

第 4 讲：总平均费率厘定 (overall ratemaking)

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

- ① 纯保费
 - 免赔额
 - 赔偿限额

- ② 总平均费率厘定
 - 纯保费法
 - 赔付率法
 - 纯保费法 v.s. 赔付率法

有限期望值 (limited expected value)

Consider a positive random variable $X \in \mathbb{R}^+$, with pdf $f(x)$ and cdf $F(x)$, for $d > 0$, the **limited expected value** is defined as

$$\mathbb{E}(X \wedge d) = \int_0^d x f(x) dx + d [1 - F(d)] \quad (1)$$

对索赔次数的影响

- 不计免赔时, 保单持有人提出索赔的概率为

$$\Pr(\text{发生损失})$$

- 假设免赔额为 d , 保单持有人提出索赔的概率为

$$\Pr(\text{发生损失}) \times \Pr(X > d)$$

- 已知发生损失, 保单持有人提出索赔的**条件概率**为

$$v = \Pr(X > d) = 1 - F_X(d)$$

对索赔次数的影响

- 假设某保单发生了 N 次损失, 则累计索赔次数为

$$N^* = \sum_{i=1}^N I_i$$

其中 $I_i = 1$ 第 i 次损失引起索赔 $= 1_{x_i > d}$ 为指示函数.

- 由风险模型的知识可知, N^* 为一个复合分布, 其首分布为损失次数 N 的分布, 其次分布为参数为 v 的伯努利分布. 可以证明 N^* 的概率母函数 (pgf) 为

$$P_{N^*}(z) = P_N(P_I(z)) = P_N(1 + vz - v),$$

这里, $P_{N^*}(z), P_N(z), P_I(z)$ 分别表示 N^*, N, I 的概率母函数.

- 假设 $N \sim \text{Poi}(\lambda)$, 则 $P_{N^*}(z) = e^{v\lambda(z-1)}$. 即 $N^* \sim \text{Poi}(v\lambda)$.

对索赔次数的影响

- 假设 N 服从 $(a, b, 0)$ 或者 $(a, b, 1)$ 分布 (见教材 2.2 损失次数模型), 则 N^* 和 N 同分布, 只是参数发生变化 (见表 3-15).
- $\mathbb{E}(N^*) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(I) = v\mathbb{E}(N) = [1 - F_X(d)] \mathbb{E}(N)$
- 假设 N 的概率母函数为 $P_1(P_2(z))$, 即 N 为一个复合分布, 则 $P_{N^*}(z) = P_1(P_2(1 + vz - v))$. 可知, N^* 也为复合分布, 其首分布次分布跟随 N 的首分布次分布, 但次分布参数发生变化. (见例 3-2, 3-3)

对索赔金额的影响

- 超额损失随机变量, 含零赔款 (payments per loss) 服从混合分布

$$Y^L = X - X \wedge d$$

$$\Pr(Y^L = 0) = \Pr(X \leq d) = F_X(d)$$

$$F_{Y^L}(y) = F_X(y + d), y > 0$$

$$f_{Y^L}(y) = f_X(y + d), y > 0$$

- 非零赔款 (payment per payment) 服从连续分布

$$Y^P = X - d | X > d$$

$$F_{Y^P}(y) = \frac{F_X(y + d) - F_X(d)}{1 - F_X(d)}$$

$$f_{Y^P}(y) = \frac{f_X(y + d)}{1 - F_X(d)}$$

对索赔金额的影响

- 期望公式

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X(d)}$$

- 假设通货膨胀率为 r , 免赔额不变则

$$\mathbb{E}(Y^L) = (1 + r) \left[\mathbb{E}(X) - \mathbb{E} \left(X \wedge \frac{d}{1 + r} \right) \right]$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X \left(\frac{d}{1 + r} \right)}$$

Under deductible, the **pure premium**(纯保费) is

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N Y_i^L \right] = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N^*} Y_i^P \right] = \mathbb{E}(N^*) \mathbb{E}(Y^P)$$

假设赔偿限额为 u , Y 表示应用赔偿限额 u 所生成的随机变量, 则 $Y = X \wedge u$ 的 cdf 和 pdf(混合分布) 分别为

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y \geq u \end{cases}$$

- 假设赔偿限额为 u , 免赔额为 d , 则含零赔款为

$$Y^L = X \wedge (u + d) - X \wedge d,$$

非零赔款为

$$Y^P = X \wedge (u + d) - X \wedge d | X > d.$$

它们的期望分别为

$$\mathbb{E}(Y^L) = \mathbb{E}[X \wedge (u + d)] - \mathbb{E}(X \wedge d)$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X(d)}$$

- 假设通货膨胀率为 r , 赔偿限额和免赔额不变, 则

$$\mathbb{E}(Y^L) = (1 + r) \left[\mathbb{E} \left(X \wedge \frac{u + d}{1 + r} \right) - \mathbb{E} \left(X \wedge \frac{d}{1 + r} \right) \right]$$

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F_X \left(\frac{d}{1 + r} \right)}$$

纯费率 (纯保费, pure premium) = 索赔频率 \times 索赔强度 + 理赔费用

$$\text{理赔费用} = \text{ALAE} + \text{ULAE}$$

$$\text{承保费用} = \text{固定费用} + \text{变动费用 (随保费变化)}$$

基本保险方程 (fundamental insurance equation)

保费 (R) = 赔款 + 理赔费用 (P) + 承保费用 ($F + R \times V$) + 承保利润附加 ($R \times Q$)

$$R = \frac{P + F}{1 - V - Q}$$

其中, R 表示新费率, P 表示单位风险的赔款和理赔费用总和 (纯保费), F 表示单位风险的固定费用, V 表示变动费用比率, Q 表示利润附加比率.

$$A = \frac{R}{R_0} = \frac{P/R_0 + F/R_0}{1 - V - Q}$$

其中, A 表示费率调整因子, R_0 表示**当前费率**, P/R_0 表示经验赔付率, F/R_0 表示固定费用比率.

- 两种方法**等价**，因为其原理都是基本保险方程。
- 纯保费法适用于**风险单位数容易确定**。商业火灾保险的风险单位在不同个体风险之间难以保持一致，不适宜用纯保费。
- **新业务**的费率厘定最好用纯保费。
- 经验期费率变化较大，**等水平已赚保费不好求时**，宜用纯保费法。

- ① 阅读教材 3.4-3.5.
- ② 自测课后习题.
- ③ 在 3 月 29 日晚上 11 点之前, 完成大作业一, 提交到邮箱
nonlife_actuarial@163.com.