优化理论与算法

第五章

凸集合

郭加熠|助理教授

Table of Contents

内部、闭包、边界

定义：设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空集合

- 一个点 x_0 被称为内部点，如果存在 $r > 0$，使得

$$B(x_0, r) := \{x : \|x - x_0\|_2 \leq r\} \subseteq X$$

- 一个点 x_0 被称为极限点，如果存在 $\{x_n\} \subseteq X$，使得 $x_n \to x_0$ 当 $n \to \infty$。

定义：

- 内部：$\mathrm{int}(X) =$ 所有内部点的集合。
- 闭包：$\mathrm{cl}(X) =$ 所有极限点的集合。
- 边界：$\partial(X) = \mathrm{cl}(X) \setminus \mathrm{int}(X)$。

问题：设 $X = [0,1]$ 中的无理数。求 $\mathrm{int}(X)$ 和 $\mathrm{cl}(X)$。

开集与闭集（Open and Closed Sets）

定义

- X 是**开集**当且仅当 $\mathrm{int}(X) = X$
- X 是**闭集**当且仅当 $\mathrm{cl}(X) = X$

性质

- $\mathrm{int}(X) \subseteq X \subseteq \mathrm{cl}(X)$
- X 是闭集当且仅当 X 的补集是开集
- 任意多个闭集的交集是闭集
- **有限**个闭集的并集是闭集

凸集（Convex Set）

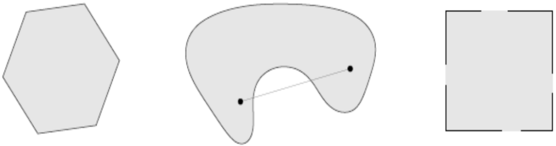
点 x_1 与 x_2 之间的线段：所有点 $x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$，其中 $0 \le \theta \le 1$

凸集：一个集合中任意两点之间的线段也包含在该集合中

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \Longrightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

问题：若上述性质仅在 $\theta = 1/2$ 成立，该集合是否为凸集?

举例：（一个凸集，两个非凸集）



凸集的重要性（The Importance of Convex Set）

在优化中设计算法的关键：局部搜索配合线搜索

- 在第 k 次迭代中，得到当前点 $x^{(k)}$ 和一个良好方向 $d^{(k)}$
- 移动到下一点 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)} d^{(k)}$，其中 $t^{(k)}$ 是步长
- 重复直到收敛

凸集合保证线搜索的成立

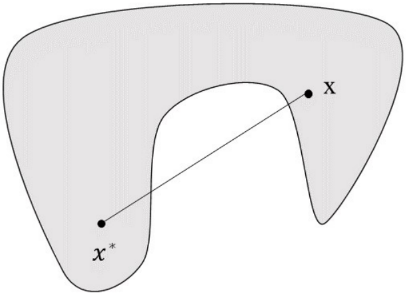
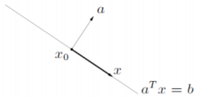


Table of Contents

超平面与半空间（Hyperplanes and Halfspaces）

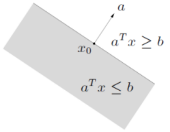
- **超平面（Hyperplane）：**

  $$\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\} \quad (a \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R})$$



- **半空间（Half space）：**

  $$\{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq b\} \quad (a \neq 0,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R})$$



- **仿射空间（Affine space）：**

  $$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m)$$

- **多面体（Polyhedra）：**

  $$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad (A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m)$$

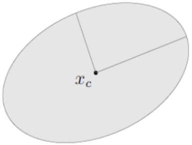
欧几里得球与椭球体（Euclidean Balls and Ellipsoids）

（欧几里得）球体，中心为 x_c，半径为 r：

$$B(x_c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_c\|_2 \leq r\} = \{x_c + ru : \|u\|_2 \leq 1\}$$

椭球体（Ellipsoid）：

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\right\} \quad \text{其中} P \in \mathbb{S}^n_+$$



另一种表示：

$$\{x_c + Au : \|u\|_2 \leq 1\} \quad \text{其中 } A \text{ 是方阵且非奇异}$$

范数球与范数锥（Norm Balls and Norm Cones）

范数（Norm）： 一个函数 $\|\cdot\|$ 满足：

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
2. $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ 对所有$t \in \mathbb{R}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

范数球，中心为 x_c，半径为 r： $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_c\| \leq r\}$

范数锥（Norm Cone）： $\{(x, t) : \|x\| \leq t\}$

欧几里得范数锥也被称为**二阶锥（second-order cone）**。

正定矩阵（Positive Definite Matrices）

- 对称矩阵（Symmetric matrices）： $\mathbb{S}$
- 半正定矩阵（Positive semidefinite matrices）： $\mathbb{S}_+$
- 正定矩阵（Positive definite matrices）： $\mathbb{S}_{++}$

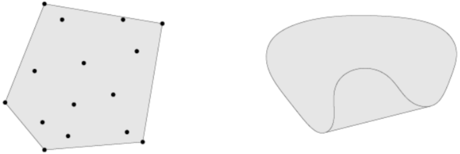
Table of Contents

凸组合与凸包（Convex Combination and Convex Hull）

凸组合（Convex combination） $x_1, ..., x_k$：任何满足如下形式的点 x

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \quad \text{满足} \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_k = 1, \ \theta_i \geq 0$$

凸包（Convex hull） $\mathrm{conv}(S)$：集合 S 中所有点的凸组合构成的集合



将非凸可行域凸化作为一种松弛方法

凸、锥、仿射与线性组合（Convex, Conic, Affine, and Linear Combinations）

定义（Definition）. 给定任意元素 $x_1, ..., x_k$，组合

$$\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$$

被称为：

- **凸组合（Convex）**：若 $\theta_i \geq 0$，$i = 1, ..., k$ 且 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- **锥组合（Conic）**：若 $\theta_i \geq 0$，$i = 1, ..., k$
- **仿射组合（Affine）**：若 $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$
- **线性组合（Linear）**：若 $\theta_i \in \mathbb{R}$，$i = 1, ..., k$

凸集、锥、仿射与线性子空间（Convex sets, Conic, Affine, and Linear Subspace）

定义（Definition）

- **凸包（Convex hull）**：给定集合中所有点的凸组合构成的集合
- **凸锥（Convex cone）**：给定集合中所有点的锥组合构成的集合
- **仿射子空间（Affine subspace）**：给定集合中所有点的仿射组合构成的集合
- **线性子空间（Linear subspace）**：给定集合中所有点的线性组合构成的集合

很明显，线性子空间一定是凸锥；而凸锥一定是凸集。

凸集的性质（Properties of Convex Sets）

命题（Proposition）

- 凸包总是一个凸集。
- 如果 X 是凸集，则 $\mathrm{Conv}(X) = X$。
- 对于任意集合 X，$\mathrm{Conv}(X)$ 是包含 X 的最小凸集。

Table of Contents

保持凸性的运算（Operations Preserving Convexity）

设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$，$C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，$C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸集，则以下集合也为凸集：

- **交集（Intersection）**：

$$C_1 \cap C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C_1 \text{ 且} x \in C_2\}$$

- **和（Sum）**：

$$C_1 + C_2 = \{x + y \in \mathbb{R}^n : x \in C_1,\ y \in C_2\} \quad \text{（两个凸集的 Minkowski 和）}$$

- **平移（Translated set）**：

$$C + a = \{x + a \in \mathbb{R}^n : x \in C\}$$

- **缩放（Scaled set）**：

$$tC = \{tx \in \mathbb{R}^n : x \in C\} \quad \text{对任意} t \in \mathbb{R}$$

保持凸性的运算（Operations Preserving Convexity）

设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$，$C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，$C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$，$K \subseteq \mathbb{R}^m$ 是凸集，则下列集合也为凸集：

- **笛卡尔积（Cartesian product）**

$$C_1 \times C_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$$

- **坐标投影（Coordinate projection）**

$$\{x_1 \mid (x_1, x_2) \in C \text{ for some } x_2\}$$

- **像集（Image）**，在线性变换 $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 下：

$$AC = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = Ax \text{ for some } x \in C\}$$

- **原像（Inverse image）**，在线性变换 $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 下：

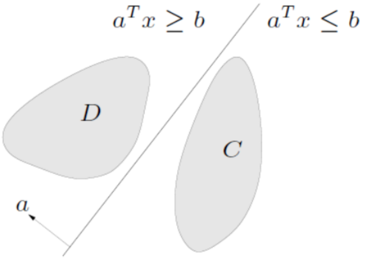
$$A^{-1}K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \in K\}$$

Table of Contents

分离超平面定理（Separating Hyperplane Theorem）

如果 C 和 D 是非空不相交的凸集，则存在 $a \neq 0$，b 使得：

$$a^\top x \leq b \quad 对所有x \in C, \qquad a^\top x \geq b \quad 对所有x \in D$$

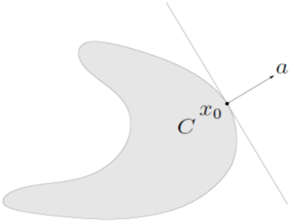


超平面 $\{x \mid a^\top x = b\}$ 将 C 和 D 分离。

支撑超平面定理（Supporting Hyperplane Theorem）

支撑超平面（Supporting hyperplane）： 对于集合 C 在边界点 x_0 的支撑超平面为：

$$\left\{x \mid a^\top x = a^\top x_0\right\} \quad 其中 a \neq 0，且 a^\top x \leq a^\top x_0 \ 对所有 x \in C$$



支撑超平面定理（Supporting hyperplane theorem）： 如果 C 是凸集，则在 C 的每一个边界点都存在一个支撑超平面。