北京师范大学 2021～2022 学年第二学期期末考试试卷（A 卷）

课程名称：线性代数及其应用　　任课教师姓名：黄华

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ■　　开卷 □　　其他 □

院（系）：人工智能学院　　专　业：________　　年级：________

姓　名：________　　学　号：________

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	总分
得分					

阅卷教师（签字）：________

注意：请在答题纸上答题，在试题页答题无效。

一、填空题（共5小题，各4分，共20分）

1) 已知A是 3 阶矩阵，$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$是 3 维线性无关的列向量，且$A\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_3$，$A\mathbf{a}_2=\mathbf{a}_2+2\mathbf{a}_3$，$A\mathbf{a}_3=2\mathbf{a}_1+2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$，则行列式$|A|=$ -9 .

2) 设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$为$A$的伴随矩阵，$E$是单位矩阵，则$|B|=$ $\frac{1}{9}$.

3) 设$|A|=\begin{vmatrix}1&1&2&-1\\-2&3&4&1\\3&4&1&2\\-4&2&0&6\end{vmatrix}$，则$A_{12}-2A_{22}+3A_{32}-4A_{42}=$ ~~-80~~ 0

代数余子式，带符号

4) 若 3 阶矩阵相似于B，矩阵A的特征值为 1，2，3，那么行列式$|2B-E|=$ 15

5) 已知$A=\begin{bmatrix}2&4&-6\\1&2&-3\\4&8&-12\end{bmatrix}$，则$A^n=$ $(-8)^{n-1}\begin{pmatrix}2&4&-6\\1&2&-3\\4&8&-12\end{pmatrix}$

二、选择题（共5小题，各4分，共20分）

6) 已知 3 阶矩阵 A 可逆，将 A 的第 2 列与第 3 列变换得 B，再把 B 的第 1 列的-2 倍加至第 3 列得 C，则满足$PA^{-1}=C^{-1}$的矩阵 P为（ B ）． $AP^{-1}=C$.

(A) $\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$　(D) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

7) 已知$\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$是$Ax=0$的基础解系，则此方程组的基础解系还可选用（ B

(A) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3+\eta_4,\eta_4+\eta_1$

(B) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$的等价向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(C) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$的等秩向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(D) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4-\boldsymbol{\eta}_1$

8) 设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，E为 m 阶单位矩阵.若$AB=E$则（A）.

(A) $r(A)=m$，$r(B)=m$ (B) $r(A)=m$，$r(B)=n$

(C) $r(A)=n$，$r(B)=m$ (D) $r(A)=n$，$r(B)=n$

9) 设矩阵$B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$，已知矩阵$A$相似于$B$，则秩$(A-2E)$与秩$(A-E)$之和等于（C）

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5

10) 关于最小二乘解的说法，正确的是（ ）CD

(A) 若$\hat{\boldsymbol{x}}$为方程$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的最小二乘解，则$\hat{\boldsymbol{x}}=(A^TA)^{-1}A^T\boldsymbol{b}$ ×

(B) 方程$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的最小二乘解是A的列空间中最接近$\mathbf{b}$的点 ×

(C) 方程$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的最小二乘解$\hat{\mathbf{x}}$，对$\mathbb{R}^n$中所有向量$\mathbf{x}$满足$\|\boldsymbol{b}-A\hat{\mathbf{x}}\|\le\|\mathbf{b}-A\mathbf{x}\|$

(D) 如果$\mathbf{b}$属于A的列空间，那么方程$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的每个解都是最小二乘解

三、计算题（共4小题，各10分，共40分）

11) 当a取何值时，线性方程组$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1\\ ax_2-3x_3=3\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$无解、有唯一解、有无穷多解？并在有解时求其所有解.

12) 已知$2CA-2AB=C-B$，其中$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，求$C^3$.

13) 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^T$是$\mathbf{R}^3$的一组基，证明$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^T$也是$\mathbf{R}^3$的一组基，并求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

14) 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^3+2(1+a)x_1x_2$的秩为2。

（1）求a的值；

（2）求正交变换$x=Qy$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准型；

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解。

四、证明题（共2小题，各10分，共20分）

15) 设A为$m\times n$的矩阵，证明向量$\mathbf{x}$属于$\mathbb{R}^n$且满足$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$的充要条件是 Nul A =Nul A^TA

16) 假若$n\times n$矩阵A具有n个实特征值（含重数），试证$A=URU^T$，其中U为正交阵，R为$n\times n$上三角矩阵

$AU=UR$.