整数规划：拉格朗日松弛

2023 年 12 月 21 日

线性整数规划

- 考虑一个线性整数规划问题：

$$
\begin{aligned}
Z = \text{maximize} \quad & c'x \\
\text{subject to} \quad & Ax \le b \\
& Dx \le d \\
& x \in \mathbb{Z}^n.
\end{aligned}
\tag{IP}
$$

- 假设约束 $Ax \le d$ 是某种意义上更“难”处理的约束，它的存在会使得 (IP) 很难求解。拉格朗日松弛的基本思想是将难处理的约束通过乘子移到目标函数上，只在优化问题中保留更为“容易”的约束，从而得到原问题的一个松弛问题，而最优的松弛问题可以通过以乘子为变量的对偶问题来求得。

线性整数规划的松弛

- 将 (IP) 考虑为一种更一般的形式：

$$
\begin{aligned}
Z = \text{maximize} \quad & c'x \\
\text{subject to} \quad & Ax \leq b \\
& x \in X
\end{aligned}
$$

其中，$X \subseteq \mathbb{Z}^n$，$Ax \leq b$ 是 m 个线性约束。例如，X 是由 $Dx \leq b$ 定义的整数集合：$X = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Dx \leq b\}$，不等式约束 $Dx \leq b$ 可以被看做“容易”处理的约束，$Ax \leq b$ 可以被看做“难”处理的约束。

线性整数规划的松弛

- 设 $u = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}_+^m$，定义如下问题：

$$
\begin{aligned}
Z(u) = &\text{maximize} \quad c'x + u'(b - Ax) \\
&\text{subject to} \quad x \in X
\end{aligned}
\qquad \text{(IP(u))}
$$

定理 1.1

对于任意 $u \in \mathbb{R}_+^m$，问题 $IP(u)$ 是问题 IP 的松弛。

线性整数规划的松弛

- 证明：对于问题 $IP(u)$ 和 IP，如果
  (i) $IP(u)$ 的可行域至少和 IP 的可行域一样大，
  (ii) 对于所有可行解，$IP(u)$ 的目标值大于等于 IP 的目标值，

  那么 $IP(u)$ 是 IP 的松弛。

  设 (IP) 的可行域为 S，则有

$$S = \{x : Ax \leq b, x \in X\} \subseteq X$$

  其中 X 是 $IP(u)$ 的可行域，故条件 (i) 成立。

  如果 $x \in S$ 且 $u \geq 0$，则 $Ax \leq b$ 且 $u'(b - Ax) \geq 0$，因此对于任意 $x \in S$，有

$$c'x + u'(b - Ax) \geq c'x$$

  故条件 (ii) 成立。

线性整数规划的对偶

- 问题 $IP(u)$ 被称为问题 IP 的拉格朗日松弛。
- 由定理1.1我们可以得知，$Z(u) \geq Z$，因此我们得到了一个问题 (IP) 的最优值的上界。为了得到最小的上界，我们需要解决拉格朗日对偶问题：

$$W_{LD} = \min\{Z(u) : u \geq 0\} \tag{LD}$$

其中，u 被称为拉格朗日乘子。

IP, IP(u) 和 LD 的关系

定理 1.2

如果 $u \geq 0$，并且

(i) $x(u)$ 是问题 $IP(u)$ 的最优解，

(ii) $Ax(u) \leq b$,

(iii)（互补松弛条件）当 $u_i > 0$ 时，$(Ax(u))_i = b_i$，

那么 $x(u)$ 是问题 (IP) 的最优解。

IP, IP(u) 和 LD 的关系

- 证明：通过 (i) 可以得知，$W_{LD} \leq Z(u) = c'x(u) + u'(b - Ax(u))$。由 (ii) 可知，$x(u)$ 是 IP 的可行解，所以有 $c'x(u) \leq Z$。因此，$W_{LD} \leq c'x(u) + u'(b - Ax(u)) = c'x(u) \leq Z$。同时，$W_{LD} \geq Z$，所以 $W_{LD} = Z$ 且 $x(u)$ 是问题 IP 的最优解。

例题

- 考虑一个选址问题：
- 给定 n 个可供选择的地址: $N = \{1, \ldots, n\}$ 用于开设某种服务点 (如仓库、维修中心和分销中心等), 以服务 m 个客户 $M = \{1, \ldots, m\}$. 设开设点 j 的固定费用是 f_j, 客户 i 的订货需求全部从 j 获得的利润是 c_{ij}. 选址问题 (Uncapacitated facility location) 是要决定开设哪些服务点和如何确定服务点和客户之间的服务方案使总收入最大.
- 设 $x_j \in \{0, 1\}$ 表示服务点选址的决策变量, y_{ij} 表示客户 i 的需求从 j 处获得的比例值。

例题

- 选址问题可归结为下列混合整数规划问题:

$$
\begin{aligned}
Z = \text{maximize} \quad & \sum_{i \in M, j \in N} c_{ij} y_{ij} - \sum_{j \in N} f_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j \in N} y_{ij} = 1 \quad \text{for } i \in M \\
& y_{ij} - x_j \le 0 \quad \text{for } i \in M, j \in N \\
& y \in \mathbb{R}_+^{|M| \times |N|}, \quad x \in \{0,1\}^{|N|}.
\end{aligned}
\tag{IP}
$$

例题

- 选择 (IP) 中的第一个约束进行拉格朗日松弛:

$$
\begin{aligned}
Z(u) = \text{maximize} \quad & \sum_{i\in M, j\in N} (c_{ij} - u_i)\, y_{ij} - \sum_{j\in N} f_j x_j + \sum_{i\in M} u_i \\
\text{subject to} \quad & y_{ij} \le x_j \quad \text{for } i \in M, j \in N \\
& y \in \mathbb{R}_+^{|M|\times|N|}, \quad x \in \{0,1\}^{|N|}.
\end{aligned}
\qquad \text{(IP(u))}
$$

例题

- $Z(u)$ 可以分解为

$$Z(u) = \sum_{j \in N} Z_j(u) + \sum_{i \in M} u_i$$

其中，

$$\begin{aligned} Z_j(u) = \text{maximize} \quad & \sum_{i \in M} (c_{ij} - u_i)\, y_{ij} - f_j x_j \\ \text{subject to} \quad & y_{ij} \le x_j \quad \text{for } i \in M, \\ & y_{\cdot j} \in \mathbb{R}_+^{|M|}, \quad x_j \in \{0, 1\}. \end{aligned} \qquad (IP_j(u))$$

例题

- 对于子问题 $IP_j(u)$，
  - 如果 $x_j = 0$，则对于任意 i 有 $y_{ij} = 0$，因此目标函数值为 0，
  - 如果 $x_j = 1$，则有 $0 \leq y_{ij} \leq 1$。此时，当 $c_{ij} - u_i \leq 0$ 时，$y_{ij} = 0$；当 $c_{ij} - u_i > 0$ 时，$y_{ij} = 1$。因此目标值为 $\sum_{i \in M} \max\left[c_{ij} - u_i, 0\right] - f_j$。
- 综上所述，$Z_j(u) = \max\left\{0, \sum_{i \in M} \max\left[c_{ij} - u_i, 0\right] - f_j\right\}$。

拉格朗日对偶的作用

- 为了理解拉格朗日对偶问题 (LD)，我们将 X 简化为一个包含有非常多但是有限个点的集合 $\{x^1, \cdots, x^T\}$。
- 问题 (LD) 可以写为：

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{LD}} &= \min_{u \geq 0} Z(u) \\
&= \min_{u \geq 0} \left\{ \max_{x \in X} [c'x + u'(b - Ax)] \right\} \\
&= \min_{u \geq 0} \left\{ \max_{t=1,\ldots,T} \left[c'x^t + u'\left(b - Ax^t\right) \right] \right\}
\end{aligned}
$$

拉格朗日对偶的作用

- 上述问题等价为：

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{LD}} = &\text{minimize} \quad \eta \\
&\text{subject to} \quad x^t + u'\left(b - Ax^t\right) \le \eta \quad t = 1, \cdots, T \qquad \text{(Linear-LD)} \\
&\qquad\qquad\quad u \in \mathbb{R}^m_+, \quad \eta \in \mathbb{R}^1
\end{aligned}
$$

其中，η 代表 $Z(u)$ 的上界。

拉格朗日对偶的作用

- 容易得知，问题 ($Linear-LD$) 是线性规划问题。写出它的对偶形式：

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{LD}} = \text{maximize} \quad & \sum_{t=1}^{T} \mu_t \left(c' x^t\right) \\
\text{subject to} \quad & \sum_{t=1}^{T} \mu_t \left(A x^t - b\right) \leq 0 \\
& \sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1 \\
& \mu \in \mathbb{R}_+^T.
\end{aligned}
$$

拉格朗日对偶的作用

- 现在，设 $x = \sum_{i=1}^{T} u_t x^t$。由于 $\sum_{t=1}^{T} \mu_t = 1, \mu \in \mathbb{R}_+^T$，可以得到

$$W_{\mathrm{LD}} = \max\{c'x : Ax - b \leq 0, x \in \mathrm{conv}(X)\}$$

- 更一般的情况，当 $X = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : Dx \leq d\}$ 为任意整数规划问题的可行域时，上述结论仍成立。

拉格朗日对偶的作用

定理 2.1

$$W_{\mathrm{LD}} = \max\{c'x : Ax - b \leq 0, x \in \mathrm{conv}(X)\}$$

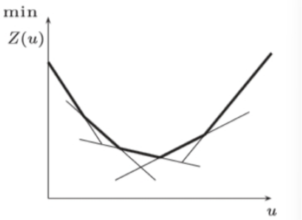
- 定理2.1告诉我们拉格朗日对偶有着很好的形式，其将原来的整数规划凸问题化为一个线性规划问题。

拉格朗日对偶的作用

- 同时，我们也写明了

$$W_{\mathrm{LD}}=\min_{u\geq 0}\left\{\max_{t=1,\ldots,T}\left[c'x^t+u\left(d-Dx^d\right)\right]\right\}$$

因此，拉格朗日对偶问题也可以被看做最小化一个不可微，但是是分段线性的且凸的函数 $Z(u)$ 的问题，如下图所示。



拉格朗日对偶的作用

- 注意：类似于线性整数规划的情况，$Z \leq W_{LD}$（弱对偶性）成立，故 W_{LD} 总是能提供原问题的一个上界。然而，在一般情况下求解问题 $(IP(u))$ 是很困难的，甚至和原问题同样难。只有当原问题的目标函数和约束具有一些特殊的结构和性质时，上述对偶松弛方法才有实际应用价值。