1 Come risolvere gli esercizi

1.1 Insiemi

(inserire qualcosa sugli insiemi)

1.2 Derivata direzionale

Data la funzione $f(x, y)$, la derivata in direzione (v_1, v_2) in (x_0, y_0) vale

$$v_1\, f_x(x_0, y_0) + v_2\, f_y(x_0, y_0)$$

1.3 Lunghezza di una curva

$$\wedge f(x) = \int_a^b \|\dot{f}(x)\|\, \mathrm{dx}$$

che in una sola variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(\dot{t})}\, \mathrm{dt}$$

1.4 Integrale curvilineo

$$\int_\gamma f(x, y) = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\gamma(\dot{t})\|\, \mathrm{dt}$$

1.5 Integrale di campo

$$\int_\gamma f \;\; d\gamma \;=\; \int_a^b \;[f_1(x(t),\;\; y(t))\;\; x'(t) \;+\; f_2(x(t),\;\; y(t))\;\; y'(t)]\;\; \mathrm{dt} \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{\gamma}(t)\, \mathrm{dt}$$

1.6 Area

$$\int_a^b \int_c^d \sqrt{1 + \left[\frac{f(x, y)}{\mathrm{dx}}\right]^2 + \left[\frac{f(x, y)}{\mathrm{dy}}\right]^2}\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dx}$$

1.7 Volume

$$\int_a^b \mathrm{dx} \int_c^d \mathrm{dy} \int_e^f \mathrm{dz}$$

1.8 Integrale su un insieme

1.8.1 In 2 variabili

Se T è “normale’

$$\int_T f(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dx}$$

1.8.2 In 3 variabili

$$\int_\Omega f(x, y, z)\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}\, \mathrm{dz}$$

Integrazione per strati

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{dz} \int_{\Omega(z)} f(x, y, z)\, \mathrm{dx}\, \mathrm{dy}$$

Integrazione per fili

$$\int_{\Pi_{x,\,y}(\Omega)} \mathrm{dx}\, \mathrm{dy} \int_{\Omega(x,\,y)} f(x, y, z)\, \mathrm{dz}$$

1.8.3 Cambio di variabile

(necessita di revisione)

$$\int_\Omega f(x)\, \mathrm{dx} = \int_{\Omega'} f(g(y))\, |\det(g'(y))|\, \mathrm{dy}$$

- $g\colon \Omega \to \Omega'$
- Ω, Ω' aperti

- $g \in C'$
- g invertibile

1.9 Inversione locale

Data $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

$F(x, y)$ è localmente invertibile in (x_0, y_0) se il determinante Jacobiano in (x_0, y_0) è non nullo

$$|J| = \left| \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

1.10 Teorema del Dini

- Per esplicitare una funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile y (o alla x) è necessario che $f_y \neq 0$ ($o\, f_x \neq 0$)
- Per applicare il Th. del Dini in un punto (x_0, y_0) è necessario che

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

1.11 Direzione di massima pendenza

- Direzione di massima pendenza ascendente di f in (x_0, y_0)

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- Direzione di massima pendenza discendente di f in (x_0, y_0)

$$-\nabla f(x_0, y_0) = -\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

1.12 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.13 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

1. Calcolo il vettore normale

$$\Phi u \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi_v \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (E_1, E_2, E_3)$$

   e se =0 la superfice è non regolare
2. Sostegno = sostituisco $(\bar{x_0}, \bar{y_0})$ in $f = (x_0, y_0, z_0)$
3. Piano tangente = $E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0)$

1.14 Polinomio di Taylor

1.14.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.14.2 Formula di ordine 2

(formula di ordine I) $+\frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$

1.14.3 Formula di ordine n

(inserire)

1.15 Calcolare il potenziale di una forma differenziale

Forma differenziale $w(x, y) = A_1(x, y)\,\mathrm{dx} + A_2(x, y)\,\mathrm{dy}$

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)]\,\mathrm{dx} = f(x, y) + C(y)$$

2. Derivo $f(x, y) + C(y)$ rispetto a y e pongo la derivata = $A_2(x, y)$

$$\frac{d}{\mathrm{dy}}[f(x, y) + C(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo C (eventulmente integrando $C'(y)$ del passaggio precedente) e sostituisco il valore trovato in $f(x,\ y)\ +\ C(y)$, il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

1.16 Vettore normale

Il vettore normale di $f(x,\,y)$ si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0,y_0)\wedge f_y(x_0,y_0)$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

1.17 Massimi e minimi

Devo considerare i punti critici della funzione pondendo tutte le derivate parziali $=$ 0. L'annullamento di tutte le derivate in $(x_0,\ y_0)$ è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (x_0,y_0) sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H=\begin{pmatrix} f_{\mathrm{xx}}(x_0,y_0) & f_{\mathrm{xy}}(x_0,y_0)\\ f_{\mathrm{yx}}(x_0,y_0) & f_{\mathrm{yy}}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di H e verificare:
   - det $>$ 0 e 1° elemento $>$ 0 allora (x_0,y_0) è un punto di minimo
   - det $>$0 e 1° elemento $<$ 0 allora (x_0,y_0) è un punto di massimo
   - det $<$ 0 allora (x_0,y_0) è un punto di sella
2. Calcolare $\det(H-\lambda I)$ e trovare gli autovalori:
   - Se sono concordi $<$ 0 allora ho un punto di massimo
   - Se sono concordi $>$ 0 allora ho un punto di minimo
   - Se sono discordi ho una sella
   - Se uno di essi $=$ 0 allora ho un punto degenere

2 Appunti utili

2.1 Funzioni iperboliche

$$\mathrm{senh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$$

$$D(\sinh(x))=\cosh(x)$$

$$D(\cosh(x))=\sinh(x)$$

2.2 Prodotto vettore (o prodotto esterno)

Calcolo in R^3

$$a\wedge b=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left|\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\right|\\ -\left|\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}\right|\\ \left|\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_2\,b_3-a_3\,b_2\\ -(a_1\,b_3-a_3\,b_1)\\ a_1\,b_2-a_2\,b_1 \end{pmatrix}$$

2.3 Derivate

2.3.1 Derivate fondamentali

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D(\log_b(x)) = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x\ln(b)}$$

2.3.2 Derivate di funzioni composte

$$D\left(a^{f(x)}\right) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$$

$$D\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

$$D\left(x^{f(x)}\right) = x^{f(x)} \cdot \left[f'(x) \cdot \ln(x) + \frac{f(x)}{x}\right]$$

2.4 Formule trigonometriche

2.4.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\mathrm{sen}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \mathrm{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

2.4.2 Formule di duplicazione

$$\mathrm{sen}(2\,\alpha) = 2\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(a)$$

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \mathrm{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

2.4.3 Formule di bisezione

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

2.4.4 Formule parametriche

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

2.5 Cambi di coordinate

2.5.1 Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}$$

2.5.2 Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

2.6 Funzioni utili

2.6.1 Circonferenza

Equazione cartesiana

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Equazione in coordinate polari

$$\rho=r$$

Equazione parametrica

$$C\colon \begin{cases} x=x_0+R\cos(t) \\ y=y_0+R\sin(t) \end{cases} t\in[0,2\,\pi]$$

2.7 Limiti notevoli

(inserire)

2.8 Integrali

2.8.1 Integrali notevoli

2.8.2 Sostituzioni utili

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \Longrightarrow x=\sinh(t) \\ \sqrt{x^2-1} \Longrightarrow x=\cosh(t) \\ \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow x=\left\{\begin{smallmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{smallmatrix}\right. \\ \sqrt{-1-x^2} \Longrightarrow \text{non ha senso in } \mathbb{R} \end{cases}$$