运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技 Cardinal Operations

第三章线性规划的对偶

第三节 对偶性质的应用

郭加熠 |助理教授

回顾：对偶问题

对偶性质回顾：

- 给定任意线性规划问题，可以构造其对偶问题
- 对偶定理（假设原问题是最小化问题）

定理 3.3 弱对偶定理

若 $\boldsymbol{x}$ 是原问题的可行解，$\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行解，则

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

- 原（对偶）问题可行解能用于确定对偶（原）问题的上（下）界。
- 若原（对偶）问题无界，则对偶（原）问题无解
- 若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 分别是原问题和对偶问题可行解，且 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$，两者都是最优解。

强对偶定理

定理 3.4 强对偶定理

若线性规划有最优解，对偶问题也有最优解，原问题的最优值和对偶问题最优函数值相等。

- 在强对偶定理证明过程中，证明了单纯形法可以找到对偶问题的最优值。
- 某些情况，同样能够在最终的单纯性表中找到对偶问题的最优解。

原/对偶问题可能的情况

	有解	无界	无解
有解	√		
无界			√
无解		√	√

目录

杉数科技
Cardinal Operations

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

替代系统

给定一些线性不等关系：

$$A^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$

一个重要的问题：该系统有解吗？

- 证明有解的方法很简单，只需要找到一个解即可。
- 如果证明系统无解，能不能通过类似的方式呢？

答案是可以的！

- (Farkas' Lemma) 如果能找到任意一个向量 $\boldsymbol{x}$ 满足：

$$A\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} < 0$$

那么系统 $A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ 必定无解。

杉数科技 Cardinal Operations

替代性系统

证明： 考虑成对的原-对偶问题：

原问题		对偶问题	
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	maximize	0
subject to	$A\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{x} \geq 0$	subject to	$A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$

若存在 $\boldsymbol{x}$ 满足

$$A\boldsymbol{x} = 0, \quad \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} < 0$$

通过放缩 $\boldsymbol{x}$，可以使 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ 任意小，因此，原问题一定无界。

然而，对于线性规划问题，若原问题无界，对偶问题一定无解。因此，存在解 $\boldsymbol{x}$，可以证明线性系统 $A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ 无解。 $\square$

杉数科技 Cardinal Operations

替代性系统

可以构造很多这种替代性系统。

- 很难直接证明系统是否可解
- 线性规划的对偶性质能提供一种替代的方法，将问题转化为证明某个系统可解。

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

灵敏度分析

运用线性规划过程中，非常重要的问题是：

- 当输入改变时，最优解和最优值如何变化？

这类问题被称之为线性规划的灵敏度分析。

- 首先从局部的角度（输入参数有较小扰动）进行讨论。
- 然后，拓展到全局的角度（输入参数有任意变化）

杉数科技 Cardinal Operations

局部灵敏度

考虑线性规划的标准型问题：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

定义最优值为 V

- 给定 A 和 $\boldsymbol{b}$，V 可以看作 $\boldsymbol{c}$ 的函数：$V(\boldsymbol{c})$

定理 3.7

若原问题有唯一最优解 $\boldsymbol{x}^*$，则 $\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}^*$

- 若改变 c_i 一个很小的幅度 Δc_i 则目标函数值的变化将为 $\Delta c_i x_i^*$
- 原因：如果改变 $\boldsymbol{c}$ 很小的幅度 $\Delta \boldsymbol{c}$ 则最优解不变，V 的变化为 $\Delta \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*$

杉数科技 Cardinal Operations

局部灵敏度

类似地，给定 A 和常值 $\boldsymbol{c}$ ， V 可以看作 $\boldsymbol{b}$ 的函数: $V(\boldsymbol{b})$

定理 3.8

若对偶问题有唯一最优解 $\boldsymbol{y}^*$，则 $\nabla V(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}^*$

- 若对偶最优解不唯一（或者对偶问题无界或无解），则梯度不存在
- 若改变 b_i 一个很小的幅度 Δb_i，则目标函数值的变化为 $\Delta b_i y_i^*$

解释

已知最优值 V 也是其对偶问题的最优值:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ \text{subject to} \quad & A^T \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

即，$V(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*$

若变动 $\boldsymbol{b}$ 一个很小的幅度 $\Delta \boldsymbol{b}$，最优解不变，则 V 的变化为 $\Delta \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^*$

局部灵敏度

以上的结果对于如下不等式约束同样成立（或最大化问题）：

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

有：

1. 若原问题有唯一最优解 $\boldsymbol{x}^*$，则 $\nabla V(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}^*$
2. 若对偶问题有唯一最优解 $\boldsymbol{y}^*$，则 $\nabla V(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}^*$

- 为了证明结论的正确性，可以添加松弛变量或将其转换为标准型，通过之前的结果来证明。

杉数科技 Cardinal Operations

例子（排产问题）

$$
\begin{array}{lrrr}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\
& & 2x_2 & \leq 200 \\
& x_1 & +x_2 & \leq 150 \\
& x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (50, 100)$ ，最优值 250

对偶问题为

$$
\begin{array}{lrrrr}
\text{minimize} & 100y_1 & +200y_2 & +150y_3 & \\
\text{subject to} & y_1 & & +y_3 & \geq 1 \\
& & 2y_2 & +y_3 & \geq 2 \\
& y_1, & y_2, & y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (0, 0.5, 1)$，最优值为 250

杉数科技 Cardinal Operations

例子（续）

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\
 & & 2x_2 & \leq 200 \\
 & x_1 & +x_2 & \leq 150 \\
 & x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (50, 100)$ 最优值为 250。对偶问题最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (0, 0.5, 1)$

1. 如果产品 1 的利润为 1.02，最优值为多少？
   - 由于增长 $\Delta c_1 x_1^* = 1$。因此，最优值为 251

例子（续）

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\
& & 2x_2 & \leq 200 \\
& x_1 & +x_2 & \leq 150 \\
& x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (50, 100)$ 最优值为 250。对偶问题最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (0, 0.5, 1)$

2. 产品 2 的利润为 1.97，最优值为多少?

- 由于减少 $\Delta c_2 x_2^* = -3$。因此，最优值为 247

杉数科技 Cardinal Operations

例子（续）

$$
\begin{array}{rllll}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq & 100 \\
& & 2x_2 & \leq & 200 \\
& x_1 & +x_2 & \leq & 150 \\
& x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (50, 100)$ 最优值为 250。对偶问题最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (0, 0.5, 1)$

3. 如果资源 2 有 202 个单位，最优值是多少？

- 由于 $\Delta b_2 y_2^* = 1$。因此，最优值为 251

杉数科技 Cardinal Operations

例子（续）

$$\begin{array}{lrrl} \text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\ \text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\ & & 2x_2 & \leq 200 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 150 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

最优解为 $\boldsymbol{x}^* = (50, 100)$ 最优值为 250。对偶问题最优解为 $\boldsymbol{y}^* = (0, 0.5, 1)$

4. 若资源 1 为 99 个单位，最优值为多少？

- 由于 $\Delta b_1 y_1^* = 0$。因此，最优值不变。

其他性质

$$\begin{aligned} \text{maximize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge 0 \end{aligned}$$

若最优解为 $\boldsymbol{x}^*$，$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x}^* < b_i$，则改变 b_i，会有什么效果?

- 根据互补条件，对应的对偶变量 y_i^* 一定为 0。
- 因此，小幅度改变右侧无效约束不会影响最优值（和最优解）
- 理解：若资源是充足的，添加或减少少量资源，不会有影响。

影子价格

回忆

- 若 $\boldsymbol{y}^*$ 是对偶问题最优解，$\nabla V(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{y}^*$,

我们称 $\boldsymbol{y}^*$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的影子价格

- 在生产例子中，某项资源的影子价格指的是若增加一个单位该资源导致的最优收益的提升量。
- 因此，它可以看作某资源的单位价值或公平价格

注意

以上分析为局部分析，只能应对小浮动的改变。

- 总之，此分析只在最优基不变的条件下成立
- 否则，不成立

例如，在排产问题问题中，资源 1 的总量减少到 0，则最优解将变为 $(0, 100)$，最优值为 200（减少了 50）。和通过 $\Delta b_1 y_1^* = 0$ 计算结果不同

- 那么什么样的程度为小幅度的变化
- 这一问题的研究称为全局灵敏度分析

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技 Cardinal Operations

替代系统

灵敏度分析：局部灵敏度

灵敏度分析：全局灵敏度

运输问题

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

全局灵敏度

若发生以下情况，最优解将如何变

1. $\boldsymbol{b}$ 变为 $\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$
2. $\boldsymbol{c}$ 变为 $\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}$

回忆单纯形法:

$\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}A$	$-\boldsymbol{c}_B^T {A_B}^{-1}\boldsymbol{b}$
$A_B^{-1}A$	$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$

对于最优解，检验数为 $\boldsymbol{c}^T-\boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}A\geq 0$。同时，$A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ 和 $(A_B^{-1})^T\boldsymbol{c}_B$ 分别为原问题最优解的基变量和对偶问题最优解的基变量

杉数科技 Cardinal Operations

改变$\boldsymbol{b}$

假设 $\boldsymbol{b}$ 变为 $\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$。则基本解对应的原始最优基为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_B = A_B^{-1}(\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}^* + A_B^{-1}\Delta\boldsymbol{b}$$

检验数 $\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A$ 与 $\boldsymbol{b}$ 无关。

- 若 $\tilde{\boldsymbol{x}}_B \geq 0$，则 B 仍是最优基，新的最优基为 $(\tilde{\boldsymbol{x}}_B, 0)$，最优值为

$$V(\tilde{\boldsymbol{b}}) = V^* + \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}\Delta\boldsymbol{b} = V^* + (\boldsymbol{y}^*)^T\Delta\boldsymbol{b}$$

$\boldsymbol{y}^*$ 为对偶最优解（这可以来解释局部灵敏度结论）

- 若原始基仍为最优解，则局部灵敏度分析成立

杉数科技 Cardinal Operations

改变$\boldsymbol{b}$

当只改变 $\boldsymbol{b}$ 时，什么程度的改变是小幅度的改变（即，局部灵敏度分析成立）

假设 $\Delta \boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{e}_i$ ($\boldsymbol{e}_i$ 是第 i 个为 1 的向量)，则需要得到

$$\boldsymbol{x}^* + \lambda A_B^{-1} \boldsymbol{e}_i \geq 0$$

来保证最优基不变。可以通过解决不等式确定 λ 范围

例子

考虑排产问题的例子

$$
\begin{array}{rrrl}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \leq 100 \\
& & 2x_2 & \leq 200 \\
& x_1 & +x_2 & \leq 150 \\
& x_1, & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

对于最优解，基变量为 $\{1,2,3\}$, 最优解为 $(50,100,50,0,0)$

- 第三个约束（右侧为 150 的约束）改变多少，最优解的基变量不变？

例子（续）

最终的单纯形表为

B	0	0	0	1/2	1	250
1	1	0	0	-1/2	1	50
3	0	0	1	1/2	-1	50
2	0	1	0	1/2	0	100

因此 $A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$。若 $\boldsymbol{b}$ 变为 $\boldsymbol{b} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，则

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_B = \boldsymbol{x}_B^* + \lambda A_B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

为了使结果为非负，则 $-50 \leq \lambda \leq 50$。

杉数科技 Cardinal Operations

改变 $\boldsymbol{c}$

假设 $\boldsymbol{c}$ 变为 $\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} + \Delta\boldsymbol{c}$。为了保证原始基本解仍为最优解，需要保证检验数满足如下关系（因为基变量的部分一定为 0，只考虑非基变量的部分）：

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_N^T - \tilde{\boldsymbol{c}}_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0$$

由于可行性与 c 无关，因此基变量仍可产生的基本可行解

假设 $\Delta\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{e}_j$。讨论以下两种情况：

- $j \in B$，λ 在什么范围，初始基仍是最优解的基（局部灵敏度分析成立）
- $j \in N$，λ 在什么范围，初始基仍是最优解的基（局部灵敏度分析成立）

杉数科技 Cardinal Operations

情况 1: $j \in B$

在这种情况下，检验数为

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{c}_N^T - (\boldsymbol{c}_B^T + \lambda \boldsymbol{e}_j^T) A_B^{-1} A_N \\
= \quad & \boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_N - \lambda \boldsymbol{e}_j^T A_B^{-1} A_N
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_N$ 为原问题检验数，定义为 $\boldsymbol{r}_N^T$。因此，为了保证当前基为最优解的基，需要有

$$
\boldsymbol{r}_N^T - \lambda \boldsymbol{e}_j^T A_B^{-1} A_N \geq 0 \tag{1}
$$

- 可以通过 (1) 解决 λ 的范围。
- 是一个不等式集合

情况 2: $j \in N$

在这种情况下，检验数为：

$$\boldsymbol{c}_N^T + \lambda \boldsymbol{e}_j^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_N = \boldsymbol{r}_N^T + \lambda \boldsymbol{e}_j^T$$

因此，为了保证当前基为最优解的基，需要有

$$\boldsymbol{r}_N + \lambda \boldsymbol{e}_j \geq 0 \tag{2}$$

- 可以通过 (2) 解决 λ 的范围。

杉数科技 Cardinal Operations

例子

考虑排产问题例子

$$
\begin{array}{lrrl}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & \\
\text{subject to} & x_1 & & \le 100 \\
 & & 2x_2 & \le 200 \\
 & x_1 & +x_2 & \le 150 \\
 & x_1, & x_2 & \ge 0
\end{array}
$$

最终的单纯形表为

B	0	0	0	1/2	1	250
1	1	0	0	-1/2	1	50
3	0	0	1	1/2	-1	50
2	0	1	0	1/2	0	100

目标函数系数改变幅度为多大仍可使用局部灵敏度进行分析?

杉数科技 Cardinal Operations

例子（续）

由于

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{r}_N = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

假设将产品 1 的利润从 1 变为 $1+\lambda$ (即，标准型中为 $-1-\lambda$)。需要保证

$$\boldsymbol{r}_N - \lambda A_N^T (A_B^{-1})^T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0$$

因此，$-1 \leq \lambda \leq 1$

- 表示当第一种产品的利润为 0 到 2，可以利用局部灵敏度来计算最优值

杉数科技 Cardinal Operations

超过范围的变动

若 $\boldsymbol{c}$ 的变化很大，当前解的检验数包含负值，则

- 可以继续使用单纯形法直到达到最优解

如果 $\boldsymbol{b}$ 的变化很大，最优基 B 对应的解不再是可行解

- 需要重新计算问题
- 然而，这可以视为对偶问题的目标函数系数改变，可以使用目标函数系数改变对应的方法解决问题

杉数科技 Cardinal Operations

改变 A

若改变非基变量对应的列 A_j，则原最优解仍可行，只有第 j 变量检验数改变

- 重新计算检测数 $\bar{c}_j$。若其仍为非负，则原最优解仍为最优解。否则，更新单纯性表的第 j 列和其对应的检验数

若改变基变量变量对应的列，则几乎表中的所有数值都会改变。没有简单的方法计算结果。

其他改变

添加变量（其余保持不变）

- 原基本可行解仍可行，检验数不变
- 只需要确认新增变量对应的检验数。若其为非负值，则原最优解仍为最优解，否则继续运行单纯形法

增加约束：

- 若原最优解满足约束，其仍为最优解
- 如果不是，则解决的最好方法是增加对偶变量，利用单纯性表解决对偶问题，继续计算

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技 Cardinal Operations

替代系统

灵敏度分析：局部灵敏度

灵敏度分析：全局灵敏度

运输问题

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

运营管理：供应链运输问题

图: 运输问题

基本的供应链运输模型场景中

- m 个供应商的供应量 $s_1, \ldots, s_m$
- n 个需求方的需求量 $d_1, \ldots, d_n$
- 供应商 i 到需求方 j 的单位运输成本 c_{ij}
- 决策：从供应商 i 到需求方 j 的运输量 x_{ij}

如何在满足供求关系的条件下最小化运输成本?

杉数科技 Cardinal Operations

运输问题的数学模型

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, & \forall i \text{ 供应} \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & \forall j \text{ 需求} \\
& x_{ij} \ge 0 & \forall i, j
\end{aligned}
$$

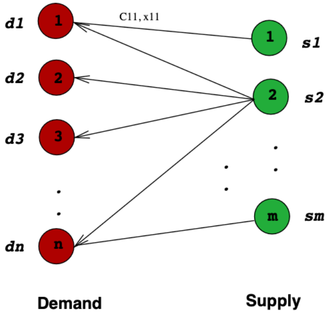

图: 物流供应链

运输问题的对偶与经济解释

分别引入 u_i 与 v_j 作为供求约束的对偶变量，我们可以写出运输问题的对偶

$$\begin{aligned} \underset{u_i, v_j}{\text{maximize}} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \\ \text{subject to} \quad & u_i + v_j \le c_{ij}, \qquad \forall i, j \\ & u_i \le 0, v_j \ge 0 \end{aligned}$$

- 中间商从供应商 i 以 $-u_i$ 购买货物并以 v_j 卖给需求方 j
- 中间商最大化自己的利润 $\sum_{j=1}^{n} d_j v_j - \sum_{i=1}^{m} s_i(-u_i)$
- $u_i + v_j \le c_{ij}$ 表示需求方案是有竞争力的，否则需求方可以绕过中间商

杉数科技 Cardinal Operations

感谢聆听！

Thank You!

杉数科技
Cardinal Operations