Universidad Carlos III de Madrid

# MATEMÁTICA DISCRETA

Control Marzo 2012

| Apellidos | | Hora | |
|---|---|---|---|
| Nombre | | Grupo | |

---

**Normas generales:**

- **NO** se permite ningún tipo de dispositivo electrónico (teléfonos móviles, calculadoras, etc).
- Cada paso debe estar justificado.
- Se puede abandonar el aula pasados 15 minutos del comienzo del control.
- Este control corresponde al 20% de la nota de evaluación continua.

---

**Pregunta 1 (1 punto)** Sean los siguientes conjuntos de *intervalos* de la recta real:

$$X = \{\varnothing, (2,4), (2,5), (4,5), (6,8), (2,8)\}$$

$$Y = \{\varnothing, [2,4), [2,5), [2,8), [4,5), [4,8)\}$$

Determina si son retículos respecto a la relación de inclusión definida por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

y halla un subretículo en caso de que la respuesta sea afirmativa. Prueba si $X$ o $Y$ son álgebras de Boole. Encuentra un subconjunto de $Y$ que sea álgebra de Boole.

<u>Solución.</u>

Un conjunto es retículo respecto a una relación de orden si y sólo si cada par de sus elementos tiene un supremo y un ínfimo dentro del conjunto. La relación de orden del enunciado es la inclusión. El supremo de dos intervalos es la unión de ellos y el ínfimo es la intersección. Para verlo, hay que darse cuenta de que todos los conjuntos de la recta real que contienen a los dos intervalos (sus cotas superiores) contienen a su unión, por tanto, la unión es el inferior de todos ellos y por tanto es el supremo de los dos intervalos. En cuanto al ínfimo, la intersección de dos intervalos contiene a todos los conjuntos de la recta real que están contenidos en ambos intervalos (sus cotas inferiores), por tanto, es superior a todos ellos, y por tanto es el ínfimo de los dos intervalos.

$X$ no es retículo, porque la unión de $(2,4)$ y $(4,5)$ no está en $X$. $Y$ sí es retículo, las siguientes tablas dan todas las uniones e intersecciones, aunque hay más maneras de verlo que ésta.

| $\cup$ | $\varnothing$ | $[2,4)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ | $[4,5)$ | $[4,8)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $[2,4)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ | $[4,5)$ | $[4,8)$ |
| $[2,4)$ | | $[2,4)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ |
| $[2,5)$ | | | $[2,5)$ | $[2,8)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ |
| $[2,8)$ | | | | $[2,8)$ | $[2,8)$ | $[2,8)$ |
| $[4,5)$ | | | | | $[4,5)$ | $[4,8)$ |
| $[4,8)$ | | | | | | $[4,8)$ |

| $\cap$ | $\varnothing$ | $[2,4)$ | $[2,5)$ | $[2,8)$ | $[4,5)$ | $[4,8)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $[2,4)$ | | $[2,4)$ | $[2,4)$ | $[2,4)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $[2,5)$ | | | $[2,5)$ | $[2,5)$ | $[4,5)$ | $[2,5)$ |
| $[2,8)$ | | | | $[2,8)$ | $[4,5)$ | $[4,8)$ |
| $[4,5)$ | | | | | $[4,5)$ | $[4,5)$ |
| $[4,8)$ | | | | | | $[4,8)$ |

Hay muchas maneras de obtener subretículos de $Y$, una de ellas es extraer una serie de intervalos contenidos unos en otros, como $\{\varnothing, [2,4), [2,5), [2,8)\}$.

$X$ no es álgebra de Boole, porque ni siquiera es retículo. $Y$, aunque es retículo, tampoco es álgebra de Boole. Está claro que de serlo, el cero sería el intervalo vacío y el uno el $[2,8)$, y entonces el elemento complementario de un intervalo $I$ sería aquél que verificara $I \cup I^c = [2,8)$, o sea $I^c = [2,8)\backslash I$. Ahora bien, el complementario de $[2,5)$ es un intervalo que no está en $Y$, así que $Y$ no es álgebra de Boole.

Si tomamos el subconjunto de $Y$ siguiente:

$$Y' = \{\varnothing, [2,4), [4,8), [2,8)\}$$

vemos que sí es cerrado bajo uniones, intersecciones y complementarios. No es necesario demostrar que es distributivo, puesto que sabemos que las operaciones de unión e intersección de conjuntos poseen esa propiedad, de modo que este conjunto sí es un álgebra de Boole.

Otra solución posible es:

$$Y'' = \{\varnothing, [2,4), [4,5), [2,5)\}$$

Y también una serie de álgebras de Boole triviales de dos conjuntos, siempre que uno esté contenido en el otro.

**Pregunta 2 (1 punto)**

a) Sean las cadenas de n bits en las que no aparece la secuencia "101". Plantea la ecuación de recurrencia que verifica el número de dichas cadenas y las condiciones iniciales que verifica. **Importante:** No es necesario resolver la relación de recurrencia, sino sólamente escribirla.

b) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n + 3 \cdot (-2)^{n+3}, \quad n \geq 1$$

con condiciones iniciales: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

SOLUCIÓN.

a) Para plantear la ecuación de recurrencia hay que suponer que se conoce el número de las cadenas de hasta $n-1$ bits que cumplen la condición. Estudiando cómo se construiría la cadena de $n$ bits con cadenas más cortas se puede obtener el número de ellas, es decir $a_n$ a partir del de las cadenas más cortas que se supone conocido. Así resulta la relación de recurrencia.

Si tuviéramos que añadir un bit de más a las cadenas de $n-1$ bits, sin que aparezcan secuencias "101", y ese bit valiera cero, no habría ninguna posibilidad de que se formara el "101": no lo hay en los $n-1$ primeros bits, y el cero que ponemos no completa la secuencia prohibida. Sin embargo, si ponemos un 1, algunas de las cadenas de $n-1$ bits (las que acaban en "10") completarían la secuencia prohibida. De modo que hemos de evitar esa situación: hemos de asegurarnos de que en las cadenas que formamos añadiendo el 1 se da una de dos posibilidades, o bien completa la secuencia "11" o bien la "001".

Hay $a_{n-1}$ cadenas de $n-1$ bits con las que formar la de $n$ bits añadiendo el 0, más $a_{n-2}$ cadenas de $n-2$ bits con las que formar la de $n$ bits añadiendo el grupo "11", más $a_{n-3}$ cadenas de $n-3$ con las que construir la cadena de $n$ bits con el grupo "001". Haciendo el total se deduce la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Realmente, cualquiera que sea la secuencia prohibida, la ecuación de recurrencia tiene los mismos términos, y tantos de ellos como dígitos tenga (daría lo mismo si la secuencia no permitida fuera "001"). En cuanto a las condiciones iniciales, serían $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$.

b) Para resolver la relación de recurrencia de la segunda parte hay que empezar por formular la ecuación homogénea:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6 \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

Ésta es una ecuación lineal de orden 1 y ecuación característica $x^2 = x + 6$, cuyas raíces son $x = -2, 3$. La solución general de la homogénea es:

$$a_n^h = K_1 \cdot (-2)^n + K_2 \cdot 3^n$$

*IMPORTANTE: No es ahora cuando se sustituyen las condiciones iniciales, sino cuando se tiene la solución general de la completa.*

Ahora hay que hallar una solución particular de la ecuación completa. Nos fijamos en el término inhomogéneo $3 \cdot (-2)^{n+3}$. Su forma funcional es la de una constante por una potencia, y la base de la potencia es una raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica. Así que una solución particular es:

$$a_n^p = (C_1 \cdot n + C_0) \cdot (-2)^n$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación completa resulta ser $C_1 = -24/10$ y $C_0$ puede ser un número cualquiera, que elegimos que sea el cero. De modo que la solución general de la completa es:

$$a_n = K_1 \cdot (-2)^n + K_2 \cdot 3^n - \frac{24}{10} \cdot n \cdot (-2)^n$$

Para hallar la solución que verifica las condiciones iniciales del enunciado, particularizamos esta solución inicial para $n = 1, 2$ e igualamos a los valores.

$$a_1 = K_1 \cdot (-2) + K_2 \cdot 3 + \frac{24}{5} = 1$$

$$a_2 = K_1 \cdot 4 + K_2 \cdot 9 - \frac{96}{5} = 1$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $K_1 = 79/25$, $K_2 = 21/25$. Y la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = \frac{79}{25} \cdot (-2)^n + \frac{21}{25} \cdot 3^n - \frac{24}{10} \cdot n \cdot (-2)^n$$

---

Universidad Carlos III de Madrid

# MATEMÁTICA DISCRETA

Control Marzo 2012

| Apellidos | | Hora | |
|---|---|---|---|
| Nombre | | Grupo | |

---

**Normas generales:**

- **NO** se permite ningún tipo de dispositivo electrónico (teléfonos móviles, calculadoras, etc).
- Cada paso debe estar justificado.
- Se puede abandonar el aula pasados 15 minutos del comienzo del control.
- Este control corresponde al 20% de la nota de evaluación continua.

---

**Pregunta 1 (1 punto)** Sean los siguientes conjuntos de *intervalos* de la recta real:

$$X = \{\varnothing, (1,3), (2,3), (2,6), (5,6), (1,6)\}$$

$$Y = \{\varnothing, (1,3], (1,4], (1,7], (3,4], (3,7]\}$$

Determina si son retículos respecto a la relación de inclusión definida por:

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

y halla un subretículo en caso de que la respuesta sea afirmativa. Prueba si $X$ o $Y$ son álgebras de Boole. Encuentra un subconjunto de $Y$ que sea álgebra de Boole.

<u>SOLUCIÓN.</u>

Un conjunto es retículo respecto a una relación de orden si y sólo si cada par de sus elementos tiene un supremo y un ínfimo dentro del conjunto. La relación de orden del enunciado es la inclusión. El supremo de dos intervalos es la unión de ellos y el ínfimo es la intersección. Para verlo, hay que darse cuenta de que todos los conjuntos de la recta real que contienen a los dos intervalos (sus cotas superiores) contienen a su unión, por tanto, la unión es el inferior de todos ellos y por tanto es el supremo de los dos intervalos. En cuanto al ínfimo, la intersección de dos intervalos contiene a todos los conjuntos de la recta real que están contenidos en ambos intervalos (sus cotas inferiores), por tanto, es superior a todos ellos, y por tanto es el ínfimo de los dos intervalos.

$X$ no es retículo, porque la unión de $(1,3)$ y $(5,6)$ no está en $X$. $Y$ sí es retículo, las siguientes tablas dan todas las uniones e intersecciones, aunque hay más maneras de verlo que ésta.

| $\cup$ | $\varnothing$ | $[1,3)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $[1,3)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
| $[1,3)$ | | $[1,3)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ |
| $[1,4)$ | | | $[1,4)$ | $[1,7)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ |
| $[1,7)$ | | | | $[2,8)$ | $[2,8)$ | $[2,8)$ |
| $[3,4)$ | | | | | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
| $[3,7)$ | | | | | | $[3,7)$ |

| $\cap$ | $\varnothing$ | $[1,3)$ | $[1,4)$ | $[1,7)$ | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $[1,3)$ | | $[1,3)$ | $[1,3)$ | $[1,3)$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $[1,4)$ | | | $[1,4)$ | $[1,4)$ | $[3,4)$ | $[3,4)$ |
| $[1,7)$ | | | | $[1,7)$ | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
| $[3,4)$ | | | | | $[3,4)$ | $[3,7)$ |
| $[3,7)$ | | | | | | $[3,7)$ |

Hay muchas maneras de obtener subretículos de $Y$, una de ellas es extraer una serie de intervalos contenidos unos en otros, como $\{\varnothing, [1,3), [1,4), [1,7)\}$.

$X$ no es álgebra de Boole, porque ni siquiera es retículo. $Y$, aunque es retículo, tampoco es álgebra de Boole. Está claro que de serlo, el cero sería el intervalo vacío y el uno el $[1,7)$, y entonces el elemento complementario de un intervalo $I$ sería aquél que verificara $I \cup I^c = [2,8)$, o sea $I^c = [2,8)\backslash I$. Ahora bien, el complementario de $[1,4)$ es un intervalo que no está en $Y$, así que $Y$ no es álgebra de Boole.

Si tomamos el subconjunto de $Y$ siguiente:

$$Y' = \{\varnothing, [1,3), [3,7), [1,7)\}$$

vemos que sí es cerrado bajo uniones, intersecciones y complementarios. No es necesario demostrar que es distributivo, puesto que sabemos que las operaciones de unión e intersección de conjuntos poseen esa propiedad, de modo que este conjunto sí es un álgebra de Boole.

Otra solución posible es:

$$Y'' = \{\varnothing, [1,3), [3,4), [1,4)\}$$

Y también una serie de álgebras de Boole triviales de dos conjuntos, siempre que uno esté contenido en el otro.

**Pregunta 2 (1 punto)**

a) Sea una avenida con n semáforos. Plantea la ecuación de recurrencia que verifica el número de configuraciones de las luces de los semáforos de manera que no haya dos rojos seguidos de uno amarillo. **Importante:** No es necesario resolver la relación de recurrencia, sino sólamente escribirla.

b) Resolver la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} + 5 \cdot a_n + 8 \cdot 3^{n-1}, \quad n \geq 1$$

con condiciones iniciales: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$.

<u>Solución.</u>

a) Para hallar la ecuación de recurrencia hemos de suponer que tenemos resuelto el problema para todos los números hasta $n-1$ incluido, es decir, que sabemos el número de maneras de disponer semáforos según la condición cuando hay $n-1$ o menos semáforos, e intentar ver cómo se construye la solución para $n$ semáforos.

Hay tres alternativas, rojo (R), amarillo (A) y verde (V), y una secuencia que debemos evitar, dos rojos seguidos de uno amarillo (RRA). Si el semáforo enésimo que vamos a colocar es R o V no hay modo de que se concluya una secuencia prohibida RRA, pero sí podría ocurrir si pusiéramos uno A. Si ponemos el semáforo A, hemos de hacerlo bien como VA, AA, o como VRA o ARA. Éstas son todas las maneras posibles que evitan la secuencia prohiboda. Ahora vamos a contarlas.

Hay $a_{n-1}$ maneras de poner R, $a_{n-1}$ maneras de poner V, $a_{n-2}$ maneras de poner VA, $a_{n-2}$ maneras de poner AA, $a_{n-3}$ maneras de poner VRA y $a_{n-3}$ maneras de poner ARA. En total,

$$a_n = 2 \cdot (a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3})$$

b) Para resolver la relación de recurrencia de la segunda parte hay que empezar por formular la ecuación homogénea:

$$a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} + 5 \cdot a_n, \quad n \geq 1$$

Ésta es una ecuación lineal de orden 1 y ecuación característica $x^2 = 4 \cdot x + 5$, cuyas raíces son $x = -1, 5$. La solución general de la homogénea es:

$$a_n^h = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n$$

*IMPORTANTE: No es ahora cuando se sustituyen las condiciones iniciales, sino cuando se tiene la solución general de la completa.*

Ahora hay que hallar una solución particular de la ecuación completa. Nos fijamos en el término inhomogéneo $8 \cdot 3^{n-1}$. Su forma funcional es la de una constante por una potencia, y la base de la potencia no es una raíz de la ecuación característica. Así que una solución particular es:

$$a_n^p = K \cdot 3^n$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación completa resulta ser $K = -1/3$. De modo que la solución general de la completa es:

$$a_n = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n - \frac{1}{3} \cdot 3^n = K_1 \cdot (-1)^n + K_2 \cdot 5^n - 3^{n-1}$$

Para hallar la solución que verifica las condiciones iniciales del enunciado, particularizamos esta solución inicial para $n = 1, 2$ e igualamos a los valores.

$$a_1 = K_1 \cdot (-1) + K_2 \cdot 5 - 3^0 = 1$$
$$a_2 = K_1 \cdot 1 + K_2 \cdot 25 - 3 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones es $K_1 = -7/6$, $K_2 = 1/6$. Y la solución de la ecuación de recurrencia es:

$$a_n = -\frac{7}{6} \cdot (-1)^n + \frac{5^n}{6} - 3^{n-1}$$