Universidad Carlos III de Madrid

MATEMATICA DISCRETA

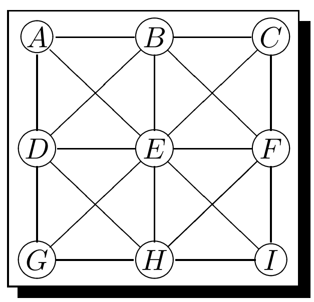
Tercer control: 9 de mayo de 2012

Apellidos		Hora	
Nombre		Grupo	88

Normas generales:

- No se pueden usar calculadoras, móviles ni cualquier otro dispositivo electrónico.
- Hay que justificar todas las respuestas.
- No se puede abandonar el aula en los 15 primeros minutos del examen.
- El examen tiene un peso del 20% en la evalución contínua.

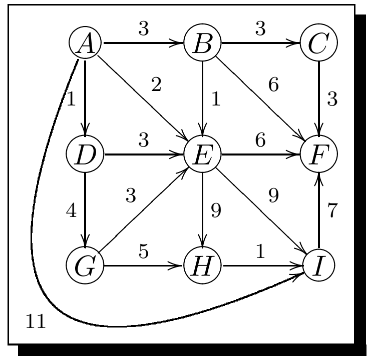
Pregunta 1 (0.4 puntos) Sea el siguiente grafo simple.



Responder justificando con rigor cada una de estas preguntas:

- ¿Es Euleriano? ¿Es semieuleriano?
- ¿Es hamiltoniano? ¿Es semihamiltoniano?
- ¿Es completo?¿Es regular?¿Es bipartito?
- Escribe su matriz de adyacencia.
- ¿Es plano? En caso de que lo sea, ¿cuál es su dual?

Pregunta 2 (1 punto) Sea el siguiente grafo ponderado y dirigido.



- Calcular el camino de peso mínimo entre A e I aplicando rigurosamente el algoritmo de Djikstra.

- Considera el grafo ponderado no dirigido asociado al anterior grafo. Encuentra un árbol recubridor de peso mínimo haciendo uso del algoritmo de Kruskal.

- Consideremos los algoritmos de Prim y Kruskal para cualquier grafo en general, ¿han de dar siempre el mismo árbol? ¿Por qué?

Pregunta 3 (0.6 puntos) Sea el conjunto $\mathcal{G}_n$ la familia compuesta por las matrices de adyacencia de todos los grafos simples de n vértices. Si M es un elemento $\mathcal{G}_n$, designamos a su grafo asociado por G_M.

- Calcula el cardinal de $\mathcal{G}_n$.

- Sea $M \in \mathcal{G}_n$. ¿Puede ser la suma de todos los elementos de M impar? En términos de grafos, ¿qué importante teorema no se cumpliría si la suma fuera impar?¿Por qué?

- Sobre el conjunto $\mathcal{G}_n$ definimos la siguiente relación de equivalencia $\mathcal{R}$: sean A, $B \in \mathcal{G}_n$, entonces

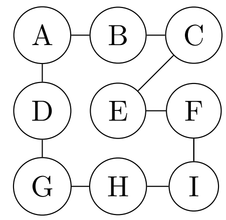
  $$A\,\mathcal{R}\,B \Leftrightarrow \text{sus grafos asociados}\, G_A \text{ y } G_B \text{ tienen el mismo número de aristas.}$$

  Encontrar las clases de equivalencia definidas por $\mathcal{R}$, el conjunto cociente $C = \mathcal{G}_n/\mathcal{R}$ y el cardinal de C.

- Sea una matriz de $\mathcal{G}_{41}$ que representa un grafo con 40 aristas. ¿De cuántos árboles y bosques está compuesto dicho grafo?

SOLUCIONES:

1. - Al no tener todos los vértices de grado par no es euleriano. Al no tener exactamente dos vértices de grado impar no es semieuleriano.
   - Es hamiltoniano:

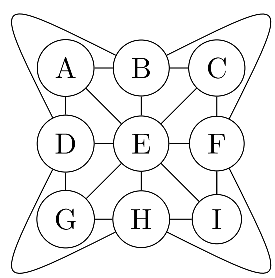


   Como es hamiltoniano por definición no es semihamiltoniano.

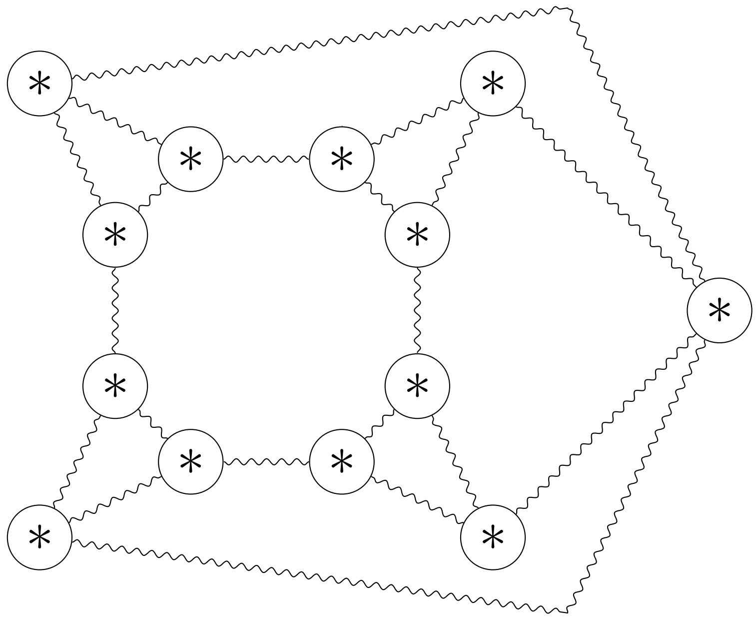
   - No es completo ya que si lo fuera todos los vértices estarían conectados entre ellos. Por ejemplo, el vértice A no está conectado con el vértice F.
   No es regular ya que no todos los vértices tienen el mismo grado. Por ejemplo, el vértice A tiene grado 3 mientras que el vértice B tiene grado 5.
   No es bipartito ya que contiene ciclos impares. Por ejemplo el grafo contiene el ciclo $C_3 = (\, V = \{\, A, B, D \,\}, E = \{\, \{A, B\}, \{B, D\}, \{D, A\} \,\}\,)$.
   - Teniendo en cuenta la ordenación de los vértices como $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, entonces la matriz de adyacencia es

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

   - El grafo es plano:



   Su correspondiente dual:

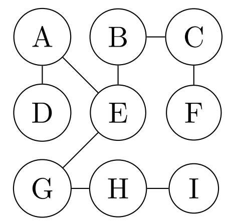


2. • En la Tabla 1 aparecen los pasos para calcular el camino mínimo entre los nodos A e I mediante el algoritmo de Djikstra. Se observa que hay tres caminos mínimos de peso 11. Uno pasa por los vértices A, E, I, otro por los vértices A, D, G, H, I y un último directamente por A, I.

	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5	Paso 6	Paso 7	Paso 8	Paso 9
A	$\boxed{(0,\mathrm{A})}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
B	$(3, A)$	$(3, A)$	$(3, A)$	$\boxed{(3,\mathrm{A})}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
C	∞	∞	∞	$(6, B)$	$(6, B)$	$\boxed{(6,\mathrm{B})}$	$\star$	$\star$	$\star$
D	$(1, A)$	$\boxed{(1,\mathrm{A})}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
E	$(2, A)$	$(2, A)$	$\boxed{(2,\mathrm{A})}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
F	∞	∞	$(8, E)$	$(8, E)$	$(8, E)$	$(8, E)$	$\boxed{(8,\mathrm{E})}$	$\star$	$\star$
G	∞	$(5, D)$	$(5, D)$	$(5, D)$	$\boxed{(5,\mathrm{D})}$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
H	∞	∞	$(11, E)$	$(11, E)$	$(10, G)$	$(10, G)$	$(10, G)$	$\boxed{(10,\mathrm{G})}$	$\star$
I	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$(11, A)$	$\boxed{(11,\mathrm{A\ ó\ E\ ó\ H})}$

Table 1: Cálculo del camino mínimo entre A e I mediante el algoritmo de Dkijstra.

- Por el algoritmo de Kruskal se obtiene el siguiente árbol recubridor mínimo:



La secuencia de las aristas ha sido la siguiente: $\{A, D\}, \{B, E\}, \{H, I\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{C, F\}$, $\{G, E\}, \{E, G\}$. El peso total es de 19.

- Dado un grafo G. Si el árbol recubridor de peso mínimo de G es único, entonces los algoritmos de Prim y Kruskal dan obviamente el mismo resultado. En cambio, si existe más de un árbol recubridor de peso mínimo de G los algoritmos de Prim y Kruskal no tienen por que dar el mismo árbol recubridor de peso mínimo.

3.
- Se puede deducir que las matrices del conjunto $\mathcal{G}_n$ son de tamaño $n \times n$, simétricas, donde los elementos son o 0's o 1's y con la diagonal de ceros. Entonces para calcular el cardinal de $\mathcal{G}_n$ bastará con fijarnos en la parte triangular superior de las matrices. En la fila superior habrá 2^{n-1} posibilidades de escribir 0's y 1's, en la fila inmediatamente de abajo habrá 2^{n-2} posibilidades de escribir 0's y 1's y así hasta la fila de más abajo de la parte triangular superior que tendrá 2^1 posibilidades. Entonces

$$|\mathcal{G}_n| = 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \ ... \ \cdot 2 = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

Otra manera de calcular el cardinal es considerando los grafos que representan las matrices y preguntarse de cuantas maneras se pueden combinar las diferentes aristas. Un grafo simple de n vértices puede tener a lo sumo $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas (las mismas que K_n). Entonces

$$|\mathcal{G}_n| = \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{0} + \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{1} + \ ... \ + \binom{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} .$$

- $M \in \mathcal{G}_n$ no puede tener la suma impar de sus elementos, ya que es simétrica y con la diagonal de ceros. En términos de grafos, la suma de los grados de todos los vértices de un grafo G es dos veces el número de aristas. Si esa suma fuera impar obtendríamos pues un número no entero de aristas.

- Habrán tantas clases de equivalencia como aristas puede tener un grafo simple. Un grafo simple de n vértices puede tener a lo sumo las mismas aristas que K_n, esto es $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

$$C = \mathcal{G}_n/\mathcal{R} = \left\{ [0\,\text{aristas}]_{\mathcal{R}}, [1\,\text{arista}]_{\mathcal{R}}, [2\,\text{aristas}]_{\mathcal{R}}, \dots, \left[\frac{n(n-1)}{2}\,\text{aristas}\right]_{\mathcal{R}} \right\}$$

$$|\mathcal{G}_n/\mathcal{R}| = \frac{n(n-1)}{2} + 1$$

- Si el grafo que representa $\mathcal{G}_{41}$ es conexo, dicho grafo estará formado por un único árbol, ya que en un árbol se tiene que el número de aristas es igual al número de vértices menos uno.