优化理论与算法

第十章

内点法

郭加熠|助理教授

目录

讲　员

郭加熠，江波，刘慧康

线性规划

回顾线性规划标准型与其对偶问题

原问题	对偶问题
$\min \quad c^T x$	$\max \quad b^T y$
$\text{s.t.} \quad Ax = b, x \geq 0$	$\text{s.t.} \quad A^T y + s = c, \quad s \geq 0$

互补条件可以写为

$$x_i \cdot s_i = 0 \quad \forall i$$

线性约束最优化条件其他形式

根据线性约束的最优化条件：

1. x 为原问题可行解
2. y 为对偶问题可行解
3. $c^T x = b^T y$

根据互补松弛条件，可以得到条件的等价形式：

1. x 为原问题可行解
2. y 为对偶问题可行解
3. 满足所有互补松弛条件

总体想法

找到满足下述约束的一组解 x, y, s:

$$
\begin{aligned}
Ax = b, &\quad x \geq 0 \\
A^T y + s = c, &\quad s \geq 0 \\
x_i \cdot s_i = 0, &\quad \forall i
\end{aligned}
$$

思路：所有等式约束构成一个非线性系统，可以使用牛顿法

难度：迭代过程中 x_i 和 s_i 可能小于 0!

重点：如何保证牛顿法迭代过程中 x_i 和 s_i 均大于 0，且 $x_i s_i$ 越来越接近 0

目录

讲　　员

郭加熠，江波，刘慧康

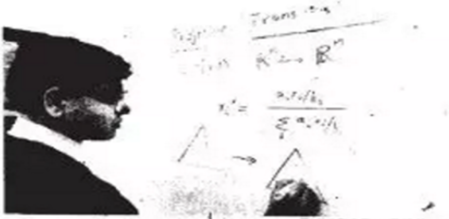
内点法的历史

COMBINATORICA 4 (4) (1984) 373—395

A NEW POLYNOMIAL-TIME ALGORITHM FOR LINEAR PROGRAMMING

N. KARMARKAR

Received 20 August 1984
Revised 9 November 1984



The New York Times/Keith Meyers

Dr. Narendra Karmarkar working on his algorithm at Bell Labs in Murray Hill, N.J. His method appears to be much faster than current approaches.

Theoretical Breakthrough Offers New Insights to Problem Solving

影响

Breakthrough: NYT

NEWS CLIP

Breakthrough in Problem Solving

THE NEW YORK

Time Magazine Joins In

NEWS CLIP

Folding the Perfect Corner

The Wall Street Journal Waits Till 1986

NEWS CLIP

Karmarkar Algorithm Proves Its Worth

叶荫宇教授感悟

叶荫宇教授的体育之路：从稻田到斯坦福

三位成为终身朋友的导师

我深深记得我被线性规划所吸引的那一天。那是1984年的一个阳光灿烂的日子，我决定去聆听AT&T公司的纳伦德拉·卡马卡（Narend Karmarkar）的客座演讲，他刚刚发明了第一个获得专利的软件算法。大礼堂里挤满了人，我只好坐在地板上。我惊讶于线性规划的丰富内涵和诸多用途，它可以用于优化各种各样现实世界的过程，从帮助农民决定种植何种作物到如何保持电网平衡。因此我很快做出决定：在博士期间投身于这一数学分支的研究。

我的首位导师乔治·丹齐格（George Dantzig）是线性规划的三位奠基人之一。当我抵达斯坦福时，他已经赢得了这个领域几乎所有的奖项——首届约翰·冯·诺依曼奖、国家科学奖章以及其他许多奖项。我想他很欣赏我的学术好奇心和求知欲，他在很多方面帮助了我。

乔治是一位伟大的导师。我积极地征求他的意见，向他展示我的研究想法。攻读博士学位期间我发表了三篇论文，在很多地方都要感谢他。博士毕业后很长一段时间，甚至在他退休以后，我都一直在寻求乔治的建议。他和他的妻子成了我非常亲密的朋友。在2005年他去世的头天晚上，我和妻子去他床边看望了他。即便是在那个时候，他还想跟我聊我手头上的最新研究。

我的第二位重要导师是大卫·伦伯格（David Luenberger），他创立了斯坦福大学工程经济系统系（后来并入现在的管理科学与工程系）。伦伯格是优化领域的一位巨人，我求学的第一门优化课程用的就是他的书。一些年后，我成为了伦伯格该本书的合著者。这本书的书名是《线性和非线性规划》。

叶荫宇教授感悟

第三位导师是运筹学巨匠之一，美国康奈尔大学的迈克尔·托德（Michael Todd）。他邀请我到康奈尔大学做博士后研究，并且一起撰写了多篇论文，其中包括提出了一个在当前线性规划求解软件中仍然广泛实现的算法。

导师即教练

导师帮助下一代研究者的一种方法是把他们引荐给领域中的其他专家学者。你的事业不仅仅是你的研究，而是一个网络。然而，我的导师们教给我的最重要的东西，是对学术的理解、学术诚信、好奇心和严谨的思维。

作为一名教授，我喜欢那些有着强烈的求知欲，愿意研究那些已经被广泛研究过但未被解决的难题的学生。我要求他们围绕这个主题挑战性地做一些研究，然后我们每周定期会面，继续共同推进。每当学生们走进我的办公室，告诉我他们取得了一个让人大开眼界的结果而解决了一个科学谜题的时候，就是我最自豪的时光。

这么多年过去了，我仍然建议我的学生们在体育运动方面找到一种兴趣。我从打篮球中领悟到了很多：刻苦训练很重要，团队合作很重要，竞争精神很重要，还有遵守规则亦很重要。我告诉他们：相信我，这些品质可以改变你的人生。

https://engineering.stanford.edu/news/yinyu-ye-sports-led-me-rice-fields-stanford

目录

讲　　员

郭加熠，江波，刘慧康

对数障碍目标函数

思想：$-\ln x_j$ “替代”不等式 $x_j \geq 0$。

观察到

$$\min -\sum_{j=1}^{n} \ln x_j \iff \min e^{-\sum_{j=1}^{n} \ln x_j} \iff \max \prod_{j=1}^{n} x_j$$

几何角度：$\min -\sum_{j=1}^{n} \ln x_j$ 这个目标在求解可行域的**解析中心**

同时，这个目标可以防止所有 x_j 接近零。

引用对数障碍函数

替换原始线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

为原始对数障碍问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x - \mu \sum_{j=1}^{n} \ln x_j \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b.
\end{aligned}
$$

拉格朗日函数：$L(x, y, \mu) = c^T x - y^T (Ax - b) - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_j$。

拉格朗日函数的驻点条件

拉格朗日函数驻点的条件

$$\nabla_x L(x, y, \mu) = c - A^T y - \mu X^{-1} e = 0$$

其中 e 为全 1 向量，$X^{-1} = \mathrm{diag}\{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \cdots, x_n^{-1}\}$.

令 $s = \mu X^{-1} e$，$S = \mathrm{diag}\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$,，即 $XSe = \mu e$。

最优性条件为:

$$\begin{aligned}
Ax &= b, \\
A^T y + s &= c, \\
XSe &= \mu e, \quad \text{等价于}\ (x_i s_i = \mu,\ \forall i) \\
x, s &> 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

对此使用牛顿法!

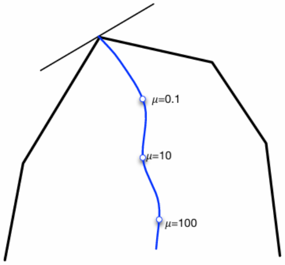
原始对偶中心路径

原始-对偶中心路径:

$$\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) : (x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \text{ 满足(1) }, \mu > 0\}$$

- 参数 μ 控制到最优解距离

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - x^T A^T y \\ &= x^T (c - A^T y) \\ &= x^T s = n\mu. \end{aligned}$$



理解互补松弛性的变更

互补性 $x_j \cdot s_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$。

单纯形法对最优划分做出猜测：

$$\text{对于基本变量：} \quad s_B = 0 \implies (x_B)_j \cdot (s_B)_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{B}$$

$$\text{对于非基本变量：} \quad x_N = 0 \implies (x_N)_j \cdot (s_N)_j = 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}$$

内点法使用 ε-估计：替换 $x_j \cdot s_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$ 为

$$x_j \cdot s_j = \mu \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n$$

算法思想：一开始 μ 大，保证初始 $x_j, s_j > 0$；慢慢缩小 μ，保证迭代过程 $x_j, s_j > 0$；最后，强制收敛 $\mu \to 0$。

复习（阻尼）牛顿法

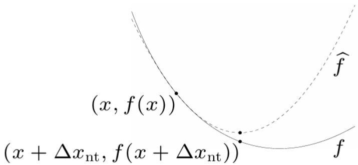
牛顿步：$\Delta x_{\text{nt}} = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$

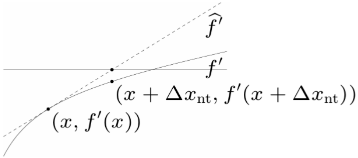
- $x + \Delta x_{\text{nt}}$ 最小化以下二阶近似：

$$\hat{f}(x+v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v$$

- $x + \Delta x_{\text{nt}}$ 为以下最优性条件（线性系统）的解

$$\nabla f(x+v) \approx \nabla \hat{f}(x+v) = \nabla f(x) + \nabla^2 f(x) v = 0$$





将牛顿法应用于一阶最优条件

障碍问题的一阶最优性条件形成了一个大型的非线性方程组

$$f(x, y, s) = 0,$$

其中 $f : \mathcal{R}^{2n+m} \mapsto \mathcal{R}^{2n+m}$ 是一个映射，定义如下：

$$f(x, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ XSe - \mu e \end{bmatrix}.$$

实际上，前两项是**线性**的；只有最后一项，对应互补条件，是**非线性**的。

牛顿法（续）

注意到

$$\nabla f(x,y,s)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{bmatrix}$$

因此，对于给定点 (x,y,s)，我们通过求解线性方程组来找到牛顿步 $(\Delta x,\Delta y,\Delta s)$：

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ S & 0 & X \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b-Ax \\ c-A^Ty-s \\ \mu e-XSe \end{bmatrix}$$

内点法框架

原始对数障碍问题的一阶最优性条件:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b, \\
A^T y + s &= c, \\
XSe &= \mu e,
\end{aligned}
$$

并应用**牛顿法**来求解这个非线性方程组。

- 固定障碍参数 μ 并仅做一次（阻尼）牛顿步
- 减小障碍参数并重复该过程

中心路径的邻域

符号定义:

- $\mathcal{F}^0 := \{(x, y, s) : Ax = b, A^T y + s = c, x, s > 0\}$.
- 对于 $x, s \in \mathbb{R}^n$， $X := \mathrm{diag}(x)$， $S := \mathrm{diag}(s)$.
- 对偶中心路径点集

$$P(\mu) = \{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) : (x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \text{ 满足(1)}\}$$

- $P(\mu)$ 的 β-近似解:

$$\left\{(x, y, s) : (x, y, s) \in \mathcal{F}^0, \left\| \frac{1}{\mu} Xs - e \right\| \leq \beta\right\}$$

这里范数 $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数，或 2 范数

引理

引理 1 如果 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ 是 $P(\mu)$ 的 β-近似解且 $\beta < 1$，则 $\bar{x}$ 是原问题的可行解，$(\bar{y}, \bar{s})$ 是对偶问题的可行解，且对偶间隙满足：

$$n\mu(1-\beta) \leq c^T\bar{x} - b^T\bar{y} = \bar{x}^T\bar{s} \leq n\mu(1+\beta)$$

引理 2 假设 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ 是 $P(\mu)$ 的 β-近似解。令 $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ 是原始-对偶牛顿方程组的解，并令：

$$(x', y', s') = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$$

那么 (x', y', s') 是 $P(\mu)$ 的 $\left(\frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}\right)\beta^2$-近似解。

- $\beta < \frac{1}{3}$ 可得 $\left(\frac{1+\beta}{(1-\beta)^2}\right)\beta^2 \leq \beta$

原始-对偶内点（障碍）算法

步骤 0：初始化数据为 (x^0, y^0, s^0, μ_0)，$k = 0$。假设 (x^0, y^0, s^0) 是 $P(\mu_0)$ 的 β-近似解 (其中 β 的值已知)

步骤 1：设置当前值 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) = (x^k, y^k, s^k)$，$\mu = \mu_k$

步骤 2：缩小 μ **设置** $\mu' = \alpha\mu$，其中 $\alpha \in (0, 1)$。

步骤 3：计算原始-对偶牛顿方向计算在 $(x, y, s) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$ 处针对方程组的牛顿步 $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$，通过求解以下方程组：

$$
\begin{aligned}
A\Delta x &= 0 \\
A^T \Delta y + \Delta s &= 0 \\
\bar{S}\Delta x + \bar{X}\Delta s &= \bar{X}\bar{S}e - \mu' e
\end{aligned}
$$

步骤 4：更新所有值

$$(x', y', s') = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$$

步骤 5：重置计数器并继续 $(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x', y', s')$，$\mu_{k+1} = \mu'$，$k \leftarrow k + 1$。转到步骤 1。

关于该算法的一些问题

该算法的一些问题包括：

- 如何设置近似常数 β 和分式减少参数 α

  （例如，设置 $\beta = \frac{3}{40}$ 和 $\alpha = 1 - \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}+\sqrt{n}}$ ）
- 连续迭代值 (x^k, y^k, s^k) 是否是 $P(\mu_k)$ 的 β-近似解
- 该算法需要多长时间才能获得原问题和对偶问题足够好的解

松弛定理

定理（松弛定理） 假设 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$ 是 $P(\mu)$ 的 $\frac{3}{40}$-近似解。令

$$\alpha = 1 - \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}+\sqrt{n}}$$

并令 $\mu' = \alpha\mu$。则 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$ 是 $P(\mu')$ 的 $\frac{1}{5}$-近似解。

证明： 三元组 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$ 满足 $A\bar{x}=b$，$\bar{x}>0$ 和 $A^T\bar{y}+\bar{s}=c$，故只需证

$$\left\|\frac{1}{\mu'}\bar{X}\bar{s}-e\right\| \le \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{\mu'}\bar{X}\bar{s}-e\right\| = \left\|\frac{1}{\alpha\mu}\bar{X}\bar{s}-e\right\| &= \left\|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\mu}\bar{X}\bar{s}-e\right)-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)e\right\| \\
&\le \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left\|\frac{1}{\mu}\bar{X}\bar{s}-e\right\| + \left|1-\frac{1}{\alpha}\right|\|e\| \\
&\le \frac{\frac{3}{40}}{\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\sqrt{n} = \frac{\frac{3}{40}+\sqrt{n}}{\alpha} - \sqrt{n} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

收敛性定理

定理（收敛性定理） 假设 (x^0, y^0, s^0) 是 $P(\mu_0)$ 的 $\beta = \frac{3}{40}$-近似解。那么对于所有 $k = 1, 2, 3, \ldots$，(x^k, y^k, s^k) 是 $P(\mu_k)$ 的 $\beta = \frac{3}{40}$-近似解。

证明： 通过归纳法，假设该定理对迭代次数 $0, 1, 2, \ldots, k$ 成立。
则 (x^k, y^k, s^k) 是 $P(\mu_k)$ 的 $\beta = \frac{3}{40}$-近似解。根据松弛定理，(x^k, y^k, s^k) 是 $P(\mu_{k+1})$ 的 $\frac{1}{5}$-近似解，其中 $\mu_{k+1} = \alpha\mu_k$。

根据二次收敛性定理，$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})$ 是 $P(\mu_{k+1})$ 的 β-近似解，其中

$$\beta = \frac{1 + \frac{1}{5}}{(1 - \frac{1}{5})^2} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{3}{40}.$$

因此，通过归纳法，该定理对所有 k 成立。

复杂性定理

定理（复杂性定理） 假设 (x^0, y^0, s^0) 是 $P(\mu_0)$ 的 $\beta = \frac{3}{40}$-近似解。为了获得对偶间隙不超过 ϵ 的原始和对偶可行解 (x^k, y^k, s^k)，需要运行算法的迭代次数最多为

$$k = \left\lceil 10\sqrt{n} \ln\left(\frac{43(x^0)^T s^0}{37\epsilon}\right)\right\rceil$$

证明： 令 k 如上定义。注意到

$$\alpha = 1 - \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5} + \sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\frac{8}{5} + 8\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{1}{10\sqrt{n}}$$

因此

$$\mu_k \leq \left(1 - \frac{1}{10\sqrt{n}}\right)^k \mu_0$$

$$
\begin{aligned}
c^T x^k - b^T y^k = (x^k)^T s^k \le \mu_k n(1+\beta) &\le \left(1 - \frac{1}{10\sqrt{n}}\right)^k \left(\frac{43}{40} n\right) \mu_0 \\
&\le \left(1 - \frac{1}{10\sqrt{n}}\right)^k \frac{43}{37} (x^0)^T s^0
\end{aligned}
$$

取对数，我们得到

$$
\begin{aligned}
\ln(c^T x^k - b^T y^k) &\le k \ln\left(1 - \frac{1}{10\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{43}{37}(x^0)^T s^0\right) \\
&\le -\frac{k}{10\sqrt{n}} + \ln\left(\frac{43}{37}(x^0)^T s^0\right) \\
&\le -\ln\left(\frac{43(x^0)^T s^0}{37\epsilon}\right) + \ln\left(\frac{43}{37}(x^0)^T s^0\right) = \ln(\epsilon).
\end{aligned}
$$

第二个不等式使用了 $\ln(1-t) \le -t$ 对所有 $t < 1$ 成立的事实。因此 $c^T x^k - b^T y^k \le \epsilon$。

拓展方法：路径追踪算法

- 使用阻尼牛顿法
- 定义不同中心路径的邻域方式，在邻域内部进行线搜索
- 短步长设置与之前方法一致
- 长步长设置现实效果好，但理论结果差
- 可以采用交替步长方法

目录

讲 员

郭加熠，江波，刘慧康

复习：严格互补松弛条件定理

对于线性规划，如果原问题与对偶问题均存在可行解，则在所有可行解中，存在一对严格互补的可行解 $x^* \geq 0$ 和 $s^* \geq 0$，满足：

$$x^* \cdot s^* = 0 \quad \text{和} \quad x^* + s^* > 0$$

此外，严格互补可行解的支撑集：

$$P^* = \{j : x_j^* > 0\} \quad \text{和} \quad Z^* = \{j : s_j^* > 0\}$$

对于所有的严格互补可行解对都是不变的，P^*、Z^* 也被称为（严格）互补分割。

终止尝试

$$B(x,s)=\{i: x_i \geq s_i\} \text{ and } N(x,s)=\{i: s_i > x_i\}=\{1,...,n\}\backslash B(x,s)$$

假设当前迭代点为 $(\bar{x},\bar{s})$，解决以下问题：

$$\begin{aligned}
\min_{x,p,s} \quad & \frac{1}{2}\|x-\bar{x}\|^2+\frac{1}{2}\|s-\bar{s}\|^2 \\
\text{s.t.} \quad & Ax=b \\
& A^T y+s=c \\
& x_i=0 \ \forall i \in \mathcal{N}(\bar{x},\bar{s}) \\
& s_i=0 \ \forall i \in \mathcal{B}(\bar{x},\bar{s})
\end{aligned}$$

如果找到的解满足 $x_{\mathcal{B}(\bar{x},\bar{s})}>0$ 和 $s_{\mathcal{N}(\bar{x},\bar{s})}>0$，则宣布成功：$(x,y,s)$ 是一个严格互补解。否则，宣布失败。

终止情况

1. 不需要得到最优解，一个对偶间隙足够小的可行解就够了
2. **终止定理:** 存在一个阈值 $\bar{\mu}$，使得对于所有 (x, y, s) 满足 $0 < \mu = \frac{x^T s}{n} \le \bar{\mu}$，有：
   - $\mathcal{B}(x, s) = \mathcal{B}$ 且 $\mathcal{N}(x, s) = \mathcal{N}$, 即，实际的索引集 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{N}$ 被 $\mathcal{B}(x, s)$ 与 $\mathcal{N}(x, s)$ 正确识别
   - 上述二次优化问题将产生一个严格互补解 (x, y, s)
3. 利用 Crossover 方法，得到可行顶点解，并使用单纯形法继续求解

初始基本可行解 - 大 M 法

假设 M_1, M_2 为足够大正数，构建原问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x + M_1 x_{n+1} \\
\text{s.t} \quad & Ax + (b - Ae)x_{n+1} = b \\
& (e-c)^T x + x_{n+2} = M_2 \\
& x_1, \ldots, x_{n+2} \geq 0
\end{aligned}
$$

构建对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y^T b + y_{m+1} M_2 \\
\text{s.t.} \quad & A^T y + y_{m+1}(e-c) + s = c \\
& (b - Ae)^T y + s_{n+1} = M_1 \\
& \qquad\qquad y_{m+1} + s_{n+2} = 0 \\
& s_1, \ldots, s_{n+2} \geq 0
\end{aligned}
$$

初始解 $\hat{x} = (e; 1; M_2 - (e-c)^T e)$， $\hat{y} = (0; -1)$， $\hat{s} = (e; M_1; 1)$

齐次线性规划（HLP）问题

齐次线性规划如下：假设给定某个 $(x^0 > 0, y^0, s^0 > 0)$，这不一定是原始-对偶可行的。例如，$y^0 = 0$, $x^0 = s^0 = e$。定义：

$$\bar{b} = b - Ax^0, \quad \bar{c} = c - A^T y^0 - s^0, \quad \bar{z} = c^T x^0 + 1 - b^T y^0.$$

为以下线性规划问题的初始可行解

$$\begin{aligned}
\text{(HLP)} \quad \min \quad & ((x^0)^T s^0 + 1)\theta \\
\text{s.t.} \quad & Ax - b\tau + \bar{b}\theta = 0 \\
& -A^T y - s + c\tau - \bar{c}\theta = 0 \\
& b^T y - c^T x + \bar{z}\theta - \kappa = 0 \\
& -\bar{b}^T y + \bar{c}^T x - \bar{z}\tau = -(x^0)^T s^0 - 1 \\
& y \text{ 无约束}, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \tau \geq 0, \quad \theta \text{ 无约束}, \quad \kappa \geq 0
\end{aligned}$$

注意到，若可行解有 $\tau = 1$ 和 $\theta = 0$，则该解为原始和对偶最优解

HLP 的性质

1. 它是一个自对偶系统；
2. 它存在一个严格可行点：
$$(x, y, s) = (x^0 > 0, y^0, s^0 > 0), \quad \tau = 1, \quad \theta = 1, \quad \kappa = 1;$$
3. (HLP) 存在一个最优解，且其最优解集是有界的；
4. (HLP) 的最优值为零，且每个可行点满足：
$$((x^0)^T s^0 + 1)\theta = x^T s + \tau\kappa;$$
5. (HLP) 存在一个严格自互补最优解，其中 $\theta^* = 0$ 且
$$x^* + s^* > 0, \quad \tau^* + \kappa^* > 0$$

原始问题联系

定理： 令 $(y^*, x^*, s^*, \tau^*, \theta^* = 0, \kappa^*)$ 是 (HLP) 的一个严格自互补解。则：

1. 原问题 (P) 存在最优解当且仅当 $\tau^* > 0$，此时 x^*/τ^* 和 $(y^*/\tau^*, s^*/\tau^*)$ 是原始和对偶最优解。
2. 若 $\tau^* = 0$，则 $\kappa^* > 0$，这意味着 $c^T x^*$ 和 $-b^T y^*$ 中至少有一个为负。若前者成立，则对偶问题 (D) 不可行；若后者成立，则原问题 (P) 不可行。

实际性能

平均而言，单纯形法的速度与内点法的速度相当，尽管它们在理论复杂性上存在差异。

- **复杂性：** 内点法是一种多项式时间算法，总体复杂度大约为 $O(n^{3.5})$
- 对于某些问题，单纯形法可以非常快速地完成（在几次迭代内）；对于其他问题，单纯形法需要一些额外时间（最坏情况下指数级）。
- 相比之下，内点法的运行时间相当稳定，不会因问题不同而有很大变化（在固定规模条件下）。

内点法的关键性质

内点法总是会找到具有最大可能非零元素数量的最优解。

考虑一个简单案例：

$$
\begin{aligned}
\min_{x} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

单纯形法将输出一个基本可行解（如 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$ 或 $(0,0,1)$），

而内点法将输出 $(1/3, 1/3, 1/3)$。

高秩解与低秩解

想要一个高秩解（具有最大可能的非零元素数量），选内点法

- 最高秩解是唯一的，但最低秩解可能不是唯一的
- 多企业联盟问题中，希望有一个唯一的分配方案
- 选址问题（例如，建造喷泉）中或图像重构问题中，想找位于所有解中心位置的解

想要一个低秩解（具有较少的非零元素数量），选单纯形法

- 投资组合问题中，希望最小化选择的股票数量（减少交易成本）
- 图论问题中，希望选择更少的节点/边
- 其他情况下，如果目标值相等，我们更喜欢整数解而不是分数解。这通常对应于低秩解

如果最优解是唯一的，则两种方法返回相同的解。