INGENIERÍA INFORMÁTICA
EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

8 de septiembre de 2001

Problema 1 (3 puntos) Hallar todos los enteros positivos múltiplos de 5 que den resto 1 al dividirse por 3 y resto 2 al dividirse por 7. ¿Cuántos de estos enteros serán menores que 105?

Problema 2 (2 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran n rectas contenidas en el plano que cumplen las siguientes propiedades:

- no existen rectas paralelas
- por cada punto de intersección sólo pasan dos rectas.

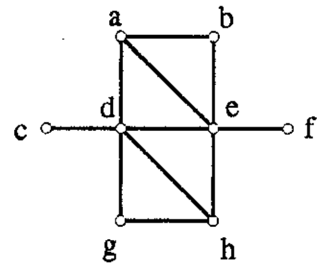
Se pide demostrar que dichas n rectas dividen al plano en

$$\frac{n^2+n+2}{2} \quad \text{regiones}$$

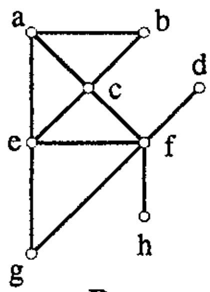
Problema 3 (2.5 puntos)

(3.1) Un grafo simple G se llama *autocomplementario* si es isomorfo a su grafo complementario $\bar{G}$. Demuéstrese que si G es autocomplementario, entonces su número de vértices es o bien un múltiplo de 4, o bien un múltiplo de 4 más uno.

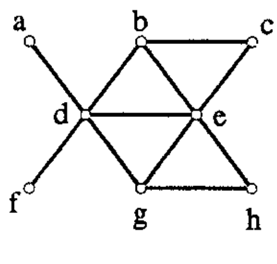
(3.2) De los grafos B, C y D, decídase de forma razonada cuál o cuáles son isomorfos a A. Caso de serlo, demuéstrese dando un isomorfismo.



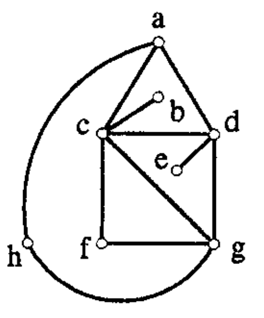
A



B



C



D

(Continúa detrás)

Problema 4 (2.5 puntos) El alfabeto español consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que

(a) contengan exactamente una vocal?

1' (b) contengan la letra a?

(c) tengan las 5 letras distintas y contengan tanto la letra a como la letra b?

(d) tengan las 5 letras distintas y contengan las letras a y b en posiciones consecutivas, con la a a la izquierda de la b?

1885

3

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

8 de septiembre de 2001

Problema 1 (3 puntos) Hallar todos los enteros positivos múltiplos de 5 que den resto 1 al dividirse por 3 y resto 2 al dividirse por 7. ¿Cuántos de estos enteros serán menores que 105?

Problema 2 (2 puntos) Para cada $n \in \mathbf{N}$ se consideran n rectas contenidas en el plano que cumplen las siguientes propiedades:

- no existen rectas paralelas
- por cada punto de intersección sólo pasan dos rectas.

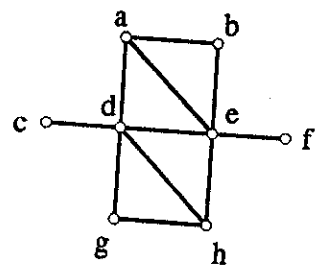
Se pide demostrar que dichas n rectas dividen al plano en

$$\frac{n^2+n+2}{2} \text{ regiones}$$

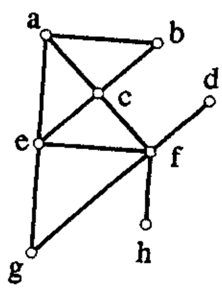
Problema 3 (2.5 puntos)

(3.1) Un grafo simple G se llama *autocomplementario* si es isomorfo a su grafo complementario $\bar{G}$. Demuéstrese que si G es autocomplementario, entonces su número de vértices es o bien un múltiplo de 4, o bien un múltiplo de 4 más uno.

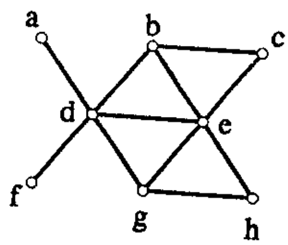
(3.2) De los grafos B, C y D, decídase de forma razonada cuál o cuáles son isomorfos a A. Caso de serlo, demuéstrese dando un isomorfismo.



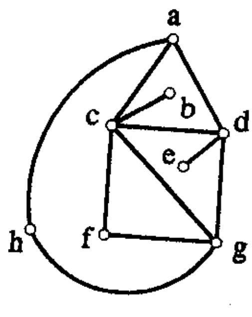
A



B



C



D

(Continúa detrás)

OBLEMA 1

Si $x \in \mathbb{N}$ es el número que buscamos, entonces

$$x \equiv 0 \pmod 5 \quad \leftarrow \text{múltiplo de } 5$$
$$x \equiv 1 \pmod 3 \quad \leftarrow \text{resto 1 al dividir por } 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 7 \quad \leftarrow \text{resto 2 al dividir por } 7$$

Al ser 3, 5 y 7 primos relativos dos a dos, sabemos que existe una única solución módulo $3\cdot 5\cdot 7 = 105$, esto es, hay un único $x \in \mathbb{N}$ entre 1 y 105 que cumple las 3 ecuaciones anteriores, y cualquier otra solución es de la forma $x + k\cdot 105$, $k \in \mathbb{N}$.

Para hallar todos los posibles x usamos el Teorema chino de los restos: una de las soluciones posibles es

$$x = 0\cdot M_1 y_1 + 1\cdot M_2 y_2 + 2 M_3 y_3$$

$\bar{x} = -35 + 2\cdot 15\cdot 1 = -35 + 30 = -5$

donde

$M_1 = 3\cdot 7 = 21$, y_1 es un inverso de 21 módulo 5

$M_2 = 5\cdot 7 = 35$, y_2 es un inverso de 35 módulo 3

$M_3 = 3\cdot 5 = 15$, y_3 es un inverso de 15 módulo 7

Obviamente, no hace falta calcular y_1, pues está multiplicado por 0.

En cuanto a y_2, sabemos que es el coeficiente ... de 35 en cualquier

$15 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow y_3 = 1$

$35 = 11\cdot 3 + 2 \to 2 = 35 - 3\cdot 11$

$3 = 2\cdot 1 + 1 \to 1 = 3 - 2$

$= 3\cdot 12 - 35$

PASO DE INDUCCIÓN: Supongamos que cualquier conjunto de n rectas colocadas como en el enunciado dividen el plano en $N_n = \frac{n^2+n}{2}$ regiones, donde $n \geq 1$.

Esta es la hipótesis de inducción. A partir de ella, vamos a comprobar que $N_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$. En efecto, supongamos que tenemos n rectas dispuestas como en el enunciado, y que añadimos una recta más. Al trazar una nueva recta "desde el infinito" y cortarse con una primera recta de las n que ya había, se crea una nueva región. Lo mismo ocurre al cruzar cada una de las demás rectas. Por tanto, se da lugar a n nuevas regiones (una por cada recta), más una región que se da dejándose del último cruce. En resumen,

$$N_{n+1} = N_n + n + 1$$

Por la hipótesis de inducción, $N_n = \frac{n^2+n+2}{2}$, luego

$$N_{n+1} = \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1 = \frac{n^2+3n+4}{2} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2}$$

como se quería demostrar.

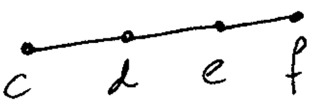
(3.2)

B) El grafo B NO es isomorfo al grafo A, ya que contiene un vértice e de grado 4. En el grafo A no hay ningún vértice de grado 4

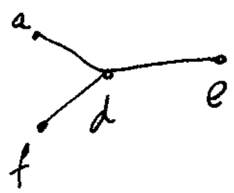
C) La sucesión de grados de los vértices de A y C coinciden. Sin embargo, hay una diferencia que puede apreciarse a simple vista: en el grafo C los dos vértices de grado 1 (a, f) están conectados a un mismo vértice de grado 5 (d). Por el contrario, en el grafo A los dos vértices de grado 1 (c, f) se conectan a dos vértices de grado 5 distintos (d, e).

Por tanto, si en ambos casos dibujamos los grafos inducidos por los vértices de grados 1 y 5, obtenemos

SUBGRAFO DE A INDUCIDO POR {c, d, e, f}



SUBGRAFO DE C INDUCIDO POR {a, d, e, f}



Si A y C fuesen isomorfos, también deberían serlo estos dos grafos. Sin embargo, el de la derecha contiene un vértice de grado **3** (d) y el de la izquierda no $\Rightarrow$ A y C NO SON ISOMORFOS

D) El grafo D no es isomorfo al grafo A porque contiene un vértice d de grado 4.

La solución es

$$\binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 276.000$$

(d) Por último, dependiendo de la posición de la pareja "ab" en la palabra hay 4 posibilidades:

$\underline{a}\,\underline{b}\,\_\,\_\,\_$

$\_\,\underline{a}\,\underline{b}\,\_\,\_$

$\_\,\_\,\underline{a}\,\underline{b}\,\_$

$\_\,\_\,\_\,\underline{a}\,\underline{b}$

Para cada una de ellas hay, como en el apartado anterior, $25 \cdot 24 \cdot 23$ posibilidades, por lo que la solución es

$$4 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 55.200$$

Problema 4 (2.5 puntos) El alfabeto español consta de 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar que

(a) contengan exactamente una vocal?

(b) contengan la letra a?

(c) tengan las 5 letras distintas y contengan tanto la letra a como la letra b?

(d) tengan las 5 letras distintas y contengan las letras a y b en posiciones consecutivas, con la a a la izquierda de la b?