# 北京师范大学 2020–2021 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II　任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分　考试时长: 120 分钟　考试类别: 闭卷 ■ 开卷 □ 其他 □

院 (系): ________　专业: ________　年级: ________

姓名: ________　学号: ________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | | |

## 一、向量与几何 (15 分)

令垂足点 $(x,y,z)$. 则 $(x-2,y-1,z-3)\perp(3,2,1)$

$\therefore 3x-6+2y-2+z-3=0$

1. (7 分) 求过三点 $A(1,1,-1), B(-2,-2,2), C(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

2. (8 分) 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

$\hookrightarrow$ 方向: $(3,2,-1)$　令直线

## 二、多元函数 (15 分)

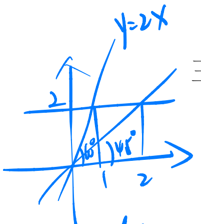
1. (7 分) 已知函数 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 求 $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$.

$f_x=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

2. (8 分) 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

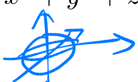
$F_x=2x$, $F_y=4y$, $F_z=2z$. $2x=k$, $4y=-k$, $2z=2k$. $\therefore x=\frac{k}{2}$, $y=-\frac{k}{4}$, $z=k$. $x^2+2y^2+z^2=1$, $\frac{k^2}{4}+\frac{k^2}{8}+k^2=1$. $k^2=\frac{8}{11}$.

## 三、重积分 (20 分)



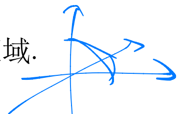
1. (6 分) 计算 $\iint_D (x^2+y^2-x)d\sigma$, 其中 $D$ 是由直线 $y=2, y=x$ 及 $y=2x$ 围成的闭区域.

2. (7 分) 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截得的 (含在圆柱面内的部分) 立体的体积.



$(x-1)^2+y^2=1$　$z^2\le 4-x^2-y^2$　$V=2\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,d\sigma$

3. (7 分) 计算 $\iiint_\Omega xyzdxdydz$, 其中 $\Omega$ 为球 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 在第一卦限内的闭区域.



## 四、曲线积分与曲面积分 (20 分)

1. (6 分) 计算曲线积分 $\int_L (x^2+y^2+z^2)ds$, 其中 $L$ 为螺旋线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$ 上相应于 $t$ 从 0 到 $2\pi$ 的一段弧.

$\hookrightarrow \int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}\,dt.$

2. (7 分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (2xy-2x^2-x+z)dS$, 其中 $\Sigma$ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分.

3. (7 分) 利用高斯公式计算曲面积分 $\oiint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, 其中 $\Sigma$ 为平面 $x=1, y=1, z=1$ 和坐标平面所围成的立体的表面的外侧.

## 五、无穷级数 (10 分) 判断下列无穷级数的收敛性 (发散, 条件收敛或绝对收敛), 需说明判断的理由.

$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha.$

1. (5 分) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$

2. (5 分) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{\pi}{n})$

敛散性.

$\dfrac{\sqrt{n+1}\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \longrightarrow 1$

$\longrightarrow \frac{3}{2}$ 级数, 收敛

## 六、选做题 (20 分, **任选 2 题**.)

1. (10 分) 计算二重积分 $\iint_D (x-y)^2\sin^2(x+y)dxdy$, 其中 $D$ 是平行四边形闭区域, 它的四个顶点是 $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi)$ 和 $(0,\pi)$.

令 $u=x-y$
$v=x+y$.

$dxdy=\left|\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{matrix}\right|dudv$
$=2dudv$.

$\to 2\iint u^2\sin^2 v\,dudv$.

$(\pi,\pi)$ $(\pi,3\pi)$ $(-\pi,3\pi)$ $(-\pi,\pi)$.

2. (10 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中 $L$ 的方程为 $x^2+(y-1)^2=4$, $L$ 的方向为逆时针方向.

3. (10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$ 的收敛区间和和函数 $s(x)$.

4. (10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ 的和.

$\rho=\lim\frac{|n+1|}{|n|}=1$. $\therefore R=1$.

收敛区间: $x-1\in(-1,1)$ 即 $x\in(0,2)$.

下求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n t^n$ 的和函数 $u(t)$.

$\int_0^t \frac{u(x)}{x}dx=\sum\int_0^t n x^{n-1}dx=\sum x^n dx=\frac{x}{1-x}$

# 北京师范大学 2021–2022 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II 任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分 考试时长: 120 分钟 考试类别: 闭卷 □ 开卷 ■ 其他 □

院 (系): ____________ 专业: ____________ 年级: ____________

姓名: ____________ 学号: ____________

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | |

**一、微分方程** (12 分)

1. (6 分) 求微分方程的通解:
$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2. (6 分) 求微分方程满足所给初值条件的特解:
$$\frac{dy}{dx} + 3y = 8, y|_{x=0} = 2.$$

**二、解析几何与微分方程** (18 分)

1. (6 分) 求与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行且过点 $(-3, 2, 5)$ 的直线的方程.

2. (6 分) 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 的切平面及法线方程.

3. (6 分) 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y = a\sin x, z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

**三、重积分** (30 分)

1. (10 分) 利用极坐标计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, 其中 $D$ 是由圆心在原点、半径为 $a$ 的圆周所围成的闭区域.

2. (10 分) 计算 $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 $\Omega$ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体.

3. (10 分) 设 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \{(x, y)|x^2 + y^2 \le y, x \ge 0\}$ 上连续, 且
$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{8}{\pi}\iint_D f(x, y)dxdy,$$
求 $f(x, y)$.

**四、曲线积分与曲面积分** (40 分)

1. 求积分

(1). (5 分) $\oint_L xds$, 其中 $L$ 为由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域的整个边界.

(2). (5 分) $\iint_\Sigma zdxdy + xdydz + ydzdx$, 其中 $\Sigma$ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧.

2. (10 分) 已知 $\Sigma$ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$ 的上侧, $L$ 为 $\Sigma$ 的边界曲线, 其正向与 $\Sigma$ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分

$$I=\int_L (yz^2-\cos z)dx+2xz^2dy+(2xyz+x\sin z)dz.$$

3. (10 分) 确定闭曲线 $C$, 使曲线积分

$$\oint_C (x+\frac{y^3}{3})dx+(y+x-\frac{2}{3}x^3)dy$$

达到最大值.

4. (10 分) 用两种方法求解方程

$$(5x^4-3xy^2+y^3)dx-(3x^2y-3xy^2-y^2)dy=0.$$

# 北京师范大学 2022–2023 学年第二学期期末考试试卷 (A 卷)

课程名称: 微积分-II　任课教师姓名: 蔡永强

卷面总分: 100 分　考试时长: 120 分钟　考试类别: 闭卷 □ 开卷 ■ 其他 □

院 (系): ______　专业: ______　年级: ______

姓名: ______　学号: ______

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 总 分 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | | | | | | |

## 一、解析几何与多元函数 (20 分)

1. (8 分) 设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过从点 $(1,-1,1)$ 到直线

$$\begin{cases} y-z+1=0, \\ x=0, \end{cases}$$

   的垂线，求此平面的方程.

2. (6 分) 已知 $f(x,y)=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$，求 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

3. (6 分) 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面及法线方程.

## 二、重积分 (20 分)

1. (6 分) 根据二重积分的几何意义确定二重积分 $\iint_D(1-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$.

2. (7 分) 计算 $\iint_D|x-y^2|dxdy$, 其中 $D$ 为 $x=1, y=1$ 以及坐标轴围成的区域.

3. (7 分) 计算 $\iiint_\Omega z^2dxdydz$, 其中 $\Omega$ 为单位球 (球心在原点，半径为 1).

## 三、曲线积分与曲面积分 (20 分)

1. (6 分) 计算曲线积分 $\int_L x^2dx+zdy-ydz$, 其中 $L$ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 $\theta$ 从 0 到 $\pi$ 的一段弧.

2. (7 分) 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(x+y+z)dS$ , 其中 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\ge h, (0<h<a)$ 的部分.

3. (7 分) 设空间有界区域 $\Omega$ 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成, $\Sigma$ 为 $\Omega$ 边界的外侧, 计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma 2xzdydz+xz\cos ydzdx+3yz\sin xdxdy$.

## 四、无穷级数 (20 分)

1. (6 分) 判断 $\sum\limits_{n=10}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln n}$ 的收敛性 (发散, 条件收敛或绝对收敛), 需说明判断的理由.

2. (7 分) 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.

3. (7 分) 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le\pi,\end{cases}$$

展开成傅里叶级数，并作出其和函数的图像.

**五、选做题** (20 分，**任选 2 题**，物理系同学不可选做第 4 题)

1. (10 分) 已知 $D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$, 计算下面的重积分，

$$\iint_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$$

2. (10 分) 计算曲线积分 $\int_L xyds$, 其中曲线 $L$ 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

3. (10 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{n!}$ 的和.

4. (10 分) 已知 $\Sigma$ 为曲面 $4x^2+y^2+z^2=1(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ 的上侧, $L$ 为 $\Sigma$ 的边界曲线, 其正向与 $\Sigma$ 的正法向量满足右手法则, 计算曲线积分

$$I=\oint_L (yz^2-\cos z)dx+(2xz^2+\sin(xyz))dy+(2xyz+x\sin z)dz.$$