clave 017:0.376

INGENIERÍA INFORMÁTICA

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

23 de junio de 2003

Problema 1 (2.5 puntos)

(a) Tenemos cinco documentos que debemos clasificar en un archivador con diez carpetas. Calcular de cuántas formas posibles se pueden clasificar estos documentos si

(a.1) todos los documentos son distintos y sólo cabe un documento en cada carpeta;

(a.2) todos los documentos son distintos y en cada carpeta caben tantos documentos como se desee;

(a.3) los documentos son idénticos y sólo cabe un documento en cada carpeta.

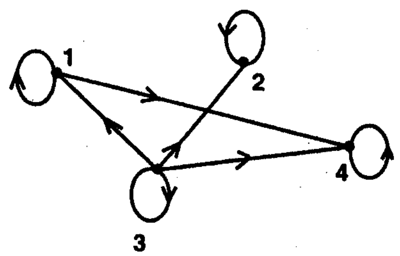
(b) ¿Cuántas soluciones enteras no negativas hay de la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

tales que $x_1 \geq 1$? ¿Cuántas hay tales que $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

Problema 2 (2.5 puntos)

(a) Sea R la relación definida sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$ cuyo grafo dirigido asociado es el siguiente



Se pide:

(a.1) verificar que (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado y construir su diagrama de Hasse.

(a.2) construir un orden topológico y determinar, de forma razonada, cuántas aristas adicionales se necesitan para extender el orden R hasta un orden total.

(b) Sea B el conjunto de las palabras de 5 bits. Se llama *peso* de una palabra $b \in B$, y se denota por $\pi(b)$, al número de unos que contiene (por ejemplo, $\pi(10010) = 2$). Demuéstrese que la relación

$$a\,R\,b \;\Leftrightarrow\; \pi(a) = \pi(b), \quad a, b \in B$$

es una relación de equivalencia. Obténganse las clases de equivalencia y el conjunto cociente $B/R = \{[b] \,:\, b \in B\}$.

(Continúa detrás)

/

Problema 3 (2.5 puntos)

(a) Hallar un inverso de 237 módulo 44

(b) Hallar un inverso de 44 módulo 237

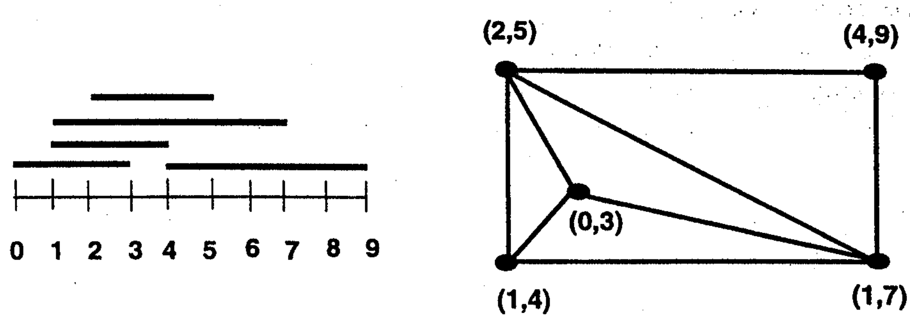
(c) Usar los resultados anteriores para resolver el sistema

$$x \equiv 3 \pmod{237}$$
$$x \equiv 2 \pmod{44}$$

(d) Demostrar que para todo entero positivo n se verifica: $\text{mcd}(n, n^2+1) = 1$

Problema 4 (2.5 puntos)

(a) Dado un conjunto de intervalos de la recta real se puede construir un grafo asociado, llamado *grafo de intervalos*, de la siguiente manera: cada intervalo es un vértice del grafo, y dos vértices son adyacentes si y sólo si los intervalos correspondientes tienen intersección no vacía. Por ejemplo, a los intervalos $\{(0,3), (1,4), (1,7), (2,5), (4,9)\}$ les corresponde el grafo de la figura.



Se pide:

(a.1) Calcular el grafo de intervalos G asociado al conjunto de intervalos

$$\{(1,9), (7,8), (0,3), (4,10), (2,6), (5,11)\}.$$

(a.2) Analizar, justificando la respuesta, si el grafo G obtenido en el apartado (a.1) es o no hamiltoniano, euleriano y bipartito. Construir, caso de que existan, un circuito o recorrido euleriano y un ciclo hamiltoniano para el grafo .

(b) Decídase la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente la respuesta:

(b.1) No hay ningún grafo euleriano que tenga un número impar de aristas

(b.2) Sea T un árbol cualquiera. Entonces T tiene más puentes que puntos de corte.

(b.3) Un arbol recubridor mínimo siempre contiene las dos aristas de menor peso

Problema 1

(a)

(a1) Son las posibles permutaciones de 5 carpetas tomadas de un conjunto de 10. Una forma de verlo es fijar un orden para los documentos (1-2-3-4-5) y ver todos los posibles conjuntos de 5 carpetas que se les pueden asociar biyectivamente, tendiendo en cuenta que el orden importa.

$$p(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240 \quad \text{posibilidades}$$

(a2) El primer documento se puede archivar en 10 posiciones. Para cada una de estas clasificaciones, como no hay restricciones, el segundo, se puede archivar en 10 posiciones también, puesto que al ser distinto su clasificación es independiente de la anterior. Así todos, (permutaciones con repetición), por lo que tenemos

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100{,}000 \text{ posibilidades}$$

(a3) Los documentos son indistinguibles y en cada carpeta solo cabe un documento. Son combinaciones sin repetición.

Son combinaciones de 10 elementos tomados en conjuntos de 5:

$$C(10,5) = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252 \text{ posibilidades}$$

(b)

El número de soluciones generales se obtiene calculado las posibles distribuciones de 21 elementos idénticos en 5 casillas. Es el caso típico de combinaciones de 21 asteriscos y 5 – 1 barras separadoras. Pero si se exige que $x_1 \geq 1$, uno de los elementos está fijo en la primera posición, por lo que hay que distribuir solo 20 elementos. Así, las posibles soluciones son:

$$C(20+5-1, 20) = \frac{24!}{20!\cdot 4!} = 10626 \text{ posibilidades}$$

En el caso en que todos los $x_i \geq 2$, tenemos fijados 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 elementos de los 21. Serán las posibles distribuciones de los 11 restantes en 5 casillas, o sea:

$$C(11+5-1, 11) = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = 1365 \text{ posibilidades}$$

2

Solución del pr. nº 2. (examen de junio).

a) $A = \{1,2,3,4\}$

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,4),(3,4)$
$(3,1),(3,2)\}$.

a) R es reflexiva, porque todas $(a,a)\in R, \forall a\in A$

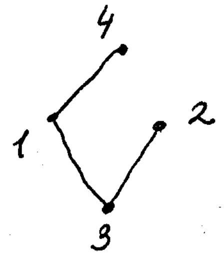
b) R es asimetrica, porque no existen aristas paralelas.

c) R es transitiva, porque si aRb y $bRc \Rightarrow$
$\Rightarrow aRc, \forall a,b,c \in R$.

$(3,1), (1,4) \Rightarrow (3,4)$
$(1,4), (4,4) \Rightarrow (1,4)$
$(3,4), (4,4) \Rightarrow (3,4)$
$(3,1), (1,1) \Rightarrow (3,1)$
$(3,2), (2,2) \Rightarrow (3,2)$.

Deducimos, que (A,R) es un conjunto parcialmente ordenado.

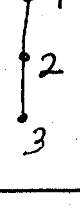
Su diagrama de Hasse:



Orden topologico: $3<2<1<4$

Sería orden total, si $aRx, \forall a,x \in A$.

Entonces, al añadir dos aristas $(2,1),(2,4)$ obtenemos el orden total:



b)

a. $\Pi(a) = \Pi(a) \Rightarrow aRa$ - reflexiva

b. Si $\Pi(a) = \Pi(b) \Rightarrow \Pi(b) = \Pi(a) \Rightarrow bRa$ -
- simetrica

c. Si $\Pi(a) = \Pi(b) \wedge \Pi(b) = \Pi(c) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Pi(a) = \Pi(c)$ y aRc - transitiva.

Por la definición es una relación de equivalencia.

<u>Clases de equivalencia.</u>

Las clases están formadas por las cadenas de pesos iguales: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

$[00000] = \{00000\}$

$[11111] = \{11111\}$

$[10000] = \{10000, 01000, \dots\}$ - total $C\binom{5}{4}$ elementos

$[11000] = \{11000, 01100, \dots\}$ - total $C\binom{5}{2}$ elementos

$[11100] = \{11100, 01110, \dots\}$ - total $C\binom{5}{3}$ elementos

$[11110] = \{11110, 01111, \dots\}$ - total $C\binom{5}{4}$ elementos

El conjunto cociente:

$B/R = \{[00000], [11111], [10000], [11000], [11100],$
$[11110]\}$

Problema

a) Hallar un inverso de 237 modulo 44
b) Hallar un inverso de 44 modulo 237
c) Usar los resultados anteriores para resolver el sistema

$$x \equiv 3 \ mod\ (237)$$
$$x \equiv 2 \ mod\ (44)$$

d). Demostrar que para todo entero positivo n se verifica: $mcd(n, n^2+1)=1$

Solución

a) Usando el algoritmo de Euclides verificamos que mcd(237,44)=1 para asegurarnos que exista inverso.

$237=5 \times 44 +17$
$44= 2 \times 17 +10$
$17= 10 +7$
$10=7+3$
$7=2 \times 3 +1$

si existe. Recurriendo el algoritmo al revés:

$1= 7 - 2 \times 3 = 7 -2 \times (10 - 7) = \ldots.=13 \times 237 - 70 \times 44$

indicando que el inverso buscado es 13.

b) evidentemente desde el anterior apartado es : -70

c) usando la nomenclatura estándar del teorema chino del resto tenemos: m1=237, m2= 44, a1=3 y a2=2 y por tanto M1=44 y M2=237.
De los apartados anteriores y1=-70 e y2=13
Usando el teorema chino del resto:

$x \equiv a1\ M1\ y1 + a2\ M2\ y2 \bmod (237 \times 44)$
$x \equiv -3078 \bmod (10428)$ o bien
$x \equiv 7350 \bmod (10428)$

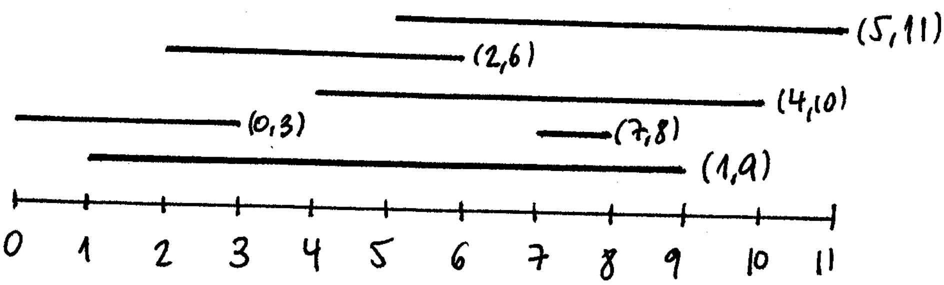
d) simplemente usando Euclides: $n^2+1 = n \times n +1$ que implica que son primos relativos

PROBLEMA 4

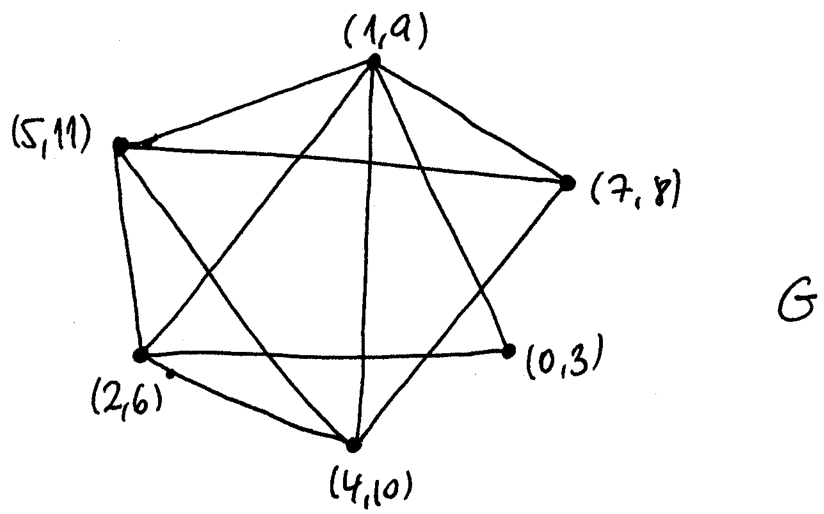
(a) La posición relativa de los intervalos

$$\{(1,9), (7,8), (0,3), (4,10), (2,6), (5,11)\}$$

es la siguiente:



(a.1) Por tanto, el correspondiente grafo de intervalos es



(a.2) Claramente, el grafo NO es bipartito, ya que contiene ciclos de longitud tres (por ejemplo, $(1,9) \to (2,6) \to (0,3) \to$ $\to (1,9)$).

El grafo G es hamiltoniano, ya que existen ciclos hamiltonianos, esto es, ciclos que pasan por todos los vértices del grafo. Por ejemplo,

$$(0,3) \to (1,9) \to (7,8) \to (4,10) \to (5,11) \to (2,6) \to (0,3)$$

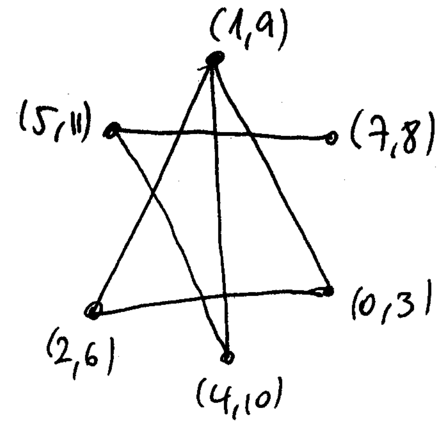
El grafo G <u>no</u> es euleriano, ya que no todos sus vértices tienen grado par. Al haber dos vértices de grado impar,

$$g((1,9)) = 5, \qquad g((7,8)) = 3$$

no pueden existir circuitos eulerianos. No obstante, sí que existe un recorrido euleriano, cuyos extremos son necesariamente los dos vértices de grado impar. Para construirlo partimos de uno cualquiera de esos dos vértices y formamos un ciclo tan largo como sea posible. Por ejemplo, partimos de (1,9) y formamos

$$(1,9) \to (5,11) \to (2,6) \to (4,10) \to (7,8) \to (1,9)$$

Si borramos las aristas recorridas, nos queda el grafo



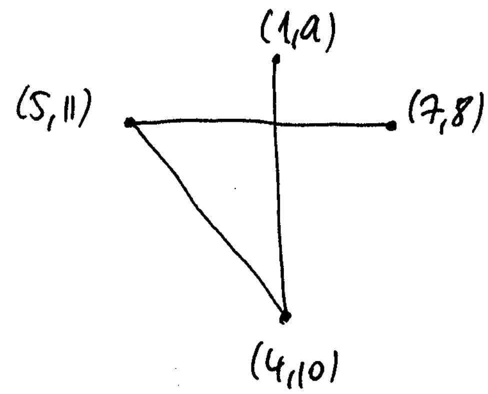
Volvemos a formar otro ciclo partiendo de (1,9)

$$(1,9) \to (2,6) \to (0,3) \to (1,9)$$

y lo intercalamos en el anterior, por ejemplo al final

$$(1,9) \to (5,11) \to (2,6) \to (4,10) \to (7,8) \to (1,9) \to (2,6) \to (0,3) \to (1,9)$$

Como antes, borramos las aristas que acabamos de utilizar, así como el vértice (0,3) y el (2,6) ya que hemos agotado las aristas correspondientes a ambos. Ya sólo quedan las aristas



Por tanto, un recorrido euleriano con origen en (1,9) y final en (7,8) es

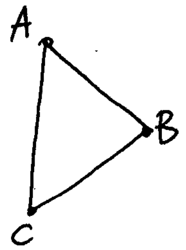
$$(1,9) \to (5,11) \to (2,6) \to (4,10) \to (7,8) \to (1,9) \to (2,6) \to$$

$$\to (0,3) \to (1,9) \to (4,10) \to (5,11) \to (7,8).$$

4.4

(b)

(b.1) FALSO. Por ejemplo, el siguiente grafo



es euleriano (un circuito euleriano es ABCA) y tiene 3 aristas.

(b.2) VERDADERO. Sea T un árbol con n vértices. Entonces tiene n−1 aristas. Como T es acíclico, cada una de sus aristas es una arista puente. Por tanto T tiene n−1 aristas puente.
Por otra parte, los únicos vértices de un árbol que NO son puntos de corte son las hojas, es decir los vértices de grado 1. Cualquier árbol tiene como mínimo 2 hojas. Por tanto, hay a lo sumo n−2 puntos de corte.

(b.3) VERDADERO. Salvo que el árbol sea trivial (A — B), cualquier árbol recubridor mínimo tiene que contener las dos aristas de peso mínimo. La única razón para que no estuvieran es que formasen ciclo, pero dos aristas no son suficientes para formar un ciclo.

6