北京师范大学 2020–2021 学年第二学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II 任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷 ■ 开卷 □ 其他 □

院 (系): ________ 专业: ________ 年级: ________

姓名: ________ 学号: ________

题号	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							

一、向量运算 (12 分)

1. (6 分) 已知三点 $M(1,1,1), A(2,2,1), B(2,1,2)$, 求角 $\angle AMB$.
2. (6 分) 已知三点 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积.

二、直线与平面 (21 分)

1. (7 分) 求过点 $(3,1,-2)$ 且通过直线 $\frac{x-4}{5}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面方程.
2. (7 分) 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离
3. (7 分) 求过点 $(-1,0,4)$, 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

三、曲线与曲面 (17 分)

1. (7 分) 将 xOy 坐标面上的曲线 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周, 求所生成的曲面的方程.
2. (10 分) 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围成的**立体**在三个坐标平面上的投影.

四、多元函数 (16 分)

1. (8 分) 求函数 $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的全微分.
2. (8 分) 设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$, 而 $z=x^2\sin y$, 求函数 $u(x,y)$ 的梯度.

五、极值 (10 分)

求平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点.

六、选做题 (24 分, **任选 2 题**.)

1. (12 分) 若函数 f 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,x/y)$, 求函数 $z(x,y)$ 的二阶偏导数 z_{xx}, z_{xy} 和 z_{yy}.

2. (12 分) 求由方程 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}$ 确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dz}{dx}$.

3. (12 分) 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线和法平面方程.

北京师范大学 2021–2022 学年第二学期期中考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II　任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分　考试时长: 100 分钟　考试类别: 闭卷 ■　开卷 □　其他 □

院 (系): ______　专业: ______　年级: ______

姓名: ______　学号: ______

题号	一	二	三	四	五	总 分
得分						

一、向量运算 (10 分)

1. (4 分) 求平行于向量 $\mathbf{a}=(6,7,-6)$ 的所有单位向量.

2. (6 分) 已知三点 $A(1,2,3), B(3,4,5), C(2,4,7)$, 求三角形 ABC 的面积.

二、空间解析几何 (20 分)

1. (10 分) 求直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 与直线 $\begin{cases} 2x+2y-z+23=0 \\ 3x+8y+z-18=0 \end{cases}$ 夹角的余弦.

2. (10 分) 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围成的**立体**在三个坐标平面上的投影.

三、多元函数微分法及其应用 (25 分)

1. (8 分) 设
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$
求 $f(x,y)$ 的全微分. (提示: 需要讨论其定义域.)

2. (8 分) 求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$ 处减小最快的方向, 并求沿该方向的方向导数.

3. (9 分) 利用拉格朗日乘子法求函数 $u=xyz$ 在附加条件
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}, \quad (x>0, y>0, z>0, a>0),$$
下的极值.

四、微分方程 (25 分)

1. (8 分) 一曲线通过点 $(2,3)$, 它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

2. (8 分) 求解微分方程: $y''+(y')^2=1,\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=0$.

3. (9 分) 求微分方程 $y''-y=e^x\cos 2x$ 的一个特解.

五、选做题 (20 分, **任选 2 题**.)

1. (10 分) 求过点 $(1,2,1)$ 且与两直线 $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ 平行的平面的方程.

2. (10 分) 设
$$\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2y), \end{cases}$$
其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$.

3. (10 分) 已知 $y_1(x)=e^{-x}$ 是齐次方程 $y''+2y'+y=0$ 的解, 求非齐次方程 $y''+2y'+y=\frac{1}{x}e^{-x}$ 的通解.

微积分 II 期中考试 A 卷

一、向量运算（12 分）

1.（6 分）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量, 且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

2.（6 分）$A(1,-1,2)$,$B(5,-6,2)$,$C(1,3,-1)$是三角形的三个顶点, 求边AC上的高.

二、直线与平面（21 分）

1.（7 分）求过点（0，2，4）且两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

2.（7 分）求点（1，2，3）到直线 $\begin{cases}3x+y-4=0\\2x+z-3=0\end{cases}$ 的距离.

3.（7 分）一直线通过点（2，6，3）与平面 α：$x-2y+3z-5=0$ 平行，且和直线 l_1: $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z-6}{2}$ 相交，求此直线方程.

三、曲线与曲面（17 分）

1.（10 分）求圆 $\begin{cases}(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100\\2x-2y-z+9=0\end{cases}$ 的圆心和半径.

2.（7 分）设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成. 求它在 xOy 平面上的投影.

四、多元函数（16 分）

1、（8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且关于第二个自变量的偏导 $F_2'\neq 0$，试求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2、（8 分）求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

五、极值（10 分）

抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值.

六. 选做题（24 分，任选两题）

微积分 II 期中考试 A 卷

1.（12 分）设$u=u(x,y)$有连续二阶偏导数，且满足$\Delta u=0$

证明：函数 $v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\Delta v=0$.

2.（12 分）设f 、g是二元可微函数，且$u=\varphi(x,y),v=(x,y)$ 由方程组

$x=f(u,v),y=g(u,v)$ 所确定，若 $f'_u\cdot\varphi'_x=1$，证明：x 只是 u 的函数，或 y 只是v 的函数.

3.（12 分）试证明曲线 $\begin{cases}x=ae^t\cos t\\ y=ae^t\sin t\\ z=ae^t\end{cases}$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各条母线之交角均相等.