第 8 讲: 经验费率 1

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

- 依据个体风险的经验索赔厘定其费率称为经验费率厘定.
- 根据大数定律, 当个体风险中的风险单位数足够大时, 经验索赔趋于稳定.
- 一个被保险人的索赔很难预测, 保险公司通过承保大量的风险单位数, 使得风险集合的索赔可以相对准确地预测.
- 如果个体风险的风险单位数不够多, 就难以通过经验索赔获得稳定的索赔预测.
- 在这种情况下, 我们考虑寻求其他相关数据, 与个体风险的经验索赔结合, 进而提高预测的准确性.

- 信度模型用来量化个体经验索赔的可信度, 以及研究如何利用其他相关数据构造信度补项.
- 信度模型一般可以分为: 有限波动信度模型 (经典信度模型), Bühlmann 信度模型和贝叶斯信度模型.
- 用 N 表示索赔次数, λ 表示索赔频率, 一个风险单位索赔次数的方差为 σ_f^2. 在泊松分布下, $\lambda = \sigma_f^2$.
- 用 X_i 表示第 i 次的索赔金额, $\mathbb{E}(X_i) = \xi$ 表示索赔强度, 记 $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X_i)$.
- 用 m 表示风险单位数, P 表示 (经验) 纯保费率,

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{m}$$

- 有限波动信度模型英文为Limited fluctuation credibility.
- 在有限波动信度模型中，依据自身损失的波动性来确定自身经验损失的信度因子 Z，然后把信度因子作为权重，最终预测结果为自身经验损失和相关损失的加权平均：

$$\text{估计值} = Z \times \text{自身经验损失} + (1 - Z) \times \text{相关损失} \tag{1}$$

- 完全可信度标准：当个体损失的波动性小到什么程度时，我们认为未来损失完全可以根据个体经验损失进行预测.

经验索赔频率 N/m的期望和方差分别为

$$\mathbb{E}(N/m) = \lambda, \mathrm{Var}(N/m) = \sigma_f^2/m. \tag{2}$$

N/m 在 λ 附近的一个很小区间$[\lambda - r\lambda, \lambda + r\lambda]$ 上波动的概率为

$$p = \Pr(\lambda - r\lambda \le N/m \le \lambda + r\lambda) \tag{3}$$

当 m 足够大时, 经验索赔频率近似为**正态分布**,

$$\frac{N/m - \lambda}{\sigma_f/\sqrt{m}} \dot{\sim} \mathrm{N}(0, 1).$$

式(3)可以转化为

$$p = \Pr\left(-\frac{rm\lambda}{\sqrt{m}\sigma_f} \le \frac{N/m - \lambda}{\sigma_f/\sqrt{m}} \le \frac{rm\lambda}{\sqrt{m}\sigma_f}\right).$$

进而得到，

$$\frac{rm\lambda}{\sqrt{m}\sigma_f} = z_{(p+1)/2}$$

我们要求在此区间的概率较大，$p \ge 1 - \alpha$，则可得到

$$m\lambda \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \frac{\sigma_f^2}{\lambda} \tag{4}$$

即

$$\mathbb{E}(N) \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \frac{\sigma_f^2}{\lambda} \tag{5}$$

- 上式说明, 要求经验索赔频率以不小于 $1-\alpha$ 的概率在其期望附近波动时, 索赔次数的期望最小应为

$$\left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \frac{\sigma_f^2}{\lambda}. \tag{6}$$

- 式(6)称为索赔频率的完全可信度标准. 教材表 5-1 给出了在泊松假设下, 不同 α 和 r 对应的索赔频率的完全可信度标准.

- 随着 α 的减小 (即以更大的概率在期望附近波动), 要求的索赔次数期望增大; 随着 r 的减小 (即在更小的区间内波动), 要求的索赔次数期望越大.
- 实际中常选取 $\alpha = 10\%$, $r = 5\%$, 其完全可信度标准为1082.
- 对于过离散泊松和负二项分布, 完全可信度标准较大; 对于欠离散泊松和二项分布, 完全可信度标准较小.
- 完全可信度标准也可以通过风险单位数确定, 即式(4)可以变形为

$$m \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \frac{\sigma_f^2}{\lambda^2}$$

假设发生了 N 次索赔, 经验索赔强度为

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N}.$$

方差为

$$\sigma_X^2 / N. \tag{7}$$

经验索赔强度在其期望附近很小的一个区间波动的概率为

$$p = \Pr\left(\xi - r\xi \le \bar{X} \le \xi + r\xi\right).$$

根据中心极限定理, 当 N 足够大时, $\bar{X}$ 近似服从正态分布.

要求 p 不小 $1-\alpha$, 则应有

$$\frac{r\xi\sqrt{N}}{\sigma_X} \geq Z_{1-\alpha/2}.$$

索赔强度的完全可信度标准为:

$$N \geq \left(\frac{Z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \left(\frac{\sigma_X}{\xi}\right)^2$$

注: σ_X/ξ 为索赔金额的变异系数.

经验纯保费率为

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{m}$$

P 的期望为 $\mu_P = \lambda\xi$, 方差为

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 = \mathrm{Var}(P) &= \mathbb{E}_N \left[\mathrm{Var}_P(P|N)\right] + \mathrm{Var}_N \left[\mathbb{E}_P(P|N)\right] \\
&= \mathbb{E}_N \left[\frac{N\sigma_X^2}{m^2}\right] + \mathrm{Var}_N \left[\frac{\xi N}{m}\right] \\
&= \frac{\lambda\sigma_X^2 + \xi^2\sigma_f^2}{m}
\end{aligned} \tag{8}$$

同理,

$$p = \Pr(\mu_P - r\mu_P \leq P \leq \mu_P + r\mu_P) = \Pr\left(-\frac{r\mu_P}{\sigma_P} \leq \frac{P-\mu_P}{\sigma_P} \leq \frac{r\mu_P}{\sigma_P}\right)$$

要求 $p \geq 1-\alpha$, 可以证明

$$m\lambda \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{r}\right)^2 \left[\frac{\sigma_f^2}{\lambda} + \left(\frac{\sigma_X}{\xi}\right)^2\right]$$

所以, 纯保费率的完全可信度标准为索赔频率的完全可信度标准和索赔强度的完全可信度标准之和.

- 假设某个体风险的索赔次数刚好满足完全可信度标准, 计索赔次数为 N^F, 风险单位数为 m^F, 根据信度模型, 预测的索赔频率为
$$\hat{\lambda}^F = 1 \times \frac{N^F}{m^F} + 0 \times c,$$
其中 c 为信度补项.
- 假设另一个个体风险的索赔次数不满足完全可信度标准, 计索赔次数为 N, 风险单位数为 m, 根据信度模型, 预测的索赔频率为
$$\hat{\lambda} = Z \times \frac{N}{m} + (1 - Z) \times c,$$
其中 c 为信度补项.

令 $\hat{\lambda}^F$ 和 $\hat{\lambda}$ 的方差相等, 则

$$\mathrm{Var}\left(\frac{N^F}{m^F}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{ZN}{m}\right)$$

即

$$\frac{m^F \sigma_f^2}{(m^F)^2} = \frac{Z^2 m \sigma_f^2}{m^2}$$

所以

$$Z = \sqrt{\frac{m}{m^F}} = \sqrt{\frac{m\lambda}{m^F \lambda}}$$

- 阅读教材 5.1.
- 自测课后练习题.