Universidad Carlos III de Madrid

Principios Físicos de la Ingeniería Informática

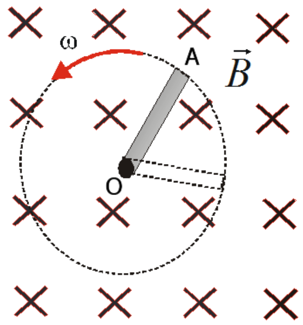
PRIMERA PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA

Grupos 84/85. CURSO 2015/2016

1. Una varilla metálica de longitud l=20 cm gira alrededor de un eje perpendicular que pasa por el punto O de la misma, tal y como se muestra en la figura adjunta, con una velocidad angular de 4 rad/s en una región donde existe un campo magnético constante de inducción 0,5 T, perpendicular al plano de giro y de sentido entrante.

a) Determinar, mediante los razonamientos físicos oportunos, la diferencia de potencial V_{OA} entre los extremos de la varilla justificando la polaridad de los mismos. **(3 puntos)**

b) Si conectamos a ambos extremos de la varilla un condensador de 20 μF, inicialmente descargado, ¿cuál será la carga almacenada en el mismo? **(2 puntos)**



Solución:

a)

El flujo barrido en un tiempo infinitesimal dt es $d\Phi = BdS$. Por otro lado, el área de la superficie barrida se puede escribir como

$$dS = \frac{1}{2} L dl$$

siendo L la longitud de la varilla y dl la longitud de arco barrido en un intervalo de tiempo dt. Como $dl = Ld\varphi$, donde $d\varphi$ es el desplazamiento angular en el intervalo dt, sustituyendo esta última expresión en la de dS, llegamos a

$$dS = \frac{1}{2} L^2 d\varphi$$

Así, el flujo magnético elemental barrido

$$d\Phi=\frac{1}{2}L^2Bd\varphi$$

Teniendo en cuenta la ley de Faraday, la fem inducida será

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{1}{2}L^2B\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{1}{2}L^2B\omega$$

Sustituyendo valores numéricos en un unidades SI en la expresión anterior, obtenemos

$|\varepsilon|=400\text{ mV}$ **(2 puntos)**

La polaridad es fácil de determinar. Teniendo en cuenta que la fuerza magnética que actúa sobre los electrones es $\vec{F}=-e\vec{v}\times\vec{B}$. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial y las direcciones y sentidos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, esta fuerza estará dirigida desde el punto O al A, acumulándose el exceso de carga negativa en A. Luego concluimos que $V_O>V_A$

(1 puntos)

b)

Al conectar un condensador, la carga almacenada será $Q=C|\varepsilon|$. Sustituyendo valores numéricos, la carga pedida será

$$Q=800\text{ nF}$$

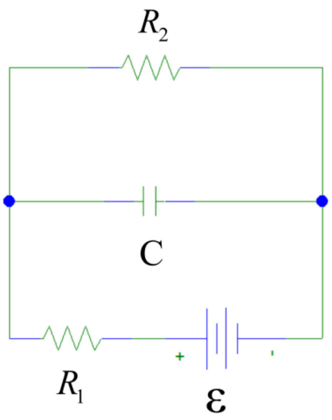
(2 puntos)

2. En el circuito indicado en la figura, determinar:

a) La intensidad de la corriente inicial a través de la batería y de la resistencia R_1 . **(2 puntos)**

b) La carga final del condensador. **(2 puntos)**

c) La constante de tiempo del circuito. **(1 puntos)**



Datos numéricos: $\varepsilon = 50$ V; $R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$; C=2 μF

a)

Puesto que en el instante inicial el condensador se comporta como una resistencia nula, la corriente no atraviesa la resistencia R_2 , luego la intensidad de la corriente inicial a través de la batería será

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{50\ \text{V}}{0{,}5\ \Omega} = 100\ \text{A}$$

(2 puntos)

b)

Cuando el condensador se carga, se comporta como si fuese una resistencia infinita. Por tanto, no circula corriente por la rama donde se encuentra. La intensidad de corriente que pasa por ambas resistencias será

$$I = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

La caída de tensión en el condensador será la misma que la correspondiente a la resistencia R_2

$$\frac{Q}{C} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\right) R_2$$

Despejando la carga y sustituyendo valores numéricos

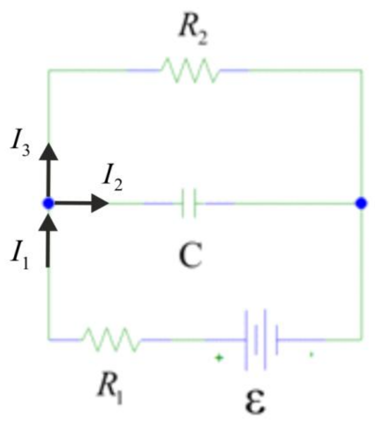
$$Q=\left(\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\right)CR_2=\left(\frac{50V}{0{,}5\Omega+100\Omega}\right)2\times10^{-6}F\ 50\ V = 99{,}5\mu C$$

(2 puntos)

c)

Vamos a deducir la expresión de la constante de tiempo . En régimen transitorio las corrientes que atraviesan las ramas del circuito son las mostradas en la figura

$$I_1 = I_2 + I_3$$



Verificándose que

$$I_3 R_2 = \frac{Q_2}{C} \Rightarrow I_3 = \frac{Q_2}{R_2 C}$$

Y

$$\varepsilon = I_1 R_1 + \frac{Q_2}{C}$$

Sustituyendo la primera relación de intensidades en la última ecuación, obtenemos

$$\varepsilon = \left(I_2 + I_3\right) R_1 + \frac{Q_2}{C}$$

Si ahora sustituimos la segunda expresión en esta última ecuación, y agrupamos términos queda

$$\varepsilon = I_2 R_2 + \frac{Q_2 R_1}{C R_e}$$

Donde

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Teniendo en cuenta que

$$I_2 = \frac{dQ_2}{dt}$$

La ecuación diferencial quedaría como

$$\varepsilon = R_2 \frac{dQ_2}{dt} + \frac{Q_2 R_1}{C R_e}$$

Ecuación que podemos escribir como

$$\int_0^{Q_2} \frac{dQ_2}{Q_2 - \varepsilon C R_e / R_1} = -\int_0^t 1/(C R_e) dt$$

Integrando esta última ecuación diferencial resulta

$$\left[\ln\left(Q_2 - \varepsilon C R_e / R_1\right)\right]_0^{Q_2} = -t / \left(C R_e\right)$$

$$\ln\left(\frac{Q_2-\varepsilon CR_e/R_1}{-\varepsilon CR_e/R_1}\right)=-t/\left(CR_e\right)\Rightarrow\frac{Q_2-\varepsilon CR_e/R_1}{-\varepsilon CR_e/R_1}=e^{-t/\left(CR_e\right)}$$

Despejando la carga y teniendo en cuenta que

$$R_e=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

Llegamos a la expresión

$$Q_2=\frac{\varepsilon\mathrm{CR}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

Siendo la constante de tiempo

$$\tau=\frac{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2}C=\left(\frac{0{,}5\Omega\ 100\Omega}{0{,}5\Omega+100\Omega}\right)2\times10^{-6}\mathrm{F}=995\ \mathrm{ns}$$

(1 puntos)