MATEMATICA DISCRETA

Segundo control: 20 de abril de 2012

Apellidos		Hora	
Nombre		Grupo	82

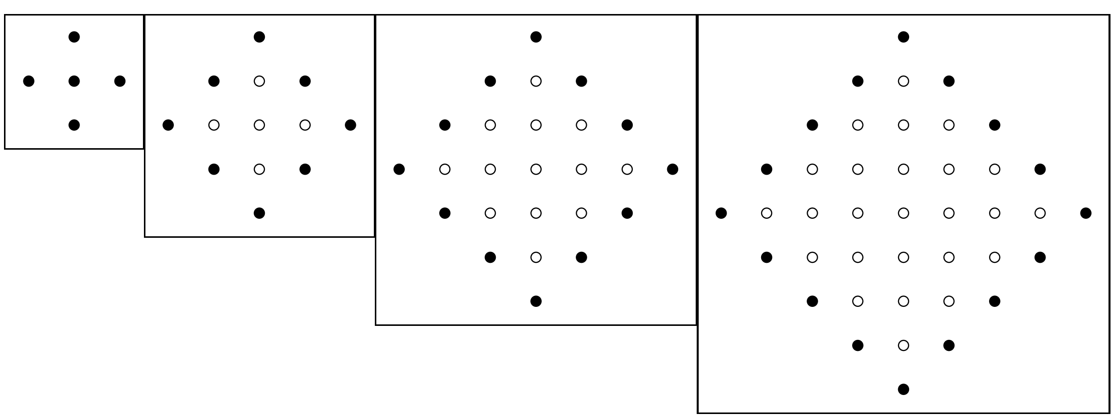
Normas generales:

- No se pueden usar calculadoras, móviles ni cualquier otro dispositivo electrónico.
- Hay que justificar todas las respuestas.
- No se puede abandonar el aula en los 15 primeros minutos del examen.
- El examen tiene un peso del 20% en la evalución contínua.

Pregunta 1 (0.6 puntos) Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y se considera $A_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, A\} \subset \mathcal{P}(A)$ en el que se define la relación de la inclusión, esto es $\forall\, \alpha, \beta \in A_1$, $\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$.

- ¿Es una relación de orden? Dibuja el diagrama de Hasse correspondiente. ¿Es retículo? ¿Es un álgebra de Boole?
- Considera ahora el conjunto $A_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, d\}, A\} \subset \mathcal{P}(A)$. ¿Es retículo? ¿Es un álgebra de Boole? Si consideramos $A_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, d\}\} \subset \mathcal{P}(A)$. ¿Es retículo? ¿Es un álgebra de Boole? En el caso de que lo sea, justifica si existe o no una subálgebra de Boole no trivial de A_3.

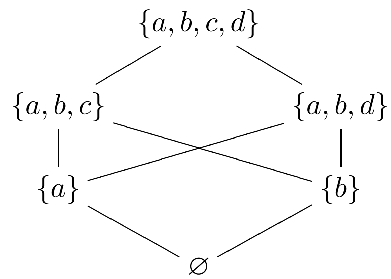
Pregunta 2 (0.8 puntos) El siguiente esquema muestra 4 pasos de una generación de puntos. En negro aparecen los puntos creados en el paso actual. Sea a_n el número de puntos que habrá en total en el paso n.
Deduce la relación de recurrencia y resuélvela sin utilizar funciones generatrices.



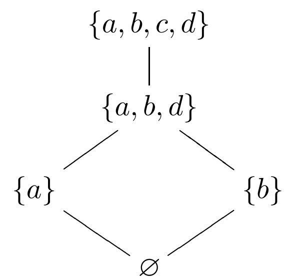
Pregunta 3 (0.6 puntos) Resolver la siguiente relación de recurrencia mediante funciones generatrices:

$$22a_{n+1} - 19a_n + 4a_{n-1} = 0\,, \quad a_0 = 44\,, \quad a_1 = 38\,.$$

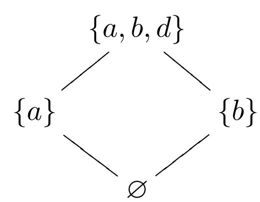
SOLUCIONES:

1. 

   no es retículo ya que ni $sup(\{a\},\{b\})$ ni el $inf(\{a,b,c\},\{a,b,d\})$ son únicos. Por lo tanto no es álgebra de Boole.

   es retículo pero no es álgebra de Boole ya que por ejemplo no es complementado.

   es retículo pero no es álgebra de Boole ya que por ejemplo tampoco es complementado.

2. Una relación de recurrencia para calcular el número de puntos generados en el paso n es

$$a_n = a_{n-1} + 4n\,, \quad n \geq 2\,, a_1 = 5\,.$$

   Es una relación lineal no homogénea, y su solución es $a_n = 2n(n+1)+1$.

3. La solución a la relación de recurrencia es

$$a_n = \frac{484}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{352}{3}\left(\frac{4}{11}\right)^n\,,$$

   donde en el proceso para obtener la solución se ha tenido en cuenta la factorización $4x^2 - 19x + 22 = 4(x-2)(x-11/4)$.