应用三：组合定价问题

有 m 个不同的国家参加体育比赛，只有一个国家可以获得冠军。彩票规则如下

- 可以购买给定的 n 个国家组合对应的彩票
- 若一张彩票包含了冠军国家，则购买者得到 1 元
- 各组合彩票的定价与购买数量有限

优化问题：如何制定彩票的销售计划?

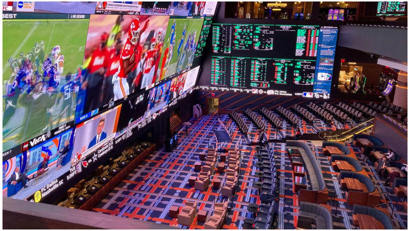

Figure 3: 体育彩票

数学模型

彩票 j 可以由 $(a_j \in \mathbb{R}^m, \pi_j \geq 0, q_j \geq 0)$ 定义：

- 若 j 的国家组合包含了国家 i
  则 $a_{ij} = 1$，否则 $a_{ij} = 0$
- π_j 为彩票的定价
- q_j 为购买者购买该彩票的数量上限

组合	#1	#2	#3	#4	#5
国家 A	1	0	1	1	0
国家 B	1	0	0	1	1
国家 C	1	0	1	1	0
国家 D	0	1	0	1	1
国家 E	0	0	1	0	0
彩票价格 π	0.75	0.35	0.4	0.95	0.75
购买数上限 q	10	5	10	10	5
发售数量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

Table 2: 某场体育赛事

数学模型

假设第 j 类彩票的购买数量为 x_j，则此时购买者需要支付

$$\pi_j x_j$$

此时彩票售卖方可以得到

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j x_j$$

若第 i 个国家获得冠军，售卖方需要支付所有购买包含该国家组合彩票的购买者

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

彩票售卖者可以通过线性规划获取最优的销售策略

彩票组合的线性规划模型

$$
\begin{aligned}
\underset{x}{\text{maximize}} \quad & \pi^T x - z \\
\text{subject to} \quad & Ax - e \cdot z \leq 0 \\
& x \leq q \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- $\pi^T x$ 为总收入金额
- z 为最坏情况下支付给购买者的金额
- 最大化最坏情况下的收入金额

彩票组合模型的对偶

引入对偶变量 p, y，上述问题的对偶如下

$$\begin{aligned} \underset{p,y}{\text{minimize}} \quad & q^T y \\ \text{subject to} \quad & A^T p + y \geq \pi \\ & e^T p = 1 \\ & p, y \geq 0 \end{aligned}$$

p 有什么实际意义?

彩票组合模型的对偶

$x_j > 0$	$a_j^T p + y_j = \pi_j, y_j \geq 0 \Rightarrow a_j^T p \leq \pi_j$
$0 < x_j < q_j$	$y_j = 0 \Rightarrow a_j^T p = \pi_j$
$x_j = q_j$	$y_j > 0 \Rightarrow a_j^T p < \pi_j$
$x_j = 0$	$a_j^T p + y_j > \pi_j, y_j = 0 \Rightarrow a_j^T p > \pi_j$

Table 3: 严格互补松弛

p 有什么实际意义?

- p 是各国家对于彩票市场的价值（强队的价值更高）
- p 对应的定价是正好满足售卖者收支平衡的价格
  $p^T(Ax - e \cdot z) = (A^T p)^T x - z = 0$

彩票市场价值

组合	#1	#2	#3	#4	#5	市场价值
国家 A	1	0	1	1	0	0.2
国家 B	1	0	0	1	1	0.35
国家 C	1	0	1	1	0	0.2
国家 D	0	1	0	1	1	0.25
国家 E	0	0	1	0	0	0
彩票价格 π	0.75	0.35	0.4	0.95	0.75	–
购买数上限 q	10	5	10	10	5	–
购买数量	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	–

Table 4: 某场体育赛事