北京师范大学 2020～2021 学年第二学期期中考试试卷

课程名称： 线性代数及其应用　　　　**任课教师姓名：** 黄华

卷面总分：100 分　　考试时长：100 分钟　　考试类别：闭卷 ■　　开卷 □　　其他 □

院（系）：人工智能学院　　专 业：计算机科学与技术　　年级：2023

姓 名：杨[illegible]文　　学 号：202311081015

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	总分
得分					

阅卷教师（签字）：

装

订

线

注意：请在答题纸上答题，在试题页答题无效。

一、判断对错，并给出理由（每小题 5 分，判断 2 分，理由 3 分，共 30 分）。

1. 若$m \times n$的矩阵A行等价于阶梯形矩阵B，B有k个非零行，则方程$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$的解空间的维数是$m - k$。

k个非零行 ∴ $\dim \operatorname{Col} A = k$ ∴ $\dim \operatorname{Nul} A = n - k$

答：错

B有k个非零行，意味着矩阵A有k个主元列，因此，其维数为 $n - k$

2. 矩阵A的非零行构成 Row A的一组基。

答：错

不一定是基

矩阵A的线性无关行构成 Row A的一组基

3. 若A是$m \times n$的矩阵且$\operatorname{rank} A = m$，则线性变换$\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$是一对一的。

答：错

阶梯形无零行 ⇒ 均有解 ⇒ 满射，

只有$\operatorname{rank} A = n$时，才是一对一的

4. V是一个非零有限维向量空间，若$\operatorname{rank} V = p$，$S$是$V$的一个线性相关的子集，则$S$包含多于$p$个向量。

答：错

不一定，

S 包含的向量个数与p无关

5. 坐标变换矩阵总是可逆的。

答：对

坐标变换矩阵的列是线性无关的，且为方阵

正确，$(P_{B \leftarrow A})^{-1} = P_{A \leftarrow B}$.

6. 设$\boldsymbol{f}(\mathrm{t}) = 3 + \mathrm{t}$，$\boldsymbol{g}(\mathrm{t}) = 3\mathrm{t} + \mathrm{t}^2$，即$\boldsymbol{g}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\boldsymbol{f}(\mathrm{t})$，则$\{\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\}$是线性相关的。
答：错

不满足线性关系　　　　不是，提意什么.

二、计算题（7-10 每小题 5 分，11-12 小题 10 分，共 40 分）

7. 确定h 和 k的值，使得下列方程组的解集（a）为空集，（b）包含唯一解，（c）包含无穷多解。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 &= k \\ 4\mathbf{x}_1 + h\mathbf{x}_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & k \\ 0 & h-12 & 8-4k \end{pmatrix}$$

(a) $h=12,\ k\neq 2$
(b) $h\neq 12.$
(c) $h=12,\ k=2$

8. 求如下矩阵A（见右页）的 LU 分解。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad 5\times 4$$

$(5\times 5)\times(5\times 4)$

解：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & 1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & -9 & -2 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= U$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -5 \\ 0 & -9 & -3 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ & 3 & 1 & -1 \\ & 0 & 0 & 5 \\ & 0 & 0 & -3 \\ & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3/5 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 3 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & \\ 2 & 2 & -\frac{3}{5} & 1 & \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12543

9. 计算如下矩阵B的行列式。

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-6\times 28 + 6\times 30 = 12$ ✓

解：按行或者按列展开，选择 0 最多的行或者列

$$\det\ B=(-1)^{2+2}\times 1\times\begin{vmatrix}4&8&8&5\\6&8&8&7\\0&8&3&0\\0&2&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+2}\times 2\times\begin{vmatrix}4&8&5\\6&8&7\\0&3&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+2}\times 2\times 3\times\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}=-6\times(4\times 7-5\times 6)=12$$

10. 设$CD=\begin{bmatrix}5&4\\-2&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}7&3\\2&1\end{bmatrix}$，求$C$。

解：$\det\ D=7-3\times 2=1\neq 0$

$D^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&7\end{pmatrix}$

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&7\end{bmatrix}$$

$C=CD\cdot D^{-1}=\begin{pmatrix}-3&13\\-8&27\end{pmatrix}$

$$C=CDD^{-1}=\begin{bmatrix}5&4\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&13\\-8&27\end{bmatrix}$$

11. 求rank F、dim Nul F以及 Row A、Col F、Nul F的一个基。

$r=2$. $\dim \mathrm{Nul} F=5-2=3$.

$$F=\begin{bmatrix}2&-1&1&-6&8\\1&-2&-4&3&-2\\-7&8&10&3&-10\\4&-5&-7&0&4\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2&-7&6\\&1&3&-4&4\\&&&&\\&&&&\end{pmatrix}$$

Col F: $\begin{pmatrix}2\\1\\-7\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\\8\\-5\end{pmatrix}$ Nul F: $\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-4\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

12. 设$P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\-3&-5&0\\4&6&1\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-2\\2\\3\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-8\\5\\2\end{bmatrix}$，$\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}-7\\2\\6\end{bmatrix}$，求$\mathbb{R}^3$中的一组基$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$，使得$P$是由基$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$到$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$的坐标变换矩阵。

解：

记$U=[\mathbf{u}_1\quad \mathbf{u}_2\quad \mathbf{u}_3]$，$V=[\mathbf{v}_1\quad \mathbf{v}_2\quad \mathbf{v}_3]$

则$U=VP$

$$\mathbf{u}_1=\begin{bmatrix}-6\\-5\\21\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_2=\begin{bmatrix}-6\\-9\\32\end{bmatrix},\ \mathbf{u}_3=\begin{bmatrix}-5\\0\\3\end{bmatrix}$$

$P_{V\leftarrow U}=P_V^{-1}P_U.$

$P_V P_{V\leftarrow U}=P_U$

$\begin{pmatrix}-2&-8&-7\\2&5&2\\3&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\-3&-5&0\\4&6&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6&-6&-5\\-5&-9&0\\21&32&3\end{pmatrix}$

三、问答题（10 分）

13. 若A是$m\times n$的矩阵，Row A、Col A、Nul A、Row A^T、Col A^T和 Nul A^T，哪一个子空间在$\mathbb{R}^m$中，哪一个子空间在$\mathbb{R}^n$中？共有多少个不同的子空间？

答：

$\mathbb{R}^m$: Col A Row A^T Nul A^T.

$\mathbb{R}^n$: Row A Nul A Col A^T

Col A、Row A^T、Nul A^T在$\mathbb{R}^m$中

Row A、Nul A、Col A^T在$\mathbb{R}^n$中

因为 Col $A=$ Row A^T，Row $A=$ Col A^T，所以共有 4 个不同的子空间

4 ✓

四、证明题（每题各 10 分，共 20 分）

14. 设A是$m\times n$的矩阵，B是$m\times m$的可逆矩阵，证明：rank $BA=$ rank A。

证明：

$A_{m\times n}$. $B^{-1}_{m\times m}$

$r(BA)\leq r(A)$

$r(B^{-1}BA)\leq r(BA)$ $\therefore$ ✓

B是$m \times m$的可逆矩阵，则$B = E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots E_p$，$E_i$为初等矩阵

$E_i A$为对A进行初等行变换，而初等行变换不改变A的列的相关性，也就是说，不改变A的秩

$BA = E_1 \cdot E_2 \cdot \cdots E_p \cdot A$，所以$\operatorname{rank} BA = \operatorname{rank} A$

15. 设A是$m \times n$的矩阵，B是$n \times p$的矩阵，且$AB = \mathbf{0}$。证明：$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$。
证明：
$AB = \mathbf{0}$，说明B的各列都满足方程$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，也就是说B的各列都在 Nul A，从而，$\operatorname{rank} B \leq \dim \operatorname{Nul} A$
因为$\operatorname{rank} A + \operatorname{Nul} A = n$
所以$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq n$ 则 B各列 $\in \operatorname{Nul} A$.

∴ B各列中的最大线性无关组所含向量个数 $\leq \dim \operatorname{Nul} A$.
$\hookrightarrow = \operatorname{rank} B$.

$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Col} A$.

又 $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$

∴ ✓.