杉数科技
Cardinal Operations

运筹与优化新编

杉数科技教学平台

第二章线性规划及单纯形法

第五节 单纯形法（另一个视角）

郭加熠 |助理教授

检查相邻点

如何寻找基本可行解的相邻点，使得对当前解进行改善、以降低目标函数值？

- 这一问题的关键在于，如何针对当前情况进行更新。
- 后续仅需重复相同操作，直至迭代到最优点。

一种简单的想法是检查当前基本可行解的所有相邻点：

- 对于基本可行解中一个基变量、用一个非基变量替换后得到的解作为相邻点，最多有 $m(n-m)$ 种可能。而对于每一种情况，都需要求解含 m 个变量的线性方程。
- 这种方法有效，但处理起来效率较低。

本节课将讨论一种更有效的方法来解决这一问题。

杉数科技 Cardinal Operations

基本可行解

假设有一个基为 $B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ 的基本可行解。

定义基矩阵 A_B:

$$A_B = [A_{B(1)}, A_{B(2)}, \ldots, A_{B(m)}]$$

同时定义非基矩阵 A_N——包含所有 A 的非基向量。

通过适当调整变量的顺序，使得 $A = [A_B, A_N]$、$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_B; \boldsymbol{x}_N]$。此时 $\boldsymbol{x}_B$ 为基变量、$\boldsymbol{x}_N$ 为非基变量。

根据定义及相关约束，可以得出

$$\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{x}_N = 0$$

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技 Cardinal Operations

基方向

最优性判断

基变换

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

寻找基本可行解的相邻基本可行解

希望找到一个相邻的基本可行解：

- 选一个非基变量 x_j 作为入基变量。
- 也就是基于当前的基本可行解增加 x_j 的值。

为了实现该目的，考虑将当前基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 平移到 $\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{d}$，其中：

1. $d_j = 1$
2. 对于其他位置 j' 的非基变量，$d_{j'} = 0$。

对于 $\boldsymbol{d}$，需要设置什么限制？

- 平移后的 $\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{d}$ 仍然为可行解，即：

$$A(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$$

可以得出，$A\boldsymbol{d} = 0$。

基方向

将 $\boldsymbol{d}$ 改写为 $\boldsymbol{d}=[\boldsymbol{d}_B;\boldsymbol{d}_N]$。

对于 $\boldsymbol{d}_N$，其中的 $d_j=1$，其余都为 0。此时有

$$A_B\boldsymbol{d}_B+A_j=0$$

上式可以转化为

$$\boldsymbol{d}_B=-A_B^{-1}A_j$$

因此，$\boldsymbol{d}$ 的取值是唯一确定的，满足：

$$\boldsymbol{d}=[\boldsymbol{d}_B;\boldsymbol{d}_N]=[-A_B^{-1}A_j;0;\ldots;1;\ldots;0]$$

其中的 1 对应于第 j 个元素，称这样的 $\boldsymbol{d}$ 为第 j 个基方向。

基方向（续）

基方向仅仅保证等式约束 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 仍然满足。

考虑到 $\boldsymbol{x} \geq 0$，还需保证非负约束满足，即$\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{d} \geq 0$：

- 对于非基变量，开始时为 0、对应位置的 $\boldsymbol{d}$ 非负（0 或 1）。因此，非基变量变化后仍然满足非负。
- 对于基变量，如果需要保证非负，则 θ 的选取不能过大，从而使得 $\boldsymbol{x} + \theta\boldsymbol{d} \geq 0$ 仍然满足。

通常来说，基本可行解的基变量均为正数。然而，某些情况下基本可行解中有的基变量为 0（退化问题），后续将讨论这一情形。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技
Cardinal Operations

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

目标值的变化

对于原始线性规划的目标函数值 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$，同样可以将 $\boldsymbol{c}$ 分解成基变量和非基变量对应的部分，也就是

$$\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{c}_B; \boldsymbol{c}_N]$$

当基本可行解从 $\boldsymbol{x}$ 更新至 $\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d}$ 时，目标函数的变化值为$\theta \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{d}$。

代入 $\boldsymbol{d}$ 的表达式，有：

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{d} = c_j - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_j \doteq \bar{c}_j$$

$\bar{c}_j$ 被称为变量 x_j 的检验数/机会成本。

检验数

对于检验数

$$\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_j$$

作为单纯形法中较为重要的概念，它反映了当基作出调整时，目标函数的变化值。

- 第一项反映了每增加一单位 x_j 所增加的收益。
- 第二项是为了满足约束 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，补偿基变量调整所带来的成本。

杉数科技 Cardinal Operations

检验数（续）

给定当前的基及入基变量 x_j，检验数可以很容易地计算：

- 当检验数为正，说明加入 j 到当前的基将增加目标函数值；
- 当检验数为负，说明加入 j 到当前的基将减小目标函数值。

因此，检验数可以指导算法如何选择入基变量。

提问：对于基变量 $x_{B(i)}$，检验数$\bar{c}_{B(i)}$ 是多少？

$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_{B(i)} = c_{B(i)} - c_B^T \boldsymbol{e}_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0$$

（上式中，$\boldsymbol{e}_i$ 是一个仅第 i 个元素为 1、其余为 0 的向量。）

因此，基变量的检验数为 0。

杉数科技 Cardinal Operations

检验数（续）

定理 2.4 迭代终止准则

对于一个基为 $B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ 的基本可行解 $\boldsymbol{x}$，令 $\bar{\boldsymbol{c}}$ 为各变量对应检验数所构成的向量。若 $\bar{\boldsymbol{c}} \geq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 为最优解。

注：这个定理阐明了单纯形法的停止条件：当发现所有的检验数非负时结束。

- 这也意味着，如果在相邻点中找不到一个更优的解，那么说明已经达到最优解。

定理证明

假设对于基本可行解 $\boldsymbol{x}$，所有的检验数 $\bar{\boldsymbol{c}} \geq 0$。

考虑任意一个可行解 $\boldsymbol{y}$，定义 $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$。

- 由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 均为可行解，所以 $A\boldsymbol{d} = 0$ 成立。

令 N 表示非基变量位置所对应的集合，可以进一步得到：

$$A_B \boldsymbol{d}_B + \sum_{i \in N} A_i d_i = 0$$

因此，$\boldsymbol{d}_B = -\sum_{i \in N} A_B^{-1} A_i d_i$。

现在分析目标函数值的变化，有

$$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{d}_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B^T A_B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i \in N} \bar{c}_i d_i$$

$\forall i \in N$，$\bar{c}_i \geq 0$、同时 d_i 因为 $\boldsymbol{y} \geq 0$ 也非负。故 $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$。

检验数例子

考虑已转化为标准型的生产问题：

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{minimize} & -x_1 & -2x_2 & & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +s_1 & & & = 100 \\
 & & 2x_2 & & +s_2 & & = 200 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +s_3 & = 150 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0
\end{array}
$$

基为 $\{1, 2, 3\}$ 时，基本可行解为 $(50, 100, 50, 0, 0)$，相应的检验数为：

$$
\bar{c}_4 = 0 - [-1, -2, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.5
$$

同理 $\bar{c}_5 = 1$，故所有的检验数均非负，当前基本可行解为最优解。

杉数科技 Cardinal Operations

检验数例子（续）

$$
\begin{array}{lrrrrrl}
\text{minimize} & -x_1 & -2x_2 & & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +s_1 & & & = 100 \\
 & & 2x_2 & & +s_2 & & = 200 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +s_3 & = 150 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0
\end{array}
$$

基为 $\{1,4,5\}$ 时，基本可行解为 $(100,0,0,200,50)$，相应的检验数为：

$$
\bar{c}_2 = -2 - [-1,0,0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -2
$$

类似地有 $\bar{c}_3 = 1$，故下一步应该将 x_2 作为入基变量以减小目标函数值。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技 Cardinal Operations

基方向

最优性判断

基变换

讲　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

基的变换

对于解 $\boldsymbol{x}$，如果检验数 $\bar{\boldsymbol{c}} \geq 0$，那么 $\boldsymbol{x}$ 为最优解。

如果存在某个 j，对应的 $\bar{c}_j < 0$？

- 这意味着要将这个非基变量作为基变量，以减小目标函数值。
- 因此，$\boldsymbol{d}$ 应该选择第 j 个方向。

对于 $\bar{c}_j < 0$，将 $\boldsymbol{d}$ 选择第 j 个基方向。沿着这个方向更新会减小目标值，但更新的步长 θ 应该选取多少？

- 需要保证 $\boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \geq 0$；
- 需要 θ 尽可能的大；
- 因此，步长的选取为

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \geq 0\}$$

步长

在不违反约束的情况下，步长的选取设置为：

$$\theta^* = \max\{\theta \geq 0 \mid \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{d} \geq 0\}$$

这里对于 θ^* 有两种情形：

- 如果 $\boldsymbol{d} \geq 0$，那么 $\theta^* = \infty$。在这种情形下，θ 可以尽可能的大，目标函数下降的同时约束也不会被违反。因此，原始的线性规划问题无界。
- 如果对于某些 i 有 $d_i < 0$，那么需要求解：

$$\theta^* = \min_{\{i \mid d_i < 0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i}\right)$$

对于任意的 $i \in N$ 有 $d_i \geq 0$，因此上式等价于：

$$\theta^* = \min_{\{i \in B \mid d_i < 0\}} \left(-\frac{x_i}{d_i}\right)$$

杉数科技 Cardinal Operations

基的转换

在 θ^* 有限的情况，可以根据 θ^* 与 $\boldsymbol{d}$ 转化为另一个可行解：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta^* \boldsymbol{d}$$

假设 $B(\ell) \in \{B(1), ..., B(m)\}$ 对应于 $\theta^* = -\frac{x_{B(\ell)}}{d_{B(\ell)}}$（可能存在多个满足 θ^* 的 $B(\ell)$，后续对其进行讨论），那么则有

$$y_{B(\ell)} = x_{B(\ell)} + \theta^* d_{B(\ell)} = 0$$

因此，原先的基变量 $x_{B(\ell)}$ 变为 0，而原先的非基变量 $x_j = \theta^*$ 变为正数。也就是说基转换为

$$B(1), \ldots, B(\ell - 1), j, B(\ell + 1), \ldots, B(m)$$

单纯形法的基本流程

假设从基为 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 开始运行

1. 首先，计算检验数 $\bar{\boldsymbol{c}}$

$$\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_j$$

   - 如果各个检验数均非负，则 $\boldsymbol{x}$ 为最优解；
   - 否则，选择某个满足 $\bar{c}_j < 0$ 的 j。

2. 计算第 j 个基方向 $\boldsymbol{d} = [-A_B^{-1}A_j; 0; \ldots; 1; \ldots; 0]$
   - 如果 $\boldsymbol{d} \geq 0$，那么该问题无界、最优值为 $-\infty$；
   - 否则，计算 $\theta^* = \min_{\{i \in B | d_i < 0\}} \{-\frac{x_i}{d_i}\}$。

3. 更新至新的基本可行解：$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \theta^* \boldsymbol{d}$，相应的 j 替换了基中的 $B(\ell)$：

$$B(\ell) = \arg\min_{\{i \in B | d_i < 0\}} \left\{ -\frac{x_i}{d_i} \right\}$$

此时，目标函数值也变化了 $\theta^* \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{d} = \theta^* \bar{c}_j$。并重复回步骤 1。

杉数科技 Cardinal Operations

单纯形法的迭代

在大多情形下，在单纯形法的迭代中目标函数值都会严格下降。

- 如果严格下降都能成立，由于基本可行解的数量有限，那么单纯形法一定能在有限次数的迭代后停止。
- 然而，在迭代过程中存在目标函数值不变的情况。如果处理不当，可能会引起问题。
- 这也就是单纯形法中的退化问题，之后课程将对这种情况进行分析。

感谢聆听！

Thank You!