运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技 Cardinal Operations

第二章线性规划及单纯形法

第一节 介绍线性规划

郭加熠 |助理教授

回顾：优化问题介绍

优化问题三个要素：

- 决策变量
- 目标函数
- 约束条件

优化问题一般形式：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & f(x) \\
\text{subject to} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, s \\
& h_j(x) = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, t
\end{aligned}
$$

- 很多问题可以构造为优化问题，例如：运输问题，排产问题，最短路径问题，顶点覆盖问题，支持向量机问题。

回顾：分类

- 有约束 vs 无约束
- 线性 vs 非线性
- 连续 vs 离散

下面将研究最基础的一类优化问题——线性规划。

目录

杉数科技 Cardinal Operations

定义与标准型

线性规划建模练习

可线性化的非线性形式

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

一般形式

线性规划问题一般可以写为

$$
\begin{aligned}
\text{minimize/maximize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i \quad \forall i \in M_1 \\
& \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i \quad \forall i \in M_2 \\
& \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i \quad \forall i \in M_3 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i \in N_1 \\
& x_i \leq 0 \quad \forall i \in N_2 \\
& x_i \text{ 无约束} \quad \forall i \in N_3
\end{aligned}
$$

M_1、M_2、M_3 为 $\{1, ..., m\}$ 的子集，N_1、N_2、N_3 为 $\{1, ..., n\}$ 的子集

矩阵形式

可以将线性规划问题写成更紧凑的形式：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize/maximize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A_1 \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}_1 \\
& A_2 \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_2 \\
& A_3 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_3 \\
& x_i \geq 0 \qquad \forall i \in N_1 \\
& x_i \leq 0 \qquad \forall i \in N_2 \\
& x_i \text{ 无约束} \quad \forall i \in N_3
\end{aligned}
$$

A_1、A_2 和 A_3 都是矩阵（维度为 $m_1 \times n$、$m_2 \times n$ 和 $m_3 \times n$），$\boldsymbol{b}_1$、$\boldsymbol{b}_2$ 和 $\boldsymbol{b}_3$ 为向量（维度为 $m_1 \times 1$、$m_2 \times 1$ 和 $m_3 \times 1$）。$\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量

杉数科技 Cardinal Operations

线性规划标准型

为了更系统地研究线性规划问题，我们需要将问题写成标准型

线性规划问题的标准型如下：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, A 是 $m \times n$ 的矩阵，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$。

任意线性规划问题都能写成标准型

通常假设 A 为行满秩 $(m < n)$

标准型转换

若目标函数是最大化问题

- 用 $-\boldsymbol{c}$ 替代 $\boldsymbol{c}$ 并将其转换为最小化问题

消除不等式约束 $A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ 或 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$

- 将不等式改写为 $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s} \geq 0$ 或 $A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{s} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{s} \geq 0$
- 称 $\boldsymbol{s}$ 为松弛变量或剩余变量

若存在 $x_i \leq 0$

- 定义 $y_i = -x_i$

消除自由变量 x_i （x_i 无约束）

- 定义 $x_i = x_i^+ - x_i^-$，并且 $x_i^+ \geq 0$、$x_i^- \geq 0$

杉数科技 Cardinal Operations

例子

产品	I	II	限量
单位产能消耗	4	4	40
单位原材料消耗	5	10	60
利润	6	8	

目标：求利润最大化方案

设 x_1, x_2 为产品 I, II 的生产数量

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximize} & 6x_1 & +8x_2 & \\
\text{subject to} & 4x_1 & +4x_2 & \leq 40 \\
 & 5x_1 & +10x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

例子（续）

$$
\begin{array}{rrrl}
\text{maximize} & 6x_1 & +8x_2 & \\
\text{subject to} & 4x_1 & +4x_2 & \leq 40 \\
 & 5x_1 & +10x_2 & \leq 60 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

标准型

$$
\begin{array}{rrrrrl}
\text{minimize} & -6x_1 & -8x_2 & & & \\
\text{subject to} & 4x_1 & +4x_2 & +s_1 & & = 40 \\
 & 5x_1 & 10x_2 & & +s_2 & = 60 \\
 & x_1, & x_2, & s_1, & s_2 & \geq 0
\end{array}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

支持向量机问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}_{\boldsymbol{a},b,\delta,\sigma} \quad & \textstyle\sum_i \delta_i + \sum_j \sigma_j & \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{a} + b + \delta_i \geq 1 & \forall i \\
& \boldsymbol{y}_j^T \boldsymbol{a} + b - \sigma_j \leq -1 & \forall j \\
& \delta_i \geq 0 & \forall i \\
& \sigma_j \geq 0 & \forall j
\end{aligned}
$$

定义 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^+ - \boldsymbol{a}^-$, $b = b^+ - b^-$, 并且 $\boldsymbol{a}^+, \boldsymbol{a}^-, b^+, b^- \geq 0$。

添加松弛变量到不等式约束中

标准型

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & \sum_i \delta_i + \sum_j \sigma_j & \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{a}^+ - \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{a}^- + b^+ - b^- + \delta_i - s_i = \ 1 & \forall i \\
& \boldsymbol{y}_j^T \boldsymbol{a}^+ - \boldsymbol{y}_j^T \boldsymbol{a}^- + b^+ - b^- - \sigma_j + t_j = -1 & \forall j \\
& \boldsymbol{a}^+, \boldsymbol{a}^-, b^+, b^- \geq 0 & \\
& \delta_i, s_i \geq 0 & \forall i \\
& \sigma_j, t_j \geq 0 & \forall j
\end{array}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

标准型

标准型主要用于分析的目的。通常不需要改写为标准型，只需要写成易于理解的方式即可。

然而，能够改写标准型是一项重要的技能，这有助于分析和利用软件求解线性规划问题。

下面，我们将通过几个例子，展示如何将问题转化为线性规划问题。

目录

杉数科技 Cardinal Operations

定义与标准型

线性规划建模练习

可线性化的非线性形式

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

排班问题

一家医院想制定周期为一周的护士夜班值班表。

- 第 j 天需要 d_j 个护士来值夜班，$j = 1, ..., 7$
- 每个护士连续值班 5 天
- 在满足所有需求的情况下，最小化值班护士人数
- 忽略整数约束（即，可以出现半个护士的情况）

杉数科技 Cardinal Operations

排班问题

决策变量如何选择？

变量 x_i 设作为第 i 天护士的总人数可以吗?

- 不能构造护士必须连续工作 5 天的约束

更好的方法是定义 x_i 为护士在第 i 天开始工作

目标函数为

$$\text{minimize} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

杉数科技 Cardinal Operations

排班问题

线性规划问题为：

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{minimize} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & d_1 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & d_2 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq & d_3 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq & d_4 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq & d_5 \\
 & & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq & d_6 \\
 & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq & d_7 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

矩阵形式

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad
\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad
\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}
$$

- 目标函数为 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = x_1 + x_2 + \cdots + x_7$
- 约束为 $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{x} \geq 0$

杉数科技 Cardinal Operations

航空交通管理问题

航空交通管理需要控制 n 架飞机的着陆时间

- 航班必须按照 $1, \dots, n$ 的顺序降落
- 航班 j 必须在 $[a_j, b_j]$ 时间内降落
- 目标是最大化最小间隔时间，即两家航班着陆时间间隔。

优化模型

决策变量

- 设 t_j 为航班 j 的着陆时间

优化问题

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \min_{j=1,\dots,n-1}\{t_{j+1}-t_j\} & \\
\text{subject to} & a_j \le t_j \le b_j, & j=1,\dots,n \\
& t_j \le t_{j+1}, & j=1,\dots,n-1
\end{array}
$$

目标函数不是线性函数，称之为最大最小化问题。

杉数科技 Cardinal Operations

线性规划模型

定义

$$\Delta = \min_{j=1,\dots,n-1} \{t_{j+1} - t_j\}$$

因此，$t_{j+1} - t_j \geq \Delta, \forall j$。

构造线性规划模型：

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \Delta \\
\text{subject to} \quad & t_{j+1} - t_j - \Delta \geq 0, \quad j = 1, \dots, n-1 \\
& a_j \leq t_j \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n \\
& t_j \leq t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n-1
\end{aligned}$$

在最优解处，Δ 应当等于最小间隔时间（因为问题的目标是最大化 Δ）。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲 员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

最小最大化问题

与前一个例子相似，下面研究最小最大化问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \max_{i=1,\dots,n}\{\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i\} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

通过类似的方式解决

- 定义 $y = \max_{i=1,\dots,n}\{\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i\}$

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\boldsymbol{x},y} \quad & y \\ \text{subject to} \quad & y \geq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \quad \forall i \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

杉数科技 Cardinal Operations

解决绝对值问题

绝对值问题也可以通过线性规划来解决。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

也可以等价写为如下形式（为什么？）

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{subject to} \quad & y_i \geq x_i \\ & y_i \geq -x_i \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

类似的想法可以用于以下约束 $|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + b| \leq c$

绝对值

考虑类似问题

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned} \tag{2}$$

能否用类似的想法将问题转化为：

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \text{subject to} \quad & y_i \geq x_i \\ & y_i \geq -x_i \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

答案是不能的。一般来说，问题 (2) 是非凸的，不能将其转化为线性规划处理。

杉数科技 Cardinal Operations

线性分式规划

$$\begin{aligned}\text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}+f} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\end{aligned}$$

假设对于所有满足 $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ 的 $\boldsymbol{x}$ 都有 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}+f>0$ 成立

如何将其转化为线性规划问题？

- 定义

$$\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}+f}, \qquad z=\frac{1}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x}+f}$$

线性分式规划

可以将问题写成

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}_{\boldsymbol{y},z} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} + dz \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}z \le 0 \\
& \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} + fz = 1 \\
& z \ge 0
\end{aligned}
$$

这是一个线性规划问题

- 为什么两者相等？
- 详见 Boyd and Vandenberghe（P151）

杉数科技 Cardinal Operations

为什么使用线性规划？

最容易求解

- 理论上来说，线性规划是多项式时间可解的，和其他所有优化问题相比，复杂度低
- 从实践的角度，商业软件可以轻松解决数千万变量的线性规划问题，如果存在结构，可以解决上亿量级变量。

用途广泛。

- 无论是精确还是估计，都可以对实际问题建模

基础

- 线性规划理论是其他大多数优化理论的基础

下节课，将介绍如何利用线性规划建模排产中的实际问题

杉数科技 Cardinal Operations

感谢聆听！

Thank You!