割平面例子

2024 年 6 月 2 日

整数规划的 Gomory 割平面法

- 整数规划问题：

$$\min \ \{c^T x \mid x \in \mathbb{Z}_+^n, Ax = b\}.$$

- 直接从单纯性表中创建有效不等式（割平面）。
- 给定 LP（最优的）基 B，IP 可以写作

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c_B^T B^{-1} b + \sum_{j \in NB} \bar{c}_j x_j \\ \text{subject to} \quad & (x_B)_i + \sum_{j \in NB} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots m \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+^1, \ j = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

NB 是非基变量指标集。

- $\bar{c}_j \geq 0, \ j \in NB, \ \bar{b}_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m.$

Gomory 割平面法

- 如果 LP 问题的解不是整数，那么存在某一行 i，$\bar{b}_i \notin \mathbb{Z}$
- 第 i 行的 C-G 割为

$$(x_B)_i + \sum_{j \in NB} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

- 替换 $(x_B)_i$ 得

$$\sum_{j \in NB} (\bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$$

- 令 $f_{ij} = \bar{a}_{ij} - \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor$，$f_i = \bar{b}_i - \lfloor \bar{b}_i \rfloor$

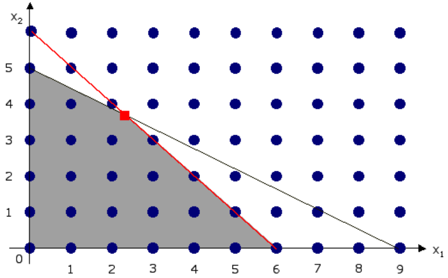
$$\sum_{j \in NB} f_{ij} x_j \geq f_i \qquad (\text{Gomory割})$$

- 由于 LP 问题的最优解 $x_j^* = 0$ 对于 $j \in NB$，且 $0 \leq f_{ij} < 1$，$0 < f_i < 1$，这个不等式切割 x^*！

例：Gomory 割平面法

- 例 1：考虑如下问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



例：Gomory 割平面法

- 最优单纯形表

x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	0	1.25	0.75	41.25
1	0	2.25	-0.25	2.25
0	1	-1.25	0.25	3.75

- 表中第二行的 Gomory 割为：

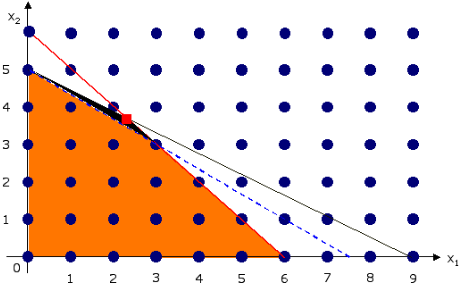
$$0.75x_3 + 0.25x_4 \geq 0.75$$

- 由于 $x_3 = 6 - (x_1 + x_2)$，且 $x_4 = 45 - (5x_1 + 9x_2)$，Gomory 割等价于

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

例：Gomory 割平面法

- 修改后的可行集为



- 分式最优解 $x = (2.35, 3.75)$ 不在割平面上，所以从新的可行域移除了。
- 修改后的可行域的边界点是整数。

例题 2

- 例题 2

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\
& x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

例题 2

- 最优单纯性表：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{59}{7}$
1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{20}{7}$
0	1	0	1	0	3
0	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{23}{7}$

表中第一行对应的 Gomory 割为：

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{6}{7}.$$

例题 2

- 再次优化：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{15}{2}$
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	-1	-5	1
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{5}{2}$

表中第二行对应的 Gomory 割为：

$$\frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}.$$

例题 2

- 重新优化：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	0	0	0	0	3	1	-7
1	0	0	0	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	-1	1
0	0	1	0	0	-5	-2	2
0	0	0	1	0	6	1	2
0	0	0	0	1	0	-1	1

完成！最优解为$x^* = (2, 1)$.