽车保单的经验赔付率

| | 车型 1 | | 车型 2 | | Total | |
|-------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|
| | Exposure | Loss Ratio | Exposure | Loss Ratio | Exposure | Loss Ratio |
| 地区 A | 2000 | 40% | 8000 | 80% | 10000 | 72% |
| 地区 B | 8000 | 40% | 2000 | 80% | 10000 | 48% |
| Total | 10000 | 40% | 10000 | 80% | 12500 | 60% |

表1给出的赔付率是基于总平均费率，即每个风险集合都采用一样的总平均费率：

$$\text{赔付率} = \frac{\text{赔款}}{\text{风险单位数} \times \text{总平均费率}}$$

例 (续)

地区 A 的赔付率为 72%, 地区 B 的赔付率为 48%. 所以总平均费率对于地区 A 显得过少, 对于地区 B 显得过多.

以地区 A 车型 1 为**基础类别**, 地区 B 的相对费率应该为 $0.48/0.72 = 0.6667$, 车型 2 的相对费率应该为 $0.8/0.4 = 2$. 这样可得到如下的相对费率:

Table 2: 应用单变量分析法计算的相对费率

| | 车型 1 | 车型 2 |
|------|--------|--------|
| 地区 A | 1 | 2 |
| 地区 B | 0.6667 | 1.3334 |

例 (续): 结果讨论

- 相对费率厘定的理想目标是: 使得每个风险集合中的赔付率相等.
- 使用表2的相对费率计算新的赔付率. A1 的赔付率为 0.4, A2 的赔付率为 $0.8/2=0.4$, B1 的赔付率为 $0.4/0.6667=0.6000$, B2 的赔付率为 $0.8/1.3334=0.6000$.
- 使用表2的相对费率, 并没达到我们的理想目标. 原因是: 地区 A 比地区 B 有更多的“高风险”车型 2, 这使得地区 A 的赔付率远高于地区 B 的赔付率. 所以 $0.48/0.72$ 不能完全归结于 A 和 B 的差异, 它还包含了在 A 和 B 地区车型分布的差异.
- 实际上, 地区 AB 无差异, 车型 2 与车型 1 的相对费率为 2.

例 (续): 单变量分析法适用的情形

Table 3: 单变量分析法适用的情形

| | 车型 1 | | 车型 2 | | Total | |
|-------|----------|------------|----------|------------|----------|------------|
| | Exposure | Loss Ratio | Exposure | Loss Ratio | Exposure | Loss Ratio |
| 地区 A | 2000 | 40% | 8000 | 80% | 10000 | 72% |
| 地区 B | 500 | 40% | 2000 | 80% | 2500 | 72% |
| Total | 2500 | 40% | 10000 | 80% | 12500 | 72% |

- 在地区 A 和 B, 车型 2 的风险单位数都为车型 1 的两倍.
- 赔付率 72% 和 72% 的差异完全归结于地区分类变量, 即地区的相对费率为 1.
- 同理, 车型 2 的相对费率为 2.

注: 教材 4.2.2 为选读, 不在考察范围内.

- 迭代法 (iteration method) 又称作最小偏差法 (minimum bias method).
- 迭代法可以克服单变量分析法的缺点.
- 迭代法的关键在于建立迭代公式.
- 根据迭代公式的含义和性质, 可分为
 - ① 直接法
 - ② 边际总和法
 - ③ 最小卡方法
 - ④ 最小二乘法
 - ⑤ 极大似然法
 - ⑥ 加权边际总和法

Setting

假设有两个费率因子 x_1, x_2 , 它们为分类变量, 分别有 I 和 J 个水平. 这两个分类变量可以把被保险人划分为 $I \times J$ 个风险集合. 计属于 $(i, j)_{i=1:I, j=1:J}$ 风险集合的被保险人风险单位数为 n_{ij} , 经验赔款为 C_{ij} , 经验纯保费为 $Y_{ij} = C_{ij}/n_{ij}$, 损失期望为 $\mu_{ij} = \mathbb{E}(Y_{ij})$.

乘法模型 (multiplicative model) 假设

$$\mu_{ij} = \alpha_i \times \beta_j.$$

加法模型 (additive model) 假设

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_j.$$

直接法

原理: $\alpha_i = \frac{\mathbb{E}(Y_{ij})}{\beta_j} = \mathbb{E} \left[\frac{Y_{ij}}{\beta_j} \right]$, $\beta_j = \frac{\mathbb{E}(Y_{ij})}{\alpha_i} = \mathbb{E} \left[\frac{Y_{ij}}{\alpha_i} \right]$. 这两个式子可用 $Y_{ij}/\beta_j, Y_{ij}/\alpha_i$ 的**加权平均**进行估计, 权重为 n_{ij} (风险单位数越多, 经验损失越能反映潜在损失).

迭代公式:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sum_{j=1}^J n_{ij} \frac{Y_{ij}}{\beta_j}}{\sum_{j=1}^J n_{ij}}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^I n_{ij} \frac{Y_{ij}}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^I n_{ij}}, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (1)$$

边际总和法 (marginal total method)

原理: 每个费率因子的不同水平计算的**纯保费**之和等于对应的**经验赔款**.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J C_{ij} &= \sum_{j=1}^J n_{ij} \alpha_i \beta_j, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \sum_{i=1}^I C_{ij} &= \sum_{i=1}^I n_{ij} \alpha_i \beta_j, & \text{for } j = 1, \dots, J\end{aligned}\tag{2}$$

上面 $I + J$ 个方程等价于

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\sum_{j=1}^J C_{ij}}{\sum_{j=1}^J n_{ij} \beta_j}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^I C_{ij}}{\sum_{i=1}^I n_{ij} \alpha_i}, & \text{for } j = 1, \dots, J\end{aligned}\tag{3}$$

边际总和法 (marginal total method)

- 给定初始值 $\beta_j^0 = 1, j = 1, \dots, J$. 通过迭代(3), 可以得到方程组(2)的解.
- 可以假设 $\mu_{ij} = \mu \alpha_i \beta_j$, 这里 μ 表示总平均费率, 即

$$\mu = \frac{\sum_{ij} C_{ij}}{\sum_{ij} n_{ij}}$$

- 加法模型的迭代公式如下:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sum_{j=1}^J C_{ij} - n_{ij} \beta_j}{\sum_{j=1}^J n_{ij}}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^I C_{ij} - n_{ij} \alpha_i}{\sum_{i=1}^I n_{ij}}, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (4)$$

最小卡方法

原理: 估计相对费率使得如下的目标函数 (或损失函数) 最小.

$$\arg \min_{\alpha, \beta} \sum_{ij} \frac{n_{ij}(Y_{ij} - \alpha_i \beta_j)^2}{\alpha_i \beta_j}$$

- 上述目标函数类似于 χ^2 检验中的统计量.
- 上述目标函数关于 α, β 求导, 可得如下迭代公式

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \left[\frac{\sum_{j=1}^J \frac{n_{ij} Y_{ij}^2}{\beta_j}}{\sum_{j=1}^J n_{ij} \beta_j} \right]^{1/2}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \left[\frac{\sum_{i=1}^I \frac{n_{ij} Y_{ij}^2}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^I n_{ij} \alpha_i} \right]^{1/2}, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (5)$$

最小卡方法

求证: 保费总额不会小于经验赔款总额, 即

$$\sum_{j=1}^J n_{ij} \alpha_i \beta_j \geq \sum_{j=1}^J C_{ij} \text{ and } \sum_{i=1}^I n_{ij} \alpha_i \beta_j \geq \sum_{i=1}^I C_{ij}$$

证明:

$$\alpha_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^J \frac{n_{ij} Y_{ij}^2}{\beta_j}}{\sum_{j=1}^J n_{ij} \beta_j} = \sum_{j=1}^J \left[\frac{n_{ij} \beta_j}{\sum_{h=1}^J n_{ih} \beta_h} \left(\frac{Y_{ij}}{\beta_j} \right)^2 \right]$$

假设随机变量 $U_j = \frac{Y_{ij}}{\beta_j}$, 其 pmf 为 $\Pr(U_j) = \frac{n_{ij} \beta_j}{\sum_{h=1}^J n_{ih} \beta_h}$. 所以

$$\alpha_i^2 = \mathbb{E}(U^2) \geq \mathbb{E}(U)^2.$$

最小卡方法

So

$$\alpha_i \geq \mathbb{E}(U) = \sum_{j=1}^J \left[\frac{n_{ij}\beta_j}{\sum_{h=1}^J n_{ih}\beta_h} \frac{Y_{ij}}{\beta_j} \right] = \frac{\sum_{j=1}^J n_{ij}Y_{ij}}{\sum_{j=1}^J n_{ij}\beta_j}$$

Reorganizing the above equation leads to

$$\sum_{j=1}^J n_{ij}\alpha_i\beta_j \geq \sum_{j=1}^J C_{ij}$$

最小二乘法

原理: 估计相对费率使得如下的目标函数 (或损失函数) 最小.

$$\arg \min_{\alpha, \beta} \sum_{ij} n_{ij} (Y_{ij} - \alpha_i \beta_j)^2.$$

迭代方程为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\sum_{j=1}^J C_{ij} \beta_j}{\sum_{j=1}^J n_{ij} \beta_j^2}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^I C_{ij} \alpha_i}{\sum_{i=1}^I n_{ij} \alpha_i^2}, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (6)$$

对于加法模型, 其等价于线性模型 (linear model).

极大似然法 (指数分布)

原理: 估计相对费率使得似然函数最大.

假设 C_{ij} 服从参数为 $n_{ij}\alpha_i\beta_j$ 的指数分布, 则全样本 $\mathcal{D} = (C_{ij})_{i=1:I, j=i:J}$ 的似然函数 (likelihood) 为

$$L(\alpha, \beta | \mathcal{D}) = \prod_{i,j} \frac{1}{n_{ij}\alpha_i\beta_j} \exp \left[-\frac{n_{ij}Y_{ij}}{n_{ij}\alpha_i\beta_j} \right].$$

其对数似然函数 (log likelihood) 为

$$l(\alpha, \beta | \mathcal{D}) = \log L(\alpha, \beta | \mathcal{D}) = \sum_{ij} \left[-\ln n_{ij} - \ln \alpha_i - \ln \beta_j - \frac{Y_{ij}}{\alpha_i\beta_j} \right]$$

极大似然法 (指数分布)

上式关于 α, β 分别求偏导, 并令其等于零, 可得如下的迭代公式

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{Y_{ij}}{\beta_j}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \frac{Y_{ij}}{\alpha_i}, & \text{for } j = 1, \dots, J\end{aligned}\tag{7}$$

极大似然法 (伽马分布)

假设 C_{ij} 服从期望为 $n_{ij}\alpha_i\beta_j$ 的伽马分布. 可以证明如下的迭代公式:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\sum_{j=1}^J \frac{C_{ij}}{\beta_j}}{\sum_{j=1}^J n_{ij}}, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=1}^I \frac{C_{ij}}{\alpha_i}}{\sum_{i=1}^I n_{ij}}, & \text{for } j = 1, \dots, J\end{aligned}\tag{8}$$

伽马分布的极大似然法等价于直接法(1).

加权边际总和法

式(2)等价于

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J n_{ij}(\alpha_i \beta_j - Y_{ij}) &= 0, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \sum_{i=1}^I n_{ij}(\alpha_i \beta_j - Y_{ij}) &= 0, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (9)$$

引入权重 ω_{ij} , 得如下加权边际总和法:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \omega_{ij} n_{ij}(\alpha_i \beta_j - Y_{ij}) &= 0, & \text{for } i = 1, \dots, I \\ \sum_{i=1}^I \omega_{ij} n_{ij}(\alpha_i \beta_j - Y_{ij}) &= 0, & \text{for } j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (10)$$

加权边际总和法

前面的五种迭代方法都可以表述为特殊的加权边际总和法

- ① 直接法: $\omega_{ij} = 1/(\alpha_i\beta_j)$
- ② 边际总和法: $\omega_{ij} = 1$
- ③ 最小卡方法: $\omega_{ij} = 1 + Y_{ij}/(\alpha_i\beta_j)$
- ④ 最小二乘法: $\omega_{ij} = \alpha_i\beta_j$
- ⑤ 极大似然法 (伽马分布): $\omega_{ij} = 1/(\alpha_i\beta_j)$

- ① 阅读教材 95-117 页. 4.2.2 节为选读, 不在考察范围内.
- ② 完成 126 页习题 4.4 - 4.6.
- ③ 选做: 证明式(5).