DEFINIZIONI E TEOREMI V2 - ALGEBRA LINEARE

MONDINI GIANLUCA

Contents

Definizioni

Insieme $\mathbb{R}^n$. Fissato un generico intero n, si chiamerà R^n l'insieme delle n-uple ordinate di numeri reali; n si dirà dimensione di R^n.

R^n è un prodotto cartesiano di n coppie di numeri reali

Vettore in $\mathbb{R}^n$. Dato $x \in R^n$, con $x = (x_1..x_n)$ il numero reale x_i è detto i-esima componente del vettore x

Somma di vettori. Dati due vettori appartenenti a R^nsi definisce la loro somma come il vettore cha ha per componenti la somma delle loro componenti corrispondenti

Vettore nullo. In ogni spazio R^n si denota con 0 il vettore che ha tutte le componenti nulle (vettore nullo); è l'elemento neutro della somma, cioè gode della proprietà di non alterare alcun vettore a cui viene sommato.

Opposto di un vettore. Dato un vettore u in R^nsi definisce il suo opposto come il vettore ottenuto da esso cambiandone di segno tutte le componenti, e si indica con $-u$

Differenza tra due vettori. La differenza $u - v$ fra due vettori u e v appartenenti ad R^n, presi in ordine, è definita come la somma del primo con l'opposto del secondo.

Spazio vettoriale. È una struttura algebrica composta da:

- un campo
- un insieme i cui elementi sono detti vettori
- due operazioni binarie, dette somma e moltiplicazione per uno scalare

Norma di un vettore. Uno spazio vettoriale in cui è definita la norma di un vettore è uno sapzio normato. Vi sono diversi tipi di norma; la norma euclidea di un vettore $v = (v_1..v_n) \in R^n$ è il numero:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$

Questa quantità è geometricamente interpretata come la lunghezza del vettore.

Versore. Un versore è un vettore in uno spazio normato di modulo unitario, utilizzato per indicare una particolare direzione e verso. Dato un qualunque vettore v (diverso dal vettore nullo che è l'unico ad avere modulo pari a zero) è possibile formare un versore moltiplicandolo per l'inverso del suo modulo

$$\hat{v} = \frac{v}{|v|}$$

Dimostrazione.

$$|\hat{v}| = \left|\frac{1}{|u|}u\right| = \frac{1}{||u||}\,|u| = \frac{1}{|u|}\,|u| = 1$$

posso togliere il valore assoluto perché la norma è definita positiva

Distanza euclidea. È la distanza fra due punti, ossia la misura del segmento avente per estremi i due punti.

Prodotto scalare. Dati due vettori arbitrari in R^n, definiamo il loro prodotto scalare (o interno) come lo scalare ottenuto dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti.

Vettori ortogonali.

Spazio euclideo. È uno spazio vettoriae in cui valgono gli assiomi e i postulati della geometria euclidea.

Coseno dell'angolo in $\mathbb{R}^n$.

Coseno tra versori in R^2. u, v in R^2, $|u| = |v| = 1$

$u = (u_1, u_2) = (cos\,(\phi)\,, sin\,(\phi))$
$v = (v_1, v_2) = (cos\,(\beta)\,, sin\,(\beta))$
$cos\,(\phi - \beta) = cos\,(\phi)\,cos\,(\beta) + sin\,(\phi)\,sin\,(\beta) = v_1u_1 + u_2v_2 = uv$
Il coseno dell'angolo $(\phi - \beta)$ compreso tra u e v è uguale al prodotto fra u e v

Coseno dell'angolo in R^n. Dati due vettori in R^n si definisce il coseno dell'angolo da essi formato come il rapporto fra il loro prodotto scalare e il prodotto delle loro norme.

Proiezione ortogonale.

Prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$. Il prodotto vettore (o esterno) è definito in R^3 ponendo $a \wedge b =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Span. Insieme delle combinazioni lineari $\langle x, y, z\rangle$ tale che $\langle x, y, z\rangle = \{\alpha x + \beta y + \lambda z \,:\, \alpha, \beta,$

Questo insieme è lo spazio generato da vettori dati ed è un sottospazio dello spazio vettoriale

Sistema di vettori ortogonale. Una base ortogonale è una base di vettori ortogonali rispetto al prodotto scalare definito sullo spazio vettoriale.

I vettori sono ortogonali 2 a 2

$$e_1..e_n \quad t.c. \quad e_ie_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \alpha \neq 0 & i = j \end{cases}$$

Sistema di vettori ortonormale. Una base ortonormale di uno spazio vettoriale munito di prodotto scalare definito positivo è una base composta da vettori di norma unitaria e ortogonali tra loro, ossia una base ortogonale di vettori di norma uno.

La norma di ogni vettore è 1

$$e_1..e_n \quad t.c. \quad e_ie_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Dimensione di uno spazio vettoriale. La dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una sua base, ovvero è il numero di vettori che la compongono.

Applicazioni lineari. Siano V e W due spazi vettoriali definiti su un campo K.

Supponiamo di avere un'applicazione

$$F : V \to W$$

Un'applicazione tra spazi vettoriali si dice lineare se soddisfa tre condizioni

- $F : 0 \in V \to 0 \in W$, ossia

$$F(0) = 0$$

- Dati due vettori $v_1, v_2 \in V$, l'immagine della somma è uguale alla somma delle immagini

$$F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$$

- Dato $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, l'immagine del prodotto di v per lo scalare è uguale al prodotto dello scalare per l'immagine

$$F(\lambda v) = \lambda F(v)$$

Applicazione iniettiva (necessita rev.) Un'applicazione lineare si dice iniettiva quando la dimensione del suo nucleo è uguale a 0

$$\dim(\ker(A)) = 0$$

f è iniettiva se e solo se A ha rango n (in questo caso si dice che A ha rango per colonne massimo)

Applicazione suriettiva (necessita rev.) Un'applicazione lineare si dice suriettiva quando la sua immagine corrisponde al codominio

f è suriettiva se e solo se A ha rango m (in questo caso si dice che A ha rango per righe massimo)

Applicazione biiettiva. A è invertibile se e solo se A ha rango n (e si dice che A ha rango massimo). Questo accade se e solo se f è biettiva.

Applicazione inversa. Siano V e W spazi vettoriali, e T un'applicazione lineare invertibile (iniettiva ($\ker(T) = 0$) e suriettiva ($Im(T) = W$))

$$T : V \to W$$

allora l'applicazione inversa rispetto a T è

$$S : W \to V$$

Spazio delle applicazioni lineari.

Spazio duale. Sia V un K-spazio vettoriale. Lo spazio duale $V*$ di V è lo spazio vettoriale formato da tutti i funzionali lineari

$$f : V \to K$$

Insieme C^n. È l'insieme delle n-uple di numeri complessi

Matrice. Una matrice è una tabella ordinata di elementi.

Dimensione di una matrice.

Vettore riga. Un vettore riga è una matrice costituita da una sola riga ($M_{1\times n}$)

Vettore colonna. Un vettore colonna è una matrice costituita da una sola colonna ($M_{n\times 1}$)

Matrice quadrata. Una matrice è detta quadrata se ha un numero uguale di righe e colonne, detto ordine della matrice. Viene altrimenti detta "matrice $n \times n$".

Si tratta del tipo più comune e più importante di matrice, l'unico su cui sono definiti concetti come determinante, (traccia), autovalore.

Le matrici quadrate sono utili a modellizzare le trasformazioni lineari di uno spazio vettoriale in se stesso (più precisamente, i suoi endomorfismi), le forme bilineari ed i prodotti scalari.

Matrice identità. La matrice identità, detta anche matrice identica o matrice unità, è una matrice quadrata in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono costituiti dal numero 1, mentre i restanti sono 0. Viene indicata con I oppure con I_n, dove n è il numero di righe della matrice.

Matrice triangolare. Una matrice triangolare è una matrice che ha tutti gli elementi nulli sotto o sopra la diagonale principale.

Matrice diagonale. Una matrice diagonale è una matrice quadrata in cui solamente i valori della diagonale principale possono essere diversi da 0.

Non si impone che i valori sulla diagonale siano diversi da zero: la matrice quadrata nulla è quindi diagonale.

Matrice trasposta. La trasposta di una matrice A è la matrice A^T il cui generico elemento con indici (i, j) è l'elemento con indice (j, i)

Applicazione (forma) bilineare.

Definizione Longo. Dato uno spazio vettoriale reale X, chiameremo forma bilineare su X una qualunque funzione

$$a : X \times X \to R$$

tale che la funzione

- $x \to a(x, y)$ lineare $\forall y$ fissato
- $y \to a(x, y)$ lineare $\forall x$ fissato

Definizione internet. Sia V uno spazio vettoriale. Un'applicazione

$$f : V \times V \to K$$

è detta forma bilineare su V se è lineare in entrambi gli argomenti.
Gode delle seguenti proprietà:

- $f(v + v', w) = f(v, w) + f(v', w)$
- $f(v, w + w') = f(v, w) + f(v, w')$
- $f(kv, w) = f(v, kw) = kf(v, w)$

Si distingue in:

- simmetrica se
$$f(v, w) = f(w, v)$$
- antisimmetrica se
$$f(v, w) = -f(w, v)$$
In particolare, essendo antisimettrica:
$$f(v, v) = -f(v, v) = 0$$

Forma bilineare simmetrica. Data la forma bilineare $a : X \times X \to R$, X reale verrà detta simmetrica se e solo se

$$a(x, y) = a(y, x)$$

per ogni $x, y \in X$

Applicazione multilineare.

Matrice associata ad un'applicazione bilineare.

Matrice autoagguinta (o hermitiana). È una matrice a valori complessi che coincide con la propria trasposta coniugata (o matrice aggiunta)

$$a_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$$

Matrice singolare. Una matrice A è singolare se ha determinante uguale a 0.

Complemento ortogonale. Sia V uno spazio vettoriale su un campo K munito di un prodotto scalare. Sia W un sottoinsieme di V. Il sottospazio ortogonale $W^{\perp}$di W è l'insieme dei vettori ortogonali a tutti i vettori di W:

$$W^{\perp} = \{w \in V \quad | \quad \Phi(v, w) = 0 \forall w \in W\}$$

Proiezione su un sottospazio.

Combinazione lineare. Una combinazione lineare di alcuni elementi di uno spazio vettoriale è un espressione del tipo:

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n$$

dove i v_i sono elementi dello spazio vettoriale e gli $a_i$sono scalari. Il risultato di questa combinazione è un nuovo elemento dello spazio.

Dipendenza lineare. $x_1..x_n \in X$ spazio vettoriale reale o complesso, si dicono dipendenti (linearmente indipendenti) se esistono $a_1..a_n$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

CNS affinché n vettori $x_1..x_n$siano dipendenti è che uno di essi sia combinazione lineare degli altri, cioè sta nello span degli altri; 2 vettori non allineati ad esempio generano tutto il piano.

Dimostrazione. Se $x_1..x_n$ sono dipendenti uno di essi è combinazione lineare degli altri

$$\exists a_1..a_n$$

non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

supponiamo $a_1 \neq 0$ (andrebbe bene un qualsiasi a_i)
$a_i x_i + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_i x_i = -\sum_{i=2}^{n} a_i x_i$

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} -\frac{a_i x_i}{a_1}$$

quindi almeno uno degli n vettori è combinazione lineare degli altri
Se uno degli n vettori è combinazione lineare degli altri$\Longrightarrow$ $x_1..x_n$ dipendenti
Supponiamo $x_1 = \sum_{i=2}^{n} b_j x_j \Longrightarrow \sum_{j=2}^{n} b_j x_j \quad x_1 = 0$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j = 0, \quad b_1 = -1$$

ho almeno un coefficiente non nullo, e perciò sono linearmente indipendenti.

Dipendenza lineare. $x_1..x_n \in X$ spazio vettoriale reale o complesso, si dicono dipendenti (linearmente dipendenti) se sistono $a_1..a_n$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

CNS affinché n vettori $x_1..x_n$siano dipendenti è che uno di essi sia combinazione lineare degli altri, cioè sta nello span degli altri; ad esempio due vettori non allineati generano tutto il piano.

Spazio di dimensione finita. Uno spazio vettoriale ha dimensione finita quando la cardinalità della sua base è un numero finito.

Matrice associata. Sia $A : X \to Y$ con A lineare e X, Y di dimensione finita. Siano poi $e_1..e_n$una base di X e $f_1..f_n$una base di Y. Si ha, per ogni fissato (?) $x \in X$

$$A(x) = A\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j A(e_j)$$

dove $x_1..x_m$sono le coordinate di x rispetto alla base $e_1..e_m$.

Siano ora a_{ij}, per ogni $i = 1..n$ le coordinate del vettore $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1..f_n$. Ne segue che

$$A(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) f_i$$

La matrice (a_{ij}) avente come colonna j esima le coordinate del vettore $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1..f_n$verrà detta matrice associata all'applicazione A e alle basi $e_1..e_n$di X e $f_1..f_n$di Y.

Matrice estratta/sottomatrice. Una sottomatrice di una matrice $A_{n\times m}$ con n e m interi non negativi, è una matrice $B_{r\times s}$ con r e s interi tali che $0 \le r \le n$ e $0 \le s \le m$ ottenuta da A rimovendo $n - r$ righe e $m - s$ colonne

Matrice minore. Un minore è il determinante di una sottomatrice (quadrata, cioè con $r = s$). Il numero r è definito ordine del minore.

Un minore complementare è un minore di A ottenuto togliendo una sola riga e una sola colonna da A.

Rango di una matrice. Il rango (o caratteristica) di una matrice A a valori in un certo campo è il massimo numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti in A.

Le seguenti definizioni di rango sono tutte equivalenti:

- il massimo numero di colonne linearmente indipendenti
- il massimo numero di righe linearmente indipendenti
- La dimensione del sottospazio di K^mgenerato dalle colonne di A
- La dimensioen del sottospazio di K^ngenerato dalle righe di A

Caso di prodotto tra matrici.

$$rg(AB) \le min\{rg(A), rg(B)\}$$

Rango di una trasformazione lineare. Il rango di un'applicazione lineare corrisponde alla dimensione dello spazio vettoriale dato dalla sua immagine.

Forma quadratica. Dato uno spazio vettoriale reale X, una funzione $H : X \to R$ verrà detta forma quadratica su X se esiste una forma bilineare a su X tale che

$$H(x) = a(x, x)$$

per ogni $x \in X$

[necessita di revisione]

Forma diagonale rispetto ad una base.

Operatore diagonalizzabile.

Base spettrale. Una base costituita da autovettori si dice base spettrale quindi A è diagonalizzabile se e solo se ammette base spettrale

Polinomio caratteristico di un operatore.

$$p(x) = \det(A - xI)$$

Operatore autoaggiunto.

$$A(u)\,v = uA(v)$$

Sistema "a scala".

Sottospazio affine.

Premessa. È un sottoinsieme di uno spazio affine avente proprietà tali da farne a sua volta un altro spazio affine. Esempi di sottospazi affini sono i punti, le rette e piani nell'ordinario spazio euclideo.

I sottospazi affini si distinguono dai sottospazi vettoriali per il fatto che non sono forzati a passare per un punto fissato (l'origine dello spazio vetoriale). A differenza dei sottospazi vettoriali, i sottospazi affini possono quindi non intersecarsi ed essere ad esempio paralleli. Questa maggiore libertà ha però una controparte: per i sottospazi affini non vale la formula di Grassmann.

I sottospazi affini sono strettamente correlati ai sistemi lineari.

Definizione. Un sottospazio affine di uno spazio vettoriale V è un sottoinsieme S del tipo

$$S = p + W = \{p + w \quad | \quad w \in W\}$$

Spostamento sullo spazio X.

Matrice di cambio di base.

Premessa. $x \in X$, $\dim(X) = n$

$e_1..e_n$base di X, non necessariamente canonica.

Dato un vettore e una base, è possibile associare ad ogni vettore x una n-upla di scalari $x_1..x_n$corrispondenti alle coordinate del vettore tali che

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Cambiando la base di riferimento, cambiano le coordinate associate al vettore.

$A : X \to Y$ applicazione lineare

$dim(X) = n$ con $e_1..e_n$base per X

$dim(Y) = m$ con $f_1..f_n$base per Y

Data un'applicazione lineare fra spazi di dimensione finita e scegliendo una base nello spazio di partenza e una in quello di arrivo è possibile definire la matrice associata

$$A(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j f_i$$

la matrice associata ha come colonna j-esima l'n-upla delle coordinate $A(e_j)$ rispetto alla base $f_1..f_n$

Definizione. X spazio vettoriale di dimensione finita, $e_1..e_n$ e $e'_1..e'_n$ basi di X

La matrice di cambio di base (o di transizione o associata al cambio di base) è definita come la matrice avente come colonne le coordinate di ciascuno dei vettori $e'_1..e'_n$ rispetto alla base $e_1..e_n$

$$M = (m_{ij})$$

dove $e'_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} e_i$

Fissato j, m_{ij} con $i..n$ cioè tutta la colonna j rappresenta le coordinate di e'_j rispetto alla base "vecchia" $e_1..e_n$

Definizione (internet). Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Siano B, C due basi diverse di V, e siano $b_1..b_n$i vettori che compongono la base B. Si definisce matrice di cambiamento di base dalla base B alla base C l'unica matrice M le cui colonne sono le coordinate dei vettori b_i rispetto ai vettori della base C

Autovettore e autovalore. Sia V uno spazio vettoriale e sia T un endomorfismo di V, cioè una trasformazione lineare.

$$T : V \to V$$

Se v è un vettore non nullo in V e λ è uno scalare tale che

$$T(v) = \lambda v$$

allora v è un autovettore della trasformazione T, e λ è il suo autovalore.

Poiché T è lineare, se v è un autovettore con autovalore λ, allora ogni suo multiplo non-nullo di v è anch'esso un autovettore con lo stesso autovalore λ.

Spettro e autospazio. L'insieme degli autovalori di A si definisce spettro, mentre l'insieme degli autovettori relativi ad un autovalore λ e dello 0 verrà chiamato autospazio di λ.

Somma diretta.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$$

se e solo se per ogni $x_i, x_i' \in X_i$, $i = 1..n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \Longrightarrow x_i = x_i' \quad \forall i = 1..n$$

Lemma (criterio perché una somma sia diretta). Condizione necessaria e sufficiente

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \bigoplus_{i=1}^{n} X_i$$

è che per ogni $x_i \in X_i$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i = 0 \quad \forall i = 1..n$$

Sistema di vettori indipendenti.

Base di uno spazio vettoriale. È un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio. In modo equivalente, ogni elemento dello spazio vettoriale può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori appartenenti alla base.

Se la base è composta da un numero finito di elementi allora la dimensione dello spazio è finita. In particolare, il numero di elementi della base è la dimensione dello spazio.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale. L'insieme $v_1..v_n$ di elementi di V è una base di V se valgono entrambe le seguenti proprietà:

- I vettori $v_1..v_n$ sono linearmente indipendenti, ovvero:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

  è verificata solo se i numeri $a_1..a_n$ sono tutti uguali a 0.
- I vettori $v_1..v_n$generano V, ovvero:

$$V = Span(v_1..v_n) = \{a_1 v_1..a_n v_n\}$$

  in particolare, per ogni vettore $v \in V$ i numeri $a_1..a_n$ sono le sue coordinate rispetto alla base scelta.

Sottospazio vettoriale. È un sottinsieme di uno spazio vettoriale avente proprietà tali da renderlo a sua volta uno spazio vettoriale. Alcuni esempi sono le rette ed i piani nello spazio euclideo tridimensionale passanti per l'origine.

L'insieme W è un sottospazio vettoriale di V se esso è chiuso rispetto alle operazioni di somma e di moltiplicazione per scalare.

In pratica, si dimostra che W è un sottospazio vettoriale se e solo se valgono le seguenti proprietà:

- $u, v \in W$, allora $(u + v) \in W$
- $u \in W$ e $\lambda \in R$, $\lambda u \in W$

Nucleo. Sia $F : V \to W$ un applicazione lineare definita tra spazi vettoriali.

$$\ker(F) = \{v \in V \quad t.c. \quad F(v) = 0 \in W\}$$

Immagine. Sia $F : V \to W$ un applicazione lineare definita tra spazi vettoriali.

$$Im(F) = \{w \in W \quad t.c. \quad \exists v \in V \quad per\ cui \quad F(v) = w\}$$

Sottospazio somma. Sia V uno spazio vettoriale dotato di dimensoine finita. Siano W e U due sottospazi di V. Si indica con $W + U$ il sottospazio somma di W e U dato da:

$$W + U = \{w + u | w \in W, u \in U\}$$

Matrice inversa. Una matrice quadrata $A_{n\times n}$ è detta invertibile se esiste una matrice $B_{n\times n}$ tale che:

$$AB = BA = I_n$$

Prodotto scalare hermitiano in $\mathbb{C}$.

Definizione. $\forall z \in C$, $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \geq 0$
$u, v \in C^n : uv = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i$

Proprietà.

- Hemisimmetria (no simmetria): $vu \neq uv$
- Sesquilinearità (no linearità): $(\alpha u)\, v \neq u\, (\alpha v)$

Operatore diagonalizzabile. Un operatore $A : X \to X$ si dice diagonalizzabile se esiste una base rispetto alla quale è diagonalizzabile

Sottospazio invariante. Dato un operatore $T : V \to V$, dove V è uno spazio vettoriale, un sottospazio invariante di T è un sottospazio vettoriale W di V tale che $T(W) \subset W$, ovvero tale che l'immagine rispetto a T di ciascun elemento di W è contenuta in W stesso. Si dice anche che W è $T-$*invariante*

Teoremi

Disugualianza triangolare.

Tesi.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Dimostrazione (trovata su internet).

$$-\,|a| \leq a \leq |a|$$

$$-\,|b| \leq b \leq |b|$$

quindi

$$-\left(|a| + |b|\right) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

da cui la tesi

Dimostrazione (fatta da me..ha senso?)

$$(x + y)^2 = \left(|x|^2 + |y|^2\right)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2\,|x|\,|y| + y^2$$

$$xy \leq |x|\,|y|$$

Dimostrazione (trovata su internet, caso complesso).

Disugualianza di Cauchy-Swartz.

Definizione. Il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme

Tesi (secondo Lang).

$$(AB)^2 \leq (AA)\,(BB)$$

Tesi (con radice estratta).

$$|AB| \leq |A|\,|B|$$

.

Dimostrazione (da YouMath, caso complesso).

$$|u,v| \leq \sqrt{uu}\sqrt{vv} = |u|\,|v|$$

Dato $a \in C$ e dati u, v vale

$$(u + av, u + av) = (uu) + \bar{a}\,(u, v) + a\,(u, v) + a\bar{a}\,(v, v) \geq 0$$

Poniamo $(v, u) = be^{i\theta}$ e $a = te^{-i\theta}$
[to be continued..]

Dimostrazione (Lang?) Sia $x = BB$ e $y = -AB$; segue allora che

$$0 \leq (xA + yB)\,(xA + yB)$$

Sviluppando il secondo membro si ha che

$$0 \leq x^2\,(AA) + 2xy\,(AB) + y^2\,(BB)$$

Sostituendo i valori di x e y si ottiene

$$0 \leq (BB)^2\,(AA) - 2\,(BB)\,(AB)^2 + (AB)^2\,(BB)$$

Se $B = 0$ la disuguaglianza da provare è ovvia essendo nulli entrambi i membri. Se $B \neq 0$, allora $BB \neq 0$ e possiamo quindi dividere l'ultima espressione per BB ottenendo

$$0 \leq (AA)\,(BB) - (AB)^2$$

La dimostrazione si conclude portando il termine $-(AB)^2$ nel primo membro.

Lemma (3).

Ipotesi.

- $x_1..x_n$ indipendenti
- $y \notin \langle x_1..x_n \rangle$

Tesi. $y, x_1..x_n$ sono indipendenti

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $y, x_1..x_n$ siano dipendenti perciò esistono a_i e b non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + by = 0$$

Se $b = 0$ allora

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

$a_i = 0$ per l'indipendenza di $x_1..x_n$ perciò si ha un assurdo.
Se $b \neq 0$

$$y = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b} x_i$$

$y \in \langle x_1..x_n \rangle$ che p un assurdo, perché va contro le ipotesi
$x_1..x_n, y$ sono indipendenti

Teorema della proiezione.

$$\left(u - u_{\langle e_1..e_n \rangle}\right) e_j = 0$$

Dimostrazione. Usando la linearità del prodotto scalare e il fatto che $e_i e_j \neq 0$ se $i \neq j$ abbiamo che

$$\left(u - u_{\langle e_1..e_n \rangle}\right) e_j = \left(u - \sum_{i=1}^{n} u_{e_i}\right) e_j = \left(u - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{e_i}}{|e_i|^2} e_i\right) e_j =$$

$$= ue_j - \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{e_i}}{|e_i|^2} e_i e_j = u_{e_i} - \frac{u_{e_i}}{|e_j|^2} e_j e_j = 0$$

Tale proprietà di "ortonogalità del resto" ci assicura che il vettore $u - u_{\langle e_1..e_n \rangle}$ è ortogonale a tutti i vettori $e_1..e_n$ e quindi anche a qualunque loro combinazione lineare.

Infatti, posto $w = u - u_{\langle e_1..e_n \rangle} \Longrightarrow we_i = 0$ per ogni $i = 1..n$ si cha

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) w = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i w = \sum_{i=1}^{n} a_i 0 = 0$$

Ciò (?) ci assicura che $u_{\langle e_1..e_n \rangle}$ è l'elemento di $\langle e_1..e_n \rangle$ di minima distanza da u ed la misura minore di u.

$$|u|^2 = \left|u - u_{\langle e_1..e_n\rangle} + u_{\langle e_1..e_n\rangle}\right|^2 = \left|u - u_{\langle e_i..e_n\rangle}\right|^2 + \left|u_{\langle e_1..e_n\rangle}\right|^2 \geq \left|u_{\langle e_1..e_n\rangle}\right|^2$$

[to be continued]

CNS affinché $X+Y = X \oplus Y$. CNS perché $X+Y = X \oplus Y$ (somma diretta) è che $X \cap Y = \{0\}$

Dimostrazione.

(1) $X + Y = X \oplus Y \implies X \cap Y = \{0\}$
(2) $X \cap Y = \{0\} \implies X + Y = X \oplus Y$

$\bar{x} \in X \cap Y$, $\bar{x} \neq 0$ quindi $\bar{x} \in X$ e $\bar{x} \in Y$

$$\bar{x} = \bar{x} + 0 = 0 + \bar{x}$$

quind la somma non può essere diretta
Se la somma è diretta

$$z = x + y = x' + y' = z'$$
$$z = x - x' = y' - y$$

$$z \in X \cap Y$$

$z = 0$ per ipotesi quindi $x = x'$ e $y = y'$

Lemma (soluzione unica con colonne indipendenti).

Ipotesi. $A_1..A_n, B$ in uno spazio vettoriale tale che

$$B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$$

per un opportuna scelta dei coefficienti $\alpha_i \in R\,(o\;C)$

Tesi. $A_1..A_n$ sono indipendenti se e solo se la scelti degli a_i è unica per ogni B per il quale esistono

Tesi (alternativa?) In un sistema lineare la soluzione è unica se le colonne sono linearmente indipendenti

Dimostrazione. Siano $A_1..A_n$indipendenti e α_i e B_i tali che:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i \quad e \quad B = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A_i$$
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i A_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - \beta_i)\, A_i = 0$$

$a_i - \beta_i = 0$ perché indipendenti $a_i = \beta_i$ quindi gli a_i sono unici.
Supponiamo che per ogni B, $\exists$ un(?) (???) a_i

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A_i$$

allora l'unica soluzione di

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = 0$$

sarà $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1..n$ quindi A_i sono indipendenti

Un sistema di vettori ortogonali è linearmente indipendente.

Dimostrazione. $\langle e_1..e_n\rangle$: $e_i e_j = 0$ $e_i e_i \neq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,(e_i e_j) = 0$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) e_j = 0$$

quindi $e_j = 0$ (con j fissato)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,(e_i e_j) = \lambda e_j e_j$$

(ricorda che $e_j e_j \neq 0$ per ipotesi)

$$\lambda_j \left|e_j\right|^2$$

quindi $\lambda_j = 0$ e questo dimostra che il sistema è linearmente indipendente.

Lemma fondamentale.

Tesi. Se $x_1 \in < x_2..x_n >$ (x_1 è combinazione lineare di $x_2..x_n$) allora

$$< x_2..x_n > = < x_1, x_2..x_n >$$

Dimostrazione.

$$x_1 = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i$$

se $x_1 \in < x_2..x_n >$

$$B = \sum_{I=1}^{n} b_I x_I$$

se $B \in < x_1, x_2..x_n >$

$$B = b_1 x_1 + \sum_{I=2}^{n} b_I x_I =$$

$$= b_1 \sum_{i=2}^{n} a_i x_i + \sum_{I=2}^{n} b_I X_I$$

di conseguenza

$$B \in < x_2..x_n >$$

Un vettore dipendente dagli altri non aggiungerà "nulla di nuovo" al loro span e può essere aggiunto o eliminato a piacere senza alterarlo.

Lemma di scambio.

Ipotesi.

- $y \in \langle x_1..x_n \rangle$
- $y \neq 0$

Tesi. $\exists j \in \{1..n\}$ tale che $\langle x_1..x_{j-1}, y, x_{j+1}..x_n \rangle = \langle x_1..x_j..x_n \rangle$

Dimostrazione. Siccome $y \in \langle x_1..x_n \rangle$ allora $\langle x_1..x_n \rangle = \langle y, x_1..x_n \rangle$ per il lemma fondamentale. Inoltre

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq 0$$

di conseguenza $\exists i$ tale che $a_i \neq 0$. Supponiamo che sia $i = 1$.

$$y = (a_1 \neq 0)\, x_i + \sum_{i=2}^{n} a_i x_1 \implies x_1 = \frac{y}{a_1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_i} x_i \implies x_1 \in \langle y, x_2..x_n \rangle$$

$$\langle x_1..x_n \rangle = \langle y, x_1..x_n \rangle = \langle y, x_2..x_n \rangle$$

per il lemma fondamentale.
Nell'algoritmo di Gauss ciò corrisponde a scambiare i pivot.

Teorema di esistenza della base.

Ipotesi.

- $x \neq \{0\}$ (non è costituito solo dal vettore nullo)
- $dimX < \infty$ (dimensione finita)

Tesi. X ha una base

Dimostrazione. Siccome $dimX < \infty$ allora è generato da un numero finito di vettori, quindi $X = \langle x_1..x_n \rangle$. Poiché $x \neq 0$, almeno uno di essi è non nullo.

- Se $x_1..x_n$ indipendenti, essi costituiscono la base richiesta.
- Se non lo sono almeno uno di essi è combinazione lineare degli altri e per il lemma fondamentale può essere rimosso senza alterare lo span, che è X. Continuando a togliere i vettori dipendenti dagli altri si ottiene un sistema che ha lo stesso span X ma formato da vettori dipendenti, in quanto essendo X non ridotto di solo zero, contiene vettori non nulli. Quindi il sistema di generatori così trovato è indipendente e costituisce una base.

Teorema fondamentale sul massimo numero di vettori indipendenti.

Ipotesi.

- $\dim(X) < \infty$
- $x \neq 0$
- $x_1..x_n$ base di X
- $y_1..y_m \in X$, con $m > n$

Tesi. Allora $y_1..y_m$ dipendenti

Dimostrazione. In sostanza se $x_1..x_n$ è una base per X, il massimo numero di vettori indipendenti reperibili è n. Se qualche $y_i = 0$ il sistema è dipendente; quindi sono $y_1..y_n$ vettori non nulli di X. Perciò:

$$\begin{cases} y_1 \in \langle x_1..x_n \rangle = X \\ y_1 \neq 0 \end{cases}$$

per il lemma di scambio segue che y_1 può essere scambiato con uno dei vettori, supponiamo (per semplicità) x_1

$$X = \langle y_1, x_2..x_n \rangle$$

Da $y_2 \in X$ segue che $y_2 = ay_1 + \sum_{i=2}^{n} b_i x_i$. Se $b_i = 0$ per ogni $i = 2..n$. $y_2 = \alpha y_1$ (y_2 multiplo di y_1)

$y_1..y_n$ dipendenti. Se $b_i = 0$ allora il vettore x_i corrispondente può essere scambiato con y_2 senza alterare lo span. Supponiamo sia x_2

$$\begin{cases} y_2 \in \langle 1?, x_2..x_n \rangle = X \\ y_2 \neq 0 \end{cases}$$

Per il lemma di scambio $X = \langle y_1, y_2, x_3..x_n \rangle$.

Continiuamo a scambiare i vettori y_i che seguono, fermandosi se essi sono combinazione dei solo? vettori y_i già scambiati e quindi $y_1..y_n$ dipendenti, oppure scambiandoli con qualcuno degli x_i rimasti, che supponiamo per semplicità essere sempre il primo libero.

Quindi se non ci siamo fermati perché i primi $y_i$sono dipendenti, dopo n scambi abbiamo

$$X = \langle y_1, y_2..y_n \rangle$$

e siccome $m > n$, ogni $y_j \in \langle y_1..y_n \rangle$, con $j < n$ e quindi $y_1..y_n$dipendenti.

Teorema della dimensione.

Ipotesi.

- $dimX < \infty$

Tesi. Tutte le sue basi avranno lo stesso numero di elementi n, che si dirà dimensione di X ($dimX = n$, con n il massimo numero di vettori indipendenti di X)

Dimostrazione. Siccome $dimX < \infty$, per il Th. di esistena della base X ammette basi. Siano $x_1..x_n$ e $y_1..y_m$ basi di X.

Se:

- $m > n$ dal th. sul massimo numero di vettori indipendenti essendo $x_1..x_n$una base ne seguirebbe che $y_1..y_m$ siano dipendenti, contro l'ipotesi che siano una base
- $m < n$ avrebbe analogo ragionamento

Ne segue che $n = m$ e perciò tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi.

Teorema del completamento.

Ipotesi.

- $\dim(X) = n \neq 0$ (spazio di dimensione finita non nulla)
- $y_1..y_m \in X$ indipendente con $m < n$

Tesi. $\exists x_{n+1}..x_n \in X$ tali che $y_1..y_m, x_{m+1}..x_n$base per X

Dimostrazione. Siccome $dim(X) = n$ esiste una base $x_1..x_n$ per X. Si procede quindi come nel Th. sul massimo numero di vettori indipendenti, scambiando uno alla volta i vettori $y_1..y_n$con altrettanti vettori $x_{j1}..x_{jn}$(lemma di scambio). Siccome ad ogni passo i il vettore y_i è indipendente dai precendenti $y_1..y_n$ nell'uguaglianza

$$y_i = \sum_{k=1}^{i-1} a_k y_k + \sum_{j=i+1}^{n} b_j x_j$$

almeno un b_j deve essere non nullo, il che consente di scambiare y_1 con il corrispondente x_i.

Terminati gli scambi, tutti i vettori $y_1..y_n$sono stati scambiati con altrettanti $x_1..x_n$ mantenendo lo stesso span di di X.

Ne segue che $\{y_1..y_n\} \cup \{x_1 : j \neq j_1..j_n\}$ sono n generatori di X, che è di dimensione n e dunque per il Th. dei generatori, formano la base di X richiesta

Teorema di Grassmann per i sottospazi.

Ipotesi.

- X, Y sottospazi di Z
- $X + Y = \{x + y \quad : \quad x \in X, y \in Y\}$
- $X \cap Y = \{w \in Z \quad : \quad w \in X, w \in Y\}$

Enunciato. Sia Z uno spazio vettoriale dotato di dimensione finita. Siano X e Y due sottospazi di Z. Indicando con $X + Y$ il sottospazio somma e con $X \cap Y$ la loro intersezione, la formula di Grassmann afferma che

$$\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$$

Dimostrazione. Poniamo $k = \dim(X \cap Y)$, $m = \dim(X)$ e $n = \dim(Y)$
$w_1..w_k$ base per $X \cap Y$
$w_1..w_k, x_{k+1}..x_m$ completamento a base per X
$w_1..w_k, y_{k+1}..y_n$ completamento a base per Y
dobbiamo dimostrare che $w_1..w_k, x_{k+1}..x_m, y_{k+1}..y_n$ è una base per $X + Y$

$$\forall z \in X + Y \quad \exists x, y : \quad x \in X, y \in Y, \quad z = x + y$$

$$x = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} b_1 x_j$$

$$y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_1 w_i + \sum_{p=k+1}^{n} \delta_p y_p$$

$$x + y \sum_{i=1}^{k} (a_i + \lambda_i) w_i + \sum_{j=k+1}^{m} b_j x_j + \sum_{p=k+1}^{n} \delta_p y_p$$

$$x + y \in \langle w_1..w_k, x_{k+1}..x_m, y_{k+1}..y_n \rangle$$

sono uno spazio di generatori, dimostriamo che sono indipendenti
Siano ora a_i, b_i, λ_i tali che

$$\sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} a_j x_j + \sum_{h=k+1}^{n} \lambda_h y_h = 0 \quad (\times)$$

$$w = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} a_j x_j \right) \in X = \left(- \sum_{h=k+1}^{n} \lambda_h y_h \right) \in Y$$

$$w \in X \cap Y \Longrightarrow \exists \phi_i : w = \sum_{i=!}^{k} \phi_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} b_j x_j$$

affinché $w_1..w_k, x_{k+1}..x_n$siano indipendenti (base di X) le coordinate di w rispetto alla base sono uniche

$$b_{k+1} = b_{k+2} = .. = b_n = 0$$

poiché si sa già che

$$w = \sum_{i=1}^{k} \phi_i w_i$$

sostituendo nella $(\times)$ $b_j = 0$ per ogni $j = k + 1..n$ si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k} a_i w_i + \sum_{h=k+1}^{n} \lambda_h y_h = 0$$

siccome $w_1..w_k, y_{k+1}..y_n$è una base per Y sono indipendenti, quindi $a_i = 0$ per ogni $i = 1..k$, $\lambda_h = 0$ per ogni $h = k + 1..n$

$$w_1..w_k, x_{k+1}..x_m, y_{k+1}..y_n$$

sono indipendenti e perciò formano una base per lo spazio $X + Y$

$$\dim (X + Y) = m + n - k$$

Teorema di Rouche. Dato $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b$ sistema lineare, è risolvibile se il rango della matrice incompleta del sistema è uguale al rango della matrice completa del sistema

$$rank\,(a_1..a_n) = rank\,(a_1..a_n, b)$$

cioè b deve essere combinazione lineare delle restanti colonne, ovvero $b \in \langle a_1..a_n \rangle$

Teorema di esistenza delle soluzioni. CNS affinché il sistema ammetta soluzioni è che $B \in \langle A_1..A_n \rangle$

Teorema dell'unicità della soluzione. CNS affinché l'eventuale soluzione del sistema sia unica è che $A_1..A_n$siano indipendenti

Dimostrazione. Se avessimo soluzioni distinte $x_1 \neq y_1$ si avrebbe un assurdo in quanto

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_i = B \text{ e } \sum_{i=1}^{n} y_i A_i = B$$

sottraggo membro a membro e l'indipendenza delle $A_i$si ha che:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) A_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_i - y_i = 0 \quad \Longrightarrow x_i = y_i$$

per ogni i, quindi la soluzione è unica.

Teorema di Cramer.

Ipotesi. Sistema lineare quadrato

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i = b \quad a_1..a_n, b \in R^n$$

Tesi. CNS affinché un sistema quadrato abbia soluzione unica $\forall b \in R^n$è che il sistema omogeneo associato

$$\sum_{i=1}^{k} x_i a_i = 0$$

abbia soluzione unica nulla, cioè le colonne sono indipendenti

Dimostrazione. Se $a_1..a_n$sono indipendenti, allora costituiscono una base per lo spazio R^n. Siccome $b \in \langle a_1..a_n \rangle$ allora

$$\forall \quad b \in R^n \quad \exists \alpha_1..\alpha_n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = b$$

Teorema: il $kerA$ è un sottospazio.

Ipotesi. $A : X \to Y$ lineare

Tesi. $kerA$ è un sottospazio di X

Dimostrazione. Siano x_1 e $x_2 \in kerA$ $A(x_1) = A(x_2) = 0$

Per linearità di A si ha che $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = 0$

$(x_1 + x_2) \in kerA$ quindi il $kerA$ è chiuso rispetto alla somma

Inoltre, se $x \in kerA$ si ha che $A(x) = 0$ quindi $A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda 0 = 0$

$\lambda x \in kerA$ chiuso rispetto al prodotto per uno scalare.

Perciò la somma e multiplo scalare sono definiti e quindi il $kerA$ che è un sottoinsieme di X è anche un sottospazio di X

Teorema: se $A : X \to Y$ è lineare $A(X)$ è un sottospazio di X.

Dimostrazione. (simile a quella del teorema precedente)

Lemma: iniettiva se e solo se $kerA = 0$.

Ipotesi. $A : X \to Y$ lineare

Tesi. A initiettiva se e solo se $ker(A) = \{0\}$

Dimostrazione.

- ▶ Condizione necessaria: se A è iniettiva allora $kerA = \{0\}$
  - Siccome $A(0) = 0$ e A è iniettiva, la controimmmagine di 0, cioè $ker(A)$, contiene solo lo zero, perché non possiamo avere due valori distinti del dominio che raggiungono lo 0.
- ▶ Condizione sufficiente: se $kerA = \{0\}$ allora A è iniettiva
  - Siamo x_y tali che $A(x) = A(y)$, per linearità si ha che $A(x) - A(y) = 0$, $A(x - y) = 0$ e quindi $(x - y) \in kerA$. Siccome $kerA = \{0\}$ allora $x - y = 0$, da cui $x = y$ e quindi A è iniettiva

Lemma di linearità dell'inversa.

Ipotesi. $A : X \to Y$ lineare

Tesi. $A^{-1} : Y \to X$ è lineare

Dimostrazione. Siano

- $y_1, y_2 \in Y$
- $x = A^{-1}(y_1), x_2 = A^{-1}(y_2)$

quindi $A(x_1) = y_1$ e $A(x_2) = y_2$

Siccome A è lineare allora

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2) = y_1 + y_2$$

Dalla definizione di inversa si ha che

- $A^{-1}(y_1) + A^{-1}(y_2) = x_1 + x_2 = A^{-1}(y_1 + y_2) \Longrightarrow$additiività verificata
- $A^{-1}(\lambda y) = \lambda x = \lambda A^{-1}(y) \Longrightarrow$omogeneità verificata

Teorema di Grassmann per le applicazioni lineari.

Ipotesi.

- $A : X \to Y$ lineare
- $\dim(X) < \infty$.

Tesi

$$\dim(X) = \dim(\ker(A)) + \dim(A(X))$$

.

- Dimostrazione (con $\dim(A(X)) = 0$)

Allora $A(X) = \{0\} \Longrightarrow \ker(A) = X$

$$\dim(X) = \dim(Ker(A)) + \dim(A(X))$$

$$dim(X) = dim(X) + 0$$

- Dimostrazione (con $\dim(\ker(A)) = 0$)

Allora $\ker(A) = 0$

Prendiamo $x_1..x_n$ base per $X \Longrightarrow \dim(X) = n$

allora $\forall x \in X$, $\exists a_1..a_n$ tali che $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Per linearità

$$A(X) = A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i A(x_i) \Longrightarrow A(X) \in \langle A(x_1) ... A(x_n)\rangle$$

generatori per $A(X)$.

Verifichiamo che $A(x_1)..A(x_n)$ sono indipendenti, cioè

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{R}\,(o\,\mathbb{C}) \quad : \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A(X_i) = 0$$

per linearità

$A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0$ per ogni $i = 1..n$ perché $x_i A(X_i)$? sono indipendenti per ipotesi

perciò $\dim(A(X)) = n$

$$dim(X) = \dim(A(X))$$

- Dimostrazione (con $\dim(A(X)) \neq 0$, $dim(ker(A)) \neq 0$)

Supponiamo $w_1..w_n$base per $ker(A)$, che esiste perché $ker(A) \neq 0$ per ipotesi, e $y_1..y_k$base per $A(X)$. Siano $x_1..x_k \in X$ tali che $A(x_i) = y_i$, per ogni $i = 1..k$

Per lemma, essendo gli y_i indipendenti, lo sono anche gli x_i.

Sia $x \in X$ scelto ad arbitrio. $A(x) \in A(X)$

Essendo $y_1..y_k$ base per $A(X)$, $\exists$ $b_1..b_k$tali che

$$A(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j y_j$$

poniamo $\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} b_j x_j \Longrightarrow A(\bar{x}) = A\left(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j\right) =$
$\sum_{j=1}^{k} b_j A(x_j) = \sum_{j=1}^{k} b_i y_j$

$A(x) = A(\bar{x}) \Longrightarrow A(x) - A(\bar{x}) = A(x - \bar{x}) = 0$ quindi $(x - \bar{x}) \in \ker(A)$

Siccome $w_1..w_n$ base per $\ker(A)$, $\exists a_i..a_n$ tali che

$x - \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \Longrightarrow x = \bar{x} + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i \Longrightarrow x = \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i w_i$

$x \in \langle x_1..x_k, w_1..w_k\rangle$ (esistono generatori per X)

Per provare l'indipendenza di $x_1..x_k, w_1..w_n$ siano $\lambda_1..\lambda_k, \mu_1..\mu_n$tali che **(1)**

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = 0$$

A lineare per ipotesi: $A(0) = 0$. $A\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_j x_j\right) + A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i\right) = 0$

Siccome $A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i\right) \in \ker(A) \Longrightarrow A\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i\right) = 0$

$A\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\right) = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j A(x_j) = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i = 0$

$\lambda_j = 0$ per ogni $j = 1..k$ (per via dell'indipendenza di y_j)

$\sum_{i=1}^{n} \mu_i w_i = 0$ (sostituendo nella **1**)$\Longrightarrow$ $\mu_i = 0$ per ogni $i = 1..n$ per l'indipendenza di w_i

$x_1..x_k, w_1..w_n$ indipendenti e quindi formano una base per X e di conseguenza $n = m + k$

$$\dim(X) = \dim(\ker(A)) + \dim(A(X))$$

Lemma di struttura delle soluzioni delle equazioni lineari.

Ipotesi.

- $A(u) = f$ equazione lineare dotata di soluzioni
- $\bar{u} \in X$ una soluzione dell'equazione lineare scelta ad arbitrio

Tesi. Per ogni v soluzione di $A(u) = f$, esiste $\omega \in KerA$ tale che $v = \bar{u} + \omega$

Dimostrazione.

$$A(v - \bar{u}) = A(v) - A(\bar{u}) = f - f = 0$$

$$\omega = v - \bar{u} \in KerA$$

Teorema dei generatori.

Ipotesi.

- $dimX = n$ (spazio di dimensione finita n)

Tesi. Qualunque sistema di n vettori indipendenti di X è una base e ogni sistema di n generatori di X è una sua base.

Dimostrazione. $y_1..y_n$ sono un qualunque sistema indipendente di X.

- Se fosse $\langle y_1..y_n\rangle \subset X$, esisterebbe $B \in X$ tale che $B \notin \langle y_1..y_n\rangle$ e poiché $y_1..y_n$indipendenti, anche $y_1..y_n, B$ indipendenti per lemma (3?). Si ha un assurdo perché si avrebbero $n+1$ vettori indipendenti in X, e ciò andrebbe contro il teorema della dimensione per $dimX = n$ per ipotesi. $\langle y_1..y_n\rangle = X$ (sono generatori di X) e sono una base per X perché indipendenti.
- Siano $y_1..y_n \in X$ tali che $\langle y_1..y_n\rangle = X$ (generano X). Se fossero dipendenti, almeno un elemento potrebbe essere eliminato senza alterare lo span per il lemma fondamentale; eliminando tutti i vettori dipendenti dagli altri si otterrebbe una base di dimensione massima $n - 1$, che va contro il teorema della base.

Teorema di Cramer per le applicazioni lineari (generalizzazione).

Ipotesi.

- $A : X \to Y$ lineare
- $\dim(X) = \dim(Y) < \infty$

Tesi. A è iniettiva se e solo se A è suriettiva

- Dimostrazione (condizione necessaria)

Dimostriamo che se A è iniettiva, allora A è suriettiva

A è iniettiva se e solo se $\ker(A) = \{0\}$$\Longrightarrow$$\dim(\ker(A)) = 0$

$$dim(X) = dim(A(X))$$

per Grassmann.

$$dim(Y) = dim(A(X))$$

perché $dim(Y) = dim(X)$ per ipotesi.

Siccome Y è un sottospazio di $A(X)$, ciò accade se e solo se $Y = A(X)$, cioè A è suriettiva.

- Dimostrazione (condizione sufficiente)

Dimostriamo che se A è suriettiva, allora A è iniettiva

A suriettiva$\Longrightarrow$$A(X) = Y$$\Longrightarrow$$dim(A(X)) = dim(Y) = dim(X)$

$dim(ker(A)) = 0$ per Grassmann $\Longrightarrow$$ker(A) = \{0\}$$\Longrightarrow$$A$ è iniettiva.

CNS affinché un operatore sia diagonalizzabile. Condizione necessaria e sufficiente affinché $A : X \to X$ sia diagonalizzabile è che esista una base di X costituita da autovettori di A.

- Dimostrazione (condizione necessaria)

A è diagonalizzabile $\Longrightarrow$ X ha una base di autovettori di A

Se A è diagonalizzabile esisterà un cambio di base di matrice M, tale che $M^{-1}AM$ è diagonale. Applicandola alla base canonica risulta:

$$(M^{-1}AM)e_i = \lambda_i e_i$$
$$MM^{-1}AMe_i = M\lambda_i e_i$$
$$AMe_i = \lambda_i Me_i$$

siccome Me_i è la i-esima colonna di $M = (M_1..M_n)$ si ha che

$$AM_i = \lambda_i M_i$$

quindi le colonne $M_i$verificano il sistema degli autovettori.

Sono indipendenti e quindi non nulle, perché la matrice M è invertibile.

Essendo n vettori indipendenti costituiscono una base per il Th. dei generatori.

- Dimostrazione (condizione sufficiente)

X ha una base di autovettori di $A \Longrightarrow A$ è diagonalizzabile

Sia $u_1..u_n$una base di X tale che $A(u_i) = \lambda_i u_i$, quindi gli $u_i$sono autovettori.

Sia $M = (u_1..u_n)$ la matrice che ha per colonne gli autovettori della base. La matrice M è invertibile per il Th. di Cramer, perché le colonne sono n vettori indipendenti e quindi l'applicazione associata è iniettiva e suriettiva perché le colonne sono una base (invertibile)

Si ha allora:

$$\left(M^{-1}AM\right) e_i = M^{-1}Au_i = M^{-1}A(u_i) = M^{-1}\lambda_i u_i = \lambda_i M^{-1}u_i$$

siccome

$$M^{-1}(u_1, u_2..u_n) = M^{-1}M = I = (e_1..e_n)$$

allora

$$M^{-1}u_i = e_i \Longrightarrow \left(M^{-1}AM\right) e_i = \lambda e_i$$

perciò la matrice associata ad A, dopo il cambio di base $\left(M^{-1}AM\right)$ è diagonale.

Teorema dell'indipendenza degli autovettori.

Ipotesi. Sia A un operatore su X, spazio vettoriale reale o complesso.

Siano $u_1..u_k$ autovettori relativi ad autovalori a 2 a 2 distinti (appartengono ad autospazi differenti).

Tesi. $u_1..u_k$ sono indipendenti.

Dimostrazione. Usando l'induzione su k:

- $n = 2$: siano u_1 e u_2 autovettori di A relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Se u_1 e u_2 fossero dipendenti esisterebbe uno scalare α tale che $u_1 = \alpha u_2$ da cui

$$A(u_1) = \lambda_1 u_1 = \alpha\lambda_1 u_2$$
$$A(\alpha u_2) = \alpha A(u_2) = \alpha\lambda_2 u_2$$

Sottraendo membro a membro

$$\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) u_2 = 0$$

essendo $u_2 \neq 0$ perché autovettore e $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ perché $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ha che $\alpha = 0$ e quindi

$$u_1 = \alpha u_2 = 0u_2 = 0$$

quindi

$$u_1 = 0$$

che è un assurdo perché u_1 è un autovettore per ipotesi.

Supponiamo la tesi verificata per ogni sistema di $k-1$ autovettori appartenenti ad autospazi distinti.

$n = k$. Supponiamo per assurdo che $u_1..u_k$siano dipendenti e siano $\lambda_1..\lambda_k$ gli autovalori a due a due distinti ad essi relativi. Se fossero dipendenti si avrebbe che almeno uno è combinazione lineare degli altri (ad esempio il primo) e quindi

$$u_1 = \sum_{J=2}^{k} a_J u_J \Longrightarrow A(u_1) = A\left(\sum_{J=2}^{k} a_J u_J\right) = \sum_{J=2}^{k} a_J A(u_J) =$$

$$= \sum_{J=2}^{K} a_J \lambda_J u_j$$

$$A(u_1) = \lambda_1 u_1 = \lambda_1 \sum_{J=2}^{k} a_J u_J = \sum_{J=2}^{k} a_J \lambda_1 u_J$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\sum_{J=2}^{k} a_J (\lambda_J - \lambda_1) u_J = 0$$

osserviamo che a_J sono tutti nulli per ipotesi assurda (?) $(\lambda_J - \lambda 1) \neq 0$ per ogni $J = 2..k$ perchè $\lambda_J \neq \lambda_1$ per ogni $J = 2..k$. L'unico modo per far annullare la somma è che gli u_j siano nulli, ma questo è un assurdo perché gli u_J sono autovettori e quindi non possono essere nulli.

Ripetendo il procedimento per tutti i k autovettori si ha quindi che $u_1..u_k$ sono indipendenti, in quanto autovettori di autospazi distinti.

[to be continued?]

L'autospazio è uno spazio vettoriale. Prendiamo u e v autovettori di A relativi ad uno stesso autovalore λ.

$$A(u) = \lambda u \quad e \quad A(v) = \lambda v$$

con $u, v \neq 0$

Somma:

$$A(u) + A(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda A(u+v) = A(u+v)$$

Prodotto:

$$A(\alpha u) = \alpha (Au) = \alpha (\lambda u) = \lambda (\alpha u)$$

lo 0 c'è per definizione

Quindi l'autospazio è uno spazio vettoriale

Teorema di diagonalizzabilità.

Ipotesi.

- $A : X \to X$ operatore lineare
- $\dim(X) = n$
- A possiede n autovalori a 2 a 2 distinti

Tesi. X possiede una base formata da autovettori di A (A diagonalizzabile)

Dimostrazione. Abbiamo $\lambda_1..\lambda_n$ autovalori di A tali che $\lambda_i \neq \lambda_j$ con $i \neq j$, quindi $\exists u_1..u_2$ relativi a $\lambda_1..\lambda_2$tali che $A(u_i) = \lambda_i u_i$. Per il teorema "precedente", sappiamo che $u_1..u_n$ sono indipendenti perché appartententi ad autospazi differenti. Essendo n autovettori indipendenti costituiscono una base spettrale per X e quindi per CNS A è diagonalizzabile.

Teorema di esistenza degli autovettori o teorema degli spazi invarianti.

Ipotesi. Sia X uno spazio complesso di dimensione finita (non nulla) e sia $A : X \to X$ lineare

Tesi. X contiene autovettori di $A \implies \exists \lambda \in \mathbb{C}$ e $u \neq 0 \in C : A(u) = \lambda u$

Dimostrazione. Dato che $\dim(x) = n < \infty$, per il Th. esiste una base $e_1..e_n$ per X, quindi possiamo rappresentare ogni vettore $u \in X$ attraverso le sue componenti rispetto a tale base

$$u = u_i e_i$$

Con a_{ij} indentiamo la matrice di rappresentazione di A rispetto alla base $e_1..e_n$. Quindi:

- $A(u) = A(u_i e_i) = a_{ij} u_j e_i$ per ogni $j, i = 1..n$
- $A(u) = \lambda u = \lambda u_i e_i$

$a_{ij} u_j e_i = \lambda u_i e_i$ $a_{ij} u_j e_i - \lambda u_i e_i = 0$ $e_i (a_{ij} u_j - \lambda u_i) = 0$ (dove $e_i \neq 0$ per indip.) $(a_{ij} u_j - \lambda u_i) = 0$ per ogni $j = 1..n$

Questo sistema lineare omogeneo ha soluzione u_j non nulle se e solo se il determinante della matrice dei suoi coefficienti è nullo.

Essendo tale determinante un polinomio in λ di grado maggiore o uguale ad uno, per il th. fondamentale dell'algebra di Gauss si annulla sicuramente per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Tali λ saranno gli autovalori e per ognuno di essi e per ogni soluzione non nulla $(u_1..u_n) \in C^n$ del precedente sistema si otterrà l'autovettore

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$$

con $u \in X$

Nota. Teorema dei sottospazi invarianti perché sostiene l'esistenza di autovettori in ogni sottospazio del dominio dell'operatore che sia invariante, cioè mutato in sè, da A.

CNS perché A possieda una base spettrale è la coincidenza tra molt. alg. e molt. geom. CNS perché $A : X \to X$ possieda una bse spettrale è che, per ogni autovalore, la sua molteplicità algebrica coincida con al dimensione del relativo autospazio.

Dimostrazione (condizione sufficiente): se la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio allora A ha una base spettrale (è diagonalizzabile). Per il Th. di Gauss il polionomio caratteristico $p(\lambda)$ si può fattorizzare

$$p(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\mu_n} ... (\lambda - \lambda_n)^{\mu_n}$$

dove

$$\lambda_1 + \lambda_2 = n = dim(X)$$

(ha senso? non dovrebbe essere μ_1?)

Dato che autovettori di autospazi distinti sono indipendenti, per il Th. dei generatori si ha ce, se l'autospazio relativo a λ_i possiede una base di μ_i autovettori, allora il numero complessivo degli autovettori è n e siccome sono indipendenti, formano una base spettrale e quindi A è diagonalizzabile.

Dimostrazione (condizione necessaria): Se A è diagonalizzabile (ha base spettrale) allora la molteplicità algebrica di ogni autovalore coincide con la dimensione del relativo autospazio. Siano $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}...x_{\lambda_k}$i k sottospazi relativi agli autovalori $\lambda_1..\lambda_k$ di molteplicità $\mu_1..\mu_k$

Per il Th. di Gauss $\mu_1 + \mu_2..\mu_n = n = dim(X)$

Poiché $x_{\lambda_j} \subseteq X$ e $x_{\lambda_i} \cap x_{\lambda_j} = 0$ per ogni $i \neq j$ ne segue che la somma

$$x_{\lambda_1} + x_{\lambda_2} + ... + x_{\lambda_k} \subseteq X$$

è diretta e quindi dal Th. di Grassmann sui sottospazi

$$n \geq dim\left(x_{\lambda_1} \oplus x_{\lambda_2} \oplus ... \oplus x_{\lambda_k}\right) =$$

$$= dim\left(\sum_{i=1}^{k} x_{\lambda_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} dim\left(x_{\lambda_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\mu_i - dim\left(x_{\lambda_i}\right)\right) \leq 0$$

Siccome per il Th. precedente $\mu_i \geq dim\left(x_{\lambda i}\right)$, se segue che tutti gli addenti sono non negativi e dunque la somma è non positiva se e solo se tutti gli addenti sono nulli e quindi

$$\mu_i = \dim\left(x_{\lambda_i}\right)$$

per ogni $i = 1..k$

Ogni autovalore è reale.

Ipotesi. Sia $A : X \to X$ autoaggiunto. Allora ogni suo autovalore è reale.

Dimostrazione. Siano $\lambda \in C$ e $u \in X$ rispettivamente un autovalore e un corrispondente autovettore. Allora si ha

$$\lambda \left|u\right|^2 = \left(\lambda u\right) u = \left(Au\right) u = u\left(Au\right) = u\left(\lambda u\right) = \bar{\lambda} \left|u\right|^2$$

Essendo $u \neq 0$ per definizione di autovettore, dividendo per $\left|u\right|^2$ segue $\lambda = \bar{\lambda}$, e dunque λ è reale.

Teorema spettrale complesso.

Ipotesi. Sia X uno spazio euclideo complesso di dimensione non nulla. Sia $A : X \to X$ autoaggiunto, e cioè verificante per ogni $u, v \in X$

$$A\left(u\right) v = uA\left(v\right)$$

Tesi. Esiste una base ortonormale di X costituita da autovettori di A

Dimostrazione. Poiché $A : X \to X$ e $dimX > 0$, per il teorema di esistenza degli autovettori esiste $u_1 \in X$ tale che

$$u_1 \neq 0 \text{ e } A\left(u_1\right) = \lambda_1 u_1$$

Poiché $u_1 \neq 0$ e ogni multiplo di autovettori è un autovettore si può rappresentare u_1 con $\frac{u_1}{|u_1|}$ che è un versore.

Se $X = \langle u_1 \rangle$, u_1 è la base di autovettori richiesta.

Se no, supponiamo di avere già scelto $u_1..u_k \in X$ (???) ortonormale (?) di autovettori di A, e scegliamo per induzione un autovettore u_{k+1} di lunghezza 1 e perpendicolare a tutti gli altri.

Se $k = n$ il sistema $u_1..u_k$ è la base spettrale.

Se $k < n$ allora $\langle u_1..u_k \rangle \subset X$ per il teorema della dimensione, e dunque $\exists w \in X : w \notin \langle u_1..u_k \rangle \Longrightarrow w - w_{\langle u_1..u_k \rangle} \neq 0$

Posto allora

$$\tilde{w} = w - w_{\langle u_1..u_k \rangle}$$

risulta per il teorema della proiezione, $\tilde{w} \perp u_i$ per ogni $i = 1..k$ e dunque, posto

$$W = \{w \in X \,:\, wu_i = 0 \quad \forall i = 1..k\}$$

risulta che W (complemento ortogonale di $\langle u_1..u_k \rangle$) contiene almeno il vettore non nullo $\tilde{w}$ e dunque

$$dimW > 0$$

Per il lemma precedente[1], $w \in W \Longleftrightarrow wu_i = 0$ per ogni $i = 1..k$

$A(w) u_i = 0$ per ogni $i = 1..k \Longleftrightarrow$

$$A(w) \in W$$

e dunque W e invariante (?) per A

Per il teorema di esistenza già citato (teorema degli spazi invarianti) esisterà un autovettore di A in W e sia $v \neq 0$. Poiché $v \in W$ ne segue che è ortogonale a $u_1..u_k$. Dividendolo per la propria norma si otterrà un autovettore unitario di A ortogonale a quelli già (???).

Dopo n passi si sarà ottenuta la base spettrale $u_1..u_n$, in quanto tali autovettori, a due a due ortogonali, sono per tale ragione indipendenti e quindi (per il teorema dei generatori) essendo n sono una base per X.

Teorema spettrale reale.

Ipotesi. Sia $A \in R^{n\times n}$verificante $a_{ij} = a_{ji}$.

Tesi. Allora esiste una base ortonormale di R^ncostituita da autovettori di $A(u) = Au$

Dimostrazione. Ambienteremo il problema in C^n per poter beneficiare del teorema di esistenza degli autovalori, e costruiremo la base spettrale per induzione (finita).

Per costruire il primo elemento poniamo, come abbiamo fatto più su, $A(u) = Au$ per ogni $u \in C^n$. Poiché $A : C^n \to C^n$, per il teorema dei sottospazi invarianti, possiede un autovalore λ ed un autovettore $u \in C^n$ad esso relativo.

Poiché A è simmetrica, per i teoremi della "sezione precedente" A è autoaggiunto e quindi λ è reale, e l'autospazio realtivo a λ contiene autovettori reali. Sceltone uno ad arbitrio, e diviso per la sua norma (coincidente in R^no C^n) si ottiene un versore reale u_1, autovettore di A relativo a λ, che costituirà il primo elemento della base spettrale.

Supponiamo ora, per induzione, di aver già individuato $k < n$ versori reali a due a due ortogonali, autovettori di A, e costriuiamo il $(k + 1)$-esimo con le stesse proprietà come segue. Sia W il complemento ortogonale in C^ndi $\langle u_1..u_k \rangle$ ossia poniamo

$$W = \{w \in C : wu_i = 0 \quad \forall i = 1..k\}$$

Fino a che $k < n$, $W \neq \{0\}$ perché, decomponendo il generico vettore x in C^nrispetto a $u_1..u_k$ si ottiene $\sum_{h=1}^{k} (xu_h) u_h + \bar{x}$ ove, per il teorema della proiezione ortogonale, $\bar{x}$ è ortogonale a tutti gli $u_1..u_k$ e dunque appartiene a W. Se, per assurdo, questo si riducesse al solo 0 vorrebbe dire che tutto C^n sarebbe generato da $u_1..u_k$ con $k < n$ contro il fatto che è di dimensione n.

Il sottospazio W di C^n è di dimensione nulla e invariante per A, perché $w \in W$ equivale a $wu_i = 0$, $i = 1..k$ segue $(Aw) u_i = 0$ per ogni $i = 1..k$ e dunque $Aw \in W$.

Per il teorema sui sottospai (complessi) invarianti per operatori autoaggiunti, W contiene un autovettore (in generale, complesso) v, relativo ad un autovalore, distinto o eventualmente coincidente con qualuno degli autovalori precedenti, main ogni caso reale, perché l'operatore è autoagginuto. Poiché i versori $u_1..u_k$ sono tutti reali, e v è ortogonale a tutti loro in quanto appartiene a tutti loro in quanto appartiene a W, per il lemma precendente ne segue che le sue parti reale e immaginaria sono entrambe ortogonali a tutti i versori della base già costruiti e, per l'ultimo risultato della sezione precedente, almeno uno fra esse è un autovettore reale di A, che denotiamo con $\bar{v}$.Per completare il passo induttivo ed ottenere la tesi basta porre $u_{k+1} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}$, che risulta un versore reale, ortogonale a $u_1..u_k$e autovettore di A.

La costruizione precedente può essere iterata sino a che $k < n$, e dunque si arresta solo quando $k = n$; gli n autovettori unitari $u_1..u_n$, essendo mutuamente ortogonali, sono indipendenti, e duque formano la base richiesta di R^n.

[1]Se u è un autovettore di A, e cioè $A(w) = \lambda u$ con $u \neq 0$ e A è autoaggiunto, se $wu = 0$ allora $A(w)u = 0$