Machine Learning

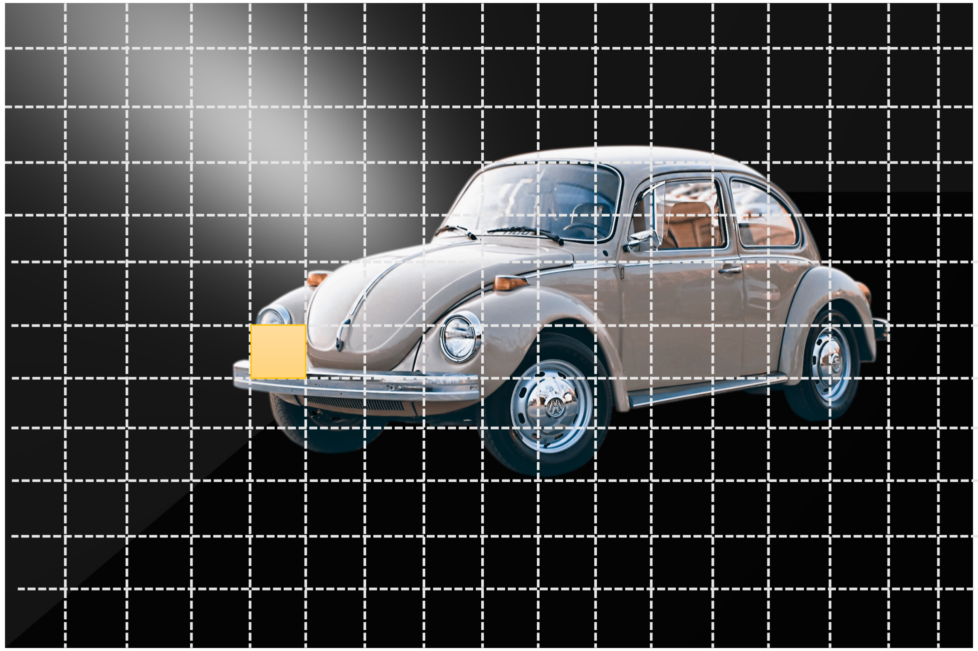
Redes Neuronales

Motivación

- ¿Por qué un nuevo algoritmo de clasificación o regresión si ya tenemos varios?
  - Regresión lineal, polinomial, logística, Naïve Bayes

- Debemos aprender mejores herramientas.
  - Para calcular hipótesis más complejas

Motivación

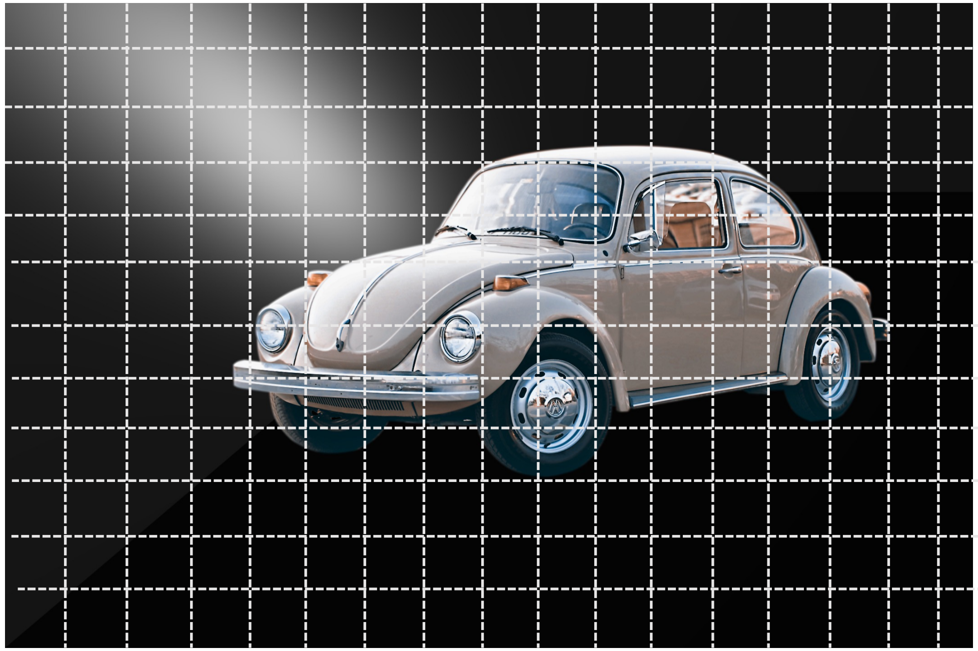


Consideremos el modelo de regresión logística para determinar si una imagen contiene un vehículo o no.

¿Cuáles serían las características?

- Los pixeles de la imagen
- Ahora, si una imagen es de tamaño 50x50, tendríamos 2500 (en blanco y negro)
- Si es RGB, ¡tendríamos 7500!

Motivación



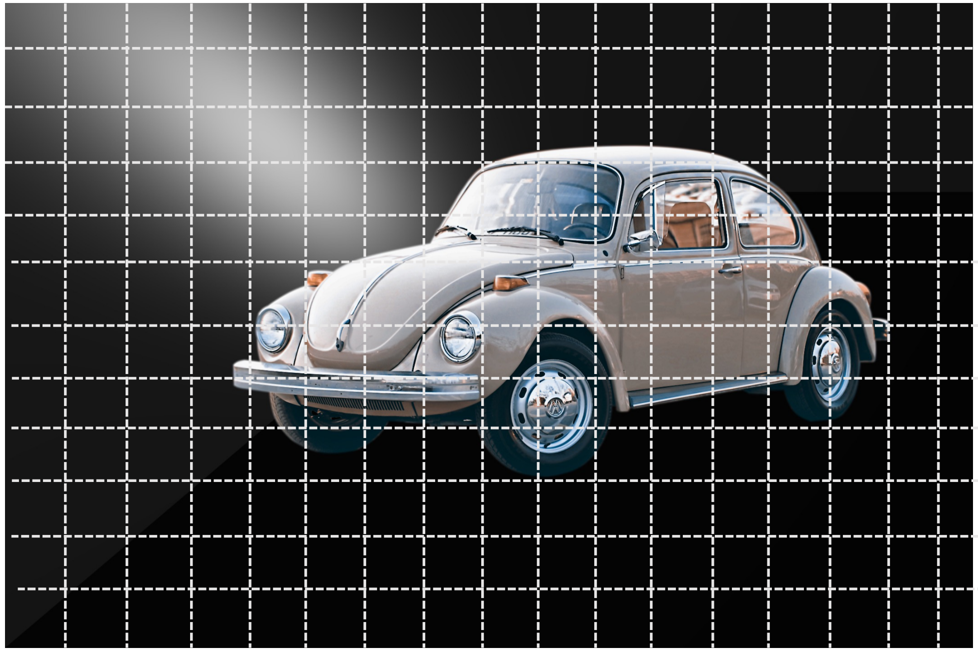
Al realizar el modelo de clasificación

$$g(z)$$

se consideran muchos, muchos parámetros, inclusive en el simple caso del modelo lineal:

$$z = x_0 + \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_{2500} x_{2500}$$

Motivación



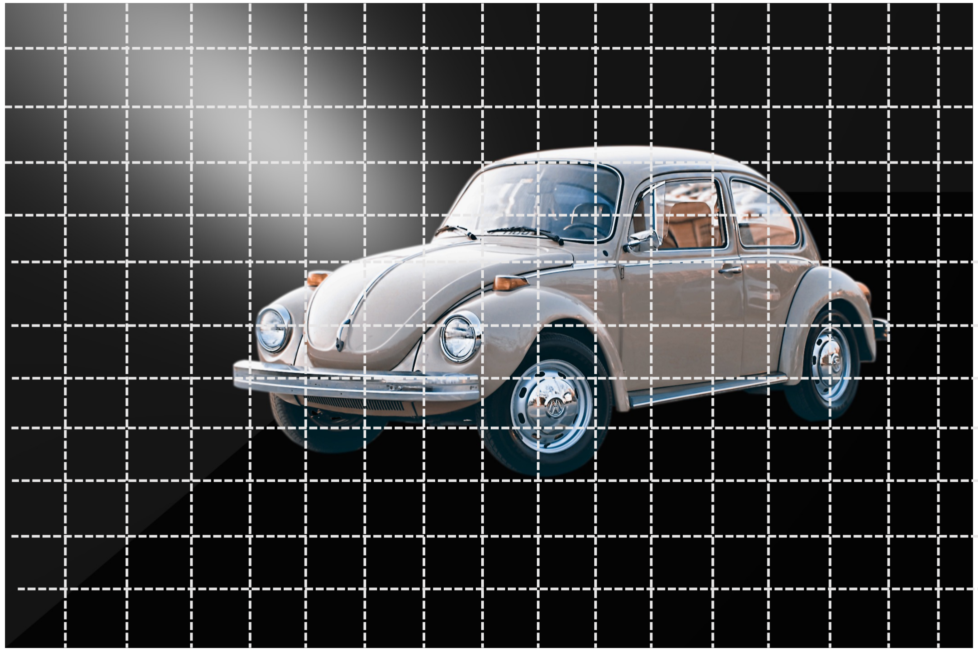
El modelo lineal es limitado, por lo que se puede hacer más complicado. Por ejemplo, podemos agregar como características TODAS las combinaciones que resultan al multiplicar dos pixeles, e.g., para x_1:

$$x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \cdots x_1x_{2500}$$

¡Esto crece, y mucho!

¿Cuántas caraceterísticas tendría el modelo? ¡A calcular!

Motivación



Conclusión:

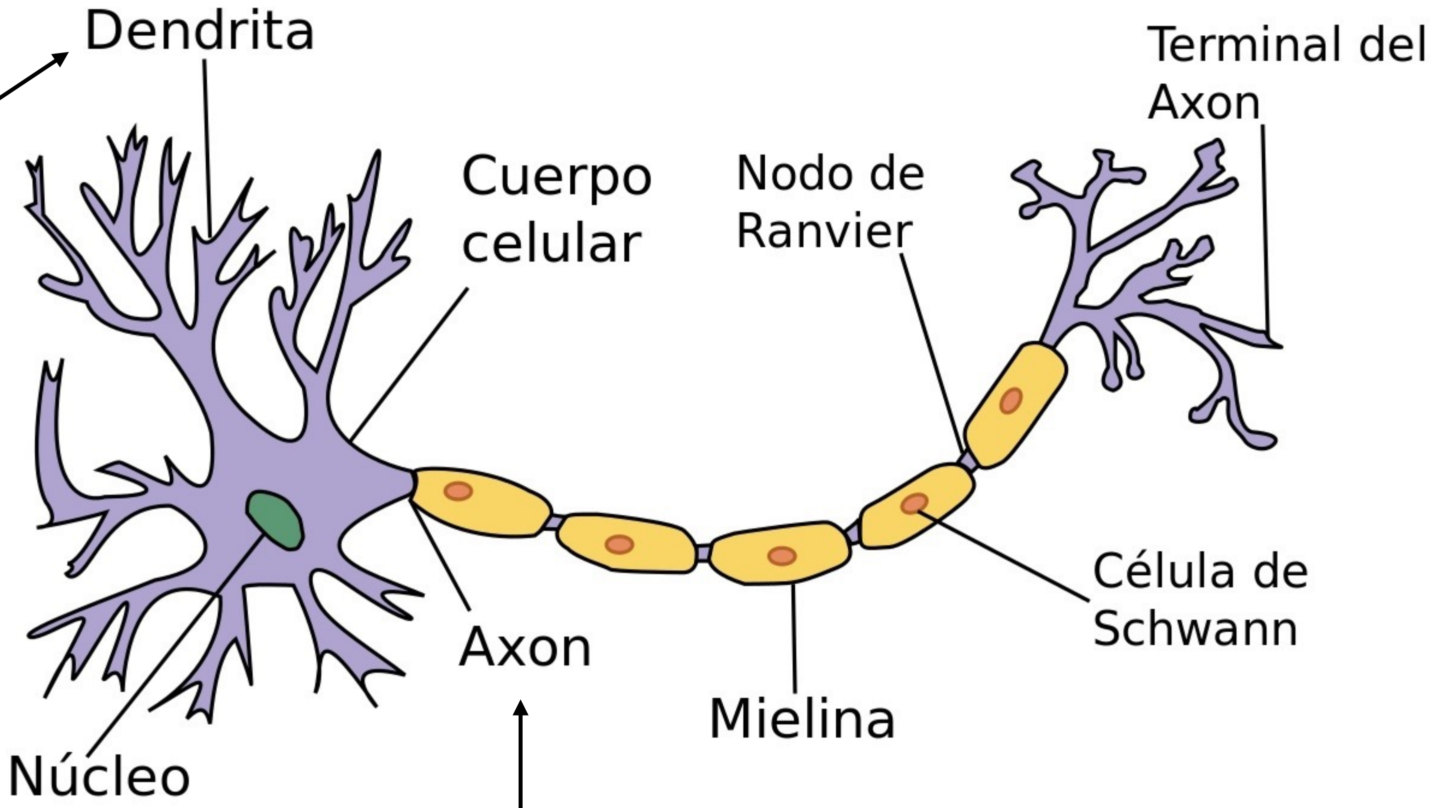
- Para este tipo de problemas más complejos de clasificación, se necesitan modelos que soporten una cantidad asquerosa de características.
- Hasta el momento, lo que tenemos puede resultar poco útil.

Redes Neuronales Entran al Ruedo

- Se inspiran en el cerebro humano, específicamente en la neurona.
- En la actualidad, es un modelo que representa el estado del arte en la inteligencia artificial.
- Permite atacar problemas complejos, especialmente tareas que realiza el ser humano de manera natural.

La Neurona

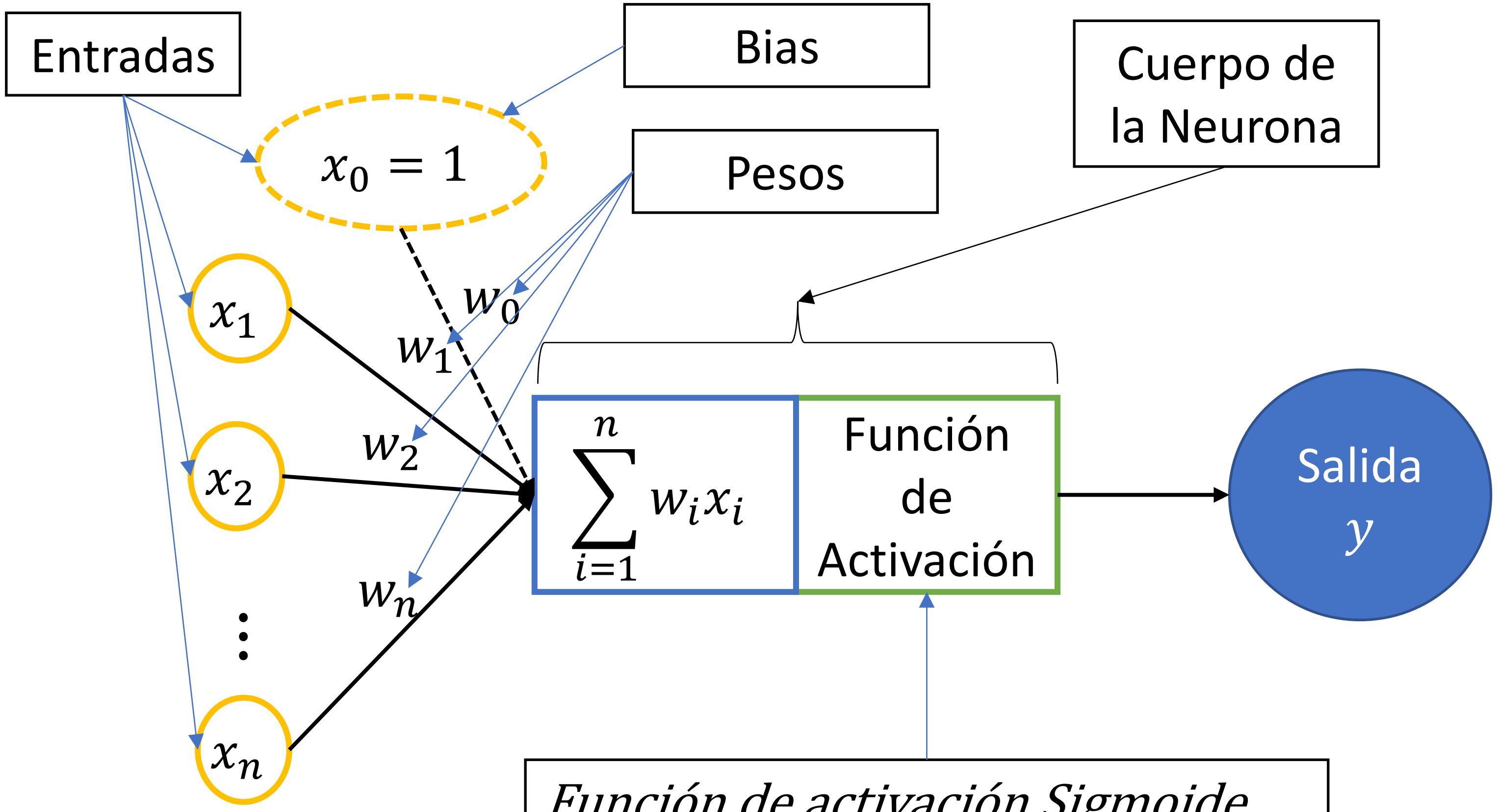
“Cables” de entrada



“Cables” de salida

La neurona se puede ver como una unidad computacional. Entra información por la dendrita y manda señales a otras neuronas por el axón.

Estructura Típica de una Neurona



Función de activación Sigmoide

$$h_w(x) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}}}$$

Se calcula la señal que entra a la neurona ponderándolas:

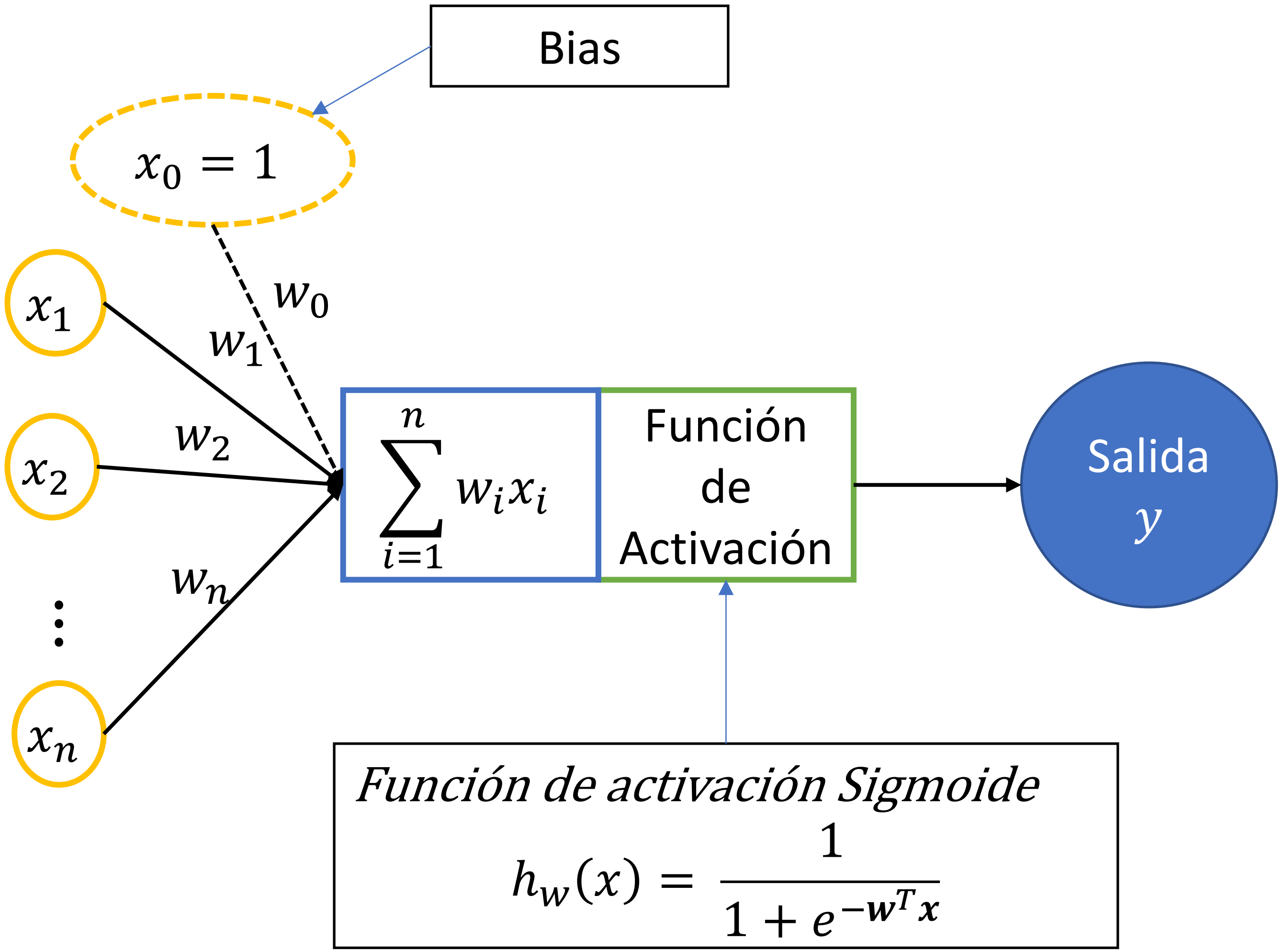
$$w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

Si exceden cierto valor de umbral, la neurona se activa:

$$y = h_w \left[\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \right]$$

En el caso anterior, h_w es la función sigmoide. Existen otras, además de esta.

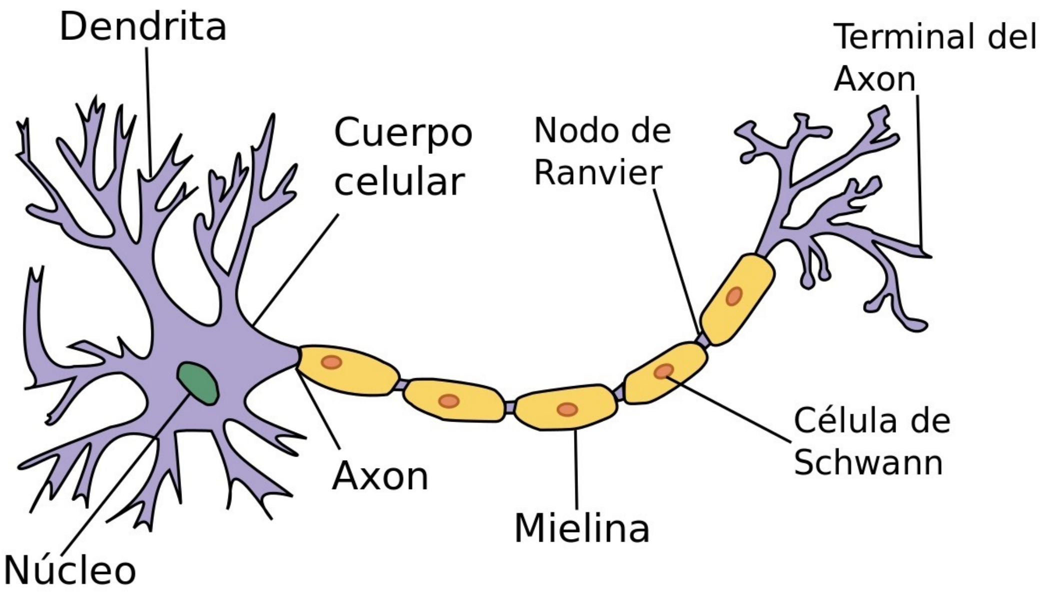
Estructura Típica de una Neurona



- El Bias, que siempre es constante, es una entrada adicional en cada capa de neuronas que tiene el valor de 1.
- No son influenciadas por las capas anteriores (no entra nada) pero sí mandan señales con sus propios pesos.
- El Bias garantiza que, si todas las entradas son cero, existirá una activación en la neurona.

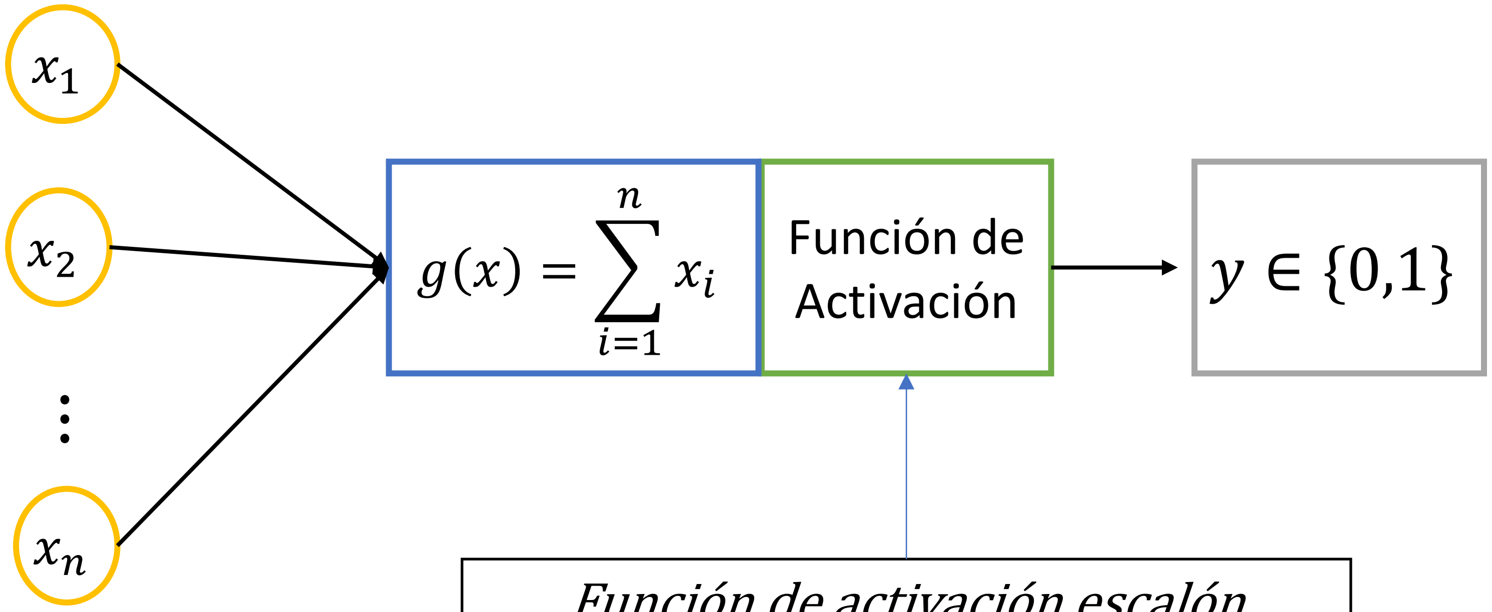
Neurona de McCulloch y Pitts

- En 1943 se da el primer intento en simular el comportamiento biológico de la neurona humana.
- Proponen un proceso de aprendizaje complejo por medio de un modelo matemático.
- Permite clasificar patrones, una imitación del sistema biológico sensorial, por medio de una unidad computacional.



Neurona artificial de McCulloch & Pitts. Cornelio Yáñez Vázquez, Luis Octavio López Leyva y Mario Aldape Pérez. Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Computación, 2007. Disponible en: https://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/8640

Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts



$x_n \in \{0,1\}$

Función de activación escalón

$$H_\theta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad g(x) \geq \theta \\ 0 & si \quad g(x) < \theta \end{cases}$$

En el caso de la neurona de McCulloch y Pitts,
las salidas y entradas solo pueden ser 1 ó 0.

Es decir, son valores booleanos.

Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts

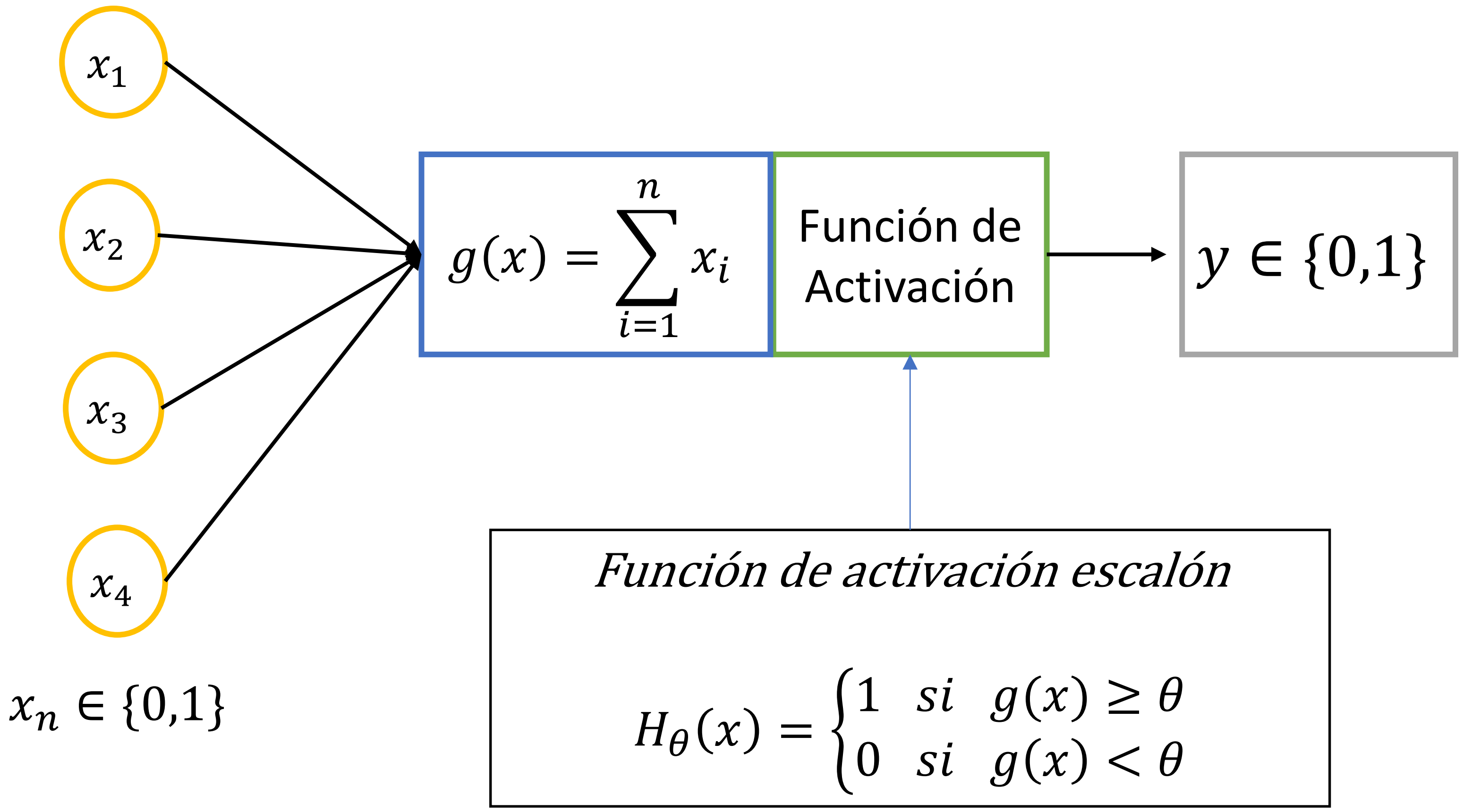
Supongamos que queremos predecir la decisión de un amigo de ver un partido de *football* en la televisión.

- Las entradas y salidas son valores booleanos (1 = sí, 0 = no)

Vamos a modelar nuestro problema:

- x_1 indica si el partido es de la *Premier League*.
- x_2 indica si es un partido competitivo.
- x_3 indica si el partido se juega en un horario diponible.
- x_4 indica si el partida incluye al equipo favorito.

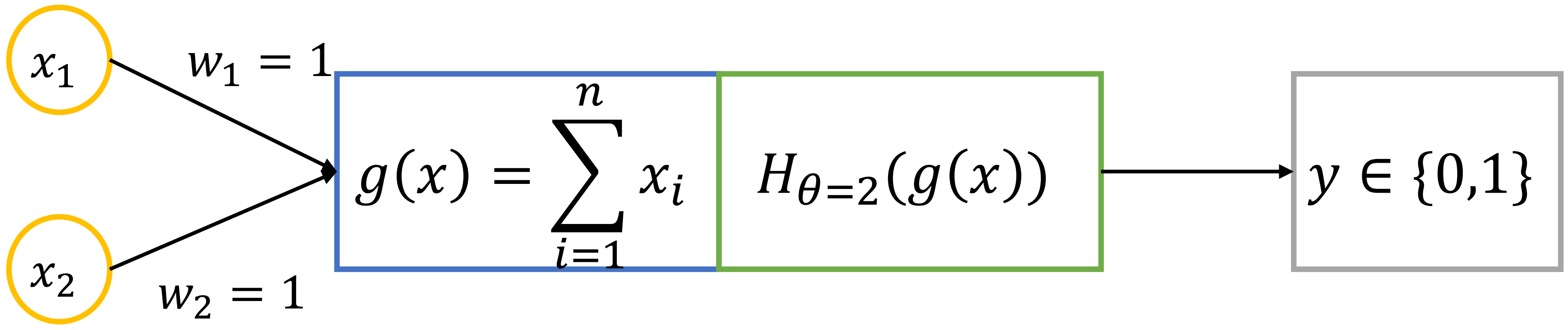
Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts



En este problema, lo que falta es determinar el valor de θ, el límite de decisión, para que la respuesta sea excitatoria o inhibitoria.

Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts

Función AND lógica

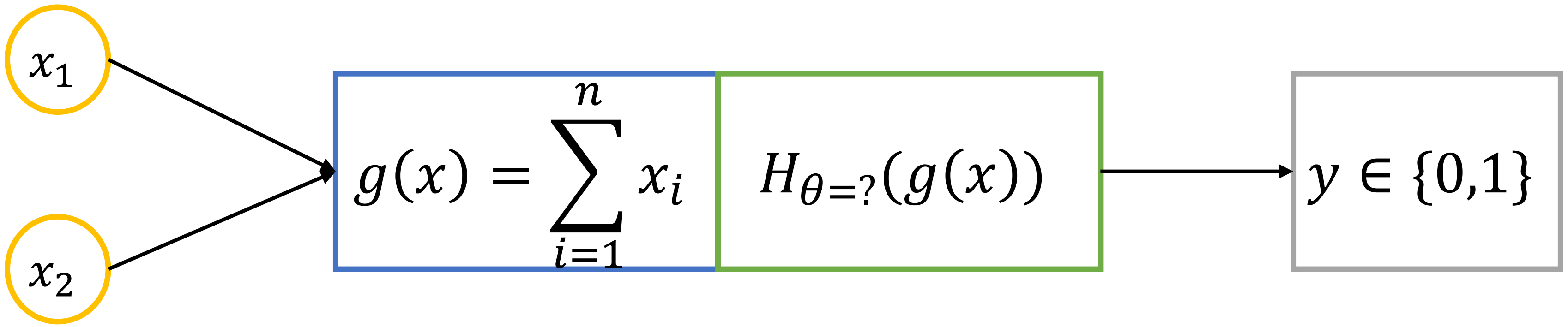


Función de activación escalón

$$H_\theta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad g(x) \geq \theta \\ 0 & si \quad g(x) < \theta \end{cases}$$

Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts

Función OR lógica



Función de activación escalón

$$H_\theta(x) = \begin{cases} 1 & si \quad g(x) \geq \theta \\ 0 & si \quad g(x) < \theta \end{cases}$$

$\theta = ?$

$\theta = 1$

Ejemplo: Neurona de McCulloch y Pitts

Tarea:

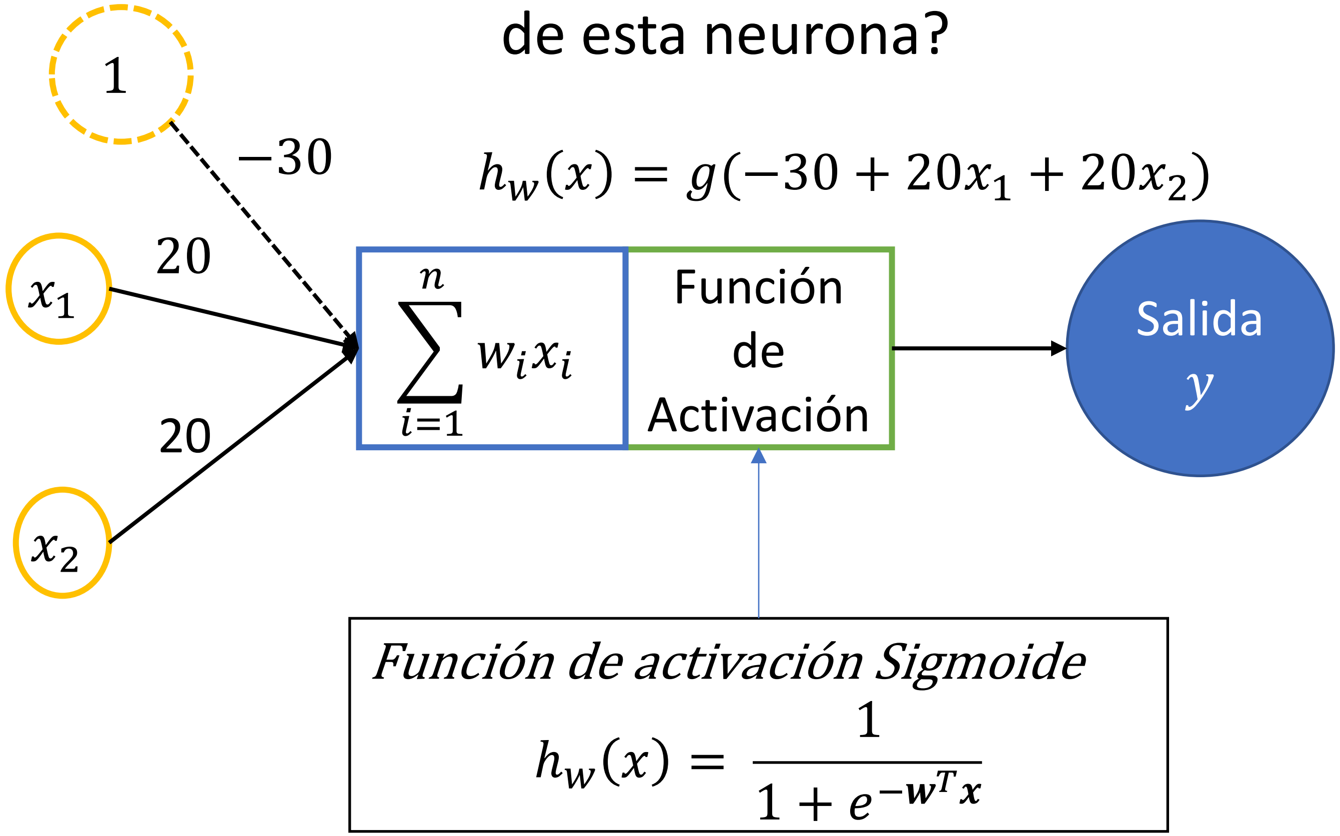
1. Investiguen el problema de determinar XOR con la neurona de McCulloch – Pitts.
2. ¿Cómo se ve gráficamente el XOR?
3. ¿Cómo se resuelve el problema del XOR con la neurona de McCulloch-Pitts?
4. ¿Qué causó este problema en el campo de las redes neuronales y, en general, en la inteligencia artificial?

Primera Intuición: ¿Qué hace una neurona?

Función AND

Ejercicio: ¿Qué saldría de esta neurona?

$$h_w(x) = g(-30 + 20x_1 + 20x_2)$$



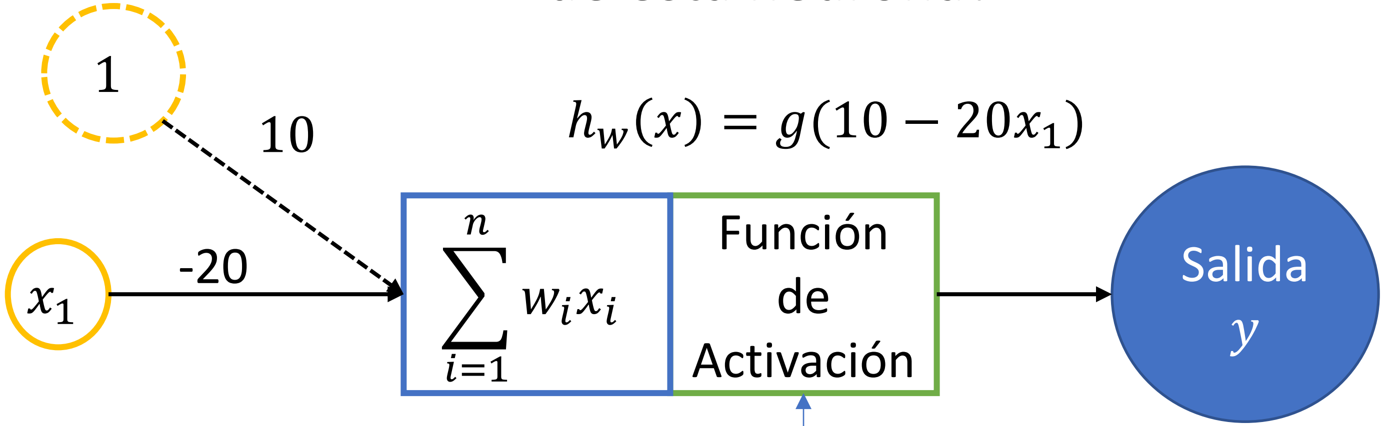
$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$h_w(x)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Primera Intuición: ¿Qué hace una neurona?

Función NOT

Ejercicio: ¿Qué saldría de esta neurona?

$$h_w(x) = g(10 - 20x_1)$$



$\boldsymbol{x_1}$	$h_w(x)$
1	
0	

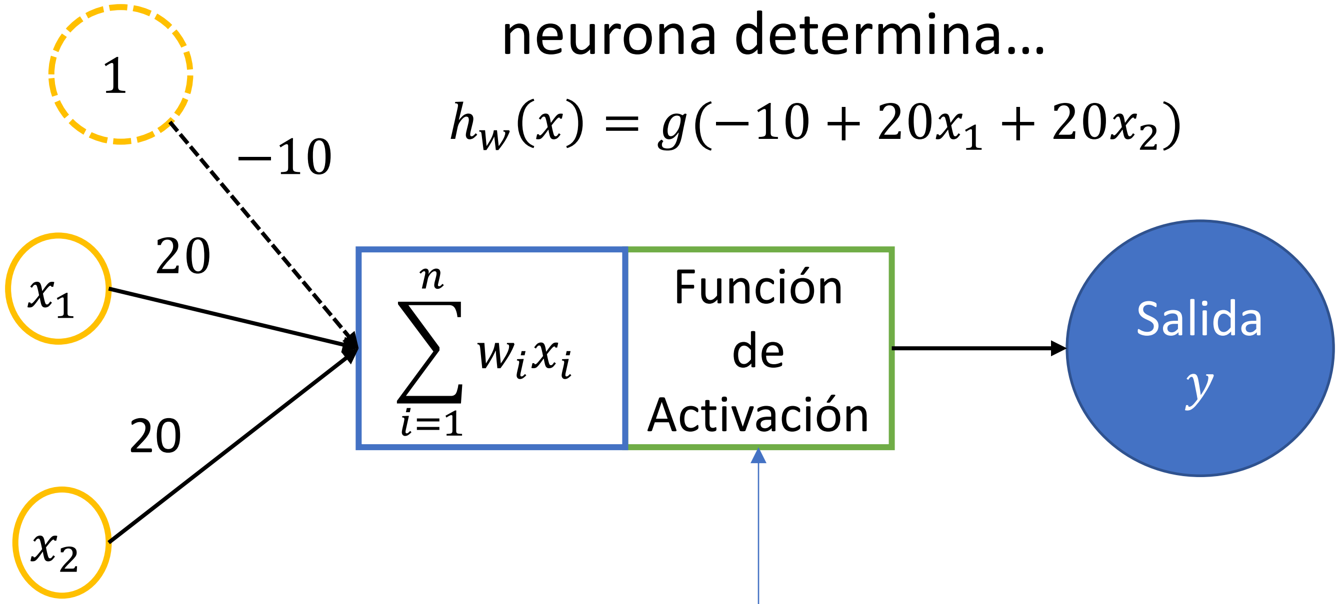
Función de activación Sigmoide

$$h_w(x) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}}}$$

Primera Intuición: ¿Qué hace una neurona?

Ejercicio: Verificar que esta neurona determina…

$$h_w(x) = g(-10 + 20x_1 + 20x_2)$$



Función de activación Sigmoide

$$h_w(x) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}}}$$

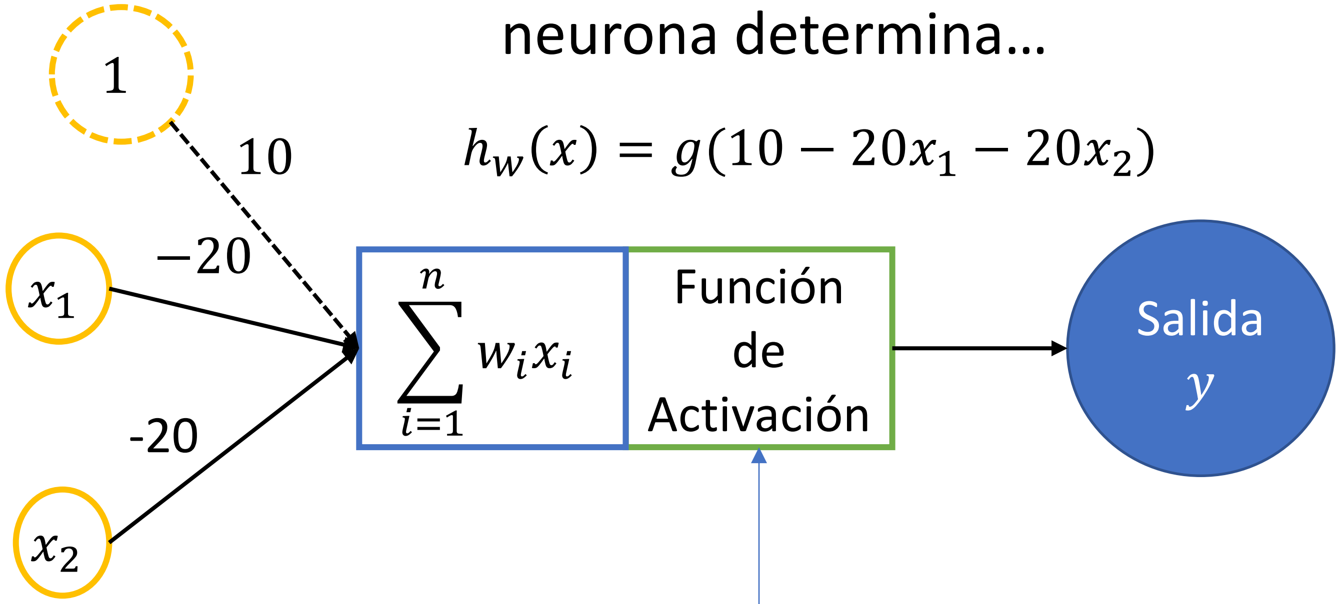
Función OR

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$h_w(x)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Primera Intuición: ¿Qué hace una neurona?

Ejercicio: Verificar que esta neurona determina…

$$h_w(x) = g(10 - 20x_1 - 20x_2)$$



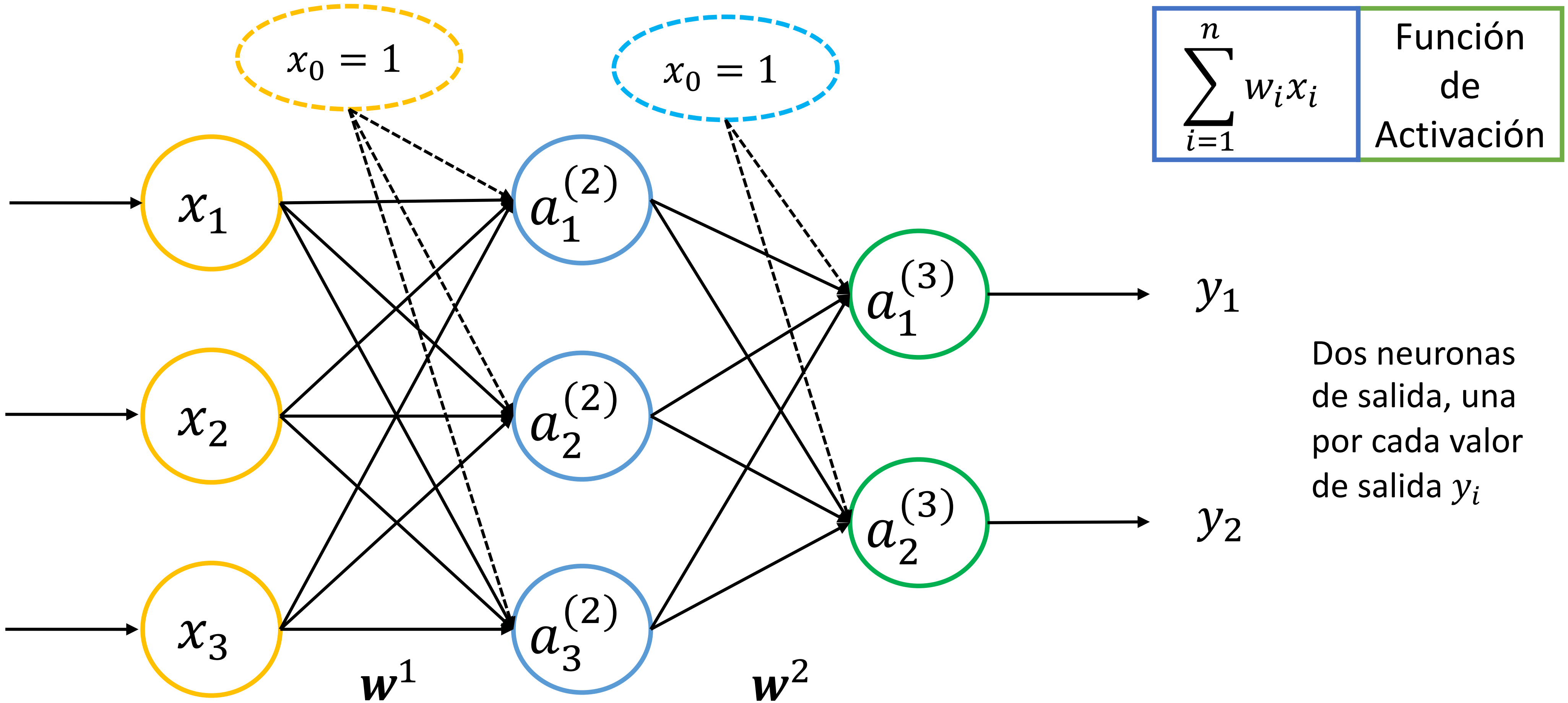
Función de activación Sigmoide

$$h_w(x) = \frac{1}{1 + e^{-\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{x}}}$$

Función
$\neg \boldsymbol{x_1} \boldsymbol{AND} \neg \boldsymbol{x_2}$

$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$h_w(x)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

De la Neurona a una Red Neuronal



Tres neuronas de entrada, una por cada característica x_i

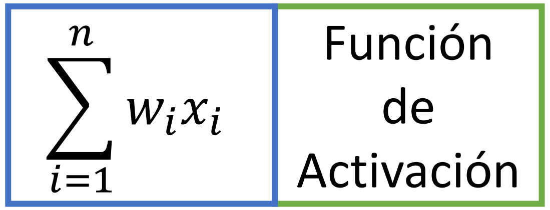
Dos neuronas de salida, una por cada valor de salida y_i

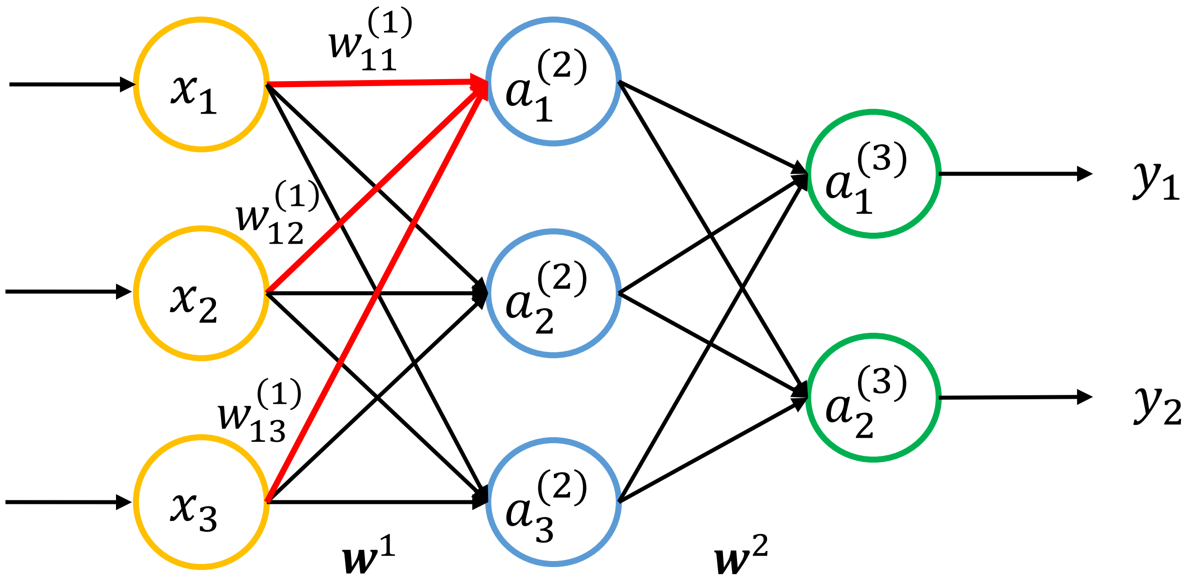
Capa 1
o de entrada

Capa 2
o capa oculta

Capa 3
o de salida

De la Neurona a una Red Neuronal





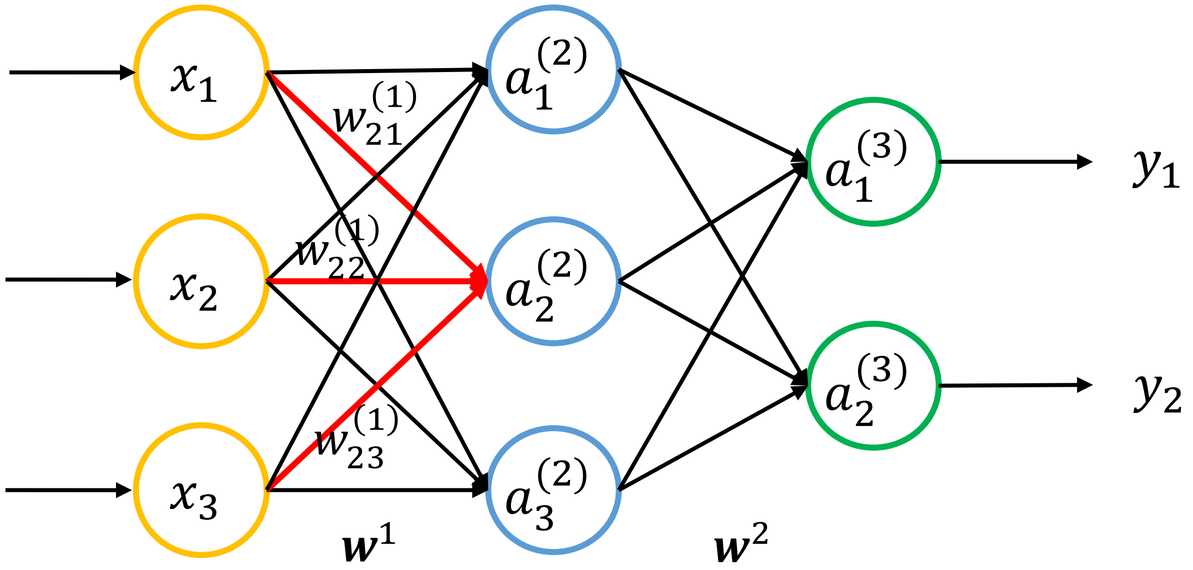
$a_i^{(j)}$ = activación o valor de salida de la neurona *i* en la capa *j*

$\boldsymbol{w}^j$ = matriz de pesos de la capa *j* a la capa *j+1*

$$a_1^{(2)} = g(w_{10}^{(1)} x_0 + w_{11}^{(1)} x_1 + w_{12}^{(1)} x_2 + w_{13}^{(1)} x_3)$$

De la Neurona a una Red Neuronal

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ | Función de Activación



$a_i^{(j)}$ = activación o valor de salida de la neurona *i* en la capa *j*

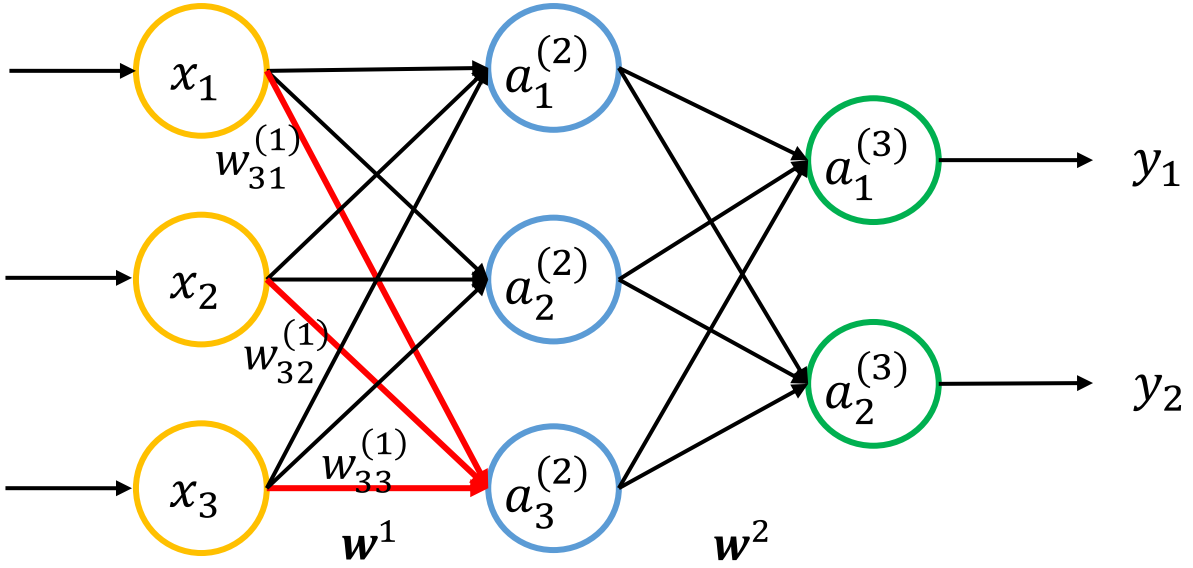
$\boldsymbol{w}^j$ = matriz de pesos de la capa *j* a la capa *j+1*

$$a_1^{(2)} = g(w_{10}^{(1)}x_0 + w_{11}^{(1)}x_1 + w_{12}^{(1)}x_2 + w_{13}^{(1)}x_3)$$

$$a_2^{(2)} = g(w_{20}^{(1)}x_0 + w_{21}^{(1)}x_1 + w_{22}^{(1)}x_2 + w_{23}^{(1)}x_3)$$

De la Neurona a una Red Neuronal

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$	Función de Activación



$a_i^{(j)}$ = activación o valor de salida de la neurona *i* en la capa *j*

$\boldsymbol{w}^j$ = matriz de pesos de la capa *j* a la capa *j+1*

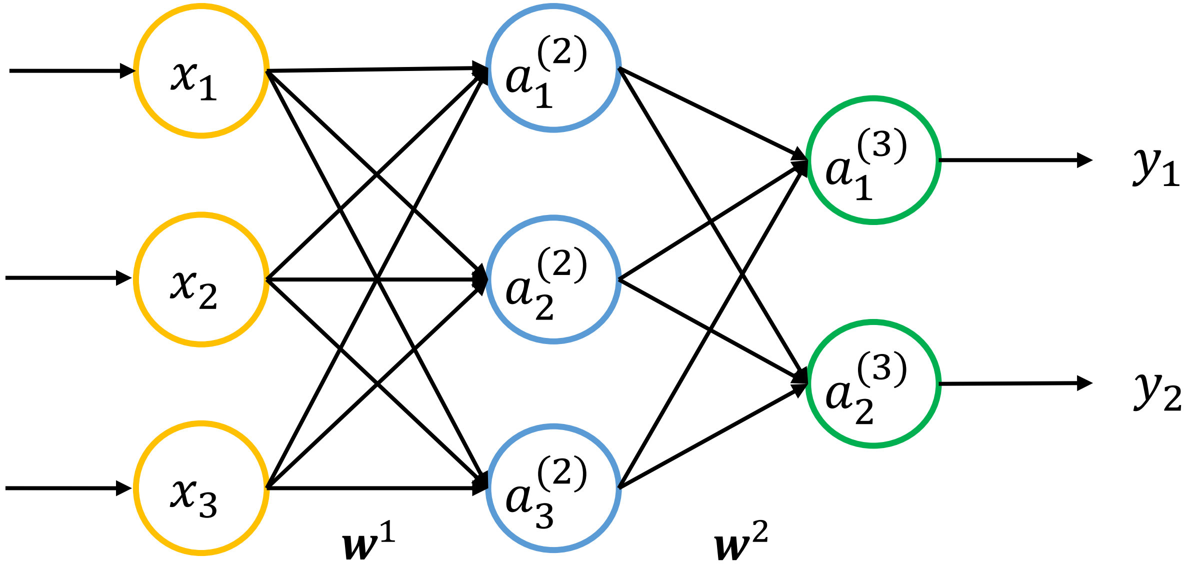
$$a_1^{(2)} = g(w_{10}^{(1)}x_0 + w_{11}^{(1)}x_1 + w_{12}^{(1)}x_2 + w_{13}^{(1)}x_3)$$

$$a_2^{(2)} = g(w_{20}^{(1)}x_0 + w_{21}^{(1)}x_1 + w_{22}^{(1)}x_2 + w_{23}^{(1)}x_3)$$

$$a_3^{(2)} = g(w_{30}^{(1)}x_0 + w_{31}^{(1)}x_1 + w_{32}^{(1)}x_2 + w_{33}^{(1)}x_3)$$

De la Neurona a una Red Neuronal

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ | Función de Activación



$a_i^{(j)}$ = activación o valor de salida de la neurona *i* en la capa *j*

$\boldsymbol{w}^j$ = matriz de pesos de la capa *j* a la capa *j+1*

$w^1 \in R^{3\times 4}$

$$a_1^{(2)} = g(w_{10}^{(1)}x_0 + w_{11}^{(1)}x_1 + w_{12}^{(1)}x_2 + w_{13}^{(1)}x_3)$$

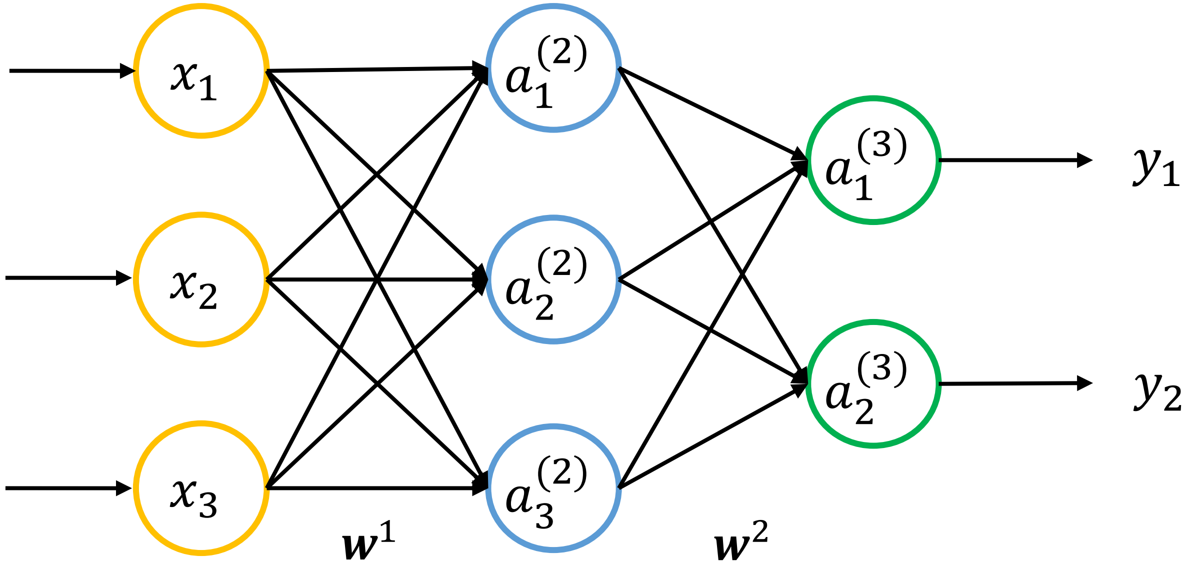
$$a_2^{(2)} = g(w_{20}^{(1)}x_0 + w_{21}^{(1)}x_1 + w_{22}^{(1)}x_2 + w_{23}^{(1)}x_3)$$

$$a_3^{(2)} = g(w_{30}^{(1)}x_0 + w_{31}^{(1)}x_1 + w_{32}^{(1)}x_2 + w_{33}^{(1)}x_3)$$

¿Cómo quedarían las expresiones para la tercera capa?

De la Neurona a una Red Neuronal

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i$	Función de Activación



$a_i^{(j)}$ = activación o valor de salida de la neurona *i* en la capa *j*

$\boldsymbol{w}^j$ = matriz de pesos de la capa *j* a la capa *j+1*

Este parte se le conoce como ***forward propagation***.

$$a_1^{(2)} = g(w_{10}^{(1)}x_0 + w_{11}^{(1)}x_1 + w_{12}^{(1)}x_2 + w_{13}^{(1)}x_3)$$

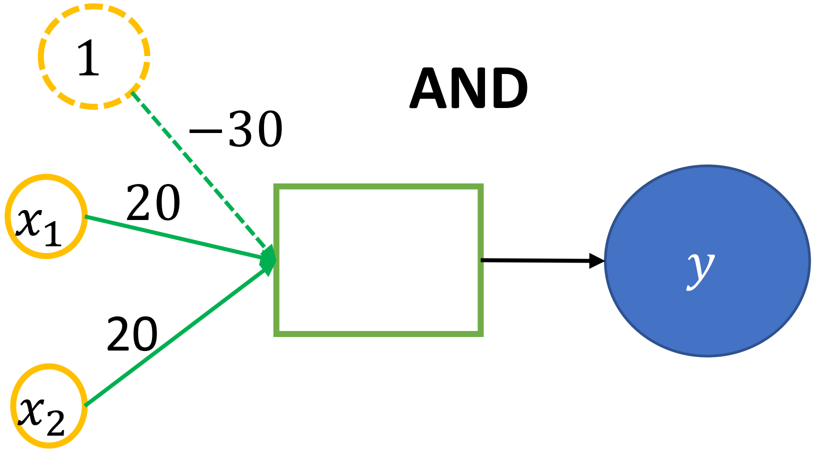
$$a_2^{(2)} = g(w_{20}^{(1)}x_0 + w_{21}^{(1)}x_1 + w_{22}^{(1)}x_2 + w_{23}^{(1)}x_3)$$

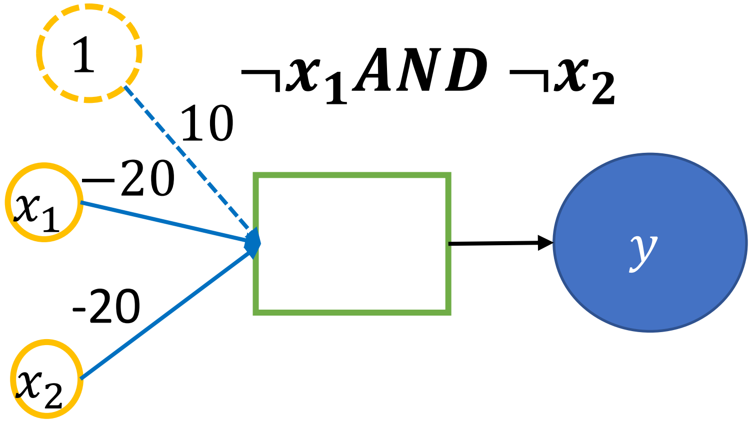
$$a_3^{(2)} = g(w_{30}^{(1)}x_0 + w_{31}^{(1)}x_1 + w_{32}^{(1)}x_2 + w_{33}^{(1)}x_3)$$

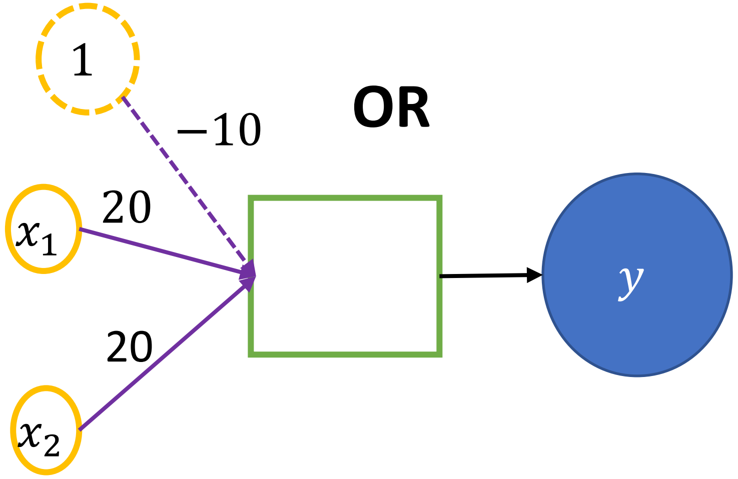
$$a_1^{(3)} = g(w_{10}^{(2)}a_0^{(2)} + w_{11}^{(2)}a_1^{(2)} + w_{12}^{(2)}a_2^{(2)} + w_{13}^{(2)}a_3^{(2)})$$

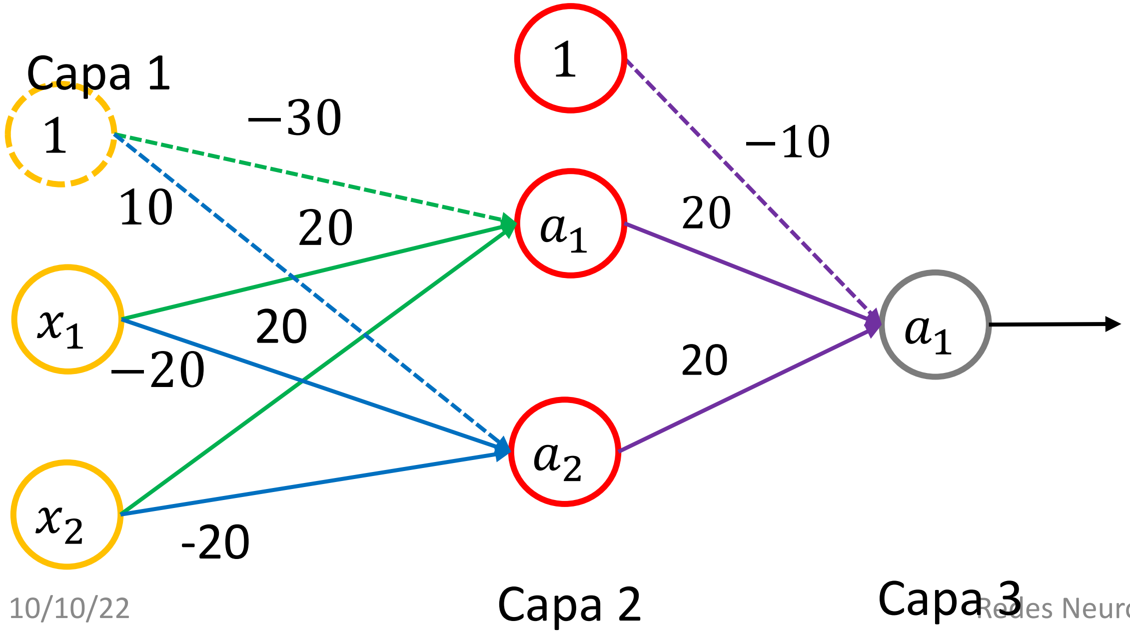
$$a_2^{(3)} = g(w_{20}^{(2)}a_0^{(2)} + w_{21}^{(2)}a_1^{(2)} + w_{22}^{(2)}a_2^{(2)} + w_{23}^{(2)}a_3^{(2)})$$

Red Neuronal: Segunda Intuición









XNOR

x_1	x_2	a_1	a_2	$h_w(x)$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	1	1

Red Neuronal: Segunda Intuición

Tarea

- Verificar manualmente que la red anterior es una implementación de la función XNOR.

Redes Neuronales – Primeras Conclusiones

- En general, permiten calcular diferentes funciones.
- Conforme se van agregando capas, se pueden calcular funciones más y más complejas.
- En el caso del XNOR, se pasa de un margen de decisión lineal a uno no lineal.
- Un poco más del campo de la interpretación, cada capa permite extraer «ideas» más complejas y abstractas de las características x_i.
- Pueden manejar «fácilmente» muchas características.

Redes Neuronales Entran al Ruedo

Fin de la presentación

¡Gracias por su atención!