运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技 Cardinal Operations

第三章线性规划的对偶

第二节 对偶问题的相关性质

郭加熠 |助理教授

回顾：对偶问题

上节课中，介绍了线性规划的对偶问题。例如，若线性规划的原问题为

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

则其对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\
\text{subject to} \quad & A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

构造对偶问题

原问题	minimize	maximize	对偶
约束	$\geq b_i$	≥ 0	变量
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	无约束	
变量	≥ 0	$\leq c_j$	约束
	≤ 0	$\geq c_j$	
	无约束	$= c_j$	

1. 每个原问题约束对应对偶问题一变量，每个原问题变量对应对偶问题一约束。
2. 等式约束对应无约束变量，反之亦然。
3. 正常（异常）约束对应正常（异常）约束。

对偶定理

定理 3.1

对偶问题的对偶问题是原问题

定理 3.2

两个等价问题（比如加入剩余变量、替换无约束变量）的对偶问题也是等价的

杉数科技 Cardinal Operations

目录

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

弱对偶定理

原问题		对偶问题	
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	maximize	$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
subject to	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\geq 0$	subject to	$A^T\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}$

定理 3.3 弱对偶定理

若 $\boldsymbol{x}$ 是原问题可行解，$\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行解，则：

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

若原问题是最小化问题，对偶问题是最大化问题，则：

- 任意对偶问题可行解都会给出原始问题最优值的下界
- 任意原始问题可行解都会给出对偶问题最优值的上界
- 原始问题的最优值大于等于对偶的最优值

证明与推论

假设 $\boldsymbol{x}$ 是原问题可行解，$\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行。则：

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T(A^T\boldsymbol{y}) \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

最后一个不等式根据 $\boldsymbol{x} \geq 0$ 及 $A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$ 得到。 □

推论 3.1

- 若原问题无界（即最优值为 $-\infty$），则对偶问题无解。
- 若对偶问题无界（即最优值为 ∞），则原问题一定无解。

杉数科技 Cardinal Operations

推论（续）

推论 3.2

设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为原问题和对偶问题的可行解。若 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为原问题和对偶问题最优解

线性规划的最优性条件：若 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 满足：

1. $\boldsymbol{x}$ 是原问题可行解
2. $\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行解
3. 目标函数值相同，即 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为原问题和对偶问题最优解。

反之结论依然成立。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技
Cardinal Operations

讲　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

强对偶定理

定理 3.4 强对偶定理

若线性规划的原问题和对偶问题都有最优解，则原问题和对偶问题的最优值相等。

- 将提供一种构造性证明。即，给定一个原问题最优解，构造其对偶最优解，证明两者的目标函数值相同
- 可以发现当单纯形法结束时，也能找到对偶问题最优解

杉数科技 Cardinal Operations

证明

使用单纯形法进行证明。假设原问题是标准型进行证明，结论具有一般性。

若原问题的最优解为 $\boldsymbol{x}^*$, 则与最优基 B 相关，B 服从 $\boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{x}_B$ 是 $\boldsymbol{x}^*$ 基变量部分)。当单纯形法完成，检验数非负，也就是

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A \geq 0 \tag{1}$$

定义 $\boldsymbol{y}^T = \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}$, 通过 (1) 可知 $A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$, 即 $\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行解。并且

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^*$$

因此根据弱对偶定理，$\boldsymbol{y}$ 是对偶问题最优解，定理成立。 □

讨论

从证明中可以看出，当使用单纯形算法时，对偶最优解实际上是一个副产品。$\mathbf{c}_B^T A_B^{-1}$ 这一项是对偶问题最优解（若原问题有最优解）。因此，当对原问题进行求解，对偶问题可以同时得到解决。

这并不是一个特殊现象。几乎所有的线性规划算法（单纯形法，内点法或椭球法）都会同时解决原问题和对偶问题。

杉数科技 Cardinal Operations

讨论

根据强对偶定理，可以得到 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 分别是原问题和对偶问题的最优解的充要条件是

- $\boldsymbol{x}$ 是原问题可行解
- $\boldsymbol{y}$ 是对偶问题可行解
- 两者目标函数值相同

因此线性规划问题的求解实际与以下线性系统求解等价：

- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq 0$
- $A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

杉数科技 Cardinal Operations

问题

线性规划及其对偶可能存在以下哪种状态

	有界	无界	无解
有界	?	?	?
无界	?	?	?
无解	?	?	?

杉数科技 Cardinal Operations

例子：原问题对偶问题均无解

原问题：

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 = 1 \\
& 2x_1 + 2x_2 = 3
\end{aligned}
$$

对偶问题：

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & y_1 + 3y_2 \\
\text{subject to} \quad & y_1 + 2y_2 = 1 \\
& y_1 + 2y_2 = 2
\end{aligned}
$$

答案

线性规划可能情形：

	有界	无界	无解
有界	√		
无界			√
无解		√	√

- 若原问题和对偶问题均有解，则两者都有最优解。（可以据此快速判断线性规划问题是否有界）。通过强对偶定理，两者的最优值相等。

现在解决了原问题和对偶问题最优值之间的关系，接下来分析原问题和对偶问题最优解之间的关系。

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

互补松弛条件

原问题		**对偶问题**	
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	maximize	$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
subject to	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq 0$	subject to	$A^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$

定理 3.5

假设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为原问题和对偶问题的可行解，则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为最优解的充要条件是

$$x_i > 0 \implies A_i^T\boldsymbol{y} = c_i$$

$$A_i^T\boldsymbol{y} < c_i \implies x_i = 0$$

或者可以表达为，

$$x_i \cdot (c_i - A_i^T\boldsymbol{y}) = 0, \quad \forall i$$

例子

原问题 - 最优解 $(1,0,1)$：

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{minimize} & 13x_1 & +10x_2 & +6x_3 & & \\ \text{subject to} & 5x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 8 \\ & 3x_1 & +x_2 & & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

对偶问题 - 最优解 $(2,1)$：

$$\begin{array}{rrrrr} \text{maximize} & 8y_1 & +3y_2 & & \\ \text{subject to} & 5y_1 & +3y_2 & \leq & 13 \\ & y_1 & +y_2 & \leq & 10 \\ & 3y_1 & & \leq & 6 \end{array}$$

验证互补条件：

$$x_1 \cdot (13 - 5y_1 - 3y_2) = 0, \;\; x_2 \cdot (10 - y_1 - y_2) = 0, \;\; x_3 \cdot (6 - 3y_1) = 0$$

杉数科技 Cardinal Operations

证明

根据强对偶性定理，若 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为原问题和对偶问题最优解，则

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

所以，

$$0 = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n}(c_i - A_i^T\boldsymbol{y}) \cdot x_i \tag{2}$$

由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 都为可行解，因此对于任意 i，有 $c_i - A_i^T\boldsymbol{y} \geq 0$ 和 $x_i \geq 0$。因此，为了保证 (2) 成立，必须有

$$(c_i - A_i^T\boldsymbol{y}) \cdot x_i = 0, \quad \forall i$$

另一个方向的证明可以运用同样逻辑（上述过程步步可逆）。 □

杉数科技 Cardinal Operations

总结

- 互补松弛条件描述的是原问题与对偶问题之间的变量与约束的关系；
- 在最优解中，如果某个变量是正的 $(x_i > 0)$，那么其对应的对偶约束必须激活 $(c_i - A_i^T y = 0)$；
- 相反，如果某个对偶约束未激活 $(c_i - A_i^T y > 0)$，则对应的变量必须为零 $(x_i = 0)$；
- 简而言之，原问题的变量和其对应的对偶约束不能同时存在松弛。

互补条件的另一种形式

有时，可以将对偶问题等价写为：

原问题		**对偶问题**	
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$	max	$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$
subject to	$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geq 0$	st.	$A^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{s}\geq 0$

称 $\boldsymbol{s}$ 为松弛变量。因此互补条件可以写为

$$x_i \cdot s_i = 0 \quad \forall i$$

也称互补条件为互补松弛条件。

一般互补松弛条件

原问题			**对偶问题**		
minimize	$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$		maximize	$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$	
subject to	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i,$	$i \in M_1,$	subject to	$y_i \geq 0,$	$i \in M_1$
	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i,$	$i \in M_2,$		$y_i \leq 0,$	$i \in M_2$
	$\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i,$	$i \in M_3,$		y_i 无约束,	$i \in M_3$
	$x_j \geq 0,$	$j \in N_1,$		$A_j^T\boldsymbol{y} \leq c_j,$	$j \in N_1$
	$x_j \leq 0,$	$j \in N_2,$		$A_j^T\boldsymbol{y} \geq c_j,$	$j \in N_2$
	x_j 无约束,	$j \in N_3,$		$A_j^T\boldsymbol{y} = c_j,$	$j \in N_3$

定理 3.6

若 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为原问题和对偶问题的可行解。则 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为最优解的充要条件是

$$y_i \cdot (\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} - b_i) = 0, \quad \forall i; \qquad x_j \cdot (A_j^T\boldsymbol{y} - c_j) = 0, \quad \forall j$$

线性约束最优化条件其他形式

根据线性约束的最优化条件：

1. $\boldsymbol{x}$ 为原问题可行解
2. $\boldsymbol{y}$ 为对偶问题可行解
3. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$

根据互补松弛条件，可以得到条件的等价形式：

1. $\boldsymbol{x}$ 为原问题可行解
2. $\boldsymbol{y}$ 为对偶问题可行解
3. 满足所有互补松弛条件

杉数科技 Cardinal Operations

快速判断原问题的解是否为最优

利用互补松弛条件，快速判断给定的原问题解 x 是否为最优解。

- 验证解 x 是否满足原问题的可行性；
- 若满足原问题可行性，则列出对偶可行性与互补松弛约束；
- 求解上述系统，若该系统存在解 y，则解 x 是原问题最优解；
- 否则，x 不是原问题最优解。

如果已经求得原问题最优解 x^*，求解互补松弛条件可以快速求得对偶最优解

杉数科技 Cardinal Operations

例子

原问题：

$$
\begin{array}{lrrcr}
\text{maximize} & x_1 & -x_2 & & \\
\text{subject to} & -2x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & -2x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & +x_2 & = & 5 \\
 & x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

对偶问题：

$$
\begin{array}{lrrrcr}
\text{minimize} & 2y_1 & +2y_2 & +5y_3 & & \\
\text{subject to} & -2y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 & -2y_2 & +y_3 & \geq & -1 \\
 & y_1 \geq 0, & y_2 \geq 0, & y_3 \text{ 无约束} & &
\end{array}
$$

例子

互补松弛条件：

$$
\begin{aligned}
y_1(-2x_1 + x_2 - 2) &= 0 \\
y_2(x_1 - 2x_2 - 2) &= 0 \\
y_3(x_1 + x_2 - 5) &= 0 \\
x_1(-2y_1 + y_2 + y_3 - 1) &= 0 \\
x_2(y_1 - 2y_2 + y_3 + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

- 验证 $(1,4)$ 是否是原问题最优解：根据互补松弛条件，可以得到 $y = (-\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3})$，并不是对偶问题可行解，因此 $(1,4)$ 不是原问题最优解。
- 验证 $(4,1)$ 是否是原问题最优解：根据互补松弛条件，可以得到 $y = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$，为对偶问题的解，因此，$(4,1)$ 是原问题最优解。

杉数科技 Cardinal Operations

严格互补松弛条件

定理 3.7 严格互补松弛定理

对于线性规划，如果原问题与对偶问题均存在可行解，则在所有可行解中，存在一对严格互补的可行解 $x^* \geq 0$ 和 $s^* \geq 0$，满足：

$$x^* \cdot s^* = 0 \quad \text{和} \quad x^* + s^* > 0$$

此外，严格互补可行解的支撑集：

$$P^* = \{j : x_j^* > 0\} \quad \text{和} \quad Z^* = \{j : s_j^* > 0\}$$

对于所有的严格互补可行解对都是不变的，P^*，Z^* 也被称为（严格）互补分割

例子

考虑如下的原问题

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & x_1 + x_2 + 1.5 \cdot x_3 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_3 = 1 \\
& x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

和对应的对偶问题

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & y_1 + y_2 \\
\text{subject to} \quad & y_1 + s_1 = 1 \\
& y_2 + s_2 = 1 \\
& y_1 + y_2 + s_3 = 1.5 \\
& \mathbf{s} \geq 0
\end{aligned}$$

例子

根据最优性条件可以给出一对严格互补松弛可行解：

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ y_1 = y_2 = 0.75,\ s_1 = s_2 = 0.25,\ s_3 = 0$$

满足：

$$x_i s_i = 0,\ x_i + s_i > 0,\ \forall i$$

此时，（严格）互补分割为 $P^* = \{3\},\ Z^* = \{1,\ 2\}$

杉数科技 Cardinal Operations

感谢聆听！

Thank You!