运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技
Cardinal Operations

第二章线性规划及单纯形法

第三节 介绍几何性质

郭加熠 |助理教授

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

图解法求解线性规划

线性规划的规模较小时，从图像的角度进行研究求解较为高效。

回顾之前提及的生产问题：

	合金 1	合金 2	限量
钢	1	0	100
铁	0	2	200
铜	1	1	150
利润	1	2	

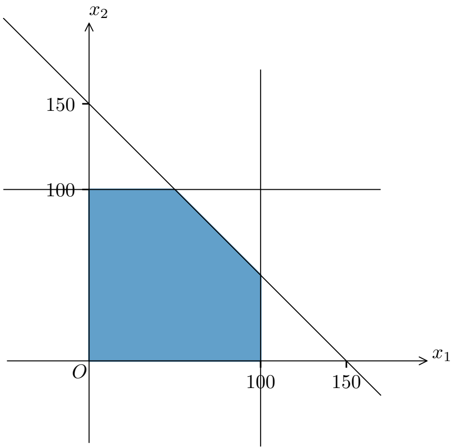
$$
\begin{array}{rrrl}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\
& & 2x_2 & \leq 200 \\
& x_1 & +x_2 & \leq 150 \\
& x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

提问：如何运用图像解决这一问题？

杉数科技 Cardinal Operations

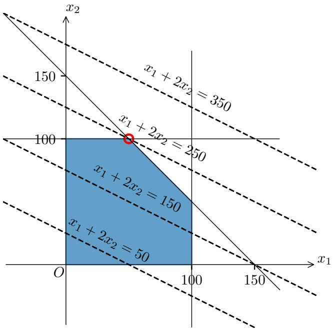
基于图像的求解

首先，可以绘制出可行域。



最大化目标问题 $x_1 + 2x_2$

其次，考虑对于不同的取值 c，绘制函数 $x_1 + 2x_2 = c$。



- 在这些函数图像中，最优解位于可行域中与直线相交的最高点。
- 此时，交点坐标为 $(50, 100)$、目标值为 250。

一些发现

- 该线性规划的可行域是一个多边形。
- 最优解倾向于在可行域的端点取到。
- 在最优解处，一些约束恰好取等（$x_2 \leq 100$, $x_1 + x_2 \leq 150$），一些则严格小于（$x_1 < 100$）。

基于这些发现，接下来的部分将对其进行形式化的表述。

多面体

定义 2.1 多面体

一个集合若是多面体，则其可以表述为如下形式：

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}\}$$

其中，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$。

- 回顾线性规划的标准型，它的可行域的形式为

  $$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq 0$$

  这是多面体吗？为什么？

- 答案是肯定的，因为可以将其改写为

  $$A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad I\boldsymbol{x} \geq 0$$

  其中 I 是一个单位矩阵。

杉数科技 Cardinal Operations

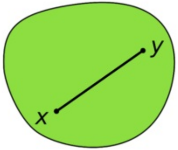
凸集合与凸组合

定义 2.2 凸集合

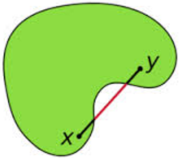
一个集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 若为凸集合，当且仅当对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$，及任意 $\lambda \in [0,1]$，满足 $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in S$。

定义 2.3 凸组合

对于任意的 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 和 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ 且满足关系 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$，称 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{x}_i$ 为 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 的凸组合。



(a) 凸集合



(b) 非凸集合

极值点

回顾线性规划问题的第二个发现：最优解位于可行域的端点。可以对这一概念进行形式化的定义。

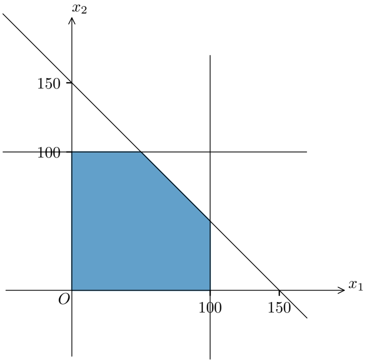
定义 2.4 极值点

令 P 表示一个多面体。点 $\boldsymbol{x} \in P$ 若被称为 P 的极值点，则无法找到异于 $\boldsymbol{x}$ 的两个点 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in P$，以及标量 $\lambda \in [0,1]$，满足 $\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{y} + (1-\lambda)\boldsymbol{z}$。

- 也就是说，$\boldsymbol{x}$ 不能被 P 内的其他点进行凸组合表示。
- 这一极值点也可被称为端点。

杉数科技 Cardinal Operations

极值点例子



该可行域存在几个极值点？

- 答案：5。

极值点（续）

极值点（或者说端点）已经得到定义。但是这一定义并未阐明如何得到极值点，如何高效地寻找到这些点也很重要。

接下来的部分中：

- 将介绍如何以代数的形式表示极值点；
- 将说明在求解线性规划中，找到各个极值点就足够进行求解；
- 基于以上内容，将得到求解线性规划的一种算法，也就是单纯形法。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技
Cardinal Operations

讲 员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

寻找极值点

回顾线性规划的标准型：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$、$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$（$m < n$）、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$。

假设 2.1

A 的行向量之间线性独立（A 是秩为 m 的行满秩矩阵）。

如果假设不满足，会有什么情况发生？

- 可能存在冗余的约束（此时可以移除对应的冗余约束）；
- 可能约束之间互斥（此时将没有可行解）。

寻找极值点 - 基本解

现在从代数的形式研究线性规划的极值点。

定义 2.5 基本解

$\boldsymbol{x}$ 为线性规划问题的基本解当且仅当

1. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$；
2. 存在一组索引 $B(1), \ldots, B(m)$ 使得列向量 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 之间线性独立，并且对于任意 $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ 有 $x_i = 0$。

基本解例子

考虑线性规划问题：

$$
\begin{array}{llllll}
\text{minimize} & x_1 & +3x_2 & & & \\
\text{subject to} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & =1 \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =-1 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & \geq 0
\end{array}
$$

提问：以下哪些是基本解？

A. $(1,0,1,1)$ B. $(1,-1,2,0)$ C. $(-1,1,0,0)$ D. $(0,0,2,1)$

仅C.为基本解：

- A.不是基本解，不满足 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$；
- B.不是基本解，非零元素大于约束数 2；
- D.不是基本解，列向量 A_3 与 A_4 线性相关。

杉数科技 Cardinal Operations

寻找基本解

寻找一个基本解的流程如下：

1. 选择 A 中任意 m 列线性独立的列向量：$A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$；
2. 对所有 $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$ 令 $x_i = 0$；
3. 用剩余的 $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ 求解 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$。

由于 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 线性独立，因此第 3 步一定有解且唯一。

注：线性规划的基本解只与约束有关，不受目标函数的影响。

基本解求解

回顾之前的生产问题：

$$\begin{array}{lrrl} \text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\ & & 2x_2 & \leq 200 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 150 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

其标准型为:

$$\begin{array}{lrrrrrl} \text{minimize} & -x_1 & -2x_2 & & & & \\ \text{subject to} & x_1 & & +s_1 & & & = 100 \\ & & 2x_2 & & +s_2 & & = 200 \\ & x_1 & +x_2 & & & +s_3 & = 150 \\ & x_1, & x_2, & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0 \end{array}$$

杉数科技 Cardinal Operations

基本解求解（续）

将可行域写为 $\{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix}$$

选择 A 中线性独立的三列，例如前三列（即 $B = \{1, 2, 3\}$），进而可以得到基本解的对应部分：

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}$$

即 $x_1 = 50, x_2 = 100, s_1 = 50$，故 $(50, 100, 50, 0, 0)$ 是一个基本解。此外，也可以选择其他线性独立的列得到不同的基本解。

线性规划的基本解

定义

$$A_B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ A_{B(1)} & A_{B(2)} & \cdots & A_{B(m)} \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix}$$

由于 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 之间线性独立，故 A_B 可逆且 $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$。

对于这一基本解，称

- $B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ 为一组基；
- $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 为基向量；
- A_B 为基矩阵；
- $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ 为基变量。
- 类似地，A 中其余的列向量为非基向量、剩余的变量为非基变量。

练习

对于含 m 个约束的线性规划，基本解中可能有几个非零元素？

- 不超过 m 个；
- 可以是 0 至 m 中任意一种，但通常为 m 个。

对于含 m 个约束和 n 个变量的线性规划，基本解可能有几个？

- 最多有 $C(n,m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 个（组合数）。
- 因此对于约束数目有限的问题，基本解也只可能是有限个。

基本解数目

考虑生产问题的标准型：

- 存在 $m = 3$ 个约束、$n = 5$ 个变量；
- 理论上最多有 $C(n, m) = 10$ 个基本解。

具体的基本解如下所示：

基	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 5\}$
基本解	$(50, 100, 50, 0, 0)$	$(100, 50, 0, 100, 0)$	$(100, 100, 0, 0, -50)$
基	$\{1, 3, 4\}$	$\{1, 4, 5\}$	$\{2, 3, 4\}$
基本解	$(150, 0, -50, 200, 0)$	$(100, 0, 0, 200, 50)$	$(0, 150, 100, -100, 0)$
基	$\{2, 3, 5\}$	$\{3, 4, 5\}$	
基本解	$(0, 100, 100, 0, 50)$	$(0, 0, 100, 200, 150)$	

当基选取 $\{1, 3, 5\}$ 或 $\{2, 4, 5\}$ 时，对应的列向量线性相关，故不能得到基本解。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

基本可行解

定义 2.6 基本可行解

如果一个基本解 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{x} \geq 0$，那么可称其为基本可行解。

如何寻找基本可行解：

- 首先找到一个基本解 $\boldsymbol{x}$；
- 检查 $\boldsymbol{x} \geq 0$ 是否满足。

定理 2.1

对于线性规划标准型中的多面体 $\{\boldsymbol{x} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$ 及多面体上的点 $\boldsymbol{x}$，以下表述相互等价：

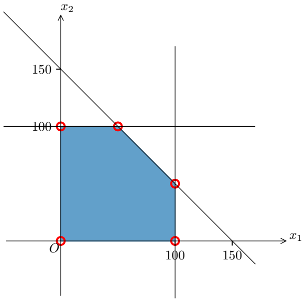
1. $\boldsymbol{x}$ 是极值点；　2. $\boldsymbol{x}$ 是基本可行解。

例子

根据基本解是否非负，进一步可以判断基本可行解：

基	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,5\}$
基本解	$(50,100,50,0,0)$	$(100,50,0,100,0)$	$(100,100,0,0,-50)$
类别	基本可行解	基本可行解	基本解但不可行
基	$\{1,3,4\}$	$\{1,4,5\}$	$\{2,3,4\}$
基本解	$(150,0,-50,200,0)$	$(100,0,0,200,50)$	$(0,150,100,-100,0)$
类别	基本解但不可行	基本可行解	基本解但不可行
基	$\{2,3,5\}$	$\{3,4,5\}$	
解	$(0,100,100,0,50)$	$(0,0,100,200,150)$	
类别	基本可行解	基本可行解	

五组基本可行解恰好为可行域的各个极值点：



简要证明

$\boldsymbol{x}$ 是基本可行解 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ 是极值点。

- 关键在于两类解的定义——通过反证法。

给定基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 的基为 B，那么 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$。

假设 $\boldsymbol{x}$ 不是极值点，那么存在异于 $\boldsymbol{x}$ 的两个可行解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$\boldsymbol{x} = \lambda\bar{\boldsymbol{x}} + (1-\lambda)\hat{\boldsymbol{x}}, \quad \forall\lambda \in (0,1)$$

由于 $\boldsymbol{x}_N = 0$，同时 $\bar{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}} \geq 0$，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}_N = \hat{\boldsymbol{x}}_N = \mathbf{0}$

因为 A_B 为可逆矩阵，所以 $\bar{\boldsymbol{x}}_B = \hat{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}b$

也就是 $\bar{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$，与异于 $\boldsymbol{x}$ 的条件矛盾。

简要证明（续）

$\boldsymbol{x}$ 是极值点 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ 是基本可行解。

- 当 $\boldsymbol{x}$ 为极值点时，$\boldsymbol{x}$ 为可行解；
- 关键在于证明 $\boldsymbol{x}$ 为基本解——通过反证法。

定义 $B := \{i \mid x_i > 0\} = \{B(1), \ldots, B(k)\}$，若 $\boldsymbol{x}$ 不是基本解，则

$$\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0, \qquad \alpha_1 A_{B(1)} + \cdots + \alpha_k A_{B(k)} = 0$$

即列向量 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(k)}$ 线性相关。

此时，存在某个 $\epsilon > 0$，使得如下构造的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 可行：

$$\bar{x}_i = \begin{cases} x_i + \epsilon\alpha_j & i = B(j) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad \text{与} \quad \tilde{x}_i = \begin{cases} x_i - \epsilon\alpha_j & i = B(j) \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

注意到 $\boldsymbol{x} = 0.5\bar{\boldsymbol{x}} + 0.5\tilde{\boldsymbol{x}}$，与 $\boldsymbol{x}$ 为极值点的条件矛盾。

杉数科技 Cardinal Operations

基本可行解相关定理

定理 2.2 线性规划基本定理

对于一个线性规划问题，矩阵 A 为行满秩矩阵、秩为 m，此时

1. 如果存在可行解，那么也存在基本可行解；
2. 如果存在最优解，那么也存在一个最优解是基本可行解。

推论 2.1

1. 为了得到最优解，只需寻找基本可行解。
2. 对于一个线性规划问题，假设其（标准型）存在 m 个约束。当该问题存在最优解时，必然存在某一最优解有不超过 m 个元素为正。

简要证明

定理第一部分：假设存在一个可行解 $\boldsymbol{x}$。定义集合 $B(\boldsymbol{x})$ 及其元素数目 $k(\boldsymbol{x})$：

$$B(\boldsymbol{x}) = \{i \mid x_i > 0\}, \qquad k(\boldsymbol{x}) := |B(\boldsymbol{x})|$$

关键点：如果 $\boldsymbol{x}$ 不是基本解，则

$$\exists \boldsymbol{y} \text{ 为可行解，} k(\boldsymbol{y}) < k(\boldsymbol{x})$$

如此反复最终能得到一个基本可行解。

由于 $\boldsymbol{x}$ 不是基本解，故 $\{A_i\}_{i \in B(\boldsymbol{x})}$ 间线性相关。对于 $i \in B(\boldsymbol{x})$：

$$\exists \alpha_i \text{ 不全为零，} \sum_{i \in B} \alpha_i A_i = 0$$

因此，可以定义向量 $\boldsymbol{\alpha}$：

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{cases} \alpha_i & i \in B \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{\alpha}$，存在 ϵ 使得 $\boldsymbol{y}$ 可行，此时 $k(\boldsymbol{y}) < k(\boldsymbol{x})$。

杉数科技 Cardinal Operations

简要证明（续）

定理第二部分：假设 $\boldsymbol{x}$ 为最优解。

关键点：沿用先前的符号，如果 $\boldsymbol{x}$ 不是基本解，那么

$$\exists \boldsymbol{y} \text{ 为最优解，} k(\boldsymbol{y}) < k(\boldsymbol{x})$$

通过反复操作，同样可以得到一个基本可行解为最优解。

同样定义 $\boldsymbol{\alpha}$，若 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{\alpha} \neq 0$，则存在某一较小的数 ϵ，解 $\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{\alpha}$ 将优于 $\boldsymbol{x}$。故 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$。

由于 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{\alpha} = 0$，可以构造 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{\alpha}$、也满足最优解。同样地，

$$\exists \epsilon, \quad k(\boldsymbol{y}) < k(\boldsymbol{x})$$

此时，定理的两个部分均得以证明。 $\square$

杉数科技 Cardinal Operations

基本可行解

现在已经知道，最优解只需要从基本可行解中寻找。

那么，如何在基本可行解之间搜索呢？

- 一种可能的策略是，列出所有的基本可行解，然后比较各个解对应的目标值。但是，基本可行解的数目通常并不少。
- 对于一个有 m 个约束 n 个变量的线性规划，可能有多少个基本可行解？
- 考虑 $C(n, m)$ 的规模：如果 $n = 1000, m = 100$，那么将是 10^{143}。

杉数科技 Cardinal Operations

单纯形法

因此，需要一种更巧妙的方法来找到最优解。

- 单纯形法（Simplex method）

单纯形法从一个基本可行解出发（可行域的端点）至相邻的基本可行解，通过这一方式不断地改善目标函数值，最终达到最优。

- 需要定义相邻的含义。
- 需要设计一个有效的方式找到并移动到相邻的基本可行解（例如，应该避免每次都更新都涉及矩阵的逆运算）。
- 需要设计一个有效的停止准则结束算法运行。

将在下一节讨论这些细节。

感谢聆听！

Thank You!

杉数科技
Cardinal Operations