PRIMERA PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA

Grupo 50. CURSO 2013/2014

1. La mitad de un anillo de alambre de radio r tiene resistencia R_1 y la otra mitad R_2. El anillo se encuentra en un campo magnético cuyo inducción es perpendicular al plano del anillo, y varía con el tiempo según la ley $B = B_o + kt$ donde B_o y k son constantes. Determine:

a) La fuerza electromotriz inducida en el anillo. **(2 puntos)**
b) La intensidad de corriente que circula a través de mismo. **(2 puntos)**
c) La relación entre la resistencias para que la potencia disipada en una de ellas sea máxima. **(1 puntos)**

Solución:

a) El flujo que atraviesa el anillo vendrá dado por:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \left(B_o + kt\right)\pi r^2$$

Aplicando la ley de Neumann (o ley de Faraday), la fem inducida la obtendremos como

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -k\pi r^2$$

b) Las dos mitades del anillo se comportan como dos resistencias asociadas en serie de resistencia equivalente

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

de forma que la intensidad de la corriente que circula por ellas se obtendrá aplicando la ley de Ohm

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R_{eq}} = \frac{\pi r^2 k}{R_1 + R_2}$$

c) Consideremos la potencia disipada en R_1

$$P = I^2 R_1 = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$

Para calcular la resistencia R_1 para la cual la potencia disipada en ella misma es máxima, hallamos la derivada

$$\frac{dP}{dR_1} = \frac{\varepsilon^2 \left[(R_1 + R_2)^2 - 2R_1 (R_1 + R_2) \right]}{(R_1 + R_2)^4} = \frac{(R_2 - R_1)}{(R_1 + R_2)^3} \varepsilon^2$$

Haciendo

$$\frac{dP}{dR_1} = 0 \Rightarrow R_1 = R_2$$

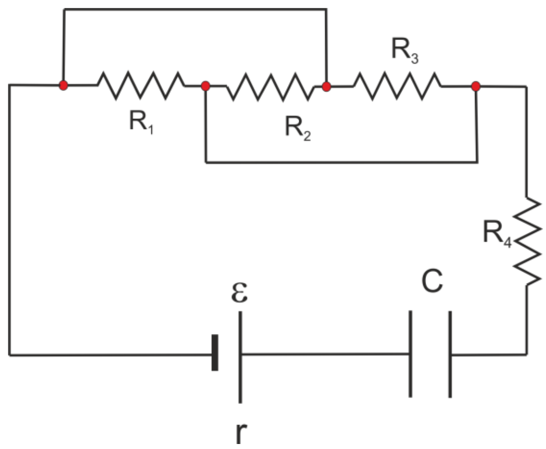
2. Sea el circuito de la figura en el que inicialmente el condensador se encuentra descargado. Determine:

a) La carga del condensador cuando ha transcurrido un tiempo igual a un tercio de la constante de tiempo del circuito. **(2 puntos)**

b) La intensidad de corriente que atraviesa la resistencia R_4 para un instante igual a diez constantes de tiempo. **(2 puntos)**

c) La tensión que en el instante de tiempo del apartado anterior se tiene en los bornes del condensador. **(1 puntos)**

Datos numéricos: $\varepsilon = 12 \text{ V}$; $r = 0,2 \ \Omega$; $C = 1,5 \ \mu\text{F}$; $R_1 = R_2 = 2 \ \Omega$; $R_3 = 4 \ \Omega$; $R_4 = 5 \ \Omega$;



Solución:

a) Puesto que se trata RC la expresión de la carga en el condensador en función del tiempo

$$Q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Sustituyendo

$$Q = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\ 12\mathrm{V}\ \left(1 - e^{-3\tau/\tau}\right) = 5{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}$$

Habrá que calcular la resistencia equivalente

$$R_{eq} = r + R_4 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = 0{,}2\ \Omega + 5\ \Omega + \left(\frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{4\ \Omega}\right)^{-1} = 6\ \Omega$$

b) Luego la intensidad de la corriente que circula por

$$i = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} e^{-t/\tau} = \frac{12\ \mathrm{V}}{6\ \Omega} e^{-10\tau/\tau} = 9{,}08 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

También se podría haber razonado que para un tiempo de $10\tau > 5\tau$ el circuito alcanza el régimen estacionario, de forma que $i \approx 0\mathrm{A}$.

c) La tensión en los bornes del condensador resultará

$$V_c = \varepsilon - i\ R_{eq} = 12\ \mathrm{V}\text{-}9{,}08 \cdot 10^{-5}\mathrm{A}\ 6\ \Omega = 11{,}99\ \mathrm{V}$$

También sería válido argumentar que para $t = 10\tau \quad i \approx 0\ \mathrm{A}$, luego $V_c \approx \varepsilon \cong 12\ \mathrm{V}$.