Clave 1044:0,310

INGENIERÍA INFORMÁTICA

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

6 de septiembre de 2003

Problema 1 (2.5 puntos)

Dos cajones contienen seis pares de guantes de seis colores distintos: en un cajón están los seis guantes izquierdos y en otro los seis derechos. Seis personas (A, B, C, D, E, F) eligen al azar un guante izquierdo y luego uno derecho sin reponerlos en los cajones. Se pide determinar:

(a) de cuántas formas se puede llevar a cabo la distribución de los guantes;

(b) de cuántas formas si B elige un par de guantes de distinto color y F un par de guantes del mismo color;

(c) de cuántas formas si exactamente cuatro personas eligen pares del mismo color;

(d) de cuántas formas si ninguna de las seis personas elige un par de guantes del mismo color.

Problema 2 (2.5 puntos)

(a) Se considera el conjunto $A \in \mathbb{N}$ de todos los divisores enteros positivos de 24. Represéntese el diagrama de Hasse de A con el orden dado por la relación de divisibilidad.

(b) En $\mathbb{R}^2$ se considera la relación de orden

$$(a,b) < (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a \leq c \quad \text{y} \quad b \leq d.$$

Hállense, justificando la respuesta, los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo del conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}.$$

(c) Se define en $\mathbb{Z}$ la relación

$$x\,R\,y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = x - y.$$

Demuéstrese que R es una relación de equivalencia y determínese, para cada $x \in \mathbb{Z}$, su clase de equivalencia $[x] = \{y \in \mathbb{Z} \, : \, x\,R\,y\}$.

Problema 3 (2.5 puntos)

(a) Demuéstrese por inducción que $2^{2^n} \equiv 6 \pmod{10}$ para todo número natural $n \geq 2$.

1

(b) Resuélvase el sistema de ecuaciones modulares

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ 3x &\equiv 4 \pmod 5 \\ 5x &\equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

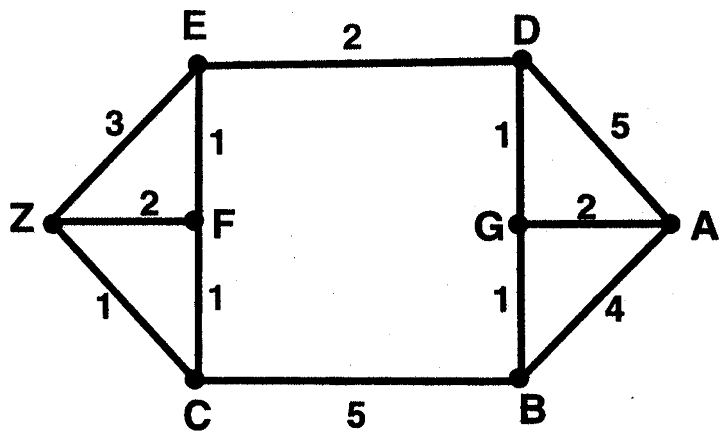
Problema 4 (2.5 puntos)

(a) Sea K_n el grafo completo de n vértices.

(a.1) ¿Cuántos ciclos de longitud tres contiene K_n?

(a.2) ¿A cuántos triángulos pertenece cada arista de K_n?

(b) Utilícese el algoritmo de Dijkstra para determinar en el grafo ponderado siguiente un camino de longitud mínima entre los vértices Z y A.



Problema Combinatoria

Dos cajones contienen seis pares de guantes de seis colores distintos: en un cajón están los seis guantes izquierdos y en otro los seis derechos. Seis personas (A, B, C, D, E, F) eligen al azar un guante izquierdo y luego uno derecho sin reponerlos en los cajones. Se pide determinar:

(a) de cuántas formas se puede llevar a cabo la distribución de los guantes;

(b) de cuántas formas si B elige un par de guantes de distinto color y F un par de guantes del mismo color;

(c) de cuántas formas si exactamente cuatro personas eligen pares del mismo color;

(d) de cuántas formas si ninguna de las seis personas elige un par de guantes del mismo color.

Solución Problema Combinatoria

Apartado a

La primera persona, A tiene 6 formas de elegir el izquierdo y 6 de elegir el derecho, y por tanto 6^2 posibilidades. La siguiente persona, C, tendrá 5^2 posibilidades, B tendrá 4^2 ..... En total el numéro de posibles formas de distribuir los guantes es:

$$6^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 1^2 = (6!)^2$$

Apartado b

F tiene 6 formas de elegir el primer guante, el izquierdo por ejemplo, pero luego solo una de escoger el derecho (los colores tiene que corresponder). Luego, B tendrá 5 posibilidades para elegir el izquierdo y 4 para el derecho (no puede elegir el mismo color). Las personas que siguen tendran respectivamente 4^2, 3^2 ... formas. En total tendermos:

$$6 \cdot (5 \cdot 4) \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 1^2 = 4 \cdot 6! \cdot 4!$$

distintas formas de distribuir los guantes.

Apartado c

Primero eligo las 4 personas que se quedan con guantes del mismo color. Para esta elección hay $\binom{6}{4}$ posibilidades. Luego hay 6 posibildades de dar guantes iguales al primero de los cuatro, 5 al segundo .... Al final de la primera fase quedan exactamente 2 pares del mismo color y solamente 2 formas de distribuirlos en colores distintos. En total tenemos

$$\binom{6}{4} \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 2 = \binom{6}{4} \cdot 6!$$

formas de llevar a cabo la distribucción.

Apartado d

Se puede utilizar el principio de *inclusión–exclusión*. Sea V_A el conjunto de toda elección en las cuales A tiene un par de guantes iguales. De la misma forma se definen los conjuntos $V_B, \ldots, V_F$. Usando el apartado **a** y el principio de *inclusión–exclusión* tenemos:

$$(6!)^2 - |V_A \cup V_B \cup \ldots. \cup V_F| \quad \text{formas.}$$

Acordandonos que:
$|V_A \cup V_B \cup \ldots. \cup V_F| = |V_A| + \ldots + |V_F| - |V_A \cap V_B| - \ldots - |V_E \cap V_F| + |V_A \cap V_B \cap V_C| + \ldots + |V_D \cap V_E \cap V_F| - \ldots. - |V_A \cap V_B \cap V_C \cap V_D \cap V_E \cap V_F|$ y usando el método ilustrado en el apartado **b** tenemos que:

1. $|V_A| = 6 \cdot (5!)^2 = 6! \cdot 5!$
2. $|V_A \cap V_B| = 6 \cdot 5(4!)^2 = 6! \cdot 4!$
3. $|V_A \cap V_B \cap V_C| = 6 \cdot 5 \cdot 4(3!)^2 = 6! \cdot 3!$
4. $|V_A \cap V_B \cap V_C \cap V_D| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3(2!)^2 = 6! \cdot 2!$
5. $|V_A \cap V_B \cap V_C \cap V_D \cap V_E| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2(1!)^2 = 6! \cdot 1!$
6. $|V_A \cap V_B \cap V_C \cap V_D \cap V_E \cap V_F| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

El numéro de formas es por tanto:

$$(6!)^2 -$$

$$- \left[6 \cdot (6! \cdot 5!) - \binom{6}{2} \cdot (6! \cdot 4!) + \binom{6}{3} \cdot (6! \cdot 3!) - \binom{6}{4} \cdot (6! \cdot 2!) + \right.$$

$$\left. + \binom{6}{5} \cdot 6! - \binom{6}{6} 6! \right] =$$

$$= \binom{6}{2} \cdot 6! \cdot 4! - \binom{6}{3} \cdot 6! \cdot 3! + \binom{6}{4} \cdot 6! - 5 \cdot 6!$$

PROBLEMA 2

2.1

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Claramente,

$1 | a \quad \forall a \in A$

$2|4,\ 2|6,\ 2|8,\ 2|12,\ 2|24$

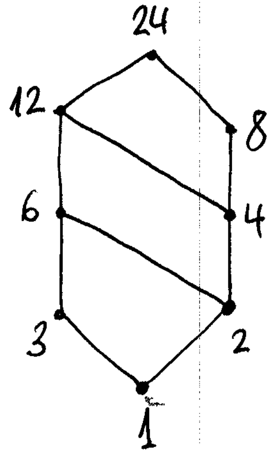
$3|6,\ 3|12,\ 3|24$

$4|8,\ 4|12,\ 4|24$

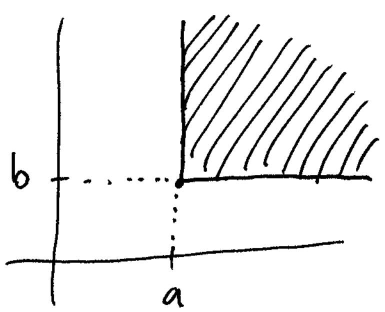
$6|12,\ 6|24$

$8|24,\ 12|24$

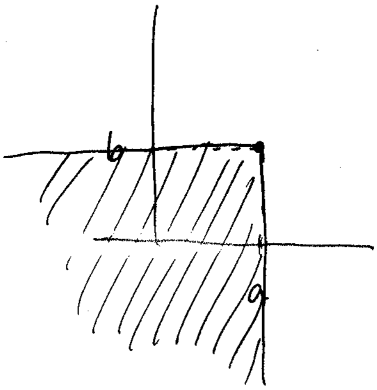
Si representamos la relación mediante un grafo dirigido y extraemos el diagrama de Hasse, se obtiene



(b) Dado un punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, el conjunto de los puntos de $\mathbb{R}^2$ que son mayores que él por el orden que hemos definido es el cuadrante positivo con origen en el punto (a,b). De forma similar, el conjunto de los puntos que son menores que (a,b) es el cuadrante negativo:

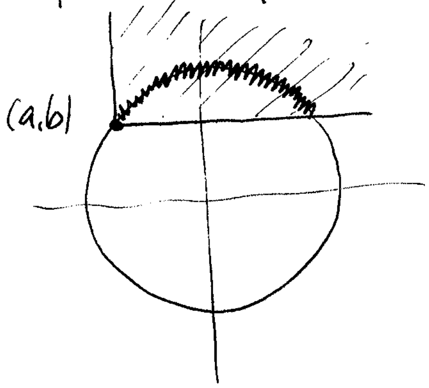


3 PUNTOS MAYORES QUE (a,b)

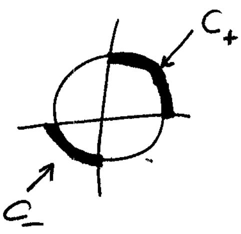


PUNTOS <u>MENORES</u> QUE (a,b)

El conjunto G es la circunferencia unidad del plano $\mathbb{R}^2$. Sus elementos maximales serán aquellos puntos de la circunferencia tales que el cuadrante positivo con origen en ellos no contiene a ningún otro punto de la circunferencia. Por ejemplo, el punto (a,b) de la figura siguiente NO es maximal, ya que todos los puntos marcados con "mmmmm" son mayores que él.



Los únicos puntos que cumplen esa propiedad son los puntos de G con ambas coordenadas no negativas. Los elementos maximales de G son los puntos de

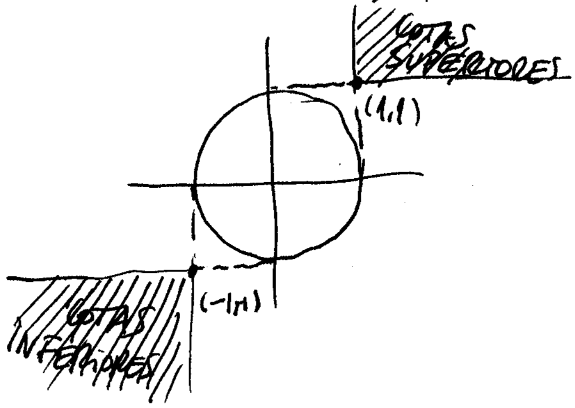


$$C_+ = \{(x,y)\in G : x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Del mismo modo, los elementos minimales son los de C_-

$$C_- = \{(x,y)\in G : x \leq 0,\ y \leq 0\}$$

Las cotas superiores deben ser puntos (c,d) con $c \geq a,\ d \geq b\ \forall (a,b)\in G$. El valor máximo tanto de la primera coordenada como de la segunda coordenada de cualquier punto de G es 1. Por tanto, cualquier (c,d) con $c \geq 1,\ d \geq 1$ es una cota superior. Del mismo modo, cualquier (c,d) con $c \leq -1,\ d \leq -1$ es una cota inferior de G.



En resumen:

COTAS SUPERIORES: cualquier $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ con $c \geq 1$, $d \geq 1$

" INFERIORES: cualquier $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ con $c \leq -1$, $d \leq -1$

Claramente, $(1,1)$ es la menor de las cotas superiores en el orden "<", luego

$$\sup C = (1,1).$$

Del mismo modo, el ínfimo de C es

$$\inf C = (-1,-1)$$

(c)

$xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Veamos que es relación de equivalencia.

R ES REFLEXIVA: $\forall x \in \mathbb{Z}$ se tiene que $x^2 - x^2 = 0 = x - x \Rightarrow xRx$

R " SIMÉTRICA: Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ con $xRy \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y$. Cambiando todo de signo obtenemos $y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow yRx$.

R " TRANSITIVA: Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$ con xRy, $yRz \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x - y \\ y^2 - z^2 = y - z \end{cases}$ sumando:

$$x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow xRz.$$

Por último, sean $x, y \in \mathbb{Z}$ con xRy. Entonces,

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = x - y$. Caben dos posibilidades $\begin{cases} x - y = 0 \Rightarrow \boxed{x = y} \\ x - y \neq 0 \end{cases}$

Si $x - y \neq 0$, dividimos por ello y obtenemos $x + y = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - x}$.

Por tanto,

$$[x] = \{x, 1-x\} \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

4

a) PASO BASE: $n=2 \rightarrow 2^{2^2} = 2^4 = 16 = 6 + 1\cdot 10 \Rightarrow 2^{2^2} \equiv 6 \pmod{10}$

PASO INDUCTIVO: hipótesis: $2^{2^n} \equiv 6 \pmod{10}$

$(n+1): \quad 2^{2^{n+1}} = 2^{2^n \cdot 2} = (2^{2^n})(2^{2^n}) \equiv 6 \cdot 6 \pmod{10}$

$\left[\begin{array}{l} a \equiv b \pmod m \\ c \equiv d \pmod m \end{array} \rightarrow ac \equiv bd \pmod m \right]$

$2^{2^{n+1}} = 36 + \lambda \cdot 10 = 6 + (\lambda+3)10 \Rightarrow \underline{\underline{2^{2^{n+1}} \equiv 6 \pmod{10}}}$

demostrado

b) Pasemoslo a un sistema en el que se puede aplicar directamente el Teorema del resto chino:

$3\cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$

- $x \equiv 2 \pmod 3$ BIEN
- $3x \equiv 4 \pmod 5 \longrightarrow$ multi. por el inv. de 3 mod 5 $= 2$; $3\cdot 2\, x \equiv 8 \pmod 5$ $\longrightarrow x \equiv 8 \pmod 5$ $\rightarrow x \equiv 3 \pmod 5$

$\hookrightarrow 3x' \equiv 1 \pmod 5 \rightarrow 3\cdot(2) = 1 + \cancel{\lambda}\cdot 5$

$3(2+\lambda 5) = 1 + (1+3\lambda)\cdot 5$

$3(2+\lambda 5) \equiv 1 \pmod 5 \rightarrow x' = 2 + \lambda 5 \rightarrow$

$x' \equiv 2 \pmod 5$; $x = 4x' \Rightarrow x \equiv 8 \pmod 5 \Rightarrow x' = 2 \bmod 5$

$\llcorner 8 = 3 + 5\cdot 1$

$x \equiv 3 \pmod 5$

- $5x \equiv 6 \pmod 7$

$\hookrightarrow 5x' \equiv 1 \pmod 7 \longrightarrow 5\cdot 3 = 1 + 2\cdot 7$

$5(3+\lambda 7) = 1 + (2+\cancel{5\lambda})7$

$x' \equiv 3 \pmod 7$; $x = 6x' \Rightarrow x \equiv 18 \pmod 7 \Rightarrow$

$\llcorner 18 = 4 + 2\cdot 7$

$x \equiv 4 \pmod 7$

El sistema es equivalente a:

$x \equiv 2 \pmod 3$

$x \equiv 3 \pmod 5$

$x \equiv 4 \pmod 7$

3, 5 y 7 son primos relativos, por lo que se puede aplicar el Teorema del resto chino, para encontrar la única solución $x < 3\cdot 5\cdot 7 = 105$

$a_1 = 2 \quad m_1 = 3 \quad M_1 = 5\cdot 7 = 35 \quad y_1 = ?$ 2

$a_2 = 3 \quad m_2 = 5 \quad M_2 = 3\cdot 7 = 21 \quad y_2 = ?$ 1

$a_3 = 4 \quad m_3 = 7 \quad M_3 = 3\cdot 5 = 15 \quad y_3 = ?$ 1

- y_1: $35 y_1 \equiv 1 \pmod 3$: $35 = 3\cdot 11 + 2$

$3 = 2\cdot 1 + 1 \rightarrow 1 = 3 - (35 - 11\cdot 3) \Rightarrow$

$\cancel{1 = 12\cdot 3 + (-1)\cdot 35}$

$\Rightarrow 1 = 12\cdot 3 + (-1)\cdot 35$

$(-1)\cdot 35 = 1 + (-12)\cdot 3$

$3\cdot 35 = 35\cdot 3$

$\underline{2}\cdot 35 = 1 + 23\cdot 3$

- $21\cdot y_2 = 1 \pmod 5$

$\underline{\underline{21\cdot 1}} = 1 + 4\cdot 5$

- $15\cdot y_3 = 1 \pmod 7$

$15\cdot 1 = 1 + 2\cdot 7$

La solución es: $35\cdot \mathbf{2}\cdot 2 + 21\cdot \mathbf{3}\cdot 1 + 15\cdot \mathbf{4}\cdot 1 =$
$= 263$; $263 \bmod 105 = 53$.

SOLUCIÓN: $53 + \lambda 105$

Matem. discreta. 6.09.2003.

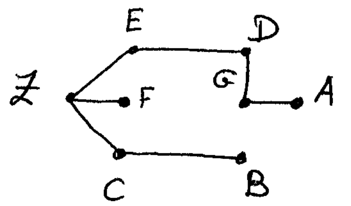
Problema 4.

a1) Un grafo completo K_n (n - numero de vertices) tiene $C\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$ ($n \geq 3$.) ciclos de longitud tres.

a.2) Cada arista de K_n pertenece a $(n-2)$ triangulos
(Fijamos una arista, ó dos vertices, y tenemos $(n-2)$ vertices restantes para formar un triangulo).

b) Utilizando el algoritmo de Dijkstra obtendremos el arbol de caminos minimos:

vertice	Z	E	F	C	D	G	B	A	vertice añadido	arista añadida
	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	Z	
		3	2	1*	∞	∞	∞	∞	C	ZC
		3	2*		∞	∞	6	∞	F	ZF
		3*			∞	∞	6	∞	E	ZE
					5*	∞	6	∞	D	ED
						6*	6	∞	G	DG
							6*	8	B	CB
								8*	A	GA



El camino de longitud minima de Z a A : (Z,E), (E,D), (D,G), (G,A).
Longitud : 8
(Existen otros 2 caminos de longitud 8 de Z a A).