Scritto analisi 2

1 Come risolvere gli esercizi

1.1 Insiemi

1.1.1 Insieme a stella

Un insieme $\Omega \subseteq R^n$ viene detto "a stella" se

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \text{tale che il segmento} \quad \bar{x_0}x \subseteq \Omega \quad \forall x \in \Omega$$

In sostanza Ω è un insieme "a stella" se esiste un suo punto che "vede tutti gli altri"

1.1.2 Insieme connesso

Un insieme è connesso se esiste una curva che unisce ogni suo punto

1.1.3 Insieme semplicemente connesso

Un insieme $\Omega \subseteq R^n$ si dirà semplicemente connesso se ogni curva chiusa γ: $[0, 1] \rightarrow \Omega$ è omotopa in Ω ad una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$. In R^2 un insieme è semplicemente connesso se è connesso "senza buchi".

1.1.4 Insieme aperto

In ogni punto dell'insieme è possibile "spostarsi di poco" senza uscire dall'insieme.

Ogni punto di un insieme aperto è interno all'insieme.

1.1.5 Insieme chiuso

È il complementare di un insieme aperto

1.1.6 Insieme compatto

Un insieme è compatto se è chiuso e limitato

1.2 Derivata direzionale

Data la funzione $f(x, y)$, la derivata in direzione (v_1, v_2) in (x_0, y_0) vale

$$v_1\, f_x(x_0, y_0) + v_2\, f_y(x_0, y_0)$$

1.3 Limiti

$$\lim_{0, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y, 0 \rightarrow 0} (x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L? \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x, y \rightarrow 0} = L$$

1.3.1 Restrinzione su retta

$$y = m(x - x_0) + y_0 \quad \text{con} \quad m \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0)$$

Se il limite dipende da m allora significa che il limite di partenza non esiste. In caso contrario non è possibile concludere nulla.

1.4 Determinare la differenziabilità

1. Verifico che la funzione $f(x, y)$ sia continua in (x_0, y_0), utilizzando il limite se necessario

2. Verifico che la funzione sia derivabile calcolando le derivate parziali utilizzando il limite, verificando che esistano entrambe ($\neq \pm\infty$)

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\ f_y(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \end{aligned}$$

   Teorema del differenziale totale: se A ha derivate parziali continue in un intorno di (x_0, y_0) è differenziabile in quel punto

3. Verifico la differenziabilità

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\, h - f_y(x_0, y_0)\, k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

1.5 Calcolare il potenziale di una forma differenziale

Forma differenziale $w(x, y) = A_1(x, y)\, \mathrm{dx} + A_2(x, y)\, \mathrm{dy}$

Data una forma differenziale $A_1(x, y)\, \mathrm{dx} + A_2(x, y)\, \mathrm{dy}$

1. Controllo che la forma differenziale sia chiusa (il campo associato $A = (A_1(x, y), A_2(x, y))$ deve essere irrotazionale)

$$(A_1)_y = (A_2)_x$$

   Se la forma non è chiusa, significa che non può essere esatta e quindi neanche integrabile (grazie alla condizione del rotore) [fine].

2. Se il dominio è semplicemente connesso, oltre ad essere chiusa è anche esatta e quindi la forma è integrabile [fine].
3. Calcolo manualmente una primitiva F
4. Se $\nabla F = A$, la forma è integrabile.

Metodo manuale per il calcolo della primitiva

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)]\, \mathrm{dx} = f(x, y) + C(y)$$

2. Derivo $f(x, y) + C(y)$ rispetto a y e pongo la derivata $= A_2(x, y)$

$$\frac{d}{\mathrm{dy}}[f(x, y) + C(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo C (eventulmente integrando $C'(y)$ del passaggio precedente) e sostituisco il valore trovato in $f(x, y) + C(y)$, il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

1.6 Lunghezza di una curva

$$\wedge\gamma(t) = \int_a^b \|\dot{\gamma(t)}\|\, \mathrm{dx}$$

che in una sola variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + \dot{f(t)}^2}\, \mathrm{dt}$$

Lunghezza di una curva in coordinate polari piane

(la formula è da verificare)

Data una curva polare $\rho(\theta)$ e $\theta \in [a, b]$, si ha

$$\wedge \rho(\theta) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} \mathrm{dx}$$

Altra formula

$$\wedge(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\dot{\rho(t)}]^2 + [\rho(t)]^2 \cdot [\theta(t)]^2}$$

Lunghezza di una curva in coordinate polari cilindriche

$$\wedge(t) = \int_a^b \sqrt{[\dot{\rho(t)}]^2 + [\rho(t)]^2 \cdot [\dot{\theta(t)}]^2 + [z(t)]^2} \cdot \mathrm{dt}$$

Lunghezza di una curva in coordinate polari sferiche
(vedi appunti "verdi")

1.7 Integrale curvilineo

$$\int_\gamma f(x, y) = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma(t)}\| \, \mathrm{dt}$$

1.8 Integrale di campo (integrale di linea)

Dato il campo vettoriale $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, $f\colon \Omega \to R^2$, $\Omega \subseteq R^2$
e una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$

$$\int_\gamma f \, d\gamma = \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) \, x'(t) + f_2(x(t), y(t)) \, y'(t)] \, \mathrm{dt} = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{dt}$$

1.9 Area della porzione di grafico (o superficie di $f(x, y)$)

$$A = \int_a^b \int_c^d |f_x \wedge f_y| \, \mathrm{dy} \, \mathrm{dx}$$

$$A = \int_a^b \left(\int_c^d \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}$$

Per curve date in coordinate polari

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 \, d\theta$$

1.10 Integrale superficiale

$$\int_\Delta f(\Phi_{(u,v)}) \, |\Phi_u \wedge \Phi_v| \, \mathrm{du} \, \mathrm{dv}$$

Esempio

Calcolare $\int_\Sigma x \, d\sigma$. $\Sigma = \mathrm{graph}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 < x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \qquad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}$$

Determino gli estremi di integrazione in coordinate polari: θ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ in quanto ci troviamo nel primo quadrante, mentre $1<\rho<\sqrt{2}$ poiché $1<\rho^2<2$. Per effettuare il cambio di coordinate necessito del determinate della Jacobiana, ovvero $\det(J)=\rho$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} d\rho\, \rho \cos(\theta) \sqrt{\frac{1+\rho^2}{\rho^2}}\, \rho \quad =$$

$$= \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{1+\rho^2}\, d\rho \quad = \quad ...$$

Esempio

Calcolo della superficie laterale di un solido di rotazione

$$S_{\text{laterale}} = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1+f'(z)^2}\, \mathrm{dz}$$

Esempio

Calcolo della superficie di una sfera

$$f(z)=\sqrt{1-z^2}$$

$$S_{\text{sfera}} = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-z^2} \sqrt{1+\frac{z^2}{1-z^2}}\, \mathrm{dz} = 4\pi$$

1.11 Volume

$$V = \int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d \mathrm{dy} \int_e^f \mathrm{dz}$$

Esempio

Calcolo del volume di un solido ottenuto ruotando una funzione $f(z)>0$ attorno all'asse z

$$T = \left\{ (\rho,\theta,z) \quad : \quad \begin{cases} a<z<b \\ 0<\rho<f(z) \\ 0<\theta<2\pi \end{cases} \right\}$$

$$V(T) = \int_T \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} =$$

$$= \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \mathrm{dz} \int_0^{f(z)} \rho\, d\theta = 2\pi \int_a^b \mathrm{dz}\, \frac{1}{2} f^2(z) = \pi \int_a^b f^2(z)\, \mathrm{dz}$$

Esempio

Calcolo del volume di una sfera

$$f(z)=\sqrt{1-z^2}$$

$$V_{\text{sfera}} = \pi \int_{-1}^{1} f^2(z)\, \mathrm{dz} = \pi \int_{-1}^{1} (1-z^2)\, \mathrm{dz} = \frac{4}{3}\pi$$

1.12 Integrale su un insieme

1.12.1 In 2 variabili

Se T è "normale'

$$\int_T f(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dx}$$

1.12.2 In 3 variabili

$$\int_\Omega f(x,y,z)\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dz}$$

Integrazione per strati

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{dz} \int_{\Omega(z)} f(x,y,z)\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}$$

Integrazione per fili

$$\int_{\Pi_{x,y}(\Omega)} \mathrm{dx}\, \mathrm{dy} \int_{\Omega(x,y)} f(x,y,z)\, \mathrm{dz}$$

1.12.3 Cambio di variabile

(necessita di revisione)

$$\int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{\Omega'} f(g(y))\,|\det(g'(y))|\,\mathrm{dy}$$

- $g: \Omega \rightarrow \Omega'$
- Ω, Ω' aperti
- $g \in C'$
- g invertibile

1.13 Inversione locale

Data $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

$F(x, y)$ è localmente invertibile in (x_0, y_0) se il determinante Jacobiano in (x_0, y_0) è non nullo

$$|J(x_0, y_0)| = \left| \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

Metodo pratico

1. Determino $f(x, y)$ e $g(x, y)$
2. Calcolo f_x, f_y, g_x, g_y e li inserisco nella matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$$

3. Calcolo il determinante e lo impongo uguale a 0. f sarà invertibile nei punti trovati.

Esempio 1

La trasformazione $F: R^2 \in R^2$ definita ponendo $F(x, y) = (x\,y, x^2 - y^2)$ è localmente invertibile nell'intorno di $(1, 1)$ e $(1, 0)$?

$$f(x, y) = x\,y \quad f_x = y \quad f_y = x$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2 \quad g_x = 2x \quad g_y = -2y$$

$$J = \begin{pmatrix} y & 2x \\ x & -2y \end{pmatrix}$$

$$|J(1, 1)| = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \quad \Longrightarrow \quad \text{si}$$

$$|J(1, 0)| = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{si}$$

Esempio 2

La trasformazione $T(x, y) = (x^2 y, x\,y^2)$ in $(0, 0)$

$$f(x, y) = x^2 y \quad f_x = 2\,x\,y \quad f_y = x^2$$

$$g(x, y) = x\,y^2 \quad g_x = y^2 \quad g_y = 2\,x\,y$$

$$|J(0, 0)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi non è localmente invertibile (ma è differenziabile..perché?)

1.14 Teorema del Dini

- Per esplicitare una funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile y (o alla x) è necessario che $f_y \neq 0$ ($o\,f_x \neq 0$)

- Per applicare il Th. del Dini in un punto (x_0, y_0) è necessario che

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

1.15 Direzione di massima pendenza

- Direzione di massima pendenza ascendente di f in (x_0, y_0)

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- Direzione di massima pendenza discendente di f in (x_0, y_0)

$$-\nabla f(x_0, y_0) = -\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se $=(0, 0)$ non è definita (punto stazionario).

La direzione della curva di livello di una funzione f in un punto $(x_0,\ y_0)$ è ortogonale alla direzione di massima pendenza.

1.16 Vettore normale

Il vettore normale di $f(x, y)$ si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t}$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

Se la superficie S è data implicitamente, come la serie di punti (x, y, z) che soddisfano $F(x, y, z) = 0$, allora la normale nel punto (x, y, z) alla superficie è data dal gradiente

$$\nabla F(x, y, z)$$

1.17 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.18 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

Necessita di revisione!

1. Calcolo il vettore normale alla superficie parametrica

$$\Phi u \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi_v \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

   e se $=0$ la superfice è non regolare

2. Scrivo l'equazione del piano tangente

$$E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0) = 0$$

1.19 Polinomio di Taylor

1.19.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.19.2 Formula di ordine 2

$$\text{(formula di ordine I)} + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

1.20 Punti critici

Da Wikipedia: se il gradiente della funzione f è nullo in un punto x appartenente al dominio della funzione, allora f in x ha un punto critico. Il determinante dell'hessiana (detto semplicemente hessiano) in x è anche detto discriminante in x. Se questo determinante è zero allora x è chiamato punto critico degenere della f. Negli altri punti viene chiamato non degenere.

Devo considerare i punti critici della funzione pondendo tutte le derivate parziali $= 0$. L'annullamento di tutte le derivate in (x_0, y_0) è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (x_0, y_0) sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{\mathrm{xx}}(x_0, y_0) & f_{\mathrm{xy}}(x_0, y_0) \\ f_{\mathrm{yx}}(x_0, y_0) & f_{\mathrm{yy}}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

con $f_{\mathrm{xy}} = f_{\mathrm{yx}}$ (grazie al teorema di Schwarz)

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di H e verificare:
   - det > 0 e 1° elemento > 0 allora (x_0, y_0) è un punto di minimo
   - det >0 e 1° elemento < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di massimo
   - det < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di sella
2. Calcolare $\det(H - \lambda I)$ e trovare gli autovalori:
   - Se sono concordi < 0 allora ho un punto di massimo
   - Se sono concordi > 0 allora ho un punto di minimo
   - Se sono discordi ho una sella
   - Se uno di essi $= 0$ allora ho un punto degenere

2 Appunti utili

2.1 Discontinuità

Discontinuità di I specie (o di salto). Il limite sinistro e destro della funzione sono entrambi finiti ma non coincidono.

Discontinuità di II specie (o essenziale). Uno dei due limiti è infinito o non esiste

Disconinuità di III specie (o eliminabile). Il limite destro e quello sinistro coincidono ma la funzione nel punto non assume lo stesso valore del limite.

2.2 Derivate

2.2.1 Derivate fondamentali

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D(\log_b(x)) = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x\ln(b)}$$

2.2.2 Derivate di funzioni composte

$$D\big(a^{f(x)}\big) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$$

$$D\big(f(x)^{g(x)}\big) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$D\big(x^{f(x)}\big) = x^{f(x)} \cdot \left[f'(x) \cdot \ln(x) + \frac{f(x)}{x}\right]$$

2.3 Formule trigonometriche

2.3.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

2.3.2 Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(a)$$

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

2.3.3 Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

2.3.4 Formule parametriche

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

2.4 Cambi di coordinate

2.4.1 Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

Coordinate polari centrate in P_0

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho\sin(j) \end{cases}$$

2.4.2 Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}$$

$$|J| = \rho^2\sin(\theta)$$

2.4.3 Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

2.5 Funzioni utili

2.5.1 Circonferenza

Equazione cartesiana

Centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione cartesiana in forma canonica

$$x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + c = 0$$

dove $c = a^2 + b^2 - r^2$

Condizione di realtà:

$$x_0^2 + y_0^2 - c > 0$$

Trovare il centro di una circonferenza

Data una circonferenza

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$$

questa ha centro in

$$x_C = -\frac{a}{2}, \quad y_C = -\frac{b}{2}$$

Equazione in coordinate polari

$$\rho = r$$

Equazione parametrica

$$C\colon \begin{cases} x = x_0 + R\cos(t) \\ y = y_0 + R\sin(t) \end{cases} t \in [0, 2\,\pi]$$

2.5.2 Ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equazione parametrica

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \\ o \leqslant t \leqslant 2\,\pi \end{cases}$$

Area

$$A = \pi\, a\, b$$

2.5.3 Seno iperbolico

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

La funzione è sempre crescente e si annulla nel punto $x = 0$

2.5.4 Coseno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D(\cosh(x)) = \sinh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

La funzione è sempre positiva

2.6 Limiti notevoli

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{a^{f(x)-1}}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{f(x)\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{(1 + f(x))^c - 1}{f(x)} = c$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\arcsin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\arctan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sinh(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\cosh(f(x)) - 1}{f(x)^2} = 0$$

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\tanh(f(x))}{f(x)} = 1$$

2.7 Integrali

2.7.1 Integrazione per parti

$$\int f(x)\, g'(x)\,\mathrm{dx} = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\,\mathrm{dx} + C$$

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\,\mathrm{dx} = f(b)\, g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\,\mathrm{dx}$$

2.7.2 Integrali utili

$$\int f^n(x)\, f'(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int a^{f(x)}\, f'(x)\,\mathrm{dx} = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}[x - \sin(x)\cos(x)] + C$$

$$\int \cos^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}[x + \sin(x)\cos(x)] + C$$

$$\int \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{2}\cos^2(t) + C$$

Da verificare:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int (1 + \mathrm{cotan}^2(x))\,\mathrm{dx} = -\mathrm{cotg}(x) + C$$

2.7.3 Sostituzioni utili

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow x = \sinh(t) \\ \sqrt{x^2-1} \Longrightarrow x = \cosh(t) \\ \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow x = \left\{ \begin{smallmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{smallmatrix} \right. \\ \sqrt{-1-x^2} \Longrightarrow \text{non ha senso in } \mathbb{R} \end{cases}$$