Clave 1311: 0'30 €

INGENIERÍA INFORMÁTICA

EXAMEN DE MATEMÁTICA DISCRETA

27 de junio de 2002

Problema 1 (2.5 puntos) Se fijan diez puntos en el plano de forma que no haya tres de ellos alineados. Se pide establecer:

a.) cuántos segmentos distintos se pueden trazar uniendo dos de esos 10 puntos;

b.) de cuántas formas se puede elegir entre esos segmentos un recorrido dirigido de longitud dos que pase por tres puntos distintos;

c.) cuántos triángulos distintos se pueden construir con los segmentos del apartado **a.)**;

d.) de cuántas formas se pueden elegir cuatro de los segmentos del apartado **a.)**;

e.) si se eligen cuatro segmentos al azar, qué probabilidad hay de que tres de ellos formen un triángulo (la probabilidad se define como el cociente entre el número de elecciones favorables y el número total de elecciones posibles).

Problema 2 (2.5 puntos) Se consideran las dos relaciones binarias siguientes en el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de los números naturales:

$$a \, R_1 \, b \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = b^n$$

$$a \, R_2 \, b \iff \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } a = b^n.$$

a.) Demostrar que R_1 es una relación de orden. ¿Lo es también R_2? ¿Es R_1 un orden total?

b.) Hallar, justificando la respuesta, el diagrama de Hasse de cada una de las dos relaciones sobre el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \, : \, 1 \leq n \leq 9\}.$$

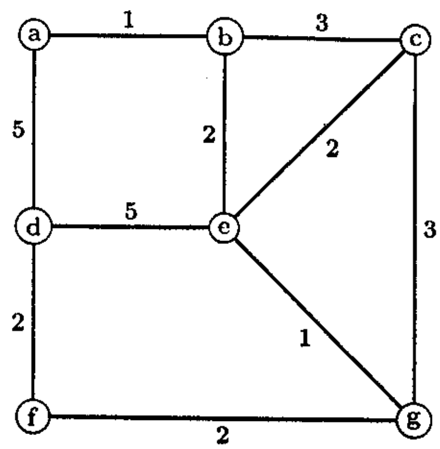
c.) Hallar, para cada una de las dos relaciones, los elementos maximales y minimales de A, sus cotas superiores e inferiores en $\mathbb{N}$, así como el supremo y el ínfimo de A, caso de que existan.

Problema 3 (2.5 puntos) Hallar la menor solución entera y positiva $x \in \mathbb{N}$ del sistema de ecuaciones modulares

$$\begin{cases} 3x - 5 \equiv 4 \pmod{7} \\ 2x - 4 \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

(Continúa detrás)

Problema 4 (2.5 puntos) Se considera el siguiente grafo ponderado **G**:



a.) Encontrar un árbol recubridor mínimo de **G**.

Sea **H** el grafo simple resultante de eliminar los pesos de **G**.

b.) Estudiar si **H** es o no bipartito, y en caso afirmativo dar dos conjuntos de nodos o vértices que lo demuestren.

c.) Estudiar la existencia de circuitos o recorridos eulerianos y de ciclos o caminos hamiltonianos en el grafo **H**.

d.) Encontrar un grafo con la misma secuencia de grados que **H**, pero que **<u>no</u>** sea isomorfo a **H**, y explicar por qué no es isomorfo.

Se fijan diez puntos en el plano de forma que no haya tres de ellos alineados. Se pide establecer:

a.) cuántos segmentos distintos se pueden trazar uniendo dos de esos 10 puntos;

b.) de cuántas formas se puede elegir entre esos segmentos un recorrido dirigido de longitud dos que pase por tres puntos distintos;

c.) cuántos triángulos distintos se pueden construir con los segmentos del apartado **a.**);

d.) de cuántas formas se pueden elegir cuatro de los segmentos del apartado **a.**);

e.) si se eligen cuatro segmentos al azar, qué probabilidad hay de que tres de ellos formen un triángulo (la probabilidad se define como el cociente entre el número de elecciones favorables y el número total de elecciones posibles).

Solución

a.)

$$\text{número segmentos} = \binom{10}{2} = 45$$

b.)

Podemos elegir de forma única un recorrido de longitud dos fijando: el nodo inicial, el intermedio y el final. Hay entonces $10 \times 9 \times 8 = 720$ posibles caminos.

c.)

Se pueden construir:

$$\binom{10}{3} = 120 \text{ triangulos}$$

d.)

Hay

$$\binom{45}{4} = 148995 \text{ formas de elegir 4 segmentos}$$

e.)

El número de formas de elegir cuatro segmentos que incluyan un triangulo es

$$\binom{10}{3} \cdot 42 = 5040$$

Primero elegimos tres puntos que forman un triangulo, y luego elegimos el restante punto. La probabilidad de elegir al azar una combinación de 4 puntos que incluye la presencia de un triangulo es:

$$\frac{5040}{148995} \approx 3{,}38\,\%$$

PROBLEMA 2

$$a\, R_1\, b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a = b^n$$

$$a\, R_2\, b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } a = b^n$$

a.) R_1 es relación de orden

<u>REFLEXIVA</u>: Para cualquier $a \in \mathbb{N}$ $\exists\, 1 \in \mathbb{N}$ tal que $a = a^1$

<u>ANTISIMÉTRICA</u>: Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $a R_1 b$, $b R_1 a$.

Entonces $\left.\begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } a = b^n \\ \exists p \in \mathbb{N} \text{ con } b = a^p \end{array}\right\} \Rightarrow a = (a^p)^n = a^{pn} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^{pn-1} = 1 \Leftrightarrow pn = 1 \Leftrightarrow p = n = 1 \Leftrightarrow b = a$$

<u>TRANSITIVA</u>: Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left.\begin{array}{l} a R_1 b \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } a = b^n \\ b R_1 c \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N} \text{ con } b = c^p \end{array}\right\} \Rightarrow a = (c^p)^n = c^{pn} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a R_1 c.$$

También R_2 es de orden, ya que el rango de los exponentes no afecta a la demostración anterior.

Ninguna de las dos relaciones es un orden total. Por ejemplo, los números $2, 3 \in \mathbb{N}$ son tales que

$$2 \not R_i 3, \quad 3 \not R_i 2, \quad i = 1, 2.$$

2.2

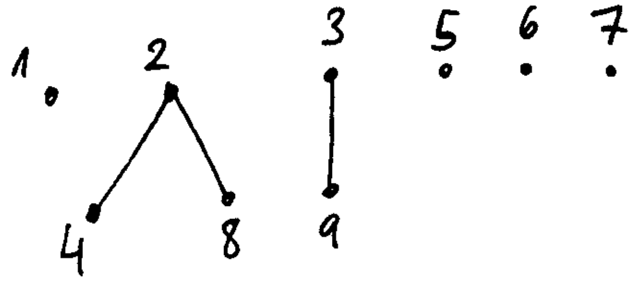
b.) Cuando nos restringimos al conjunto A, los únicos pares de R_1, aparte de los de la forma (n,n), son

$(4,2) \Leftrightarrow 4=2^2$;

$(8,2) \Leftrightarrow 8=2^3$;

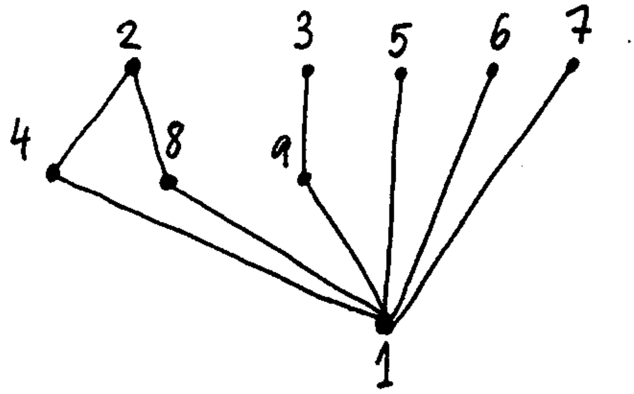
$(9,3) \Leftrightarrow 9=3^2$.

Por tanto, el diagrama de Hasse de R_1 sobre A es



En cuanto a R_2, contiene todos los pares de R_1, además de todos los pares $(1,n)$, $n=2,\dots,9$, ya que $1=n^0$.

Por tanto, el diagrama de Hasse de R_2 sobre A es



c) A la vista del diagrama de Hasse de R_1:

ELEMENTOS MAXIMALES: 1, 2, 3, 5, 6, 7

ELEMENTOS MINIMALES: 4, 8, 9

COTAS SUPERIORES: NO HAY, ya que ninguno de los elementos maximales es potencia de un natural.

COTAS INFERIORES: NO HAY, ya que deberían ser al mismo tiempo una potencia de 5 y una potencia de 7, por ejemplo. Eso es imposible, ya que la factorización en producto de primos es única.

Al no haber cotas superiores ni inferiores, tampoco hay ni supremo ni ínfimo.

En cuanto al diagrama de R_2:

ELEMENTOS MAXIMALES: 2, 3, 5, 6, 7

ELEMENTOS MINIMALES: 1

COTAS SUPERIORES: NO HAY, por la misma razón que arriba

COTAS INFERIORES: 1

SUPREMO: NO HAY, por no haber cotas superiores

ÍNFIMO: 1

PROBLEMA 3

$$\begin{cases} 3x-5 \equiv 4 \pmod 7 \\ 2x-4 \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a simplificar las ecuaciones hasta llevarlas a una forma $x \equiv a_i \pmod{m_i}$

$$3x-5 \equiv 4 \pmod 7 \Leftrightarrow 3x \equiv 9 \pmod 7 \Leftrightarrow \boxed{3x \equiv 2 \pmod 7}$$

$$2x-4 \equiv 3 \pmod{11} \Leftrightarrow \boxed{2x \equiv 7 \pmod{11}}$$

Ya sólo queda despejar la variable x. Para ello necesitamos

(*) un inverso de 3 módulo 7:

$7 = 2\cdot 3+1 \Leftrightarrow 1 = 7 - 2\cdot 3$, es decir que -2 es un inverso de 3 módulo 7. Si lo es -2, también lo es $-2+7=5$

Por tanto, si multiplicamos la ecuación (mod 7) por 5, obtenemos

$$x \equiv 2\cdot 5 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 10 \pmod 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x \equiv 3 \pmod 7}$$

(**) un inverso de 2 módulo 11:

$11 = 2\cdot 5+1 \Leftrightarrow 1 = 11-5\cdot 2$, es decir que -5 es un posible inverso. Para usar números positivos depuramos $-5+11=6$, y multiplicamos la segunda ecuación por 6:

$$x \equiv 7\cdot 6 \pmod{11} \Leftrightarrow x \equiv 42 \pmod{11} \Leftrightarrow \boxed{x \equiv 9 \pmod{11}}$$

Hemos llegado al sistema

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 9 \pmod{11} \end{cases}$$

Este sistema se puede resolver por simple inspección: las soluciones enteras positivas de cada una de las ecuaciones son

$x \equiv 3 \pmod 7 \iff x = \ldots, 3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, \ldots$

$x \equiv 9 \pmod{11} \iff x = \ldots, 9, 20, 31, 42, 53, \ldots$

El primer número que aparece en las dos listas es la solución $\boxed{x = 31}$

También puede resolverse el sistema usando el Teorema chino de los restos: si llamamos $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, como 7 y 11 son primos relativos, sabemos que una de las infinitas soluciones del sistema es de la forma $a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2$ siendo $M_1 = 11$, $M_2 = 7$, y_1 un inverso de 11 módulo 7 e y_2 un inverso de 7 módulo 11. Además, la solución es única módulo $7 \cdot 11 = 77$

$$\begin{aligned} 11 &= 1 \cdot 7 + 4 \\ 7 &= 1 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 1 = 4 - 3 \end{aligned}$$

$$1 = 4 - (7 - 4) = 2 \cdot 4 - 7 \qquad \boxed{1 = 2 \cdot (11 - 7) - 7 = 2 \cdot 11 - 3 \cdot 7}$$

$$3 = 3 \cdot 1$$

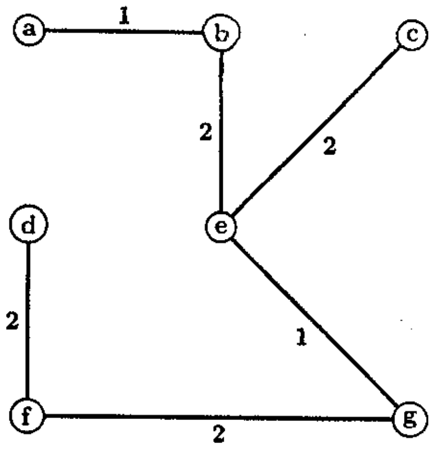
Por tanto, $y_1 = 2$, $y_2 = -3 \Rightarrow x = 3 \cdot 11 \cdot 2 + 9 \cdot 7 \cdot (-3) = 66 - 189 = -123$

Como buscamos solución positiva, hallamos el menor $k \in \mathbb{N}$ tal que

$-123 + k \cdot 77 > 0 \iff k = 2$; $-123 + 2 \cdot 77 = -123 + 154 \boxed{= 31}$

SOLUCIÓN AL PROBLEMA 4:

(a) Encontrar un árbol recubridor mínimo de **G**.



(b) Estudiar si **H** puede ser bipartito y en caso afirmativo dar dos conjuntos de nodos que lo demuestren.

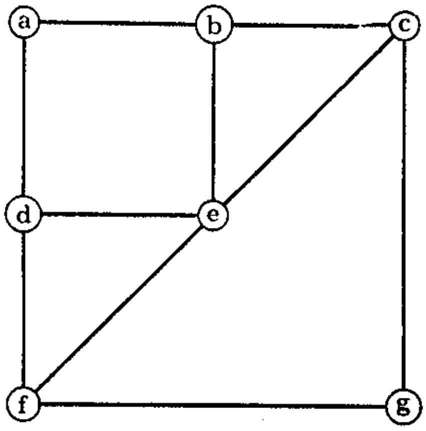
<u>No</u> puede ser bipartito al existir al menos un ciclo de longitud impar (por ejemplo bce).

(c) Estudiar la existencia de circuitos o recorridos eulerianos y de ciclos o caminos hamiltonianos en el grafo **H**.

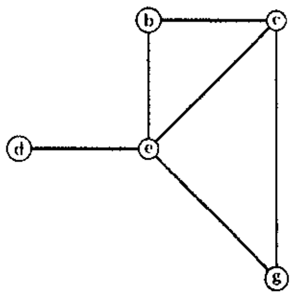
No pueden existir circuitos eulerianos al tener al menos un ciclo de longitud impar.
No pueden existir recorridos eulerianos al tener más de dos ciclos de longitud impar.
Es fácil encontrar ciclos hamiltonianos y por lo tanto también caminos hamiltonianos.
Por ejemplo:
ciclo hamiltoniano: a, b, c, e, g, f, d, a
camino hamiltoniano: a, b, c, g, f, d, e

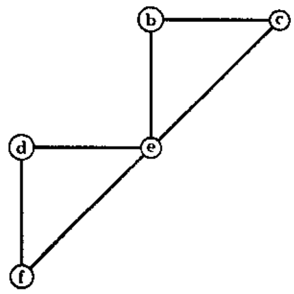
(d) Encontrar un grafo con la misma secuencia de grados que **H**, pero que <u>**no**</u> sea isomorfo a **H**.

La secuencia de grados es: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4.
Por ejemplo, un grafo con la misma secuencia pero no isomorfo a **H** sería:



Si tomamos los subgrafos inducidos por los nodos de grado 3 y 4 de **H** (izquierda) y del nuevo (derecha) tenemos:





Los cuales claramente no son isomorfos, ya que por ejemplo, el grafo de la izquierda tiene un nodo de grado 3 y el de la derecha ninguno.