第 9 讲: 经验费率 2

高光远

中国人民大学 统计学院

主要内容

1. Bühlmann-Straub 信度模型
   - 模型假设
   - 参数估计
   - 平衡调整
2. 奖惩系统
   - 稳态概率分布
   - 平均奖惩系数
   - 奖惩系统的弹性

$$\mathbb{E}(N/m) = \lambda, \mathrm{Var}(N/m) = \sigma_f^2/m. \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_N}{N}\right) = \sigma_X^2/N. \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 = \mathrm{Var}(P) &= \mathbb{E}_N\left[\mathrm{Var}_P(P|N)\right] + \mathrm{Var}_N\left[\mathbb{E}_P(P|N)\right] \\
&= \mathbb{E}_N\left[\frac{N\sigma_X^2}{m^2}\right] + \mathrm{Var}_N\left[\frac{\xi N}{m}\right] \\
&= \frac{\lambda\sigma_X^2 + \xi^2\sigma_f^2}{m}
\end{aligned} \tag{3}$$

个体风险的风险由 θ 度量. 在给定风险 θ 时, 令 Y_i 为第 i 年的

- 经验索赔频率. 其期望记为 $\mu(\theta)$. 根据式(1), 方差可记为 $v(\theta)/m_i$, 其中, m_i 为第 i 年的风险单位数.
- 经验索赔强度. 其期望记为 $\mu(\theta)$. 根据式(2), 方差可记为 $v(\theta)/m_i$, 其中, m_i 为第 i 年的索赔次数.
- 经验纯保费率. 其期望记为 $\mu(\theta)$. 根据式(3) 方差可记为 $v(\theta)/m_i$, 其中, m_i 为第 i 年的风险单位数.

令 $\bar{Y}$ 为整个经验期 n 的平均索赔频率 (索赔强度或者纯保费率).

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i Y_i}{m}.$$

其中 $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

- 在给定风险 θ 时, $\bar{Y}$ 的条件期望和方差分别为

$$\mathbb{E}(\bar{Y}|\theta) = \mu(\theta), \mathrm{Var}(\bar{Y}|\theta) = \frac{v(\theta)}{m}. \tag{4}$$

- $\bar{Y}$ 的非条件期望和方差分别为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{Y}) &= \mathbb{E}_\theta\left[\mu(\theta)\right] = \mu, \\ \mathrm{Var}_\theta(\bar{Y}) &= \mathbb{E}\left[\frac{v(\theta)}{m}\right] + \mathrm{Var}_\theta\left[\mu(\theta)\right] = \frac{v}{m} + a. \end{aligned} \tag{5}$$

其中, μ 为风险集合的平均索赔频率 (索赔强度或者纯保费率), v 称为过程方差的均值, a 称为假设均值的方差.

- 过程方差的均值反映了个体风险自身的不确定性. v 越大, 个体风险的经验损失的可信度越小.
- 假设均值的方差反映了不同个体风险之间的差异性. a 越大, 个体风险与整个风险集合的平均值差别越大, 间接地, 个体风险的经验损失的可信度越大.
- m 反映了数据量, m 越大, 表示个体风险的经验损失数据量越大, 其可信度越大.

- Bühlmann-Straub 的 信度因子为

$$Z = \frac{\text{假设均值的方差}}{\bar{Y}\text{的非条件方差}} = \frac{a}{a+v/m} = \frac{m}{m+K} \tag{6}$$

其中, $K = v/a$ 称为 Bühlmann 参数.

- Bühlmann-Straub 的信度预测值为

$$\hat{Y}^{\theta} = Z\bar{Y}^{\theta} + (1-Z)\mu$$

- 当 $m_i = e$ 时, 模型简化为Bühlmann 模型. 信度因子为

$$Z = \frac{ne}{ne+K}$$

使用 Bühlmann-Straub 信度模型时, 必须估计 μ, v, a 的值. 假设包含$r = 1, \ldots, R$ 个风险. 用 i 表示经验期, r 表示风险.

- $Y_i^r, i = 1, \ldots, n^r, r = 1, \ldots, R$: 个体风险 r 在第 i 年的经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率), 其中, n^r 为个体风险 r 的观察年数.
- $m_i^r, i = 1, \ldots, n^r, r = 1, \ldots, R$: 个体风险 r 在第 i 年的风险单位数 (或者索赔次数).
- $\bar{Y}^r = 1/m^r \sum_{i=1}^{n^r} m_i^r Y_i^r$: 个体风险 r的总平均经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率). 其中, $m^r = \sum_{i=1}^{n^r} m_i^r$ 为个体风险 r 的总风险单位数 (或者索赔次数.).
- $\bar{Y} = 1/m \sum_{r=1}^{R} m^r \bar{Y}^r$: 风险集合的总平均经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率). 其中, $m = \sum_{r=1}^{R} m^r$ 为风险集合的总风险单位数 (或者索赔次数.).
- θ^r: 个体风险 r 的参数.

对于 Bühlmann-Straub 模型, 参数的无偏估计为:

$$\hat{\mu} = \bar{Y}$$

$$\hat{v}(\theta^r) = \frac{1}{n^r - 1} \sum_{i=1}^{n^r} m_i^r (Y_i^r - \bar{Y}^r)^2$$

$$\hat{v} = \frac{\sum_{r=1}^{R} (n^r - 1) \hat{v}(\theta^r)}{\sum_{r=1}^{R} (n^r - 1)}$$

$$\hat{a} = \left(m - \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{R} (m^r)^2 \right)^{-1} \left[\sum_{r=1}^{R} m^r (\bar{Y}^r - \bar{Y})^2 - \hat{v}(R-1) \right]$$

若 $\hat{a} < 0$, 取 $Z = 0$. 个体风险 r 的损失经验 $\bar{Y}^r$ 的信度因子为:

$$\hat{Z}^r = \frac{m^r}{m^r + \hat{v}/\hat{a}}$$

对于 Bühlmann 模型,

- $Y_i^r, i=1,\ldots,n, r=1,\ldots,R$: 个体风险 r 在第 i 年的经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率), 其中, n 为个体风险 r 的观察年数.
- $m_i^r=e, i=1,\ldots,n, r=1,\ldots,R$: 个体风险 r 在第 i 年的风险单位数 (或者索赔次数).
- $\bar{Y}^r=1/(ne)\sum_{i=1}^n eY_i^r=1/n\sum_{i=1}^n Y_i^r$: 个体风险 r 的总平均经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率).
- $\bar{Y}=1/R\sum_{r=1}^R \bar{Y}^r$: 风险集合的总平均经验索赔频率 (索赔强度或者纯保费率).
- θ^r: 个体风险 r 的参数.

对于 Bühlmann 模型, 参数的无偏估计可以简化为

$$\hat{\mu} = \bar{Y}$$

$$\hat{v}(\theta^r) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i^r - \bar{Y}^r)^2$$

$$\hat{v} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\hat{v}(\theta^r)$$

$$\hat{a} = \frac{1}{R-1}\sum_{r=1}^{R}(\bar{Y}^r - \bar{Y})^2 - \frac{\hat{v}}{ne}$$

个体风险 r 的损失经验 $\bar{Y}^r$ 的信度因子为:

$$\hat{Z}^r = \frac{ne}{ne + \hat{v}/\hat{a}}$$

为了使得信度保费总和等于实际损失的总和, 即

$$\sum_{r=1}^{R} m^r \bar{Y}^r = \sum_{r=1}^{R} m^r \left[\hat{Z}^r \bar{Y}^r + (1-\hat{Z}^r)\tilde{\mu} \right] \tag{7}$$

可以证明, 风险集合的总平均保费 $\tilde{\mu}$ 为:

$$\tilde{\mu} = \frac{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r \bar{Y}^r}{\sum_{r=1}^{R} \hat{Z}^r} \tag{8}$$

- 如果上一年没有出险, 在续保时给予折扣. 如果上一年有出险, 在续保时可能提高保费.
- 奖惩系统的英文名为bonus-malus system (BMS), 或者no-claim discount (NCD).
- 奖惩系统考虑的是上一年出险次数, 与索赔金额没有关系.
- 奖惩系统的主要目的是
  1. 费率更加公正.
  2. 减少保险公司处理小赔案的费用
  3. 鼓励谨慎驾驶

奖惩系统的要素:

- 各个等级的奖惩系数: $\boldsymbol{c}$
- 初始等级
- 转移概率矩阵: $\boldsymbol{M}$

基本假设:

- 给定个体保单的索赔频率不随时间变化, 且索赔次数服从柏松分布.
- 保单组合不会有新增保单也不会有退保保费.
- 初次投保时, 每份保单缴纳完全相同的保费, 奖惩系数为 1.

稳态概率:

- 对于一个给定的个体保单, 假设其索赔频率为常数, 则经过若干年后, 它属于各个保费水平的概率趋于稳定.
- 对于一个固定的保单组合, 经过若干年后, 保单在各个保费水平的分布也趋于稳定.

上一年未发生索赔时, 续保的优待比例在上一年度优待比例基础上增加 10%. 优待比例最高为 30%. 若发生了n 次索赔, 续保的优待比例在上一年度优待比例基础上减少 $n \times 10\%$, 优待比例最小为 0%.

- 该奖惩系统有四个等级, 四个保费水平的奖惩系数为 $\boldsymbol{c} = (0.7, 0.8, 0.9, 1.0)'$.
- 续期保费的奖惩系数只取决于当年的奖惩系数和索赔次数, 故每年的奖惩系数形成一个马尔可夫链 (Markov chain).
- 因索赔频率不变化, 该马尔可夫链为齐次 (homogeneous).

$\boldsymbol{M}$ 表示马尔可夫链的转移概率矩阵:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中, q_{ij} 表示从 i 等级到 j 等级的概率. 具体地,

$$\boldsymbol{M}(\lambda) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & 1-p_0-p_1-p_2 \\ p_0 & 0 & p_1 & 1-p_0-p_1 \\ 0 & p_0 & 0 & 1-p_0 \\ 0 & 0 & p_0 & 1-p_0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中, $p_0 = e^{-\lambda}, p_1 = \lambda e^{-\lambda}, p_2 = \lambda^2 e^{-\lambda}/2.$

个体保单的稳态分布

假设稳态分布为 $\boldsymbol{a}(\lambda) = (a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda), a_4(\lambda))'$, 其应满足下述方程组:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}(\lambda)'\boldsymbol{M}(\lambda) = \boldsymbol{a}(\lambda)' \\ \boldsymbol{a}(\lambda)'\boldsymbol{e} = 1 \end{cases} \tag{11}$$

其中, $\boldsymbol{e}$ 为 4 维单位列向量. 可以证明:

$$\boldsymbol{a}(\lambda)' = \boldsymbol{e}' \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}(\lambda) + \boldsymbol{E}\right]^{-1}$$

其中, $\boldsymbol{I}$ 为 4×4 的单位矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为所有元素均为 1 的 4×4 的矩阵.

个体保单的稳态分布

亦可证明

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{M}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(\lambda)' \\ \boldsymbol{a}(\lambda)' \\ \boldsymbol{a}(\lambda)' \\ \boldsymbol{a}(\lambda)' \end{bmatrix}_{4\times 4} = \begin{bmatrix} a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda), a_4(\lambda) \\ a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda), a_4(\lambda) \\ a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda), a_4(\lambda) \\ a_1(\lambda), a_2(\lambda), a_3(\lambda), a_4(\lambda) \end{bmatrix}_{4\times 4} \tag{12}$$

保单组合的稳态分布

如果保单组合由两类保单组成: 第一类索赔频率为 0.2, 占保单数量的 60%; 第二类索赔频率为 0.4, 占保单数量的 40%. 则保单组合的稳态分布为

$$0.6 \times \boldsymbol{a}(0.2) + 0.4 \times \boldsymbol{a}(0.4).$$

保单组合的稳态分布

假设不同保单的索赔频率服从参数为 α, β 的伽马分布，密度函数为

$$u(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

此时，保单组合中任意保单在第 i 等级的稳态概率为

$$a_i = \int_0^{\infty} a_i(\lambda) u(\lambda) d\lambda.$$

- 对于个体保单:

$$P(\lambda) = \boldsymbol{a}(\lambda)'\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{4} a_i(\lambda)c_i. \tag{13}$$

- 对于保单组合:

$$P = (a_1, a_2, a_3, a_4)'\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{4} a_i c_i$$

A 的索赔频率为 λ_A, 平均奖惩系数为 P_A; B 的索赔频率为 λ_B, 平均奖惩系数为 P_B. 理想的奖惩系统应该满足

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B}$$

即

$$\frac{P_A/P_B}{\lambda_A/\lambda_B} = 1$$

或者

$$\frac{P_A - P_B}{P_B} = \frac{\lambda_A - \lambda_B}{\lambda_B}$$

称该奖惩系统具有完全弹性.

定义奖惩系统的弹性为

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} \tag{14}$$

代入式(13), 有

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{4} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} c_i.$$

所以, 式(14)可以写为:

$$\eta(\lambda) = \frac{\lambda}{P(\lambda)} \sum_{i=1}^{4} \frac{da_i(\lambda)}{d\lambda} c_i \tag{15}$$

近似地:

$$\eta(\lambda) \approx \frac{\frac{P(\lambda+\Delta\lambda)-P(\lambda)}{P(\lambda)}}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda}}$$

- 阅读教材 5.2-5.6. 其中, 5.5 信度补项为选读.
- 自测课后练习题.
- 证明式(8).