优化理论与算法

第十一章

整数规划

郭加熠|助理教授

目录

为什么会引入整数变量

- 整数决策变量主要来源于对两类实际问题的建模:
  - “不可分割”的决策变量: 如果变量表示的实际物体是不可以“分割”的, 那么必须使用整数来建模;
  - 逻辑决策: 整数变量用于描述“执行”(用 1 表示) 和“不执行”(用 0 表示);

整数规划的应用领域

- 国际运筹学应用奖 Frenz Edelman Prize 自 2000 年以来，进入决赛的应用案例有 53% 使用了 (混合) 整数优化模型；
- 整数规划产生影响力的行业：参考 https://smartech.gatech.edu/handle/1853/49829
  - 运输：航空优化 (航班调度排班，机场停机位优化，航班恢复)；车辆道路寻优；高铁地铁时刻表排班；
  - 供应链管理：海事库存路由管理；仓库库存管理；
  - 能源：机组组合优化；大规模电网调度；
  - 金融：大规模投资组合优化；
  - 医疗健康：医疗资源计划 (医生、手术室排班)；精准癌症治疗；

整数规划问题的分类

- 混合 (线性) 整数规划问题：目标函数，约束是关于决策变量的线性函数；同时存在整数决策变量和连续决策变量；
- 形式如下：

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^\top x + h^\top y \\ \text{subject to} \quad & Ax + Gy \leq b, \\ & x \in \mathbf{Z}_+^n,\ y \in \mathbf{R}_+^m \end{aligned}$$

- 如果不存在连续决策变量，则称为 (纯) 线性整数规划;
- 在线性整数规划问题中，如果整数只是取值 0 或者 1，该问题被称作是 $0-1$ 整数规划问题；
- 目标函数或者约束中存在非线性函数，则该问题是非线性整数规划问题；

整数规划应用：背包问题 (Knapsack Problem)

- 有一个体积为 $b > 0$ 的背包；有 n 个物品；每个物品的价值为 $c_k > 0$；每个物品的体积为 $a_k > 0$， $k = 1, \ldots, n$; (一般假设 $b \in \mathbf{Z}, c_k, a_k \in \mathbf{Z},\ k = 1, \ldots, n$;)
- 问题：从 n 个物品里挑选一些放在背包里，如何挑选能使得价值最大?

整数规划应用：背包问题 (Knapsack Problem)

- 有一个体积为 $b > 0$ 的背包；有n 个物品；每个物品的价值为 $c_k > 0$；每个物品的体积为 $a_k > 0$， $k = 1, \ldots, n$; (一般假设 $b \in \mathbb{Z}, c_k, a_k \in \mathbb{Z},\ k = 1, \ldots, n$;)
- 问题：从 n 个物品里挑选一些放在背包里，如何挑选能使得价值最大?
- 用 $x_k \in \{0, 1\}$ 表示是否挑选第 k 件物品：如果 $x_k = 1$, 第 k 件物品被选中; $x_k = 0$则没有选中；
- 该问题可以被建模为有"0-1" 决策变量的整数优化问题：

$$\begin{aligned} \underset{x_1,\ldots,x_n}{\text{maximize}} \quad & \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \\ \text{subject to} \quad & \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \le b, \\ & x_k \in \{0, 1\},\ k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

整数规划的难点：枚举法

- 简单的枚举算法：考虑背包问题，要枚举出所有可行的解，计算复杂度有多少？
- 使用一台具有 10 GHz 算力的超级计算机（每秒能评估 10^{10} 个整数解）求解背包问题；对不同规模问题的计算时间如下：

n	num. of solutions	Time Required
30	2^{30}	0.11 seconds
40	2^{40}	1.83 minutes
50	2^{50}	1.3 days
60	2^{60}	3.65 years
70	2^{70}	3741 years

- 求解背包问题的计算时间随着问题规模n的增长成指数增长；

整数规划的难点：取整不一定有效

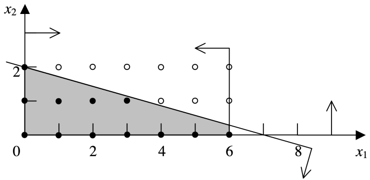
- 考虑下面这样一个整数规划问题：

$$
\begin{aligned}
(P_1)\ \underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & z = 3x_1 + 10x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_+
\end{aligned}
$$

- 去除整数约束，可以得到一个近似问题；去掉整数约束的操作也被称作是“松弛”(Relax)；
- 松弛后的问题是一个线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
(\bar{P}_1)\underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & z = 3x_1 + 10x_2 \\
\text{subject to} \quad & 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+
\end{aligned}
$$

- 松弛问题的最优解：$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (6, 0.285714)$；最优值 $z = 20.8671$；



$$(\bar{P}_1) \quad \underset{x_1, x_2}{\text{maximize}} \quad z = 3x_1 + 10x_2$$
$$\text{subject to} \quad 2x_1 + 7x_2 \leq 14$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$$

- 松弛问题的最优解：$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (6, 0.285714)$.
- 如果我们考虑将解向下取整 $(x_1, x_2) = (6, 0)$，目标函数的值是 $z = 18$.
- 如果我们考虑将解向上取整 $(x_1, x_2) = (6, 1)$，它不可行！
- 问题 (P_1) 真正的最优解是 $(x_1^*, x_2^*) = (0, 2)$，而对应的最优函数值是 $z^* = 20$。
- 松弛后再取整的方法在这个问题上是失效的！

整数规划问题难点总结

- 大部分的整数规划问题都是 NP-complete 或者 NP-hard，这意味着这些问题和 "一般的组合优化问题" 一样困难；
- 使用取整法得到的解可能是无效的 (非最优解或者不是可行解)；
- 线性松弛的最优解和原问题的最优解可能相差很远（除了少数特殊情况）；
- 一般求解整数规划问题会比线性规划问题困难得多；

目录

如何表达逻辑关系：引入额外的 0-1 变量

在实际问题中，总是存在一些逻辑关系，为建模带来困难，比如：

- 或者-或者（Either-or）：两个约束中至少有一个要成立:

$$\text{或者} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \quad \text{或者} \quad x_1 + 4x_2 \le 16.$$

- 如果-那么（If-then）：如果一个约束成立，则另一个成立：

$$\text{如果} \quad 3x_1 + 2x_2 \le 18 \quad \text{那么} \quad x_1 + 4x_2 \le 16.$$

为了表达这些逻辑关系，我们需要引入额外的 0-1 变量，并且使用大 M 法。

或者-或者

假设问题中的一个约束是:

$$\text{或者} \quad a_1^T x - b_1 \leq 0 \quad \text{或者} \quad a_2^T x - b_2 \leq 0. \tag{1}$$

假设 x 属于一个紧集 $\mathcal{X}$ 中，我们取一个足够大的常数 M，使得

$$M \geq \max_{x \in \mathcal{X}} \left\{ a_1^T x - b_1, a_2^T x - b_2 \right\}.$$

同时引入一个 0-1 变量 $y \in \{0, 1\}$:

- $y = 0$ 表示第一个不等式成立；$y = 1$ 表示第二个不等式成立。

那么，约束(1)可以等价地表示为

$$\begin{aligned} a_1^T x - b_1 &\leq My \\ a_2^T x - b_2 &\leq M(1 - y) \\ y &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

一般情形：N 个中至少有 K 个成立

给定 N 个不等式 $a_i^T x \le b_i, i = 1, \cdots, N$。问题的一个约束是

$$N\text{个不等式中至少有}K\text{个成立。} \tag{2}$$

取一个足够大的常数 M，使 $M \ge \max_{1\le i\le L} \max_{x\in\mathcal{X}} \left\{a_i^T x - b_i\right\}$.

同时，我们引入 N 个 0-1 变量 $y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \cdots, N$,

- $y_i = 1$ 表示第 i 个不等式成立，否则 $y_i = 0$， $i = 1, 2, \cdots, N$.

那么，约束(2)可以等价地表示为

$$\begin{aligned} a_i^T x - b_i \le M(1 - y_i) \ \forall \ i = 1, 2, \cdots, N \\ \sum_{i=1}^{N} y_i = K \\ y_i \in \{0, 1\} \ \forall \ i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned}$$

示例：有限个可能取值的函数

考虑这样一种约束，一个给定的函数只能取 N 个给定的值，也就是说，

$$f(x) = d_1, \quad \text{或者} \quad d_2, \quad \cdots \quad , \quad \text{或者} \quad d_N. \tag{3}$$

为了表达这个约束，引入一组 0-1 变量 $y_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, N$:
$y_i = 1$ 表示 $f(x) = d_i$，否则 $y_i = 0$。那么，约束(3)可表述为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$$

$$y_i \in \{0,1\} \ \forall\ i = 1, 2, \cdots, N.$$

如果-那么

假设问题中的一个约束是:

$$\text{如果} \quad a_1^T x - b_1 \leq 0 \quad \text{那么} \quad a_2^T x - b_2 \leq 0. \tag{4}$$

假设 x 属于一个紧集 $\mathcal{X}$ 中，我们取一个足够大的常数 M，使得 $M \geq \max_{x \in \mathcal{X}} \left\{ a_1^T x - b_1, a_2^T x - b_2 \right\}$.

同时引入两个 0-1 变量 $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$： $y_i = 1$ 表示第 i 个不等式成立，否则 $y_i = 0$。那么，约束(4)可以等价地表示为

$$\begin{aligned}
a_1^T x - b_1 &\leq M(1 - y_1) \\
a_2^T x - b_2 &\leq M(1 - y_2) \\
y_2 &\geq y_1 \\
y_1, y_2 &\in \{0, 1\}.
\end{aligned}$$

一般情形：如果 N 个条件成立，那么

假设问题中的一个约束是:

$$\text{如果} \quad a_i^T x \leq b_i,\ i = 1, \cdots, N, \quad \text{那么} \quad a_{N+1}^T x \leq b_{N+1}. \tag{5}$$

取一个足够大的常数 M，使 $M \geq \max_{1\leq i\leq N+1} \max_{x\in\mathcal{X}} \left\{a_i^T x - b_i\right\}$.
同时，我们引入 $N+1$ 个 0-1 变量 $y_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, N,$:
$y_i = 1$ 表示第 i 个不等式成立，否则 $y_i = 0$，$i = 1, 2, \cdots, N+1$. 那么，约束(5)可表示为

$$a_i^T x - b_i \leq M(1 - y_i)\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, N+1$$

$$y_{N+1} \geq \sum_{i=1}^{N} y_i - N + 1$$

$$y_i \in \{0,1\}\ \forall\ i = 1, 2, \cdots, N+1.$$

应用：固定成本问题

假设某个产品在第 t 期的

- 单位生产成本为 p_t；
- 固定生产成本为 f_t。

用 x_t 表示第 t 期的计划生产量，则第 t 期的总的生产成本为

$$f_t(x_t) = \begin{cases} p_t x_t + f_t & \text{if } x_t > 0 \\ 0 & \text{if } x_t = 0 \end{cases}$$

这是一个分段线性函数，引入 0-1 变量 $y_t \in \{0, 1\}$:

$$y_t = \begin{cases} 1 & \text{if } x_t > 0 \\ 0 & \text{if } x_t = 0 \end{cases}$$

于是，第 t 期的总的生产成本为

$$f_t(x_t) = p_t x_t + f_t y_t.$$

取足够大的 M，使得 $M \geq x_t$，$t = 1, 2, \ldots$，考虑这个约束

$$x_t \leq M y_t$$

它保证了

- 如果 $x_t > 0$，则 $y_t = 1$；
- 如果 $x_t = 0$，则 $y_t = 0$ or 1；
- 我们的目标是最小化生产成本，所以 $x_t = 0$ 时 $y_t = 0$ 自然成立。

两个 0-1 变量的乘积的线性化

考虑一个函数

$$f(x, y) = x \cdot y \quad 其中 \quad x, y \in \{0, 1\}.$$

$f(x, y)$ 是一个非线性函数，但我们可以将其线性化。首先，引入额外的整数变量 z:

$$z = x \cdot y \iff \begin{cases} z \in \{0, 1\}, \\ z \leq x, \\ z \leq y, \\ z \geq x + y - 1. \end{cases} \tag{6}$$

那么，$f(x, y) = x \cdot y$ 可以等价表示为 $f(x, y) = z$，并且 z 满足(6)。

多个 0-1 变量的乘积的线性化

考虑一个更一般的函数

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{其中} \quad x_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\cdots,n.$$

$f(x)$ 同样可以被线性化，因为

$$z = \prod_{i=1}^{n} x_i \iff \begin{cases} z & \in \{0,1\}, \\ z & \leq x_i,\ i = 1,2,\cdots,n, \\ z & \geq \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1. \end{cases} \tag{7}$$

那么，$f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i$ 可以等价表示为 $f(x,y) = z$，并且 z 满足(7)。

0-1 变量和连续变量乘积的线性化

考虑一个函数

$$f(x,y) = x \cdot y \quad \text{其中} \quad x \in \{0,1\},\ y \in \mathbf{R}.$$

$f(x,y)$ 是一个非线性函数，但我们可以将其线性化。
假设 y 非负有界，也就是说 $y \in [0, C]$，引入额外的连续变量 z:

$$z = x \cdot y \iff \begin{cases} z \in [0, C], \\ z \leq Cx, \\ z \leq y, \\ z \geq y + C(x-1). \end{cases} \tag{8}$$

$f(x,y) = x \cdot y$ 可以表示为 $f(x,y) = z$，并且 z 满足(8)。
如果 $y \in [-C, C]$，让 $\tilde{y} = y + C$，而 $f(x,y) = x \cdot \tilde{y} - Cx$。

多个 0-1 变量和一个连续变量乘积的线性化

考虑一个更一般的函数

$$f(x,y) = y \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{其中} \quad y \in \mathbf{R},\, x_i \in \{0,1\},\, i = 1,2,\cdots,n.$$

假设 $y \in [0, C]$，引入额外的连续变量 z:

$$z = y \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i \iff \begin{cases} z & \in [0, C], \\ z & \leq Cx_i,\; i = 1,2,\cdots,n, \\ z & \leq y, \\ z & \geq y + C\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right). \end{cases} \tag{9}$$

$f(x,y) = y \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$ 可以等价表示为 $f(x,y) = z$，并且 z 满足(9)。

假设 $y \in [-C, C]$，让 $\tilde{y} = y + C$，而 $f(x,y) = \tilde{y} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i - C \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i$.

例子：两个有限可能取值函数的乘积

- 考虑两个只能取有限个给定值的函数，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} d_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \quad y_i \in \{0,1\} \ \forall \ i = 1, 2, \cdots, N;$$
$$g(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j z_j, \quad \sum_{j=1}^{M} z_j = 1, \quad z_j \in \{0,1\} \ \forall \ j = 1, 2, \cdots, M.$$

- 那么，两个函数的乘积

$$f(x)g(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} d_i c_j \cdot y_i z_j$$

例子：两个有限可能取值函数的乘积

- 虽然 $f(x)g(x)$ 不再是线性的，我们可以将它等价地表述为

$$f(x)g(x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} d_i c_j \cdot w_{ij},$$

$$w_{ij} \leq y_i,$$

$$w_{ij} \leq z_j,$$

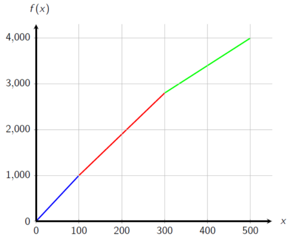
$$w_{ij} \geq y_i + z_j - 1.$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \sum_{j=1}^{M} z_j = 1,$$

$$y_i, z_j, w_{ij} \in \{0, 1\} \ \forall \ i, j.$$

应用：分段线性函数的表达

一种商品的价格结构如下：前 100 件的价格为每件 10 美元，之后 200 件的价格为每件 9 美元，再之后 200 件的价格为每件 6 美元。假设最多可以购买 500 件。令 x 表示购买的件数，$f(x)$ 表示购买 x 件对应的总价。



$f(x)$ 可以显式地写成

$$f(x) = \begin{cases} 10x & \text{if } 0 \leq x \leq 100 \\ 100 + 9x & \text{if } 100 \leq x \leq 300 \\ 1000 + 6x & \text{if } 300 \leq x \leq 500 \end{cases}$$

应用：分段线性函数的表达

如何表达这个分段线性函数？首先，引入三个额外的 0-1 变量：

- $w_1 = 1$ 表示 $0 \le x \le 100$，否则 $w_1 = 0$
- $w_2 = 1$ 表示 $100 \le x \le 300$，否则 $w_2 = 0$
- $w_3 = 1$ 表示 $300 \le x \le 500$，否则 $w_3 = 0$

这样，$f(x)$ 可以写成

$$f(x) = 10xw_1 + (100 + 9x)w_2 + (1000 + 6x)w_3$$

同时，w_1, w_2, w_3 满足约束：$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_i \in \{0, 1\} \ \forall\ i = 1, 2, 3$

$$0 \le xw_1 \le 100w_1, \quad 100w_2 \le xw_2 \le 300w_2, \quad 300w_3 \le xw_3 \le 500w_3$$

- 第二个约束保证了，如果 x 在第 i 个区间，则 $w_j = 0$ 对于 $j \neq i$；
- 结合第一个约束，如果 x 在第 i 个区间，则有 $w_i = 1$。

应用：分段线性函数的表达

进一步线性化，引入三个新的连续变量：

$$x_1 = xw_1, \quad x_2 = xw_2, \quad x_3 = xw_3.$$

于是，$f(x)$ 可以写成

$$f(x) = 10x_1 + (100w_2 + 9x_2) + (1000w_3 + 6x_3)$$

同时，$w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3$ 满足约束：

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1, \quad w_i \in \{0, 1\} \ \forall \ i = 1, 2, 3$$

$$0 \le x_1 \le 100w_1, \quad 100w_2 \le x_2 \le 300w_2, \quad 300w_3 \le x_3 \le 500w_3$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

最大值算符

取有限个元素的最大值是建模中常见的运算 (出现在目标函数或者出现在约束中)。考虑如下运算:

$$z = \max_{i \in \mathbb{I}} \{x_i\} \quad \text{for} \quad \mathbb{I} := \{1, 2, \ldots, n\} \tag{10}$$

引入一组 0-1 变量 $y_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, 上述运算(10) 可表示为

$$z \geq x_i, \quad \forall\ i \in \mathbb{I},$$

$$z \leq x_i + M \cdot y_i, \ \forall\ \forall\ i \in \mathbb{I}, \tag{11}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} y_i \leq n - 1. \tag{12}$$

当运算 (10) 出现在目标函数，并且是取极小值 $\min z$，则在上述等价变换中无需引入 $\{y_i\}$ 以及约束 (11) 和 (12).

最小值算符

取有限个元素的最小值:

$$z = \min_{i \in \mathbb{I}} \{x_i\} \quad \text{for} \quad \mathbb{I} := \{1, 2, \ldots, n\} \tag{13}$$

引入变量 0-1 变量 $y_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, 上述运算 (13) 可表示为

$$z \leq x_i, \quad \forall\ i \in \mathbb{I},$$

$$z \geq x_i - M \cdot y_i, \ \forall\ \forall\ i \in \mathbb{I}, \tag{14}$$

$$\sum_{i \in \mathbb{I}} y_i \leq n - 1. \tag{15}$$

当运算 (13) 出现在目标函数，并且是取极大值 $\max z$，则在上述等价变换中无需引入 $\{y_i\}$ 以及约束 (14) 和 (15).

目录

目录

分支定界法介绍

- 分支定界算法 (Branch and Bound Method) 采用“分而治之 (Divide and Conquer)”的思想，将原问题分解为子问题求解；通过比较“下界”和当前可行解提供的“上界”来减小穷举所有解的可能性。
- 考虑如下问题：

$$(P) \quad z^* = \min_x \; \{ c^T x \mid x \in S \}.$$

- 分而治之的理念：将问题 (P) 分解为一系列更小规模的问题。

分支定界算法：隐式枚举

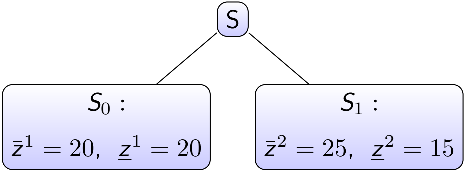
性质： 可行集分解与上下界 考虑问题 (P)，令 S 的分解为 $S = S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_N$；令第 $k \in \{1, \ldots, N\}$ 个子问题的最优值为，$z^k = \min \{ c^\top \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in S_k \}$，则下面结论成立：

(a) 原问题的最优值为 $z^* = \min_{k=1,\ldots,N} \; z^k$；

(b) 令 $\bar{z}^k$ 和 $\underline{z}^k$ 为第 k 个子问题最优值的上界和下界；则 $\bar{z} = \min_{k=1,\ldots,N} \; \bar{z}^k$ 是原问题最优值的上界；$\underline{z} = \min_{k=1,\ldots,N} \; \underline{z}^k$ 是原问题最优值的下界。

分而治之 (Divide and Conquer)

- 考虑例子：$S = \{0,1\}^3$, 存在一个分解 $S_0 = \{x \in S | x_1 = 0\}$ 和 $S_1 = \{x \in S | x_1 = 1\}$.
- S_0 可以被进一步分解为 $S_{00} = \{x \in S | x_1 = 0, x_2 = 0\}$ 和 $S_{01} = \{x \in S | x_1 = 0, x_2 = 1\}$.



分支定界算法

分支定界算法有三个基本步骤 (以原问题为最大化目标函数为例):

分支为选择一个尚未解决的子问题，并将其分为一系列更小的子问题;

定界求解一个子问题最优值的下界：例如使用连续松弛;

剪支对该子问题停止进一步分支。剪支通常使用如下三个准则:

- 当子问题不可行 (Infeasible);
- 当前子问题找到一个整数最优解，对比更新当前最好的解;
- 当前子问题找到一个分数最优解，与当前最优值比较决定是否剪支或分支。

目录

分支定界算法求解二元整数规划例子：0-1 背包问题

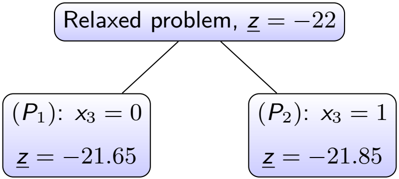
考虑如下 0-1 背包问题（最小化形式）：

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & -8x_1 - 11x_2 - 6x_3 - 4x_4 \\ \text{subject to} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14 \\ & x \in \{0,1\}^4. \end{aligned}$$

- 线性松弛解是 $x = (1, 1, 0.5, 0)$，其最优值为 -22，该解并不是整数解；
- 选择 x_3 来分支（因为它是非整数变量）；
- 进一步的子问题分别为 $x_3 = 0$ 和 $x_3 = 1$；

例子：0-1 背包问题

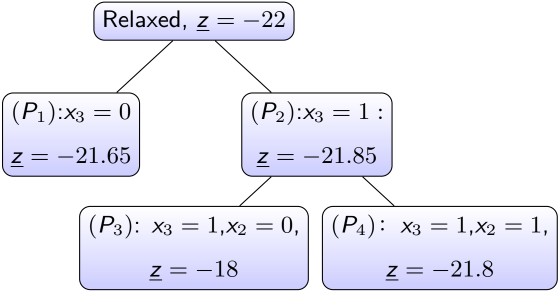
- 搜索树为



- 两个子问题的线性松弛解是
  - (P_1): $x_3 = 0$, 最优解为 $x = (1, 1, 0, 0.667)$, 最优值为 -21.67;
  - (P_2): $x_3 = 1$, 最优解为 $x = (1, 0.714, 1, 0)$, 最优值为 -21.85.
- 此时可知最优值不小于 -21.85（应该 ≥ -21）。
- 由于仍然没有任何可行的整数解; 将选择一个子问题并在其中一个变量上进行分支 (可以选择 (P_2) 子问题);

例子：0-1 背包问题

选择 $x_3 = 1$ 的节点，并且对 x_2 进行分支。搜索树为

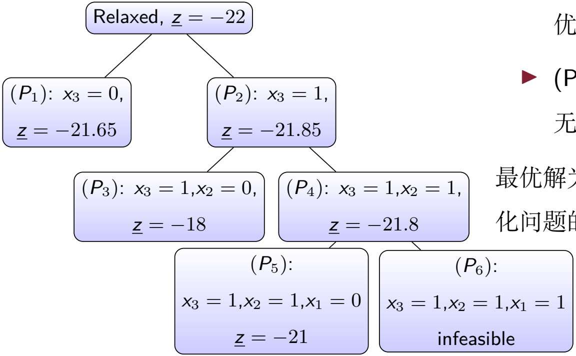


两个子问题的线性松弛解是

- (P_3): $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, 最优解为 $x = (1, 0, 1, 1)$, 最优值为 -18;
- (P_4): $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, 最优解为 $x = (0.6, 1, 1, 0)$, 最优值为 -21.8.

例子：0-1 背包问题

选择 $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ 的节点，并且对 x_1 进行分支。搜索树为



- (P5): $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, 最优解为 $x = (0, 1, 1, 1)$, 最优值为-21;
- (P6): $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, 无可行解。

最优解为 $x^* = (0, 1, 1, 1)$。原最大化问题的最优值为 21。

目录

分支定界求解一般整数优化问题

针对"0-1" 二元整数变量的分支定界算法可推广到一般整数优化问题;

假设子问题线性松弛解为 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 中至少有一个非整数分量

(否则找到了可行解); 假设这个非这整数变量为 x_i;

可以将子问题分为: $x_i \leq \lfloor x_i \rfloor$ 和 $x_i \geq \lceil x_i \rceil$ 两个子问题;

若存在多个非整数变量, 需要分支的变量可根据如下规则选择:

$$i^* = \arg\max_{j \in N^*} \left\{ \min\left(x_j - \lfloor x_j \rfloor, \lceil x_j \rceil - x_j \right) \right\}$$

其中, $N^* \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ 表示松弛解为非整数的集合;

例子：一般整数规划

考虑如下问题:

$$
\begin{aligned}
(P_0) \quad \min \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

松弛问题: 令 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$；求解线性规划问题；最优值为 $z^* = -95/4$;
最优解为 $(x_1, x_2) = (15/4, 5/4)$

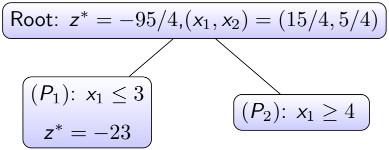
因为 $x_1 = 15/4$，且 $3 < 15/4 < 4$，生成两个分支（即两个子问题）
$x_1 \leq 3$ 和 $x_1 \geq 4$:

- 子问题 (P_1): 初始约束加上约束 $x_1 \leq 3$;
- 子问题 (P_2): 初始约束加上约束 $x_1 \geq 4$;

线性松弛子问题 (P_1)

- 线性松弛子问题 (P_1) 为:

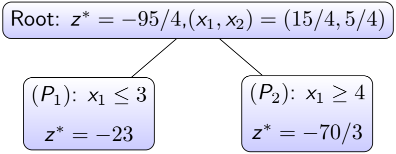
$$
\begin{aligned}
(P_1)\quad \min \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
& {\color{red} x_1 \le 3} \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$



- 最优值为 $z^* = -23$，最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (3, 2)$ $\Leftarrow$ （目前的最优可行解）；
- 当前节点无需继续分支（整数解，已找到该子问题的最优解）。

线性松弛子问题 (P_2)

$$
\begin{aligned}
(P_2) \quad \min \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
& {\color{red} x_1 \ge 4} \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$

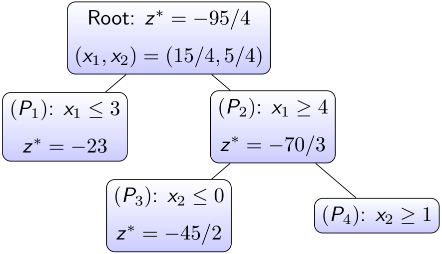


- 最优值为 $z^* = -70/3$，最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (4, 5/6)$；
- 当前节点需要继续分支（因为该子问题的最优解 $-70/3$ 小于目前的最优整数解 -23）；
- 为子问题 (P_2) 创建分支：因为 $x_2 = 5/6$, 生成两个分支 $x_2 \le 0$ 和 $x_2 \ge 1$.

线性松弛子问题 (P_3)

- 线性松弛子问题 (P_3) 为:

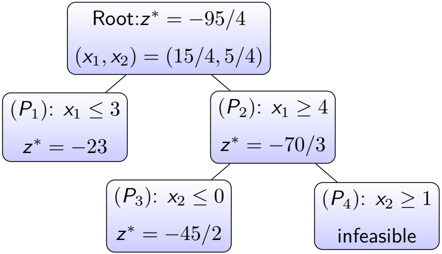
$$
\begin{aligned}
(P_3)\quad \min \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
& x_1 \ge 4 \\
& x_2 \le 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$



- 最优值为 $z^* = -45/2$，最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (9/2, 0)$；
- 当前节点无需继续分支，因为 $z = -45/2 = -22.5 > z^* = -23$.

线性松弛子问题 (P_4)

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & -5x_1 - 4x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
& x_1 \ge 4 \\
& x_2 \ge 1 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+
\end{aligned}
$$



- 该子问题无可行解，因此当前节点无需继续分支；
- 因为没有需要继续分支的子问题，所以最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (3, 2)$，最优值为 $z^* = -23$.

目录

分支定界算法中的启发式策略：松弛问题的求解算法

本节提出的方法主要针对线性整数规划问题；

算法选择：线性规划问题可以使用内点法或单纯形算法求解：

- 子节点的求解一般可以采用“热启动”策略，即利用父节点解的信息来加速求解；
- 子节点更适合使用单纯形算法求解松弛问题；
- 在根节点一般采用内点法求解；

选择哪个节点进行探索？

- 分支定界法的一个关键部分是选择下一个要处理的子问题的策略。
- 目标：(1) 最小化整体求解时间；(2) 快速找到一个好的可行解。
- 一些常用的搜索策略：
  - 最优优先（Best First）
  - 深度优先（Depth First）
  - 混合策略（Hybrid Strategies）

目录

目录

有效不等式

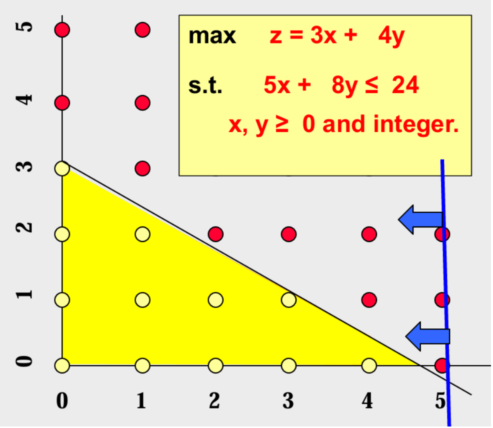
有效不等式: 对于整数规划，不消除任何可行整数解的约束都称为有效不等式

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x + 4y \\
\text{s.t.} \quad & 5x + 8y \leq 24 \\
& x, y \geq 0 \text{ 且为整数}
\end{aligned}
$$

- 考虑 $x \leq 5$ 是否为有效不等式
- 考虑 $x \leq 4$ 是否为有效不等式

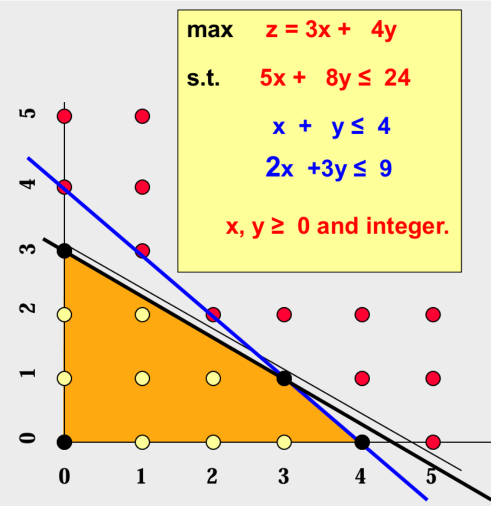
有效不等式：例子

- 有效不等式也被称为**切割平面** (cutting plane) 或**切割** (cut)
- **目的**：希望能够消除部分松弛线性规划可行区域



凸包

整数规划可行域的凸包：包含所有整数解的最小线性规划可行域



凸包与有效不等式

- 令 $S = \{x \in \mathbb{Z}_+^n | Ax \le b\}$
- IP 问题：

$$\min \quad \{c^T x | x \in S\}$$

等价于

$$\min \quad \{c^T x | x \in conv(S)\}$$

- 凸包 $conv(S)$ 可以表示为 $conv(S) = \{x \in \mathbb{R}_+^n | \tilde{A}x \le \tilde{b}\}$
- 需要大量的不等式来描述 $conv(S)$。
- 凸包可以由有效不等式构成。

例：考虑集合 $X = \{x \in \{0,1\}^5 \mid 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \le -2\}$

证明 $x_2 + x_4 \ge 1$ 和 $x_1 \le x_2$ 是 X 的有效不等式

寻找更好下界的方法

- **尝试找到完整的凸包**（几乎不可能）
  - 约束太多
  - 约束太难找到
- **找到凸包中有用约束**（非常难）
  - 有效消除线性规划最优解时
  - 当可以做到时，效果很好（例如旅行商问题，等等）
  - 通常，太难做到
- **找到有用的有效不等式**（可行，但需要技巧）
  - 在实际中非常广泛使用
  - 一个很好的求解方法

目录

Gomory 切割

Gomory 切割是为整数规划添加有效不等式的通用方法

- Gomory 切割对于提供有效不等式非常有用。
- Gomory 切割可以从 LP 松弛的最优表的单个约束中获得的。
- 假设这里所有变量都必须是整数值。

例 1： 所有左侧系数都在 0 和 1 之间。

$$.2x_1 + .3x_2 + .3x_3 + .5x_4 + x_5 = 1.8 \quad (1)$$

有效不等式（忽略 x_5 的贡献）:

$$.2x_1 + .3x_2 + .3x_3 + .5x_4 \geq .8 \quad (2)$$

Gomory 切割：一般情况

例 2：一般情况

$$1.2x_1 - 1.3x_2 - 2.4x_3 + 11.8x_4 + x_5 = 2.9 \quad (1)$$

向下取整（注意负数）：

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 11x_4 + x_5 \leq 2 \quad (2)$$

有效不等式：从 (1) 减去 (2)：

$$.2x_1 + .7x_2 + .6x_3 + .8x_4 \geq .9 \quad (3)$$

有效不等式的系数是：

- (1) 的小数部分
- 非负数

另一个 Gomory 切割例子

$$x_1 - 2.9x_2 - 3.4x_3 + 2.7x_4 = 2.7 \quad (1)$$

向下取整

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 \leq 2 \quad (2)$$

然后从 (1) 减去 (2) 得到 Gomory 切割

$$.1x_2 + .6x_3 + .7x_4 \geq .7 \quad (3)$$

注意： 负系数也会向下取整。

Gomory 切割练习

$$1.6x_1 \quad -4.7x_2 \quad +3.2x_3 \quad -1.4x_4 \quad +x_5 \quad = 9.4$$

Gomory 切割是什么?

1. $x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \leq 9$
2. $x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \leq 9$
3. $.6x_1 - .7x_2 + .2x_3 - .4x_4 \geq .4$
4. $.6x_1 + .3x_2 + .2x_3 + .6x_4 \geq .4$
5. 以上都不是

Gomory 割平面法: Chvátal-Gomory 过程

- 问题:
  - 如何找到好的或有用的有效不等式?
  - 如何利用有效不等式解决整数规划问题?
- 对有效不等式应用 Chvátal-Gomory 方法,

  $X = \{x \in \mathbb{Z}_+^n \mid Ax \le b\}$, 其中 $A = (A_1, \ldots, A_n)$

  (i) 替代: $\sum_{j=1}^n \mu^T A_j x_j \le \mu^T b$, $\mu \ge 0$

  (ii) 取整: $\sum_{j=1}^n \lfloor \mu^T A_j \rfloor x_j \le \mu^T b$

  (iii) 有效不等式: $\sum_{j=1}^n \lfloor \mu^T A_j \rfloor x_j \le \lfloor \mu^T b \rfloor$

构成 X 凸包的每个有效不等式可以通过执行有限次 Chvátal-Gomory 过程得到

整数规划的 Gomory 割平面法

- 整数规划问题：

$$\min \ \{c^T x \mid x \in \mathbb{Z}_+^n, Ax = b\}.$$

- 直接从单纯性表中创建有效不等式（割平面）。
- 给定 LP（最优的）基 B，IP 可以写作

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & c_B^T A_B^{-1} b + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j \\ \text{subject to} \quad & (x_B)_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i = 1, 2, \ldots m \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+^1, \ j = 1, 2, \ldots n \end{aligned}$$

$\bar{c}_j \geq 0, \ j \in N, \ \bar{b}_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m$

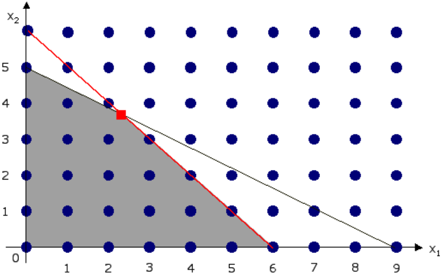
为什么存在 Gomory 切割

- 如果最终表中的右侧是整数，则基本可行解是整数，我们已经解决了线性规划。
- 否则，右侧存在一个非整数。
- 如果此约束左侧的所有系数都是整数，则无法满足约束，该问题不可行。
- 因此，左侧存在至少有一个或多个分数系数。
- 所有这些都是非基本变量的系数，用于 Gomory 切割时，至少消除当前分数解。

例 1：Gomory 割平面法

- 例 1：考虑如下问题

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -5x_1 - 8x_2 \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\
& 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$



- 最优单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
B	0	0	1.25	0.75	41.25
x_1	1	0	2.25	-0.25	2.25
x_2	0	1	-1.25	0.25	3.75

- 表中第二行的 Gomory 割为:

- 最优单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
B	0	0	1.25	0.75	41.25
x_1	1	0	2.25	-0.25	2.25
x_2	0	1	-1.25	0.25	3.75

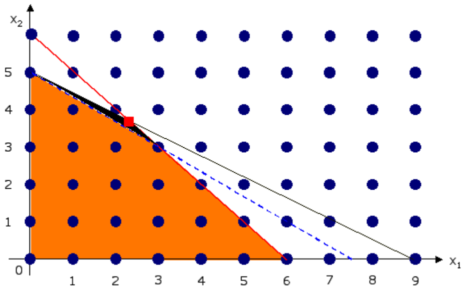
- 表中第二行的 Gomory 割为:

$$0.75x_3 + 0.25x_4 \geq 0.75$$

- 由于 $x_3 = 6 - (x_1 + x_2)$，且 $x_4 = 45 - (5x_1 + 9x_2)$，Gomory 割等价于

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

- 修改后的可行集为



- 分式最优解 $x = (2.35, 3.75)$ 不在割平面上，所以从新的可行域移除了。
- 修改后的可行域的边界点是整数。

例题 2

- 例题 2

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & -4x_1 + x_2 \\
\text{subject to} \quad & 7x_1 - 2x_2 \le 14 \\
& x_2 \le 3 \\
& 2x_1 - 2x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathrm{Z}_+
\end{aligned}
$$

例题 2

- 最优单纯性表：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{59}{7}$
1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{20}{7}$
0	1	0	1	0	3
0	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{23}{7}$

表中第一行对应的 Gomory 割为：

$$\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \geq \frac{6}{7}.$$

例题 2

- 再次优化：

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	3	$-\frac{15}{2}$
1	0	0	0	0	1	2
0	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	-1	-5	1
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{5}{2}$

表中第二行对应的 Gomory 割为：

$$\frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}.$$

例题 2

- 重新优化:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	0	0	0	0	3	1	−7
1	0	0	0	0	1	0	2
0	1	0	0	0	1	−1	1
0	0	1	0	0	−5	−2	2
0	0	0	1	0	6	1	2
0	0	0	0	1	0	−1	1

完成！最优解为 $x^* = (2, 1)$.