运筹与优化新编

杉数科技教学平台

杉数科技
Cardinal Operations

第二章线性规划及单纯形法

第四节 单纯形法初窥

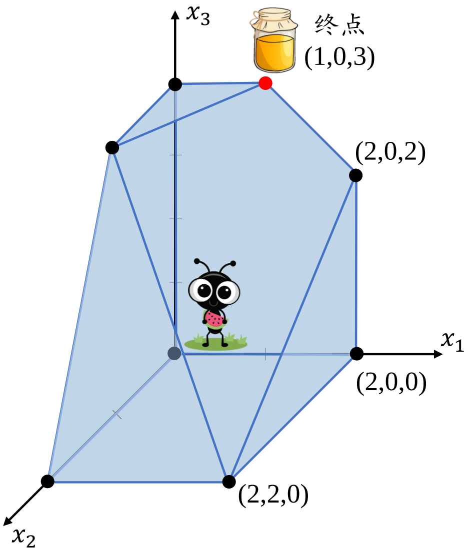
郭加熠 |助理教授

单纯形法思想

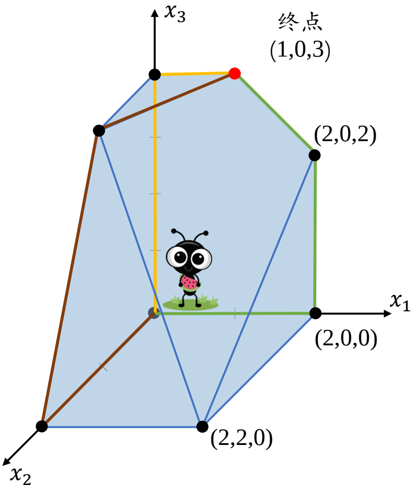
在之前的课程中，介绍了单纯形法的思想：从一个基本可行解出发（可行域的端点）至相邻的基本可行解，通过这一方式不断地改善目标函数值，最终达到最优。

- 需要定义相邻的含义。
- 需要设计一个有效的方式找到并移动到相邻的基本可行解（例如，应该避免每次都更新都涉及矩阵的逆运算）。
- 需要设计一个有效的停止准则结束算法运行。

单纯形法类比：蚂蚁找蜂蜜



单纯形法示意图



1. 找到初始可行解
2. 沿着提升目标值的棱边移动
3. 找到最优解

每组基对应一个顶点，

入基变量决定移动方向。

目录

杉数科技
Cardinal Operations

规范型与最优性检验

相邻基变量转换：最小比值法

单纯形法求解例子

讲　　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

最优性检验

对于下述问题，基本可行解 $(0,0,1,1,1.5)$ 是否为最优解？

$$\begin{array}{lrrrrrcl}
\text{minimize} & -x_1 & -2x_2 & & & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +x_3 & & & = & 1 \\
& & x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 1.5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

答案是否定的：

- 对于当前的基 $\{3,4,5\}$，若增加 x_1 并减小 x_3 与 x_5，对应得到的目标函数值将会下降；

最优性检验（续）

调整目标函数的符号，此时 $(0,0,1,1,1.5)$ 是否为最优解？

$$
\begin{array}{lrrrrrcl}
\text{minimize} & x_1 & +2x_2 & & & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +x_3 & & & = & 1 \\
 & & x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 1.5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

此时该解为最优解：

- 当基为 $\{3,4,5\}$ 时，目标函数值为 0；
- 由 $x_1, x_2 \geq 0$ 可证。

线性规划规范型

定义 2.7 规范型

一个标准型的线性规划若是关于某组基的规范型，则

- 对于目标函数，基变量部分的系数为零（即目标函数只与非基变量相关）；
- 对于约束矩阵，基矩阵（或适当调整基向量顺序后）可以组成单位矩阵 。

目的：当线性规划为规范型时，将较易对基本可行解进行最优性判断。

如何将线性规划转化为规范型？

- 转化后，规范型的可行域与最优解是否与原始线性规划问题一致？

杉数科技 Cardinal Operations

例子

考虑如下线性规划：

$$
\begin{array}{lrrrrrcl}
\text{minimize} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +x_3 & & & = & 1 \\
& & x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 1.5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

当 $B = \{1, 2, 3\}$ 时，可以求得 $\boldsymbol{x} = (0.5, 1, 0.5, 0, 0)$

此时，对应的规范型是什么？

例子：通过行变换得到一系列等价线性规划

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1
	1	1	0	0	1	1.5

对于上述例子，利用线性变换得到规范型

- $r_3 \leftarrow r_3 - r_1 - r_2$

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1
	0	0	-1	-1	1	-0.5

- $r_3 \leftarrow -r_3$

  $r_1 \leftarrow r_1 - r_3$

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	0	-1	1	0.5
	0	1	0	1	0	1
	0	0	1	1	-1	0.5

- $c \rightarrow c - r_1 - 2r_2 - 3r_3$

B	0	0	0	-5	2	-4
1	1	0	0	-1	1	0.5
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	-1	0.5

杉数科技 Cardinal Operations

例子：规范型

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{minimize} & & & & -5x_4 & +2x_5 & +4 \\
\text{subject to} & x_1 & & & -x_4 & +x_5 & = 0.5 \\
& & x_2 & & +x_4 & & = 1 \\
& & & x_3 & +x_4 & -x_5 & = 0.5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

- 基 $B = \{1, 2, 3\}$ 对应的基矩阵为单位阵
- 对应目标函数，基变量部分系数为零
- 基解 $\boldsymbol{x} = (0.5, 1, 0.5, 0, 0)$ 在两个线性规划的目标函数值都是 4
- 为什么是 $+4$ 而不是 -4？

从代数公式角度转换规范型

令基矩阵为 A_B、非基矩阵（其余部分）为 A_N：

- 等式约束 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 可以转化为：

$$A_B^{-1} A\boldsymbol{x} = A_B^{-1}\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{x}_B = A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1} A_N \boldsymbol{x}_N$$

- 基变量 $\boldsymbol{x}_B$ 可以由非基变量 $\boldsymbol{x}_N$ 表示，$\boldsymbol{x}_N$ 反应了变量的自由度。

此时，目标函数变为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N &= \boldsymbol{c}_B^T\left(A_B^{-1}\boldsymbol{b} - A_B^{-1}A_N\boldsymbol{x}_N\right) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ &= \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1}\boldsymbol{b} + \left(\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A_N\right)\boldsymbol{x}_N\end{aligned}$$

以上两个转换可以得到基为 B 下基本可行解的规范型。

- 转化得到的规范型与原问题等价：可行域、最优解与原始线性规划问题一致。

杉数科技 Cardinal Operations

等价的线性规划

可以写出以下规范型：

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \bar{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_B^T \bar{\boldsymbol{b}} \\ \text{subject to} \quad & \bar{A}\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{b}} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

上式中：

- $\bar{A} = A_B^{-1}A$、$\bar{\boldsymbol{b}} = A_B^{-1}\boldsymbol{b}$
- $\bar{\boldsymbol{c}}$ 被称为检验数：$\bar{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A$
- 部分资料也有忽略常数项 $\boldsymbol{c}_B^T \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} \boldsymbol{b}$ 的表达

杉数科技 Cardinal Operations

最优性检验与检验数

对于检验数向量 $\bar{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{R}^n$：

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c} - A^T (A_B^{-1})^T \boldsymbol{c}_B$$

- 基变量部分为零：$\bar{\boldsymbol{c}}_B = \boldsymbol{c}_B - A_B^T (A_B^{-1})^T \boldsymbol{c}_B = 0$；
- 非基变量部分：$\bar{\boldsymbol{c}}_N = \boldsymbol{c}_N - A_N^T (A_B^{-1})^T \boldsymbol{c}_B$。
- 检验数 $\bar{\boldsymbol{c}}$ 与最优性检验存在如下联系：

定理 2.3

对于基为 B 的基本可行解 $\boldsymbol{x}$，若各个检验数非负（$\bar{\boldsymbol{c}} \geq 0$），那么 $\boldsymbol{x}$ 为最优解、B 为最优基。

例子：公式法

考虑线性规划：

$$\begin{array}{llllllll}
\text{minimize} & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & & & \\
\text{subject to} & x_1 & & +x_3 & & & = & 1 \\
& & x_2 & & +x_4 & & = & 1 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 1.5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

当 $B=\{1,2,3\}$ 时，可以求得 $\boldsymbol{x}=(0.5,1,0.5,0,0)$、并且

$$A_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad A_B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

进而得到 $\bar{\boldsymbol{c}}_N=\boldsymbol{c}_N-A_N^T(A_B^{-1})^T\boldsymbol{c}_B=(-5,2)^T$，根据定理可以判断 $\boldsymbol{x}$ 不是最优解。

单纯形表

在单纯形法求解时，通常构建一个单纯形表刻画规范型的转换：

	$\bar{\boldsymbol{c}}^T$	$-\boldsymbol{c}_B^T \bar{\boldsymbol{b}}$
B	$\bar{A}$	$\bar{\boldsymbol{b}}$

- $\bar{\boldsymbol{c}} := \boldsymbol{c} - A^T (A_B^{-1})^T \boldsymbol{c}_B$（此时，$\bar{\boldsymbol{c}}^T = \boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} A$）；
- $\bar{A} := A_B^{-1} A$；
- $\bar{\boldsymbol{b}} := A_B^{-1} \boldsymbol{b}$。

表格的右上角表示什么？

- 目标函数值的相反数：$-\boldsymbol{c}_B^T \bar{\boldsymbol{b}} = -\boldsymbol{c}_B^T A_B^{-1} \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}_B^T \boldsymbol{x}_B$。

杉数科技 Cardinal Operations

单纯形表例子

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1
	1	1	0	0	1	1.5

对于上述例子，利用线性变换得到规范型

- $r_3 \leftarrow r_3 - r_1 - r_2$

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	1	0	0	1
	0	1	0	1	0	1
	0	0	-1	-1	1	-0.5

- $r_3 \leftarrow -r_3$

  $r_1 \leftarrow r_1 - r_3$

B	1	2	3	-1	0	0
	1	0	0	-1	1	0.5
	0	1	0	1	0	1
	0	0	1	1	-1	0.5

- $c \rightarrow c - r_1 - 2r_2 - 3r_3$

B	0	0	0	-5	2	-4
1	1	0	0	-1	1	0.5
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	-1	0.5

寻找更优邻近点

如之前定理所述，当规范型中的检验数满足 $\bar{c} \geq 0$ 时，对应的基本可行解为最优解。

如果不是最优解，应该如何处理？

一种方法：寻找相比于基本可行解更优的邻近点。

- 邻近点同样为基本可行解，但与当前解相差一个基变量。
- 新引入的变量，也就是入基变量，其检验数为负。

目录

杉数科技 Cardinal Operations

讲　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

基变量的转换

对于先前 $B = \{3, 4, 5\}$ 的例子：

B	-1	-2	0	0	0	0
3	1	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	1	1	0	0	1	1.5

由于 $\bar{c}_1 = -1 < 0$，x_1 可以作为新的基变量。

根据约束，x_1 与当前基变量满足 (假设 x_2 保持为 0)：

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_1$$

提问：x_1 可以选择多大，使得新的解仍然可行（非负）?

杉数科技 Cardinal Operations

基变量的转换（续）

考虑类似场景，但第一列约束发生变化：

B	-1	-2	0	0	0	0
3	-1	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0	1
5	-1	1	0	0	1	1.5

由于 $\bar{c}_1 = -1 < 0$，x_1 仍可以作为新的基变量。

根据约束，同样可以写出 x_1 与当前基变量的关系 (假设 x_2 保持为 0)：

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} x_1$$

提问：在该问题中，x_1 又可以选择多大？

杉数科技 Cardinal Operations

最小比值法

对于前两个例子中 x_1 大小的选取，可以通过最小比值法确定

最小比值法的流程如下：

1. 从非基变量中选取 x_e，满足检验数 $\bar{c}_e < 0$；
2. 若第 e 列 $\bar{A}_{\cdot e} \leq 0$，则该问题无界；
   - 对应于第二例子中 $\bar{A}_{\cdot 1} = (-1, 0, -1)^T \leq 0$
   - 可构造方向 d 使得 $x(t) = x + td$ 的目标函数值随着 t 增大而趋向无穷
3. 否则，通过如下规则选取 θ^*

$$\theta^* = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ie}} : \bar{A}_{ie} > 0 \right\}$$

提问：θ^* 表示什么？

杉数科技 Cardinal Operations

最小比值法（续）

θ^* 表示 x_e 在保证解可行条件下能够增加的最大值。

- 此时恰好有某个（或多个）基变量变为零。

假设仅第 i 行的基变量 $x_{B(i)}$ 变为 0，即满足：

$$\begin{cases} x_{B(i)} = \bar{b}_i - \bar{A}_{ie}\theta^* = 0 \\ x_{B(i')} = \bar{b}_{i'} - \bar{A}_{i'e}\theta^* > 0 \qquad \forall\, i' \neq i \end{cases}$$

令 $o = B(i)$，此时称 x_e 为入基变量、x_o 为出基变量。

- 新的基变量将引入 x_e、而去除 x_o。

若不止一个基变量为 0，理论上可以将任意一个作为出基变量。

- 更新后的基本可行解是退化的，因为其部分基变量为 0。

单纯形法算法框架

假设初始问题为规范型：对应基为 B、基本可行解为 $\boldsymbol{x}$。

1. 首先，计算检验数 $\bar{c}$
   - 如果 $\bar{c} \geq 0$，则 $\boldsymbol{x}$ 为最优解，算法停止。否则，运行第 2 步
2. 如果 $\bar{c}_e < 0$, 判断单纯形表第 e 列 $\bar{A}_{\cdot e}$：
   - 如果 $\bar{A}_{\cdot e} \leq 0$，那么该问题无界、最优值为 $-\infty$；
   - 否则，将 x_e 设为入基变量，基于最小比值法计算

$$\theta^* = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{ie}} : \bar{A}_{ie} > 0 \right\}$$

   并得到出基变量 x_o。

3. 更新当前的基 B，并将问题转化为新的规范型。
4. 重复上述的流程。

转轴操作：规范型的转换

为了转换当前规范型为新的规范型，转轴操作是一种常用策略。

该方法在更新基本可行解过程中，无需计算逆矩阵 A_B^{-1}。

确定出基变量 x_o（假设对应于约束第 i 行）、入基变量 x_e 后，转轴操作更新当前单纯形表：

1. 首先对于约束第 i 行，将各个元素除以 $\bar{A}_{ie}$：
$$\bar{b}_i \leftarrow \frac{1}{\bar{A}_{ie}}\bar{b}_i \qquad \bar{A}_{ij} \leftarrow \frac{1}{\bar{A}_{ie}}\bar{A}_{ij}, \quad \forall j$$
其中，$\bar{A}_{ie}$ 也被称为转轴数；
2. 对于其余行 $i' \neq i$，使用高斯消元法更新对应行的元素：
$$\bar{b}_{i'} \leftarrow \bar{b}_{i'} - \bar{A}_{i'e}\bar{b}_i \qquad \bar{A}_{i'j} \leftarrow \bar{A}_{i'j} - \bar{A}_{i'e}\bar{A}_{ij}, \quad \forall j$$
3. 此外，对于目标函数行同样使用高斯消元法进行表格更新。

杉数科技 Cardinal Operations

目录

杉数科技
Cardinal Operations

讲　　　员

叶荫宇，王子卓，皇甫琦，邓琪，高建军，葛冬冬，郭加熠，何斯迈，江波，刘慧康

例子

当前基为 $\{3,4,5\}$，考虑 x_2 作为入基变量：

B	-1	-2	0	0	0	0	$\bar{b}_i/\bar{A}_{ie}$
3	1	0	1	0	0	1	∞
4	0	1	0	1	0	1	1
5	1	1	0	0	1	1.5	1.5

- 根据最小比值法，出基变量为 x_4，$\theta^* = 1$；

对于单纯形表，目标行 $\leftarrow$ 目标行 $+ 2 \times$ 约束第 2 行。

B	-1	0	0	2	0	2
3	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
5	1	1	0	0	1	1.5

杉数科技 Cardinal Operations

例子（续）

B	-1	0	0	2	0	2
3	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
5	1	1	0	0	1	1.5

约束第 3 行 $\leftarrow$ 约束第 3 行 $-\,1\times$ 约束第 2 行。

B	-1	0	0	2	0	2
3	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
5	1	0	0	-1	1	0.5

此时已经转化为新的规范型。

例子（续）

由于检验数 $\bar{c}_1 = -1 < 0$，选择 x_1 作为入基变量：

B	-1	0	0	2	0	2	$\bar{b}_i/\bar{A}_{ie}$
3	1	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	1	∞
5	1	0	0	-1	1	0.5	0.5

- 根据最小比值法，出基变量为 x_5、$\theta^* = 0.5$。

对于单纯形表，目标行 $\leftarrow$ 目标行 $+ 1 \times$ 约束第 3 行。

B	0	0	0	1	1	2.5
3	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	-1	1	0.5

例子（续）

B	0	0	0	1	1	2.5
3	1	0	1	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	-1	1	0.5

约束第 1 行 $\leftarrow$ 约束第 1 行 $-1 \times$ 约束第 3 行。

B	0	0	0	1	1	2.5
3	0	0	1	1	-1	0.5
2	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	-1	1	0.5

检验数向量 $\bar{\boldsymbol{c}} \geq 0$，故得到最优解 $(0.5, 1, 0.5, 0, 0)$ 及最优值 -2.5。

另一个例子

考虑如下线性规划问题：

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{minimize} & -10x_1 & -12x_2 & -12x_3 & & \\
\text{subject to} & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

引入松弛变量 x_4, x_5, x_6、设置 $B = \{4, 5, 6\}$ 后，初始单纯形表为：

B	-10	-12	-12	0	0	0	0
4	1	2	2	1	0	0	20
5	2	1	2	0	1	0	20
6	2	2	1	0	0	1	20

杉数科技 Cardinal Operations

另一个例子（续）

B	-10	-12	-12	0	0	0	0
4	1	2	2	1	0	0	20
5	2	1	2	0	1	0	20
6	2	2	1	0	0	1	20

将 x_1 作入基变量，根据最小比值法：出基变量可以为 x_5 或 x_6。

- 不考虑该退化问题，仍选 x_5 作出基变量。

更新后的表格如下（考虑 x_3 为入基变量、x_4 为出基变量）：

B	0	-7	-2	0	5	0	100
4	0	3/2	1	1	-1/2	0	10
1	1	1/2	1	0	1/2	0	10
6	0	1	-1	0	-1	1	0

另一个例子（续）

更新后的表格如下（考虑 x_2 为入基变量、x_6 为出基变量）：

B	0	-4	0	2	4	0	120
3	0	3/2	1	1	-1/2	0	10
1	1	-1	0	-1	1	0	0
6	0	5/2	0	1	-3/2	1	10

更新后的表格如下（此时已得到最优解）：

B	0	0	0	18/5	8/5	8/5	136
3	0	0	1	2/5	2/5	-3/5	4
1	1	0	0	3/5	2/5	2/5	4
2	0	1	0	2/5	-3/5	2/5	4

杉数科技 Cardinal Operations

如果最小比值法算错了？

当前基为 $\{3,4,5\}$，考虑 x_2 作为入基变量：

B	-1	-2	0	0	0	0	$\bar{b}_i/\bar{A}_{ie}$
3	1	0	1	0	0	1	∞
4	0	1	0	1	0	1	1
5	1	1	0	0	1	1.5	1.5

- 根据最小比值法，出基变量为 x_4，但我错把 x_5 当成出基变量会发生什么？
- 请求出此次迭代后的结果

如果最小比值法算错了？

B	-1	-2	0	0	0	0	$\bar{b}_i/\bar{A}_{ie}$
3	1	0	1	0	0	1	∞
4	0	1	0	1	0	1	1
5	1	1	0	0	1	1.5	1.5

- 这是一组可行基吗？（之前计算最优值为-2.5，此时对应目标函数值为-3）
- 沿着使 x_2 提升，x_1 保持为 0，且满足 $Ax = b$ 约束的方向 (基方向) 提升过头了 $x_5 = 0$ 时 x_4 已经从 1 变成 -0.5 了。

B	1	0	0	0	2	3
3	1	0	1	0	0	1
4	-1	0	0	1	-1	-0.5
2	1	1	0	0	1	1.5

杉数科技 Cardinal Operations

后续内容

- 如何从基方向的视角理解单纯形法？
- 入基变量如何选取比较好？
- 退化时，出基变量如何选比较好？
- 迭代会停止吗？大致多少次停止？算法复杂度如何？

感谢聆听！

Thank You!

杉数科技
Cardinal Operations