# 北京师范大学 2022–2023 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II　任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分　考试时长: 120 分钟　考试类别: 闭卷 □ 开卷 ■ 其他 □

院 (系): ________　专业: ________　年级: ________

姓名: ________　学号: ________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

## 一、解析几何与多元函数 (20 分)

1. (8 分) 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线

$$\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \end{cases}$$

   的垂线，求此平面的方程.

2. (6 分) 已知 $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，求 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

3. (6 分) 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

## 二、重积分 (20 分)

1. (6 分) 根据二重积分的几何意义确定二重积分 $\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

2. (7 分) 计算 $\iint_D|x-y^2|dxdy$, 其中 $D$ 为 $x=1, y=1$ 以及坐标轴围成的区域.

3. (7 分) 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$, 其中 $\Omega$ 为单位球 (球心在原点，半径为 1).

## 三、曲线积分与曲面积分 (20 分)

1. (6 分) 计算曲线积分 $\int_L x^2dx+zdy-ydz$, 其中 $L$ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 $\theta$ 从 0 到 $\pi$ 的一段弧.

2. (7 分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(x+y+z)dS$ , 其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h, (0<h<a)$ 的部分.

3. (7 分) 设空间有界区域 $\Omega$ 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成, $\Sigma$ 为 $\Omega$ 边界的外侧, 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy$.

## 四、无穷级数 (20 分)

1. (6 分) 判断 $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$ 的收敛性 (发散, 条件收敛或绝对收敛), 需说明判断的理由.

2. (7 分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

# 北京师范大学 2022–2023 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II　任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分　考试时长: 120 分钟　考试类别: 闭卷 □ 开卷 ■ 其他 □

院 (系): ______ 专业: ______ 年级: ______

姓名: ______ 学号: ______

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

## 一、解析几何与多元函数 (20 分)

1. (8 分) 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线
$$\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \end{cases}$$
的垂线，求此平面的方程.

2. (6 分) 已知 $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，求 $f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}$.

3. (6 分) 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

## 二、重积分 (20 分)

1. (6 分) 根据二重积分的几何意义确定二重积分 $\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

2. (7 分) 计算 $\iint_D|x-y^2|dxdy$, 其中 $D$ 为 $x=1,y=1$ 以及坐标轴围成的区域.

3. (7 分) 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$, 其中 $\Omega$ 为单位球 (球心在原点，半径为 1).

## 三、曲线积分与曲面积分 (20 分)

1. (6 分) 计算曲线积分 $\int_L x^2dx+zdy-ydz$, 其中 $L$ 为曲线 $x=k\theta,y=a\cos\theta,z=a\sin\theta$ 上对应 $\theta$ 从 0 到 $\pi$ 的一段弧.

2. (7 分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(x+y+z)dS$ , 其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h,(0<h<a)$ 的部分.

3. (7 分) 设空间有界区域 $\Omega$ 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成, $\Sigma$ 为 $\Omega$ 边界的外侧, 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy$.

## 四、无穷级数 (20 分)

1. (6 分) 判断 $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$ 的收敛性 (发散, 条件收敛或绝对收敛), 需说明判断的理由.

2. (7 分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

3. (7 分) 将函数

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0, \\ 1, & 0 < x \le \pi, \end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并作出其和函数的图像.

**五、选做题** (20 分，**任选 2 题**，物理系同学不可选做第 4 题)

1. (10 分) 已知 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$, 计算下面的重积分，

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$$

2. (10 分) 计算曲线积分 $\int_L xyds$, 其中曲线 $L$ 的方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

3. (10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}$ 的和.

4. (10 分) 已知 $\Sigma$ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ 的上侧, $L$ 为 $\Sigma$ 的边界曲线, 其正向与 $\Sigma$ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分

$$I=\oint_L (yz^2-\cos z)dx+(2xz^2+\sin(xyz))dy+(2xyz+x\sin z)dz.$$