

北京师范大学 2021~2022 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 线性代数及其应用

任课教师姓名: 黄华

卷面总分: 100 分 考试时长: 100 分钟 考试类别: 闭卷 ☒ 开卷 ☐ 其他 ☐

院 (系): 人工智能学院 专业: _____ 年级: _____

姓名: _____ 学号: _____

| 题号 | 第一题 | 第二题 | 第三题 | 第四题 | 总分 |
|----|-----|-----|-----|-----|----|
| 得分 | | | | | |

阅卷教师 (签字): _____

注意: 请在答题纸上答题, 在试题页答题无效。

一、填空题 (共5小题, 各4分, 共20分)

- 1) 已知 A 是 3 阶矩阵, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 是 3 维线性无关的列向量, 且 $A\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_3$, $A\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$, $A\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, 则行列式 $|A| =$ _____.
- 2) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.
- 3) 设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, 则 $A_{12} - 2A_{22} + 3A_{32} - 4A_{42} =$ _____.
- 4) 若 3 阶矩阵相似于 B , 矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 那么行列式 $|2B - E| =$ _____.
- 5) 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \end{bmatrix}$, 则 $A^n =$ _____.

二、选择题 (共5小题, 各4分, 共20分)

- 6) 已知 3 阶矩阵 A 可逆, 将 A 的第 2 列与第 3 列变换得 B , 再把 B 的第 1 列的 -2 倍加至第 3 列得 C , 则满足 $PA^{-1} = C^{-1}$ 的矩阵 P 为 ().
 (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
- 7) 已知 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则此方程组的基础解系还可选用 ().
 (A) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 + \eta_4, \eta_4 + \eta_1$

- (B) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的等价向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 (C) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 的等秩向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
 (D) $\eta_1 + \eta_2, \eta_2 + \eta_3, \eta_3 - \eta_4, \eta_4 - \eta_1$
- 8) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, E 为 m 阶单位矩阵. 若 $AB = E$ 则 ()
 (A) $r(A) = m, r(B) = m$ (B) $r(A) = m, r(B) = n$
 (C) $r(A) = n, r(B) = m$ (D) $r(A) = n, r(B) = n$
- 9) 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 已知矩阵 A 相似于 B , 则秩 $(A - 2E)$ 与秩 $(A - E)$ 之和等于 ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 10) 关于最小二乘解的说法, 正确的是 ()
 (A) 若 \hat{x} 为方程 $Ax = b$ 的最小二乘解, 则 $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$
 (B) 方程 $Ax = b$ 的最小二乘解是 A 的列空间中最接近 b 的点
 (C) 方程 $Ax = b$ 的最小二乘解 \hat{x} , 对 \mathbb{R}^n 中所有向量 x 满足 $\|b - A\hat{x}\| \leq \|b - Ax\|$
 (D) 如果 b 属于 A 的列空间, 那么方程 $Ax = b$ 的每个解都是最小二乘解

三、计算题 (共4小题, 各10分, 共40分)

- 11) 当 a 取何值时, 线性方程组 $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \\ ax_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 并在有解时求其所有解.
- 12) 已知 $2CA - 2AB = C - B$, 其中 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 求 C^3 .
- 13) 已知 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)^T$, $\alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基, 证明 $\beta_1 = (1, 2, 1)^T$, $\beta_2 = (2, 3, 4)^T$, $\beta_3 = (3, 4, 3)^T$ 也是 \mathbb{R}^3 的一组基, 并求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.
- 14) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.
 (1) 求 a 的值;
 (2) 求正交变换 $x = Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准型;
 (3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

四、证明题 (共2小题, 各10分, 共20分)

- 15) 设 A 为 $m \times n$ 的矩阵, 证明向量 x 属于 \mathbb{R}^n 且满足 $Ax = 0$ 的充要条件是 $\text{Nul } A = \text{Nul } A^T A$
- 16) 假若 $n \times n$ 矩阵 A 具有 n 个实特征值 (含重数), 试证 $A = URU^T$, 其中 U 为正交阵, R 为 $n \times n$ 上三角矩阵