# 数学教材阅读笔记:David C.Lay《线性代数及其应用》/勘误

## David C.Lay《线性代数及其应用》(中文第5版)勘误

David C.Lay 等人编著的《线性代数及其应用》(中文第5版)是一本很好的线性代数入门书.我在工作之后,继续学习这本书,并完成每一道课后习题.在此过程中,发现了翻译版的一些瑕疵.现发布在这里,供读者参考.

由于本人还在继续阅读这本书，因此勘误列表会随时更新.

针对书籍：David C.Lay 著；刘深泉，张万芹，陈玉珍等译. 线性代数及其应用原书第5版. 北京：机械工业出版社, 2021年12月第1版第14次印刷

勘误列表：

1. 习题1.1，第3题， P87.“对苹果奶酪情有读钟的 Annie ”建议翻译为“ Annie 牌芝士通心粉的爱好者”。 Annie 牌芝士通心粉(Annie's Mac and Cheese) 是国外的一种食物品牌.且这道题的表格里对食物的翻译是错误的，和题目(b)小问中的叙述不协调。整个题翻译的问题比较大，个人建议把题目翻译成如下：“某人上过营养课后, 原本很喜欢吃 Annie 牌芝士通心粉(Annie's Macaroni& Cheese)的她决定改善午餐, 增加西兰花和鸡肉罐头来提高蛋白质和膳食纤维的含量. 这道习题的食物营养信息在下表中给出.

| 营养素 | 芝士通心粉 | 西兰花 | 鸡肉罐头 | 全麦壳与白切达干酪 |
|---|---|---|---|---|
| 卡路里 | 270 | 51 | 70 | 260 |
| 蛋白质（克) | 10 | 5.4 | 15 | 9 |
| 膳食纤维 (克) | 2 | 5.0 | 0 | 5 |

   a. (使用数学软件) 如果她希望午餐含有 400 卡路里, 但要获取 30 克蛋白质、10 克膳食纤维, 求芝士通心粉、西兰花和鸡肉罐头之间的比例. b. (使用数学软件) 她发现 (a) 中西兰花的比例过高, 于是决定用全麦壳和白切达干酪(Annie ’s Whole Wheat Shells & White Cheddar)取代芝士通心粉, 每种食物的比例为多少能达到和 (a) 一样的结果?”

2. 习题2.3，第41-43题，书上没有介绍矩阵的 condition number(条件数) 这个概念,在题目中却要求条件数.这是原书的问题.

3. 习题2.7，第21题， P145.“持续时间短暂的荧光”建议改成“短余辉荧光粉”（short-persistence phosphors ）

4. 习题3.3，第35题，新版 matlab 中的 flops 命令已经停用。原文说的是“ If your version of MATLAB has the flops command, use it to count the number of floating point operations ...”是否可以在习题里加个注释，表明新版 matlab 里已经没有这个命令.

5. 习题4.4，第24题， P221. “证明: 坐标映射是映上到 $\mathbb{R}^n$ 的, 即任给 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{y}$, 具有元素 $y_1, \cdots, y_n$, 存在 $V$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$, 使得 $[\boldsymbol{u}]_B = \boldsymbol{y}$.”建议改成“证明: 坐标映射是映上到 $\mathbb{R}^n$ 的, 即任给 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, 存在 $V$ 中的向量 $\boldsymbol{u}$ 使得 $[\boldsymbol{u}]_B = \boldsymbol{y}$.”

6. P244,第一段“如果这些信号是同一个齐次差分方程 (将在下面描述) 的所有解, 则 Casorati 矩阵对所有 $k$ 是可逆的且这些信号是线性无关的, 否则 Casorati 矩阵对所有 $k$ 都不可逆且这些信号是线性相关的. ”宜改成“如果这些信号是同一个齐次差分方程 (将在下面描述) 的所有解, 则或者 Casorati 矩阵对所有 $k$ 是可逆的且这些信号是线性无关的, 或者 Casorati 矩阵对所有 $k$ 都不可逆且这些信号是线性相关的. ”

7. P245，第一行中去掉“于是”

8. 第4.9节,P258,定理18中，“正规的随机矩阵”宜翻译成“正则的随机矩阵”，以便与上下文统一.

9. P264,习题18,(b)中，“ $\boldsymbol{u}_4$ ”应改成“ $\boldsymbol{u}_3$ ”.

10. P277,习题18,“ $\lambda = 4$ ”应改成“ $\lambda = 5$ ”.

11. 第5.3节,P284,定理7,(b)中,“特征多项式可完全分解为线性因子”这里宜加译者注：“按理说,任意特征多项式在复数域中都可完全分解为线性因子，如果这样看,条件(i)纯属多余.所以要加以说明：本定理讨论的矩阵 $A$ 是实矩阵,将矩阵 $A$ 对角化也是在实数域中对角化.定理里说的“线性因子”指实系数线性因子.条件(i)是为了保证矩阵 $A$ 的特征值都是实数,没有复特征值,仅此而已.”

12. 习题5.3， P283,题目7-20,题干中的“试着将习题 7-20 的矩阵对角化”应改成更贴合原文的“可能的话，将习题 7-20 的矩阵对角化”，因为习题8，9 ,17 中的矩阵是不可对角化的.还有，同一道题中，“对应的特征向量为 $(-2, 1, 2)$ ”应该改成“一个特征向量是 $(-2, 1, 2)$ ”，这是因为 $(-2, 1, 2)$ 不是特征值 5 对应的特征向量.这题第3版翻译得挺好，第5版反而改不好了.

13. 习题5.3， P284,题目25,根据原文，“ $A$ 是否可对角化？”应改成“ $A$ 是否有可能无法对角化？”

14. 习题5.3， P284,题目26,根据原文，建议把“ $A$ 是否不可对角化？”改成“ $A$ 是否有可能无法对角化？”

15. 习题5.3， P284,题目33,矩阵应该是 $\begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ，而不是 $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

16. 习题5.4， P293,题目25,题目26,根据原文，“ $A$ 的轨迹”应改成“ $A$ 的迹”

17. 习题5.5， P297,题目17,矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & -0.8 \\ 4 & -2.2 \end{pmatrix}$ 应改为 $\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ 4 & -2.2 \end{pmatrix}$

18. P305,练习题2,“序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是什么？”建议改为“序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 会怎样？”

19. P314,题目19， $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 字体不应加粗，应改为 $v_1, v_2$.

20. P316,第三行,“所有分数 $\lambda_2/\lambda_1,\cdots,\lambda_n/\lambda_1$ 的值都小于 1 ”应改成“所有分数 $\lambda_2/\lambda_1,\cdots,\lambda_n/\lambda_1$ 的绝对值都小于 1 ”

21. 习题5.8， P320,题目1-4，题干中，“利用这些数据对 A 的最大特征值进行估计”应改成“利用这些数据对 A 的绝对值最大的特征值进行估计”.因为按照幂算法，只能估计出绝对值最大的特征值.特别地，在题目4中，利用幂算法估计出的特征值是 -0.4，它不是最大的特征值(最大的特征值是0.1)，而是绝对值最大的特征值.原书也有这个错误.

22. P319，方框内，“序列$\{\boldsymbol{v}_k\}$”应该改为“序列$\{v_k\}$”，即 $v$ 的字体不应加粗.

23. 习题5.8， P320,题目5，应该去掉“重做习题5.”

24. 习题5.8， P321,题目13,14，建议翻译成 “13.如果接近4和-4的特征值已知具有不同的绝对值，幂算法是否可行？它可能有用吗？ 14.假设接近4和-4的特征值已知具有完全相同的绝对值.描述如何获得一个估计接近4的特征值的序列.”

25. 习题5.8，P321，题目19-20，题干中，“求(a)最大特征值”建议改为“求(a)主特征值”.因为在还没求出答案的情况下,用幂法求出的不一定是最大特征值，而一定是主特征值.这个问题在原书里也存在.

26. 第5章补充习题，P322，题目1，“m. 上三角矩阵 $A$ 的特征值正好是对角矩阵 $A$ 中的非零元素.”应改成“m.上三角矩阵 $A$ 的特征值恰好是矩阵 $A$对角线上的非零元素”

27. 第5章补充习题，P323，题目17，“A的轨迹”应该改成“A的迹”

28. 第6章习题6.3，P350,题目23，“同样可以证明”应改成“而且，请证明”

29. 第6.4节，P352，定理11中，根据原文，“对$\mathbb{R}^n$ 的子空间 $W$”应改成“对$\mathbb{R}^n$ 的非零子空间 $W$”

30. 第6.4节，P354,例4的解答中，“重新度量 $\boldsymbol{v}_3$, 取 $\boldsymbol{v}_3' = 3\boldsymbol{v}_3$, 那么将 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 三个向量单位化得到 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$, 且用这些向量组成 $Q$ 的列.”应翻译成“为了简化接下来的算术运算，我们通过让 $\mathbf{v}_3' = 3\mathbf{v}_3$ 来对 $\mathbf{v}_3$ 进行缩放.然后，对这三个向量进行归一化，得到 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 和 $\mathbf{u}_3$，并将这些向量用作 $Q$ 的列.”

31. 第6.4节，P354，“数值计算的注解1”中，“通过重新安排计算的阶”建议翻译为“通过重新安排计算的顺序”

32. 第6.4节，P354，练习2：“假定 $A = QR$, 其中 $Q$ 是一个具有正交列向量的 $m \times n$ 矩阵, $R$ 是 $n \times n$ 矩阵. 证明: 如果 $A$ 的列向量是 线性相关的, 则 $R$ 不是可逆矩阵.”，这是个错题.反例：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

原书上也有这个错误.我已经写邮件向第二作者Steven R.Lay和第三作者Judi J.McDonald 反馈(主要作者已经去世)，邮件关键内容如下：**I believe I have found an error in your book's 5th Edition, specifically, Section 6.4, Practice Problem 2 (Page 360). The problem is:**“*Suppose $A = QR$, where $Q$ is an $m \times n$ matrix with orthogonal columns and $R$ is an $n \times n$ matrix.Show that if the columns of $A$ are linearly dependent, then $R$ cannot be invertible.*”**However, consider the counterexample: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Here, the columns of $A$ are dependent, yet $R$ is invertible. To rectify this, could we possibly alter the problem statement to state that the columns of $Q$ are orthonormal instead of merely orthogonal? This could help ensure that the statement holds true.** 第三作者回复表示赞同，并表示该错误将会在第7版中更正.

33. 第6.4节，P355，习题6.4，第21题，“MATLAB中的qr命令给出一个“完全”QR分解”建议翻译为“MATLAB中的qr命令提供了这种"完全"的QR分解”

34. 第6.4节，P356,习题6.4，第26题，“格拉姆-施密特方法比单位正交向量更有效”应改成“格拉姆-施密特方法在处理单位正交向量时表现得更好”.

35. 第6.5节，P362，习题6.5，第1-4题，"(a)通过构造法方程求$\hat{\boldsymbol{x}}$，(b)直接解$\hat{\boldsymbol{x}}$"会让人产生误会，以为(b)中的方法是和(a)中构造法方程不同的，应改成"(a)构造$\hat{\boldsymbol{x}}$的法方程，(b)解出$\hat{\boldsymbol{x}}$"

36. 第6.5节，P364，第20题，"注意：不能假设$A$可逆,且更不一定是方阵"建议改成"注意：不能假设$A$可逆,它甚至可能不是方阵"

37. 第6.5节，P364，第21题，"解释为什么$A$具有至少与行一样多的列"应改成"解释为什么$A$具有至少与列一样多的行"

38. 第6.6节，P367，倒数第10行，"常见的练习是计算原来$x$值的平均$\overline{x}$"应改成"常见的做法是计算原来$x$值的平均$\overline{x}$"

39. 第6.6节，P367，倒数第5行，"但特定形式的$X$会从一个问题变到下一个"应改成"但是$X$的具体形式会随着问题的变化而变化"

40. 第6.6节，P368，例2中，"而$y$坐标表示生产水平为每天$x$单位时的平均费用"应改成"而$y$坐标表示生产水平为每天$x$单位时，每生产一个单位的平均成本"

41. 第6.6节，P370，第一行，"尽管$u$和$v$是乘法"建议改成"尽管$u$和$v$之间存在乘积项"

42. 第6.6节，习题6.6，题目8中，"花费变量"应该改为"可变成本"，"固定花费"应该改为"固定成本"，"有数千个数据"应改为"数值单位为千"

43. 第6.6节，习题6.6，题目18中，"正交矩阵"应改为"对角矩阵"

44. 第6.7节，P373,在内积空间的定义的下面的自然段中，"而且本章几乎所有$\mathbb{R}^n$空间上的讨论都在内积空间上"应改为"而且本章中关于$\mathbb{R}^n$的几乎所有讨论都适用于内积空间"

45. 第6.7节，P374,例3，"设$V$属于$\mathbb{P}_2$"应改为"设$V$为$\mathbb{P}_2$"

46. 第6.7节，P375，例5，"包含多项式在$-2,-1,0,1$和$2$处的值"应改为"涉及在$-2,-1,0,1$和$2$处对多项式进行求值"

47. 第6.7节，P379,例7，"这表明(5)定义了$C[a,b]$上的内积"应改为"请证明(5)定义了$C[a,b]$上的一个内积"

48. 第6.8节，P381,第三段，"因为测量的数据是140年前的"应改为"因为测量是在跨度为140年的时间里进行的"，同一句话中，"$y$的元素的计算来自各种样本的测量和不同样本的大小"应改为"$y$的元素的计算来自各种样本的测量，这些样本的大小不同"

49. 第6.8节，P383,第一句话，“设特定函数 $f$ 仅知道在点 $t_0, \cdots, t_n$ 处的值”应改为“设未知函数 $f$ 仅知道在点 $t_0, \cdots, t_n$ 处的值”

50. 第6.8节，P385，第四段(公式(7)的下一行)中，“(常数)函数 1 的系数的正交投影是”应改为“在(常数)函数 1 上正交投影的系数是”

51. 第6.8节，习题6.8，题目2中，“假设加权最小二乘问题中 25 个数据里有 5 个数据具有 $y$ 度量且比其他数据的可靠性小”应改成“假设在一个加权最小二乘问题中，25个数据点中有5个的 $y$ 测量值比其他数据点的可靠性小”

52. 第6.8节，习题6.8，题目5 应改成“证明：对于正整数 $m, n$,当 $m \neq n$ 时, $\sin mt$ 和 $\sin nt$ 正交.”.原书也有这个错误，我已经向作者发了邮件，邮件关键内容如下：**I suggest a small amendment to problem 5 in Exercise 6.8. Rather than "Show that sin(mt) and sin(nt) are orthogonal when m ≠ n," could we specify "For positive integers m, n, show sin(mt) and sin(nt) are orthogonal when m ≠ n"?(similar to the clarification provided in Problem 6) .This would exclude the potential issue when m=2 and n=-2. Similarly, I believe problem 7 might also benefit from a comparable adjustment(let k be a positive integer) to avoid any potential confusion.** 第三作者回复表示赞同，并表示该错误将会在第7版中更正.

53. 第6.8节，习题6.8，题目7 应改成“证明：对正整数 $k$, $\|\cos kt\|^2 = \pi, \|\sin kt\|^2 = \pi$.”.原书也有这个错误，我已经向作者发了邮件(见上一条).

54. 第6章补充习题，P388,题目12中，“逼近特征向量”宜改为“近似特征向量”.

55. 第6章补充习题，P389,题目13, (a)中，“证明Row$A$ 属于空间 $(\mathrm{Nul}A)^\perp$”，应改为“证明Row$A$ 含于空间 $(\mathrm{Nul}A)^\perp$”

56. 第6章补充习题，P389,题目16，(b)中，“解释为什么 $A_1$ 的特征是 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$”应改为“解释为什么 $A_1$ 的特征值是 $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$”

57. 第7.1节，P394,第5行，“在例 3 中, 特征值 7 是二重的, 特征向量是二维的.”应改成“在例 3 中, 特征值 7 是二重的, 其对应的特征空间是二维的.”

58. 第7.1节，P394,定理3(谱定理),(c)，“特征空间相互正交, 这种正交性是在特征向量对应于不同特征值的意义下成立的.”宜改成“特征空间是互相正交的，意味着对应于不同特征值的特征向量是正交的”

59. 第7.2节，P402，练习题中，“根据矩阵 $A$ 的特征值, 给出一个半正定矩阵 $A$.”建议改为“用其特征值来描述一个正半定矩阵 $A$”

60. 第7.2节，习题7.2，P403,习题20和习题21的内容混排在一起了

61. 第7.3节，P408，定理8中，“单位特征向量 $u_1, \cdots, u_n$” 应该加粗为“单位特征向量 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ ”

62. 第7.4节，习题7.4，P419，练习题2，“$A^TA = Q^T(A^TA)Q$”应改为“$(A^TA) = Q^T(AA^T)Q$”.这在原书中也有错误，等我读完全书后，再向作者集中反馈.且练习题2的“注”中，“矩阵 $AA^T$ 和 $A^TA$ 的正交相似的”应改为“矩阵 $AA^T$ 和 $A^TA$ 是正交相似的”

63. 第7.4节，习题7.4，P420,题目21，“验证例 2 中的论断, 即当 $\boldsymbol{x}$ 变化范围属于所有 正交于 $v_1$ 的单位向量时......”建议改为“验证例 2 中的论断, 即当 $\boldsymbol{x}$ 变化范围是所有 正交于 $v_1$ 的单位向量时......”

64. 第7.5节，P424,第3行，“不难验证, 对任何正交矩阵 $P, \boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_N$ 的协方差是 $P^{\mathrm{T}}SP$”应改成“不难验证, 对任何正交矩阵 $P, \boldsymbol{Y}_1, \cdots, \boldsymbol{Y}_N$ 的协方差矩阵是 $P^{\mathrm{T}}SP$”

65. 第7.5节，习题7.5，第5题，应该翻译为“一张带有三个光谱成分的Landsat地球资源卫星图像拍摄于佛罗里达州的Homestead空军基地（在该基地1992年被安德鲁飓风袭击后拍摄）.数据的协方差矩阵如下所示.求出数据的第一主成分，并计算这个成分在总方差中所占的百分比.

$$S = \begin{bmatrix} 164.12 & 32.73 & 81.04 \\ 32.73 & 539.44 & 249.13 \\ 81.04 & 249.13 & 189.11 \end{bmatrix}$$

”建议加译者注：Landsat计划是美国地质调查局(USGS)和美国宇航局(NASA)合作的一个项目，旨在持续收集地球表面的遥感卫星图像.自1972年以来，该项目已经成功地发射了多颗Landsat卫星.

66. 第7.5节，习题12，“利用5.4节习题25提到的轨迹的性质”建议改为“利用5.4节习题25提到的迹的性质”

67. 第7.5节，习题13，“$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{n}(t_k - m)^2$”应改成“$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(t_k - m)^2$”.这在原书上也有错误.

68. 第7章补充习题，P429，题目8如下：“利用习题7证明: 如果 $A$ 是正定的, 那么 $A$ 具 有一个 LU 分解 $A = LU$, 其中 $U$ 的对角线上有 正主元. (反之也真.)”，这个命题的"反之"，即它的逆命题，为“如果矩阵 $A$ 具有一个 LU 分解 $A = LU$, 其中 $U$ 的对角线上有正主元,则 $A$ 正定”,不一定为真. $A$ 甚至可能都不是对称的.在原书上也有这个问题.

69. 第8.1节，P434 中的定理,原文是“A translate of a set $S$ in $\mathbb{R}^n$ by a vector $\mathbf{p}$ is the set $S+\mathbf{p}=\{\mathbf{s}+\mathbf{p}:\mathbf{s}\in S\}$.[2] A flat in $\mathbb{R}^n$ is a translate of a subspace of $\mathbb{R}^n$. Two flats are parallel if one is a translate of the other. The dimension of a flat is the dimension of the corresponding parallel subspace. The dimension of a set $S$, written as dim $S$, is the dimension of the smallest flat containing $S$. A line in $\mathbb{R}^n$ is a flat of dimension 1 . A hyperplane in $\mathbb{R}^n$ is a flat of dimension $n-1$.”，译文是“定义 $\mathbb{R}^n$ 中一个集合 $S$ 被向量 $\boldsymbol{p}$ 平移后得到集合 $S+\boldsymbol{p}=\{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{p}:\boldsymbol{s}\in S\}$[⊖]. $\mathbb{R}^n$ 中一个平面是 $\mathbb{R}^n$ 子空间的一个平移. 如果一个平面是另一个平面的平移, 则两个平面是平行的. 一个平面的 维数是对应的平行子空间的维数. 一个集合 $S$ 的维数记为 dim $S$, 是包含 $S$ 的最小平面的维数. $\mathbb{R}^n$ 中一条直线是维数为 1 的平面, $\mathbb{R}^n$ 中一个超平面是维数为 $n-1$ 的平面.”建议把原文中的 flat 翻译为 “平坦形”，而不要翻译成“平面”，以免与通常的平面概念混淆.本书翻译版中，以后涉及到“flat”的地方，都建议翻译为“平坦形”,如图所示，建议画圈的“平面”都改为“平坦形”.

434　第8章

$$y=(1-c_{k+1})\left(\frac{c_1}{t}v_1+\cdots+\frac{c_k}{t}v_k\right)+c_{k+1}v_{k+1} \quad (6)$$

由归纳假设，由于系数和是 1，故点 $z=(c_1/t)v_1+\cdots+(c_k/t)v_k$ 属于 $S$. 从而 (6) 显示了 $y$ 作为 $S$ 中两点的一个仿射组合是属于 $S$ 的. 由数学归纳法，这些点的每一个仿射组合属于 $S$，即 aff $S\subset S$. 但反过来，$S\subset$ aff $S$ 总是成立的. 因此，当 $S$ 为仿射时，$S=$ aff $S$. 相反，如果 $S=$ aff $S$，则 $S$ 中两点（或更多点）的仿射组合属于 $S$，从而 $S$ 是仿射的. ■

下面的定义提供了仿射集合的术语，它强调了其与 $\mathbb{R}^n$ 子空间的密切关系.

画圈部分都应译为“平坦形”

**定义** $\mathbb{R}^n$ 中一个集合 $S$ 被向量 $p$ 平移后得到集合 $S+p=\{s+p:s\in S\}$[⊖]. $\mathbb{R}^n$ 中一个平面是 $\mathbb{R}^n$ 子空间的一个平移. 如果一个平面是另一个平面的平移，则两个平面是平行的. 一个平面的维数是对应的平行子空间的维数. 一个集合 $S$ 的维数记为 dim$S$，是包含 $S$ 的最小平面的维数. $\mathbb{R}^n$ 中一条直线是维数为 1 的平面. $\mathbb{R}^n$ 中一个超平面是维数为 $n-1$ 的平面.

在 $\mathbb{R}^3$ 中，真子空间[⊜]包含了原点 0、穿过原点 0 的所有直线的集合和穿过原点 0 的所有平面的集合. 因此，$\mathbb{R}^3$ 中的真子平面是点（零维）、直线（一维）和平面（二维），它们可能穿过原点，也可能不穿过原点.

下一个定理表明 $\mathbb{R}^3$ 中这些直线和平面的几何描述正好与前面代数描述中两个或三个点的仿射组合集合是一致的.

**定理 3** 当且仅当 $S$ 是一个平面时，一个非空集合 $S$ 是仿射.的.

注：注意本证明中的关键点. 例如，第一部分假设 $S$ 是仿射的，从而证明 $S$ 是一个平面. 由定义，一个平面是一个子空间的平移. 通过选取 $S$ 中的 $p$ 和定义 $W=S+(-p)$，集合 $S$ 被平移到原点且 $S=W+p$. 剩下的是证明 $W$ 是一个子空间，为此 $S$ 将是一个子空间的平移，因此是一个平面.

**证** 假定 $S$ 是仿射的，令 $p$ 是 $S$ 中任意固定点，$W=S+(-p)$，从而 $S=W+p$. 为了证明 $S$ 是一个平面，只需证明 $W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间. 由于 $p$ 在 $S$ 中，因此零向量在 $W$ 中. 为了证明 $W$ 对向量的加法和标量乘法运算封闭，只需证明如果 $u_1$ 和 $u_2$ 是 $W$ 中的元素，那么对每一个实数 $t$，$u_1+tu_2$ 属于 $W$. 由于 $u_1$ 和 $u_2$ 属于 $W$，因此存在 $S$ 中的 $s_1$ 和 $s_2$，使得 $u_1=s_1-p$ 和 $u_2=s_2-p$. 因此，对每一个实数 $t$，

$$u_1+tu_2=(s_1-p)+t(s_2-p)=(1-t)s_1+t(s_1+s_2-p)-p$$

令 $y=s_1+s_2-p$，则 $y$ 是 $S$ 中点的一个仿射组合. 由于 $S$ 是仿射的，因此 $y$ 在 $S$ 中（由定理 2）. 但 $(1-t)s_1+ty$ 也在 $S$ 中，所以 $u_1+tu_2$ 在 $-p+S=W$ 中. 这就表明 $W$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间. 从而由 $S=W+p$，$S$ 是一个平面.

相反，假定 $S$ 是一个平面，即对某些 $p\in\mathbb{R}^n$ 和子空间 $W$，有 $S=W+p$. 为了证明 $S$ 是仿射的，只需证明对 $S$ 中每一对 $s_1$ 和 $s_2$，穿过 $s_1$ 和 $s_2$ 的直线属于 $S$. 由 $W$ 的定义，存在 $W$ 中 $u_1$ 和 $u_2$ 使得 $s_1=u_1+p$ 和 $s_2=u_2+p$. 所以，对每一个实数 $t$，

$$(1-t)s_1+ts_2=(1-t)(u_1+p)+t(u_2+p)=(1-t)u_1+tu_2+p$$

由于 $W$ 是一个子空间，因此 $(1-t)u_1+tu_2\in W$，从而 $(1-t)s_1+ts_2\in W+p=S$. 因此，$S$ 是仿射的. ■

⊖ 若 $p=0$，则 $S$ 的平移是 $S$ 本身. 参见 1.5 节图 1-24.

⊜ $A$ 是 $B$ 的子集，若 $A\neq B$，则 $A$ 称为 $B$ 的真子集. 同样的条件应用于 $\mathbb{R}^n$ 的真子空间和真子平面，它们都不等于 $\mathbb{R}^n$.

向量空间的几何学　435

定理 3 给出了一个集合的仿射包的几何解释：由一个集合中的点的所有仿射组合构成的点集是$\boxed{\text{平面}}$. 比如，图 8-4 显示了例 2 中研究的点. 虽然所有 $b_1,b_2$ 和 $b_3$ 的线性组合的集合是 $\mathbb{R}^3$，但所有仿射组合的集合只是穿过 $b_1,b_2$ 和 $b_3$ 的平面. 注意 $p_2$（由例 2）在穿过 $b_1,b_2$ 和 $b_3$ 的平面中，而 $p_1$ 不在这个平面中. 也可参见习题 14.

70. 第8.2节，例3中，“$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 7 \end{bmatrix}$”应改成“$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$”

71. 第8.2节，习题24中，“当把这个事实运用到例 5 时, 表明顶点 $a$ 和点 $\boldsymbol{q}$ 的颜色可以确定一个光滑地插入沿着从 $\boldsymbol{a}$ 到 $q$ 的直线运动的 $p$ 点的颜色.”应翻译成“当把这个事实运用到例 5 时，表明当 $\boldsymbol{p}$ 沿着从 $\boldsymbol{a}$ 到 $\mathbf{q}$ 的直线移动时，顶点 $\boldsymbol{a}$ 和点 $\boldsymbol{q}$ 的颜色会平滑过渡.”

72. 第8.3节，习题3的答案(P547)，【conv$S$ 是空集】应该翻译成【$\boldsymbol{p}_1$,$\boldsymbol{p}_2$,$\boldsymbol{p}_3$ 都不在 conv$S$】中.

73. 第8.3节，习题8.3的第24题中，【$k$ 维的贝塞尔曲线由 $k+1$ 个控制点确定】应翻译为【$k$ 次的贝塞尔曲线由 $k+1$ 个控制点确定】.

74. 第8.4节，P455，定义中，【$\mathbb{R}^n$ 上的一个线性函数是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个线性变换 $f$】应改成【$\mathbb{R}^n$ 上的一个线性泛函是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个线性变换 $f$】.Linear functional 应翻译成“线性泛函”.本节中所有出现“线性函数”的地方都应该翻译成“线性泛函”.“零函数”都翻译成“零泛函”.

75. 第8.4节，P459，定义中，【则该超平面被分割成两个集合 $A$ 与 $B$】应翻译为【则该超平面分割两个集合 $A$ 与 $B$】.