运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技
Cardinal Operations

第二章线性规划及单纯形法

第二节 大规模工业生产建模案例

郭加熠 | 助理教授

排产问题建模

产品	I	II	限量
单位产能消耗	4	4	40
单位原材料消耗	5	10	60
单位利润	6	8	

目标：求利润最大化的生产方案

设变量x_1与x_2代表产品 I 与产品 II 的产量。

$$
\begin{array}{rlrrl}
\text{最大化利润：} & \text{maximize} & 6x_1 & +8x_2 & \\
\text{产能约束：} & \text{subject to} & 4x_1 & +4x_2 & \leq 40 \\
\text{原料约束：} & & 5x_1 & +10x_2 & \leq 60 \\
\text{非负约束：} & & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

基本排产模型

定义集合 $I = \{1, 2, ..., n\}$

参数含义：

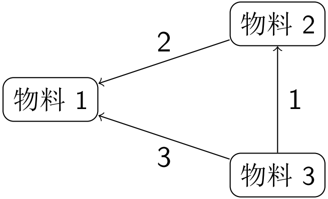
- 单位产品利润 r_i
- 单位产能消耗 p_i
- 企业产能限量 P
- 单位原料消耗 c_i
- 企业原料限量 C

最大化利润：	maximize	$\sum_{i \in I} r_i x_i$
产能约束：	subject to	$\sum_{i \in I} p_i x_i \leq P$
原料约束：		$\sum_{i \in I} c_i x_i \leq C$
非负约束：		$x_i \geq 0, \ \forall i \in I$

杉数科技 Cardinal Operations

拓展思考

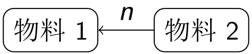
- 生产产品需要消耗多种物料（原料）;
- 物料本身也会被生产和消耗;



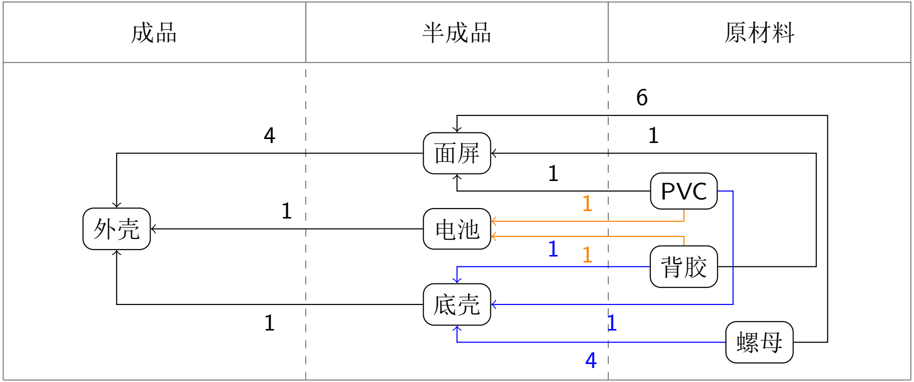
注：产品和原料统称物料

如何考虑物料消耗，安排生产计划？

物料清单树



生产每单位物料 1 消耗 n 单位物料 2

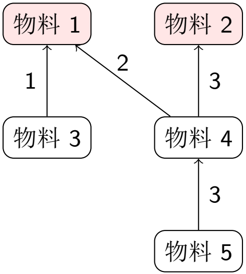


物料清单树

物料清单树的真实存储

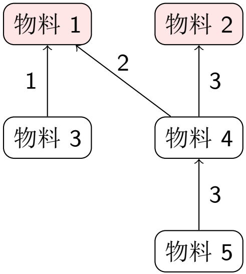
	A	B	C	D
1	Assemb	Plant	Componen	Quantity
32	02310THJ	z001	02230PHD	1
33	02310THJ	z001	03021XKK	1
34	02310THJ	z001	03021XPG	1
35	02310THJ	z001	04070258	1
36	02310THJ	z001	04080130	1
37	02310THJ	z001	04080132	1
38	02310THJ	z001	14040528	8
39	02310THJ	z001	14190277	1
40	02310THJ	z001	14990147	1
41	02310THJ	z001	21150763	1
42	02310THJ	z001	21150765	1
43	02310THJ	z001	21211945	1
44	02310THJ	z001	21211948	1
45	02310THJ	z001	26010285	2
46	02310THJ	z001	26010324	36
47	02310THJ	z001	26010531	17
48	02310THJ	z001	26010729	2
49	02310THJ	z001	26020233	20
50	02310THJ	z001	27040792	1

物料清单树示意图



排产问题拓展

给定企业产能限量、单位产能消耗、产品单位利润，以及物料库存和物料清单树，如何安排生产计划实现利润最大化？

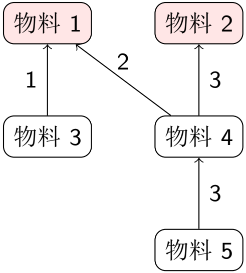


产品	I	II	III	IV	V	限量
产能	4	4	2	1	1	40
原库存 s_i	0	0	5	6	12	
单位利润	6	8	0	0	0	

考虑物料消耗

新库存 = 原库存 + 生产量-消耗量

- s_i : 产品 i 的原库存
- x_i : 产品 i 的生产量
- $u_{i'i}$: 生产每单位i'消耗产品i的数量
- y_i : 产品 i 生产后的新库存



$$
\begin{aligned}
y_5 &= s_5 + x_5 && -u_{45}x_4 && \geq 0, && (u_{45} = 3) \\
y_4 &= s_4 + x_4 && -u_{14}x_1 - u_{24}x_2 && \geq 0, && (u_{14} = 2, u_{24} = 3) \\
y_i &= s_i + x_i && -\textstyle\sum_{i' \in I} u_{i'i}x_{i'}, && \geq 0, && \forall i \in I
\end{aligned}
$$

排产模型拓展

定义集合 $I = \{1, 2, ..., n\}$

新参数: 原库存 s_i, 物料消耗 $u_{i'i}$

不考虑物料消耗

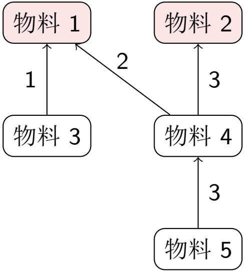
$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boxed{\textstyle\sum_{i \in I} r_i x_i} \\
\text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{i \in I}^{n} p_i x_i \le P \\
& \boxed{\textstyle\sum_{i \in I} c_i x_i \le C} \\
& x_i \ge 0, \forall i \in I
\end{aligned}
$$

考虑物料消耗

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boxed{\textstyle\sum_{i \in I} r_i y_i} \\
\text{subject to} \quad & \textstyle\sum_{i \in I} p_i x_i \le P, \\
& \boxed{y_i = s_i + x_i - \textstyle\sum_{i' \in I} u_{i'i} x_{i'},} \quad \forall i \in I \\
& x_i \ge 0, y_i \ge 0, \quad \forall i \in I
\end{aligned}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

求解结果



	I	II	III	IV	V
原库存	0	0	5	6	12
生产量 (x)	5	1	0	7	9
消耗量	0	0	5	13	21
新库存 (y)	5	1	0	0	0
单位利润	6	8	0	0	0
产品利润	30	8	0	0	0

总利润：38

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技
Cardinal Operations

动态排产问题建模

考虑延迟交付的动态排产

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

六国化工

六国化工是一家集团型磷复肥化工企业，是国家重点发展的大型磷复肥生产骨干企业。公司主要从事化肥、肥料、化学制品、化学原料的生产、加工与销售。

对以下几种产品进行生产计划，产能约束如下表所示。

产品	I	II	III	产能限量
产能	2	4	5	150
需求	25	12	6	
利润	5	10	12	

杉数科技 Cardinal Operations

六国化工

产品	I	II	III	产能限量
产能	2	4	5	150
需求	25	12	6	
利润	5	10	12	

基本排产问题：企业如何在有限产能下，安排生产来满足需求，以最大化总利润？

设决策变量x_1, x_2, x_3为产品 I，II，III 的生产量

最大化利润： maximize $5x_1 + 10x_2 + 12x_3$

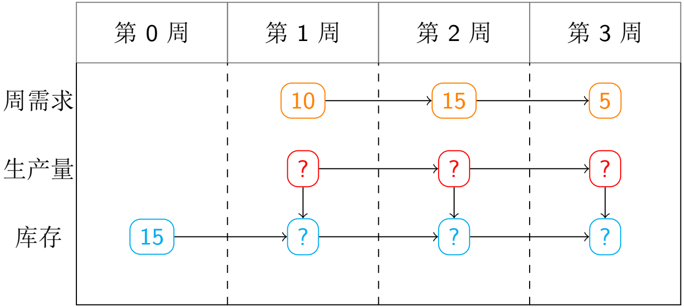
产能约束： subject to $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 150$

需求约束： $x_1 \geq 25, \quad x_2 \geq 12, \quad x_3 \geq 6$

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产问题

- 面对带时间窗的动态需求，企业该如何动态安排生产计划，以求最大化利润？



动态排产要素

x_{ij} : i 产品在第 j 周的生产量

- 更新目标函数：最大化各个周加总的产量所转换成的利润。
- 更新产能约束：限制每周的总产能。

	产能消耗	单位利润
I	2	5
II	4	10
III	5	12
每周产能限量：50		

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产要素（续）

► 更新周需求量

	第一周	第二周	第三周
I	10	15	0
II	7	0	5
III	0	0	6

► 引入生产时间与初始库存

	生产时间	初始库存
I	1	15
II	2	10
III	3	2

总生产量 $\geq$ 总需求 ⇒ 截止库存 $\geq$ 截止需求

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产框架

x_{ij}：产品 i 在第 j 周的生产量

- 更新目标函数
- 更新产能约束
- 更新周需求量
- 引入生产时间与初始库存

更新目标函数与产能约束

给定每周产能限量、单位产品产能和单位利润，更新目标函数与产能约束。

	产能消耗	单位利润
I	2	5
II	4	10
III	5	12
每周产能限量：50		

解：设x_{ij}为产品i在第j周的生产量, 集合 $J=\{1,2,3\}$

最大化利润： maximize $\sum_{j\in J}(5x_{1j}+10x_{2j}+12x_{3j})$

周产能约束： subject to $2x_{1j}+4x_{2j}+5x_{3j}\leq 50, \quad \forall j\in J$

杉数科技 Cardinal Operations

引入截止库存

给定产品的生产时间和初始库存，更新每周库存约束。

	生产时间	初始库存
I	1	15
II	2	10
III	3	2

- x_{ij} :产品 i 第 j 周的生产量
- t_i :产品 i 的生产时间
- y_{ij} :产品 i 在第 j 周截止库存

当周截止库存 = 上周库存 + 当周生产交付量

$$y_{ij} = y_{i,(j-1)} + x_{i,(j-t_i+1)}, \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

杉数科技 Cardinal Operations

更新需求约束

	第一周	第二周	第三周
I	10	15	0
II	7	0	5
III	0	0	6

- y_{ij} :产品 i 在第 j 周截止库存
- d_{ij} :产品 i 在第 j 周的需求量

截止库存 $\geq$ 截止需求

以产品 I 为例：

$$
\begin{aligned}
y_{11} &\geq d_{11}, \\
y_{12} &\geq d_{11} + d_{12}, \\
y_{13} &\geq d_{11} + d_{12} + d_{13}
\end{aligned}
$$

新需求约束：

$$y_{ij} \geq \sum_{j'=1}^{j} d_{ij'}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产模型

定义集合 $I = \{1, 2, ..., n\}$, $J = \{1, 2, ..., m\}$

基本排产模型

maximize $\sum_{i \in I} r_i x_i$

subject to $\sum_{i \in I} p_i x_i \le P$

$\boxed{x_i \ge d_i, \forall i \in I}$

动态排产模型

maximize $\sum_{i \in I, j \in J} r_i x_{ij}$

subject to $\sum_{i \in I} p_i x_{ij} \le P_j, \quad \forall j \in J$

$y_{ij} = y_{i,(j-1)} + x_{i,(j-t_i+1)}, \quad \forall i \in I, j \in J$

$y_{ij} \ge \sum_{j'=1}^{j} d_{ij'}, \quad \forall i \in I, j \in J$

$x_{ij}, y_{ij} \ge 0, \quad i \in I, j \in J$

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产求解结果

产品 i 在第 j 周生产量 (x_{ij})

	第 1 周	第 2 周	第 3 周
I	15	21	25
II	0	2	0
III	4	0	0

产品 i 在第 j 周的截止库存 (y_{ij})

	初始库存	第 1 周	第 2 周	第 3 周
I	15	30	51	76
II	10	10	10	12
III	2	2	2	6

杉数科技 Cardinal Operations

动态排产方案

		第 0 周	第 1 周	第 2 周	第 3 周
产品 I	生产量		15	21	25
	截止库存	15	30	51	76
	截止需求		10	25	25
产品 II	生产量			2	
	截止库存	10	10	10	12
	截止需求		7	7	12
产品 III	生产量		4		
	截止库存	2	2	2	6
	截止需求		0	0	6

目录

杉数科技
Cardinal Operations

动态排产问题建模

考虑延迟交付的动态排产

讲　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

六国化工

若在产能约束的条件下，无法得到满足约束的解，如何解决排产问题？

- 目标函数：转化为最小化成本（延迟交付存在成本）
- 约束：允许产品延迟交付

杉数科技 Cardinal Operations

更新变量

决策变量

- x_{ij}: 产品 i 在第 j 周生产量
- y_{ij}: 产品 i 在第 j 周截止库存
- z_{ij}: 产品 i 在第 j 周交付量
- δ_{ij}: 产品 i 在第 j 周累积延迟交付量

参数

- d_{ij}：产品 i 在第 j 周的需求
- p_i：产品 i 耗费的周单位产能
- r_{ij}：产品 i 在第 j 周的单位延迟成本

杉数科技 Cardinal Operations

更新目标函数

产品在不同时刻的延迟成本是不同的，交付越晚，需要付出的延迟成本越高。因此，更新目标函数为最小所有时刻的总缺货成本。

定义集合 $I = \{1, 2, ..., n\}$, $J = \{1, 2, ..., m\}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化成本:} & \text{minimize} & \sum_{i\in I, j\in J} r_{ij}\delta_{ij} \\
\text{库存约束:} & \text{subject to} & y_{i,j+1} = y_{ij} + x_{ij} - z_{ij}, \quad \forall i \in I, j \in J \\
\text{产能约束:} & & \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \le P_j, \quad \forall j \in J
\end{array}
$$

更新约束

d_{ij}：产品 i 在第 j 周的需求

z_{ij}：产品 i 在第 j 周交付量

δ_{ij}：产品 i 在第 j 周累积延迟交付量

- $d_{ij} - z_{ij}$ 的正负表示第 j 周需求量是否大于交付，即是否产生新的延迟交付。

周延迟交付量变化量 = 周需求量 - 周交付量

因此，交付约束

$$\delta_{i,j+1} - \delta_{ij} = d_{ij} - z_{ij}, \forall i \in I, j \in J$$

- 根据目标函数，需要最小化缺货成本，因此 δ_{ij} 应当尽可能小

杉数科技 Cardinal Operations

模型更新

定义集合 $I = \{1, 2, ..., n\}$, $J = \{1, 2, ..., m\}$

不允许延迟交付

$$
\begin{aligned}
&\boxed{\max \quad \textstyle\sum_{i\in I, j\in J} r_i x_{ij}} \\
\text{st.}\quad & \textstyle\sum_{i\in I} p_i x_{ij} \le P_j, && \forall j \in J \\
& y_{ij} = y_{i,(j-1)} + x_{i,(j-t_i+1)}, && \forall i \in I, j \in J \\
& \boxed{y_{ij} \ge \textstyle\sum_{j'\in J} d_{ij'},} && \forall j \in J \\
& x_{ij}, y_{ij} \ge 0, && \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

允许延迟交付

$$
\begin{aligned}
&\boxed{\min \quad \textstyle\sum_{i\in I, j\in J} r_{ij} \delta_{ij}} \\
\text{st.}\quad & \textstyle\sum_{i\in I} p_i x_{ij} \le P_j, && \forall j \in J \\
& y_{ij} - y_{i,(j-1)} = x_{ij} - z_{ij}, && \forall i \in I, j \in J \\
& \boxed{\delta_{i,j+1} - \delta_{ij} = d_{ij} - z_{ij},} && \forall i \in I, j \in J \\
& x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}\ \delta_{ij} \ge 0, && \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

杉数科技 Cardinal Operations

排产要素汇总

- 纵向排产（物料清单树），横向排产（多工厂协同），动态排产（满足时间窗）
- 多种目标权衡（生产成本、库存成本、能耗成本、缺货成本、运输成本）。
- 生产平滑性、生产批次、生产用料优先级（环保）等不同种生产约束。
- 考虑兑付订单（真实与预测）优先级，与多种兑付方式。

变量

- x_{ijt}：第 t 天第 i 个工厂生产物料 j 的数量
- $y_{ii'jt}$：第 t 天工厂 i 向工厂 i' 运输物料 j 的数量

杉数科技 Cardinal Operations

感谢聆听！

Thank You!

杉数科技
Cardinal Operations