杉数科技
Cardinal Operations

运筹与优化新编

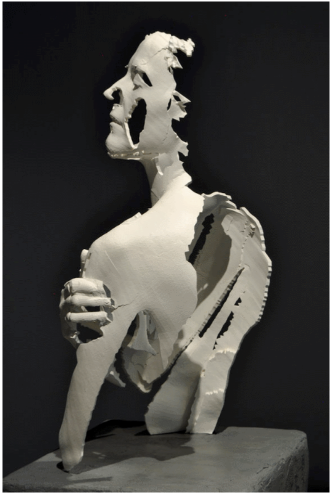
杉数科技教学平台

第三章线性规划的对偶

第一节 对偶形式推导

郭加熠 |助理教授

艺术品是如何做出来的？



- 整块石膏雕刻
- 3D 打印

生产问题与收购问题

生产问题（原问题）：

- 企业 A 如何安排生产计划，
  实现利润最大化？

	产品类型 I	产品类型 II	库存容量
物料 1	5	15	480
物料 2	4	4	160
物料 3	35	20	1190
单位利润	13	23	

A 企业出让条件：**出让代价应不低于用同等数量资源由自己组织生产活动时获取的盈利。**

生产问题与收购问题

生产问题（原问题）：

- 企业 A 如何安排生产计划，实现利润最大化？

收购问题（对偶问题）：

- 公司 B 如何用最小代价，收购企业 A 的全部资源？

	产品类型 I	产品类型 II	库存容量
物料 1	5	15	480
物料 2	4	4	160
物料 3	35	20	1190
单位利润	13	23	

A 企业出让条件：**出让代价应不低于用同等数量资源由自己组织生产活动时获取的盈利。**

杉数科技 Cardinal Operations

生产问题与收购问题建模

	产品类型 I	产品类型 II	库存容量
物料 1	5	15	480
物料 2	4	4	160
物料 3	35	20	1190
单位利润	13	23	

生产问题：设生产 I 型和 II 型产品分别为 x_1 和 x_2 件

$$
\begin{array}{lllll}
\text{maximize} & 13x_1 & +23x_2 & \\
\text{subject to} & 5x_1 & +15x_2 & \leq 480 \\
 & 4x_1 & +4x_2 & \leq 160 \\
 & 35x_1 & +20x_2 & \leq 1190 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

收购问题：设 y_1, y_2, y_3 为原料收购的单位定价

$$
\begin{array}{lllll}
\text{minimize} & 480y_1 & +160y_2 & +1190y_3 & \\
\text{subject to} & 5y_1 & +4y_2 & +35y_3 & \geq 13 \\
 & 15y_1 & +4y_2 & +20y_3 & \geq 23 \\
 & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0, & y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

原问题与对偶问题

原问题（生产问题）：

安排生产计划，使利润最大化

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximize} & 13x_1 & +23x_2 & \\
\text{subject to} & 5x_1 & +15x_2 & \leq 480 \\
 & 4x_1 & +4x_2 & \leq 160 \\
 & 35x_1 & +20x_2 & \leq 1190 \\
 & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

对偶问题（收购问题）：

收购工厂，盘算最小收购价格

$$
\begin{array}{lllll}
\text{minimize} & 480y_1 & +160y_2 & +1190y_3 & \\
\text{subject to} & 5y_1 & +4y_2 & +35y_3 & \geq 13 \\
 & 15y_1 & +4y_2 & +20y_3 & \geq 23 \\
 & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0, & y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

数学形式上，如何从原问题导出对偶问题?

从探索原问题最优值的上界和下界出发

目录

杉数科技 Cardinal Operations

最大化问题的对偶

最小化问题的对偶

对偶形式总结与另一个视角

讲 员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

寻找原问题最优值下界

$$\begin{aligned}\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\ \text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 \le 480 \\ & 4x_1 + 4x_2 \le 160 \\ & 35x_1 + 20x_2 \le 1190 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

通过可行解，探索最优值 z^* 的下界：

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) = (1, 1) \quad & \Rightarrow z^* & \ge 36 \\ (x_1, x_2) = (34, 0) \quad & \Rightarrow z^* & \ge 442 \\ (x_1, x_2) = (0, 32) \quad & \Rightarrow z^* & \ge 736 \\ (x_1, x_2) = (12, 28) \quad & \Rightarrow z^* & \ge 800\end{aligned}$$

综上，$z^* \ge 800$

寻找原问题最优值上界

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 \le 480 & (1) \\
& 4x_1 + 4x_2 \le 160 & (2) \\
& 35x_1 + 20x_2 \le 1190 & (3) \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

利用约束做变换，寻找最优值 z^* 的上界

$$
\begin{aligned}
&\text{考虑 } 6 \times (2), && \text{即 } 24x_1 + 24x_2 \le 960 && \Rightarrow z^* \le 960 \\
&\text{考虑 } 2 \times (1) + (2), && \text{即 } 14x_1 + 34x_2 \le 1120 && \Rightarrow z^* \le 1120 \\
&\text{考虑 } (1) + 2 \times (2), && \text{即 } 13x_1 + 23x_2 \le 800 && \Rightarrow z^* \le 800
\end{aligned}
$$

综上，$z^* \le 800$。结合下界，所以 $z^* = 800$

杉数科技 Cardinal Operations

寻找上界的一般思路

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 \le 480 && (1) \\
& 4x_1 + 4x_2 \le 160 && (2) \\
& 35x_1 + 20x_2 \le 1190 && (3) \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

利用约束做变换的一般情况： 考虑 $y_1 \times (1) + y_2 \times (2) + y_3 \times (3)$

$$(5x_1 + 15x_2)y_1 + (4x_1 + 4x_2)y_2 + (35x_1 + 20x_2)y_3 \le 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

为保持 $\le$， 要求： $y_1, y_2, y_3 \ge 0$

杉数科技 Cardinal Operations

从原问题导出对偶问题

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 \le 480 && (1) \\
& 4x_1 + 4x_2 \le 160 && (2) \\
& 35x_1 + 20x_2 \le 1190 && (3) \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$(5x_1 + 15x_2)y_1 + (4x_1 + 4x_2)y_2 + (35x_1 + 20x_2)y_3 \le 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$(5y_1 + 4y_2 + 35y_3)x_1 + (15y_1 + 4y_2 + 20y_3)x_2 \le 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 35y_3 \ge 13 \\
& 15y_1 + 4y_2 + 20y_3 \ge 23 \\
& y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 在所有上界中找最小的
- 匹配$13x_1$，保持上界
- 匹配$23x_2$，保持上界

杉数科技 Cardinal Operations

两个线性规划问题

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^T\boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \ge 0 \end{aligned}$$

- 这两个线性规划互为对偶
- 如果将一个问题看作原问题，另一个问题为该问题的对偶问题
- 将 $\boldsymbol{y}$ 记做对偶变量 (对于左侧问题)

对偶形式变种：原问题包含等式约束

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 = 480 && (1) \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 160 && (2) \\
& 35x_1 + 20x_2 \leq 1190 && (3) \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$(5x_1 + 15x_2)y_1 + (4x_1 + 4x_2)y_2 + (35x_1 + 20x_2)y_3 \leq 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$(5y_1 + 4y_2 + 35y_3)x_1 + (15y_1 + 4y_2 + 20y_3)x_2 \leq 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 35y_3 \geq 13 \\
& 15y_1 + 4y_2 + 20y_3 \geq 23 \\
& y_1 \text{ 无约束}, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

对偶形式变种：原问题包含无约束变量

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = 13x_1 + 23x_2 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 15x_2 \leq 480 && (1) \\
& 4x_1 + 4x_2 \leq 160 && (2) \\
& 35x_1 + 20x_2 \leq 1190 && (3) \\
& x_1 \text{ 无约束}, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$(5x_1 + 15x_2)y_1 + (4x_1 + 4x_2)y_2 + (35x_1 + 20x_2)y_3 \leq 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$(5y_1 + 4y_2 + 35y_3)x_1 + (15y_1 + 4y_2 + 20y_3)x_2 \leq 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3$$

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 480y_1 + 160y_2 + 1190y_3 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 4y_2 + 35y_3 = 13 \\
& 15y_1 + 4y_2 + 20y_3 \geq 23 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

最小化问题探索

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = 480x_1 + 160x_2 + 1190x_3 \\ \text{subject to} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 35x_3 \geq 13 && (1) \\ & 15x_1 + 4x_2 + 20x_3 \geq 23 && (2) \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

最优值上界: $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0) \quad \Rightarrow z^* \leq 800$

最优值下界: 考虑$12 \times (1) + 28 \times (2)$

即$480x_1 + 160x_2 + 980x_3 \geq 800 \quad \Rightarrow z^* \geq 800$

一般情况: 考虑$y_1 \times (1) + y_2 \times (2)$

杉数科技 Cardinal Operations

从原问题导出对偶问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 480x_1 + 160x_2 + 1190x_3 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 35x_3 \ge 13 \quad (1) \\
& 15x_1 + 4x_2 + 20x_3 \ge 23 \quad (2) \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$(5x_1 + 4x_2 + 35x_3)y_1 + (15x_1 + 4x_2 + 20x_3)y_2 \ge 13y_1 + 23y_2$$

$$(5y_1 + 15y_2)x_1 + (4y_1 + 4y_2)x_2 + (35y_1 + 20y_2)x_3 \ge 13y_1 + 23y_2$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 13y_1 + 23y_2 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 15y_2 \le 480 \\
& 4y_1 + 4y_2 \le 160 \\
& 35y_1 + 20y_2 \le 1190 \\
& y_1 \ge 0, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 在所有下界中找最大的
- 匹配$480x_1$，保持下界
- 匹配$160x_2$，保持下界
- 匹配$1190x_3$，保持下界
- 保持 (1), (2) 中的$\ge$

杉数科技 Cardinal Operations

对偶形式变种：原问题包含等式约束

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 480x_1 + 160x_2 + 1190x_3 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 35x_3 = 13 && (1) \\
& 15x_1 + 4x_2 + 20x_3 \geq 23 && (2) \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$(5x_1 + 4x_2 + 35x_3)y_1 + (15x_1 + 4x_2 + 20x_3)y_2 \geq 13y_1 + 23y_2$$

$$(5y_1 + 15y_2)x_1 + (4y_1 + 4y_2)x_2 + (35y_1 + 20y_2)x_3 \geq 13y_1 + 23y_2$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 13y_1 + 23y_2 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 15y_2 \leq 480 \\
& 4y_1 + 4y_2 \leq 160 \\
& 35y_1 + 20y_2 \leq 1190 \\
& y_1\text{无约束}, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

对偶形式变种：原问题包含无约束变量

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = 480x_1 + 160x_2 + 1190x_3 \\
\text{subject to} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 35x_3 \geq 13 && (1) \\
& 15x_1 + 4x_2 + 20x_3 \geq 23 && (2) \\
& x_1\text{无约束}, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

$$(5x_1 + 4x_2 + 35x_3)y_1 + (15x_1 + 4x_2 + 20x_3)y_2 \geq 13y_1 + 23y_2$$

$$(5y_1 + 15y_2)x_1 + (4y_1 + 4y_2)x_2 + (35y_1 + 20y_2)x_3 \geq 13y_1 + 23y_2$$

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 13y_1 + 23y_2 \\
\text{subject to} \quad & 5y_1 + 15y_2 = 480 \\
& 4y_1 + 4y_2 \leq 160 \\
& 35y_1 + 20y_2 \leq 1190 \\
& y_1 \geq 0, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

目录

最大化问题的对偶

最小化问题的对偶

对偶形式总结与另一个视角

讲　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

对偶形式总结

原问题			对偶问题		
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$		maximize	$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$	
subject to	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i,$	$i \in M_1,$	subject to	$y_i \geq 0,$	$i \in M_1$
	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i,$	$i \in M_2,$		$y_i \leq 0,$	$i \in M_2$
	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i,$	$i \in M_3,$		y_i 无约束,	$i \in M_3$
	$x_j \geq 0,$	$j \in N_1,$		$A_j^T\boldsymbol{y} \leq c_j,$	$j \in N_1$
	$x_j \leq 0,$	$j \in N_2,$		$A_j^T\boldsymbol{y} \geq c_j,$	$j \in N_2$
	x_j 无约束,	$j \in N_3,$		$A_j^T\boldsymbol{y} = c_j,$	$j \in N_3$

- $\boldsymbol{a}_i^T$ 为 A 矩阵第 i 行，A_j 为 A 矩阵第 j 列
- 每个原问题约束对应一个对偶问题变量
- 每个原问题变量对应一个对偶问题约束
- 等式约束对应无约束变量，反之亦然

杉数科技 Cardinal Operations

记忆技巧

原问题	minimize	maximize	对偶问题
约束	$\geq b_i$	≥ 0	变量
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	无约束	
变量	≥ 0	$\leq c_j$	约束
	≤ 0	$\geq c_j$	
	无约束	$= c_j$	

- 等式约束对应无约束变量，反之亦然
- 变量的非负约束记为正常约束；变量的非正约束记为异常约束；
  最大化问题，将$\leq c_j$记做正常约束，将$\geq c_j$记做异常约束；
  最小化问题，将$\geq b_i$记做正常约束，将$\leq b_i$记做异常约束；
- 正常（异常）约束对应正常（异常）约束。

例子

考虑问题：

$$
\begin{array}{lrrrl}
\text{minimize} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \\
\text{subject to} & -x_1 & +3x_2 & & = 5 \\
& 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & \geq 6 \\
& & & x_3 & \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 & x_2 \leq 0 & x_3 \text{ 无约束} &
\end{array}
$$

其对偶问题:

$$
\begin{array}{lrrrl}
\text{maximize} & 5y_1 & +6y_2 & +4y_3 & \\
\text{subject to} & -y_1 & +2y_2 & & \leq 1 \\
& 3y_1 & -y_2 & & \geq 2 \\
& & +3y_2 & +y_3 & = 3 \\
& y_1 \text{ 无约束} & y_2 \geq 0 & y_3 \leq 0 &
\end{array}
$$

总结对偶定理

定理 3.1

对偶问题的对偶问题是原问题

定理 3.2

两个等价问题（比如加入剩余变量、替换无约束变量）的对偶问题也是等价的

对偶形式推导

考虑标准型的线性规划：

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

其中，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$。我们称之为原问题，这里先假设其最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 存在

- 我们接下来推导其对偶问题
- 对偶理论是拉格朗日乘子法的衍生

对偶形式推导（续）

- 引入等式约束 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = b$ 的对偶乘子 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$，将原问题转换做如下：

$$
\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(b - A\boldsymbol{x})^{①} \\
\text{subject to} \quad & \cancel{A\boldsymbol{x} = b}^{②} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{y}) = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

- 由于 $g(\boldsymbol{y})$ 有以下特性，所以该问题为原问题的松弛问题：

$$
g(\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*
$$

对于任意 $\boldsymbol{y}$，$g(\boldsymbol{y})$ 都是原问题的下界

杉数科技 Cardinal Operations

对偶形式推导（续）

- 我们希望寻找最紧的这样的下界：

$$\underset{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}{\text{maximize}} \quad g(\boldsymbol{y})$$

  该问题就是对偶问题

  之后我们将了解到：对偶理论表明，在线性规划中，对偶问题的最优值与原问题的最优值相等

- 现在，我们继续推导 $g(\boldsymbol{y})$ 的具体形式：

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{y}) &= \underset{\boldsymbol{x}\geq 0}{\text{minimize}} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + \underset{\boldsymbol{x}\geq 0}{\text{minimize}} \quad \left(\boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{y}\right)^T x \end{aligned}$$

杉数科技 Cardinal Operations

对偶形式推导（续）

- 注意：

$$\underset{\boldsymbol{x}\geq 0}{\text{minimize}} \quad \left(\boldsymbol{c}-A^T\boldsymbol{y}\right)^T\boldsymbol{x} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \boldsymbol{c}-A^T\boldsymbol{y}\geq 0, \\ -\infty, & \text{其余情况.} \end{cases}$$

  而在对偶问题中，我们希望寻找原问题最紧的下界，所以只需要考虑使 $g(\boldsymbol{y})$ 不为 $-\infty$ 的那些 $\boldsymbol{y}$

- 于是，我们得到了对偶问题的最终形式：

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m}{\text{maximize}} \quad & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^T\boldsymbol{y}\leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

另一种视角：对偶形式推导

考虑标准线性规划（$m \times n$）：

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

可以等价表示为：

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \max_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m} \boldsymbol{y}^T (\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

- 如果 $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{b}$，那么我们可以找到 $\boldsymbol{y}$ 使得 $\boldsymbol{y}^T(A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = \infty$，因此此时取不到最优解。
- 所以此形式隐含了约束 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

杉数科技 Cardinal Operations

另一种视角：交换 min 与 max 顺序

$$\min_{\boldsymbol{x}\geq 0} \quad \max_{\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

假设我们可以交换 max 和 min（后面会讨论其中道理），那么这个问题变成：

$$\text{maximize}_{\boldsymbol{y}} \quad \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} + \min_{\boldsymbol{x}\geq 0} \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{y})$$

其等价形式：

$$\begin{aligned} \text{maximize}_{\boldsymbol{y}} \quad & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\geq 0} \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{c} - A^T\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0 & \text{if } A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \\ -\infty & \text{if } A^T\boldsymbol{y} \not\leq \boldsymbol{c} \end{cases}$$

杉数科技 Cardinal Operations

对偶理论总结

- 在线性优化中，对偶理论是非常重要的（对一般优化问题也是）
- 对偶问题保留了原问题全部的有用信息
- 辅助求解线性规划问题

本课时：对偶形式推导

后续课程：对偶问题的好性质，大量实际应用

杉数科技 Cardinal Operations

感谢聆听！

Thank You!

杉数科技
Cardinal Operations