Appunti Analisi II

A cura di Sieni Alessandro e Gianluca Mondini

Indice

1 Appunti del 3 marzo 2015

1.1 Definizioni

1.1.1 Convergenza

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \nu : \, L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \quad \forall\, n > \nu$$

1.1.2 Sfera

$$B_\delta(x_0) = \{y \in X : d(y, x_0) < \delta\}$$

Una sfera è un insieme di elementi che distano dal centro della sfera (indicato dall'elemento tra parentesi) di massima distanza uguale al raggio (indicato dal pedice sulla lettera B).
Nel caso in cui (come quella sopra) la distanza sia obbligatoriamente **minore** del raggio allora la sfera si dice **aperta**, altrimenti se la distanza è minore o uguale del raggio la sfera si dice **chiusa**.
Esempio di sfera chiusa:

$$B_\delta(x_0) = \{y \in X : \, d(y, x_0) \leq \delta\}$$

Quando siamo in uno spazio metrico la sfera viene definita anche intorno.

1.1.3 Punto intero

Un punto $x_0$si dice interno se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\exists\ \delta\ >0 :\ B_\delta\ (x_0) \subseteq\ \Omega$$

Ovvero spiegato a parole se l'insieme Ω contiene il punto (ovvero il centro della sfera) ed anche tutta la sfera di raggio δ a piacere.

1.1.4 Punto esterno

Un punto x_0 si dice esterno ad un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se :

$$\exists\ \delta > 0 :\ B_\delta(x_0) \cap \Omega = 0$$

Ovvero un punto si dice esterno ad un insieme se una qualunque sfera centrata nel punto x_0 di raggio a piacere non si interseca con l'insieme.

1.1.5 Punto di frontiera

Un punto $x_0$si dice di frontiera se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ x_1, x_2 \in B_\delta(x_0) :\ x_1 \in \Omega\ \ e\ \ x_2 \ni \Omega$$

Ovvero un punto si dice di frontiera se sta al "bordo" dell'insieme, ovvero se presa una qualunque sfera centrata nel punto x_0 ci sarà almeno un punto appartenente alla sfera interno all'insieme e uno esterno all'insieme.

1.1.6 Insieme aperto/chiuso

Un insieme si dice **aperto** se ogni suo punto è interno (non contenendo quindi alcun punto di frontiera).
Un insieme si dice **chiuso** se contiene la propria frontiera.

1.1.7 Punto di accumulazione

Un punto x_0 si dice di accumulazione di un insieme Ω (si scrive $x_0 \in \partial\ \Omega$ se :

$$\forall\ \delta > 0 \quad \exists\ x \in\ B_\delta(x_0)\ \cap\ \Omega \quad x \neq x_0$$

1.1.8 Punto isolato

Un punto x_0 si dice isolato rispetto ad un insieme Ω se :

$$\exists\ \delta :\ \Omega\ \cap\ B_\delta(x_0) = x_0$$

Un esempio di punto isolato può essere un generico punto x_0 appartenente ad Ω, che viene definito nel seguente mod: $\Omega = \Omega' + \{x_0\}$ con Ω' e $\{x_0\}$ molto distanti.

1.1.9 Insieme limitato

Un insieme Ω si dice limitato se

$$\exists\ [H, K] \supseteq \Omega$$

Quindi se l'insieme Ω è contenuto in un intervallo chiuso i cui estremi sono H e K.
Un altro modo per definire un'insieme limitato è:

$$\exists\, x_0, \delta :\ \Omega \subseteq B_\delta(x_0)$$

Ovvero un insieme si dice limitato se esiste un punto x_0 la cui sfera di raggio δ di dimensione a piacere contiene tutto l'insieme. Dato che una sfera è limitata se contiene tutto l'insieme anche quest'ultimo per forza di cose dovrà essere limitato.

Un punto x_0 si dice esterno ad un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se :

$$\exists\, \delta > 0 :\ B_\delta(x_0) \cap \Omega = 0$$

Ovvero un punto si dice esterno ad un insieme se una qualunque sfera centrata nel punto di raggio a piacere non si interseca con l'insieme.

1.1.10 Punto di frontiera

Un punto $x_0$si dice di frontiera se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, x_1, x_2 \in B_\delta(x_0) :\ x_1 \in \Omega\ \ e\ \ x_2 \ni \Omega$$

Ovvero un punto si dice di frontiera se sta al bordo dell'insieme, ovvero se presa una qualunque sfera centrata nel punto x_0 ci sarà almeno un punto appartenente alla sfera interno all'insieme e uno esterno all'insieme.

2 Appunti del 4 marzo 2015

2.1 Diametro di un insieme

2.1.1 Definizione

Il diametro di un insieme Ω è definito come :

$$\sup_{x,\, y \in \Omega} |x - y|$$

2.1.2 Esempi

Consideriamoci in $\mathbb{R}^2$ e più precisamente consideriamo Ω come il cerchio unitario, quindi da ciò ne deriva che presi x, $y \in \Omega$, $|x| \leq 1\ \ e\ |y| \leq 1$ quindi $|x - y| \leq 2$ e dalla disuguaglianza triangolare (che ricordiamo dice $|x + y| \leq |x| + |y|$):

$$|x - y| \leq |x| + |-y| \Longrightarrow |x - y| \leq |x| + |y| \leq 1 + 1 = 2$$

Quindi considerando la sfera $B_\delta(x_0)$ e presi $x = (0, 1)$ e $y = (-1, 0)$ otteniamo che:

$$\sup_{B_\delta(x_0)} |x - y| \geq |(1, 0) - (-1, 0)| = |(2, 0)| = 2$$

La disuguaglianza sopra deriva dal fatto che l'estremo superiore di $|x - y|$ è sempre maggiore uguale di $|x - y|$ qualunque punto si scelga, come ad esempio i punti $x = (0, 1)$ e $y = (-1, 0)$. *Altro esempio* Scelto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ |x| < 1\} \quad \Longrightarrow \quad \text{Sfera aperta}$$

Abbiamo già provato prima che 2 è un maggiorante e dalla definizione di diametro otteniamo che:

$$\text{diam}\ \Omega \leq 2$$

In quanto definito la sfera come un insieme aperto e quindi di conseguenza $|y - x| = 2 - 2\,\epsilon$. Il $2\,\epsilon$ deriva dal fatto che essendo aperta la sfera (ovvero che $|x| < 1$) il grande valore che può assumere sarà 1 - una piccolissima, quanto si vuole, quantità che noi chiameremo ϵ che gli impedirà di raggiungere 1. Ciò avviene anche quando x tenta di raggiungere il valore di -1 che in valore assoluto corrisponde ad 1, quindi posto $x = 1 - \epsilon$ e $y = -1 + \epsilon$ si ottiene $1 - \epsilon - (-1 + \epsilon) = 2 - 2\,\epsilon$.

2.1.3 Teorema

Se un insieme Ω è limitato $\Leftrightarrow$ diam(Ω) $< +\infty$

2.2 Convergenza di successioni

2.2.1 Lemma

2.2.2 Teorema

Ipotesi

- $x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_N)$

Tesi

$|x_i| \leq |x| \quad \forall\, i = 1....\, N$

Dimostrazione

Consideriamo

$$|x| \leq \sqrt{N} * \max_{i=1...N} (|x_i|)$$

Da cui otteniamo sostituendo alla norma del vettore il modo con cui è possibile calcolarla

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} \leq \sqrt{N} * \max_{i=1...N} (|x_i|)$$

A questo punto effettuiamo una stima dall'alto considerando che :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \geq \sqrt{x_i^2} = |x_i| \quad \forall\, i = 1....\, n$$

Mentre per effettuare una stima dal basso poniamo la seguente equazione:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq N * \max_{i=1...n} (x_i)^2$$

Adesso possiamo applicare la radice a entrambi i membri perché non varia il segno della disequazione e otteniamo:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{N * (\max_{i=1...n} (x_i))^2}$$

Ma dato che $(\max_{i=1...n}(x_i))^2$ è uguale ad $\max_{i=1...n}(x_i)^2$ quindi anche $\sqrt{(\max_{i=1...n}(x_i))^2}$ è uguale a $\sqrt{\max_{i=1...n}(x_i)^2}$ che a sua volta corrisponde a $\max_{i=1...n}|(x_i)|$, portando anche a termine la stima dal basso e quindi la dimostrazione.

2.2.3 Definizione

La definizione di convergenza è:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta : \forall\, n > \delta \;\; |x_n - \delta| < \epsilon$$

In poche parole la convergenza di una successione vettoriale (ovvero composta da vettori e non scalari) convergerà al punto le cui componenti corrisponderanno al punto di convergenza di ogni singola componente.

2.2.4 Teorema 1

Ipotesi

Supponiamo che l'insieme C si chiuso e che la successione $x_n \in C$ si comporti così: $x_n \to x$

Tesi

$x \in C$

Dimostrazione

Ipotizziamo per assurdo che $x \ni C$. Ma cosa è x? Iniziamo partendo dalla definizione di punto convergente:

$$\forall\, \epsilon \quad \exists\, \nu : \forall\, n > \nu \;\; |x_n - x| < \epsilon$$

Quindi dalla definizione si può intuire che se $|x_n - x| < \epsilon$ allora significa anche che $x_n \in B_\epsilon(x)$, ma dato che la sfera è contenuta in C si verifica un assurdo perché anche il punto interno alla sfera è contenuto in C.

2.2.5 Teorema 2

Ipotesi

Consideriamo il punto x_0 come punto di accumulazione dell'insieme Ω (ovvero $x_0\ \partial\ \Omega$) e consideriamo $x_1, x_2, ..., x_N$ elementi distinti di Ω

Tesi

$x_n \to x_0$

Dimostrazione

Per procedere con questa dimostrazione dobbiamo seguire il principio di induzione e quindi specificare

2.2.6 Esempio

Un chiaro esempio della definizione è :

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n} \right) \longrightarrow (1, 0)$$

Questo risultato è dato dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

2.3 Continuità

2.3.1 Definizione

Consideriamo la funzione $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$ con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ ed un punto $x_0\in\Omega$ una funzione si dice continua in x_0 se

$$\forall\,\epsilon>0 \quad \exists\,\delta>0:\ \forall\,x\in dom(f)\ \ se\,|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

In questo caso la definizione è la solita per le funzioni che lavorano sui numeri reali con la differenza che però essendo su $\mathbb{R}^N$ dovrà essere calcolata la norma dei vettori e non il valore assoluto del (che comunque giusto per chiarezza corrisponde alla norma di un vettore in $\mathbb{R}$.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2\le N*\max_{i=1\ldots n}(x_i)^2$$

Adesso possiamo applicare la radice a entrambi i membri perché non varia il segno della disequazione e otteniamo:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\le\sqrt{N*(\max_{i=1\ldots n}(x_i))^2}$$

Ma dato che $(\max_{i=1\ldots n}(x_i))^2$ è uguale ad $\max_{i=1\ldots n}(x_i)^2$ quindi anche $\sqrt{(\max_{i=1\ldots n}(x_i))^2}$ è uguale a $\sqrt{\max_{i=1\ldots n}(x_i)^2}$ che a sua volta corrisponde a $\max_{i=1\ldots n}|(x_i)|$, portando anche a termine la stima dal basso e quindi la dimostrazione.

2.3.2 Teorema sulle funzioni continue a valori vettoriali

Ipotesi

- $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$
- $x_0\in\Omega$
- $\Omega\in\mathbb{R}^m$

Tesi

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0: \quad \forall y\ \varepsilon\Omega\ : \quad |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Dimostrazione

2.3.3 Definizione di convergenza

La definizione di convergenza è:

$$\forall\,\epsilon>0 \quad \exists\,\delta:\ \forall\,n>\delta\ \ |x_n-\delta|<\epsilon$$

In poche parole la convergenza di una successione vettoriale (ovvero composta da vettori e non scalari) convergerà al punto le cui componenti corrisponderanno al punto di convergenza di ogni singola componente.

2.3.4 Esempio

Un chiaro esempio della definizione è :

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (1,0)$$

Questo risultato è dato dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

3 Appunti del 5 marzo 2015

3.1 Dimostrazione del 4/3/15 rivisitata

3.2 Teorema

Ipotesi

$x_0 \in \Omega$

Tesi

$x_n \to x_0$

Dimostrazione

Si procede per induzione

$P(n) = x_1 .. x_n$ sono indipendenti, due a due distinti.

$$|x_i - x_0| < \frac{1}{2^{i-1}}$$

È necessario provare $P(1)$:

$$\delta = 1 \ \exists \quad x_1 \text{ tale che } x_1 \in \Omega,\ x_1 \in B_1(x_0),\ x_1 \neq x_0$$

Supponiamo di avere $P(n)$

$$\delta = min\left\{\frac{1}{2^n}, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0| ... |x_n - x_0|\right\}$$

Questi ultimi valori sono tutti positivi maggiori di 0 in quanto l'esponenziale è una funzione positiva, la norma è definita positiva e $x_i \neq x_0$ per ogni $i = 1..n$

$\exists x_{n+1}$ tale che

1. $\in \Omega$
2. $\in B_\delta(x_0)$
3. $\neq x_0$

3.3 Fatto

Se Ω è chiuso e $x_0 \in \Omega$, $x_0 \in \Omega$

3.4 Teorema della permanenza del segno

Ipotesi

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x_0
- $f(x_0) < 0$

Tesi

$$\exists \quad \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) < 0$$

Dimostrazione

Dalla definizione di continuità abbiamo che:

$-\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tale che $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$

$-|x - x_0| < \delta$ (cioè $x \in B_\delta(x_0)$)

$-|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$-f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$

siccome $f(x) < 0$ per ipotesi, se $\epsilon < |f(x_0)|$ si ha che $f(x_0) + \epsilon < 0$.

3.5 Teorema di continuità della funzione somma (nome provvisorio)

Ipotesi

- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$
- f, g continue in x_0

Tesi

$h(x) = f(x) + g(x)$ è continua in x_0
In pratica, se due funzioni sono continue in un punto anche la loro somma sarà continua in tal punto.

Dimostrazione

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tale che $\forall x \in d\,o\,m\,(f + g)\; |x - x_0| < \delta$

$$|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| < \epsilon$$

$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Grazie alla disugualianza triangolare abbiamo che:

$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| < \epsilon \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

Dall'ipotesi di continuità di f,g:

$$\forall \sigma \exists \delta_1 : x \in \mathrm{dom}(f) : |x - x_0| < \delta_1 \forall \epsilon > 0$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall \sigma \exists \delta_2 : x \in \mathrm{dom}(g) : |x - x_0| < \delta_2 \forall \epsilon > 0$$

$$|g(x) - g(x_0)| < \sigma \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{\epsilon}{2}$$

$$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$$

$$|h(x) - h(x_0)| < \delta$$

3.6 Primo teorema di composizione

Ipotesi

- $f : \Omega ì \to \mathbb{R}^N$ continua
- $x_n \in \Omega$
- $x_n \to x \in \Omega$

Tesi

$$\lim f(x_n) = f(x)$$

Dimostrazione

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu : \forall n > \nu \quad |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \in \Omega \, |t - x| < \epsilon \, |f(t) - f(x)| < \epsilon$$

Poniamo $t = x_n$, di conseguenza $|x - x_n| < \delta$ implica che

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon$$

Per quale n è verificata?

4 Appunti del 10 marzo 2015

4.1 Teorema (sulla composizione)

Ipotesi

- $f : \Omega \to \Omega'$
- $g : \Omega' \to \Omega''$
- $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^M, \Omega'' \subseteq R^N, \Omega'' \subseteq R^P$
- f continua in x_0
- g continua in $f(x_0)$
- h(x) = g(f(x))
- $h : \Omega \to \Omega''$

Tesi

- h(x) continua in x_0

Dimostrazione

Dato che conosciamo il concetto di continuità scriviamo direttamente la disecuazione finale.

$$|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$$

da cui si ottiene

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

dalla definzione di continuità che dice

$$\forall \varepsilon \ \exists \sigma > 0 \ : \ \forall y \in \mathrm{dom}(y) \ : \ |y - f(x_0)| < \sigma \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Che è vero se e solo se $|f(x) - f(x_0)| < \sigma$.

Con questi passaggi abbiamo dimostrato la continuità di g(avente come argomento f(x)) adesso non ci rimane che dimostrare la continuità di f (in quanto un funzione composta da funzioni continue risulta essere continua).Per essere sicuri che f sia continua scriviamo la defnzione

$$\exists \ \delta \ : \ x \ \in \mathrm{dom}(f) \ : \ |x - x_0| < 0$$

che ci consente di ammettere che verifica la condizione sopra richiesta.

4.2 Definizione insieme connesso

Un insieme si dice **connesso**(ad archi) se:

$$\forall \ x_1, x_2 \ \in \ \Omega \text{ esiste } \gamma : [0,1] \to \Omega \, \text{oontinua} : \gamma(0) = x_1 \ \ e \ \ \gamma(1) = x_2$$

4.3 Teorema degli zeri

Ipotesi

- f continua
- f definita in un intervallo $\Longrightarrow$ insieme connesso.
- $\exists\ x_1, x_2 : f(x_1) f(x_2) < 0$ (ovvero sono di segno opposto).

Tesi

- $\exists$ x* : f(x*) = 0 (ovviamente x* appartente all'insieme connesso)

Dimostrazione

Per effettuare questa dimostrazione dobbiamo definire una nuova funzione h(x) = f(γ(x)).Il dominio di h è l'intervallo [0,1] da cui otteniamo che

$$h(0) = f(\gamma(0)) = f(x_1) > 0$$
$$h(1) = f(\gamma(1)) = f(x_2) < 0$$

Questi due risultati sono ottenuti dalla definizione di insieme connesso. La funzione h è continua perchè composizione di funzioni contiune, quindi esisterà un t* $\in$]0,1[: h(t*) = 0. Questo perchè h(t*) = f(γ(t*) $\Longrightarrow$ x* = γ(t*) che per definizione è un punto di Ω, che annulla la funzione e che quindi dimostra il teorema.

4.4 Teorema di Weistrass (sui massimi)

Ipotesi

- f continua in K $\subseteq \mathbb{R}^n$
- K insieme **chiuso** e **limitato**

Tesi

- $\exists\ x_1, x_2 : \in K : f(x_1) < f(x) < f(x_2) \qquad \forall\ x \in K$

Nota: Quando si lavora con i vettori non si usano mai né $<$ né $>$, perché non si possono fare questo tipo di confronti.

Dimostrazione ?

4.5 Definzioni di limiti

Quando si parla di limiti di funzioni in punto x_0 si intende tale punto x_0 come punto di accumulazione ($x_0 \in \partial\Omega$).

4.5.1 Limite di funzione convergente

Una funzione f(x) : $\Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice convergente in x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x)$ = L) se :

$$\forall\ \varepsilon > 0 : \exists\ \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}(f) : |x - x_0| < \delta \text{ con } x \neq x_0 \text{ si ha che } |f(x) - L| < \varepsilon$$

4.5.2 Limite di funzione divergente

Una funzione f(x) : $\Omega \to \mathbb{R}^n$ si dice divergente in x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$) se :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}(f) : |x - x_0| < \delta \text{ con } x \neq x_0 \text{ si ha che } |f(x)| > \varepsilon$$

Nota : Quando si lavora con i vettori non si indica mai più o meno ∞ perchè si intende la distanza del vettore dall'origine, che è sempre un numero positivo (ovviamente questo in uno spazio metrico).

4.6 Teorema permanenza del segno (incompleto)

Ipotesi

- f : $\Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = L > 0$
- $x \neq x_0$

Tesi

Manca roba

4.7 Definizione di divergenza

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ con $f : \Omega \to R^N$ $x_0 \in \partial\Omega$

Nota: Non esiste il "segno dell'infinito" perché in campo vettoriale non ha alcun senso parlare di $\pm\infty$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ x \in \text{dom}(f)\ |x - x_0| < \delta \quad x \neq x_0\ \ |f(x)| > \varepsilon$

5 Appunti dell'11 marzo 2015

5.1 Limiti

$f : \Omega \to R^N$ $\Omega \subseteq R^M$ $\lim_{\infty} f(x) = L \in R^N$ con Ω non limitato

5.1.1 Caso della convergenza

$$\lim_{\infty} f(x) = L \in R^N$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : \forall\ x \in \text{dom}(f)\ \ |x| > \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$

5.1.2 Caso della divergenza

$$\lim_{\infty} f(x) = \infty$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall\ x \in \text{dom}(f)\ |x| > \delta\ \Rightarrow\ |f(x)| > \varepsilon$

Se $f: R^M \to R$ ha senso parlare di $\pm\infty$ perché il codominio è costituito da scalari.

In generale, preso

$$f: \Omega \to R^M \quad \text{con } \Omega \subseteq R^N$$

possiamo avere i casi

- $x \to \infty$
- $x \to x_0$

In particolare, se $N = 1$, abbiamo anche che

- $x \to x_0^+$
- $x \to x_0^-$
- $x \to +\infty$
- $x \to -\infty$

Per quanto riguarda il limite, esso può essere (in generale)

- $f(x) = L$
- $f(x) = \infty$

In particolare, se $M = 1$, abbiamo anche

- $f(x) = +\infty$
- $f(x) = -\infty$

Verifichiamo che se $x_n \to x_0 \Leftrightarrow |x - x_0| \to 0$

$x_n \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \quad : \quad \forall n > \nu \quad \sqrt{N} \max |(x_n)_i| \geqslant |x_n| > \varepsilon$

Esempio:

$$\left|\left(n, \frac{1}{n}\right)\right| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \to \infty$$

Nota: Il teorema dei due carabinieri si può applicare soltanto a funzioni vettoriali in scalari in quanto, essendo un teorema di confronto, richiede l'utilizzo degli operatori $<$ e $>$, non definiti per i vettori.

5.2 Condizione di Cauchy per la convergenza

(Viene dato solo un accenno di dimostrazione)

CNS : $f(x)$ sia convergente in x_0

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\delta>0\;\;:\;\;\forall\,x,y\in\mathrm{dom}(f)\;\;|x-x_0|<\delta\;\;|y-x_0|<\delta\;\;x\neq x_0\;\;\text{e}\;\;y\neq x_0\;\;|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Ovvero il criterio dice che una funzione converge in un punto se e solo se la differenza tra due punti abbastanza vicini al punto di convergenza può essere contenuta in una sfera di raggio ε e centrata in x_0.

$\lim_{x\to x_0} f(x)=L\in R^N$

$|f(x)-L|<\varepsilon/2\;\;|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-L|+|L-f(y)|<\varepsilon$

$$|f(y)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Esempio

$$f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}+1 & \text{per } x>0\\ -1 & \text{per } x<0\end{cases}$$

Se $\varepsilon<2$ il teorema "salta", quindi la funzione non ha limite in 0

5.3 Sostituzione

Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

poniamo $y=x^2$ ed otteniamo così

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

Non possiamo però scrivere la regola generale

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L\quad\text{e}\quad\lim_{y\to L} g(y)=M\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to x_0} g(f(x))=M$$

e lo dimostriamo con un controesempio: poniamo

$$g(y)=\begin{cases}1\,\text{per } y=0\\ 2\,\text{per } y\neq 0\end{cases}$$

e

$$f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\text{definita in }\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

abbiamo quindi

$$g(f(x))=\begin{cases}2\,\text{per } x=0\text{ (che va in contrasto col dominio di } f\\ 1\,\text{altrimenti}\end{cases}$$

poiché $\sin\frac{1}{x}=0\;1=k\pi\;\;\text{con } k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$

Si prova a dimostrare il teorema "falso" (non viene chiesto all'esame, l'importante è sapere di cosa si parla)

$$|g(f(x))-M|<\varepsilon$$

a patto che

1. $f(x) \in \mathrm{dom}\,(g)$

2. $|f(x) - L| < \sigma$

3. $f(x) \neq L$

Nota: la (3) va posta come ipotesi

La (2) deriva da $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Per garantire la (3) posso:

- prendere la funzione più esterna (g) continua in L

- g non definita in L

3° ipotesi: $\exists\ \delta > 0$ tale che $f(x) \neq L \ \ \forall\ x \in B_\delta(x_0) \backslash \{0\}$

Le 3 condizioni:

1. $$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to L} g(y)$$

2. $$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

3. Verificata almeno una di:

   a. g è continua in L

   b. g non è definita in L

   c. y è discontinua $\exists\ \delta > 0 : f(x) \neq L \ \ \forall (x) \neq L\ \forall x \in B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$

5.4 Limiti in più variabili

$$\lim_{\infty} f(x, y) = \lim_{\infty} x\,y \quad \text{con} \quad f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,y$$

Il limite non converge e non diverge.

$$\lim_{(x, y) \to \infty} x$$

non converge e non diverge.

$$\lim_{x, y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

si risolve ponendo $y = k\,x$

$$\frac{x^2 - k^2 x^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}$$

che non ha limite perché è una costante che varia in funzione di k, e questo fa saltare la condizione di Cauchy.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

Sapendo che $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e che

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

otteniamo

$$\frac{\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^2\sin^2(\theta)}{\rho^{(2?)}\cos(\theta)-\rho\sin(\theta)} = \frac{1}{\rho\sin(\theta)-\rho\cos(\theta)}$$

che con θ che va $\frac{\pi}{4}$ tende ad infinito.

6 Appunti del 17 marzo 2015

6.1 Teorema di Gauss

Per dimostrare il teorema di Gauss, dobbiamo prima dimostrare 3 lemmi

6.1.1 Lemma 1 (divergenza di un polinomio complesso)

Ipotesi

$$p(x) = \sum_0^N a_n z^n \quad \text{con} \quad N \geqslant 1 \quad \text{e} \quad p(x) \quad \text{non costante}$$

Tesi

$$\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$$

Dimostrazione

Scriviamo il polinomio nella forma

$$p(z) = z^N \sum_0^N a_n\, z^{n-N}$$

Possiamo dimostrare che

$$|z|^N > \varepsilon \qquad |z| > \delta \quad \text{con} \quad \delta = \varepsilon^{\frac{1}{N}}$$

quindi ci resta da dimostrare che le potenze di grado inferiore non interferiscono con la divergenza

Grazie alla relazione $|a\,b| = |a|\,|b|$ possiamo scrivere

$$|p(z)| = |z|^N \left|\sum_0^N a_n\, z^{n-N}\right|$$

Dobbiamo verificare "a cosa tende" $\left|\sum_0^N a_n\, z^{n-N}\right|$. Siccome a_n è una costante, non ci resta che studiare z^{n-N}. A questo punto dobbiamo distinguere i vari casi:

- $n = N$ allora z^{n-N} tende ad 1
- $n \leqslant N$

- $N > n$ otteniamo $\frac{1}{z^{N-n}}$. Ponendo $\alpha = N - n$ abbiamo che

$$\left|\frac{1}{z^\alpha}\right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \alpha > 0$$

$$\frac{1}{|z^\alpha|} < \varepsilon \qquad |z^\alpha| < \frac{1}{\varepsilon} \qquad |z^\alpha| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Ricapitolando, $a_n\, z^{n-N}$ tende ad $|a_n|$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{|a_n|}{z} \qquad \exists\, \bar{\delta} : |p(z)| > \frac{|a_n|}{z}|z|^N \quad \text{per} \quad |z| > \bar{\delta}$$

6.1.2 Lemma 2 (esistenza del minimo)

Ipotesi

- $f: R^n \rightarrow R$ continua
- $\lim_\infty f(x) = +\infty$ (possiamo utilizzare il "+" perché il codominio è scalare)

Tesi

f ha minimo in R

Dimostrazione

Prendo un $x_0 \in R^n$ tale che $f(x_0) > 0$. $\bar{\varepsilon} = f(x_0)$ $\exists\,\bar{\delta}$: $|x| > \bar{\delta}$

$f(x) > \bar{\varepsilon} = f(x_0) \qquad x_0 \in B_{\bar{\delta}}(0)$

(Nota: preso un insieme A, $\bar{A}$ indica l'insieme con tutti i suoi punti di accumulazione)

f ha un punto di minimo in $\overline{B_{\bar{\delta}}(0)}$ per il th. di Weierstrass. Chiamiamo il punto di minimo $x^{\#}$

$$\begin{cases} f(x^{\#}) \leqslant f(x) \quad \forall x \in \overline{B_\delta(0)} \\ f(x^{\#}) \leqslant f(x_0) < f(x) \quad \text{se} \quad |x| < \bar{\delta} \end{cases}$$

Quindi il minimo nella sfera è il minimo assoluto

6.1.3 Osservazione

$|p(z)|$ tende all'∞ se $p(z)$ tende all'∞. I due lemmi precedenti ci garantiscono che $|p(z)|$ ha minimo su C.

6.1.4 Lemma 3

Preso p non costante e $P(z_0) \neq 0$ $\exists\, z$: $|P(z)| < |P(z_0)|$

Dimostrazione

$q(w) = \frac{1}{P(z_0)} P(z_0 + w)$. $w = z - z_0$, con z_0 punto in cui so che $P(z_0) \neq 0$

Se $w = 0$ ho $\frac{P(z_0)}{P(z_0)} = 1$ (termine noto) quindi ho

$$1 + a_k w^k + w^{k+1} \tilde{q}(w)$$

R (???) è il minimo intero per cui $a_k \neq 0$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, otteniamo

$$|q(w)| \leqslant |1 + a_k w_k^k| + |w|^{k+1} |\tilde{q}(w)|$$

$a_k w^k$ deve essere un reale negativo, e $|a_k w^k| < 1$. $|w|^k < \frac{1}{|a_k|} \Leftrightarrow |w| < \frac{1}{|a_k|^{\frac{1}{k}}}$

Affinché un numero complesso sia un numero reale negativo, è necessario che il suo argomento sia π.

$$\pi = \arg(a_k w^k)$$

$$\arg(a_k) + \arg(w^k) = \arg(a_k) + k \arg(w)$$

$$\arg(w) < \frac{\pi - \arg(a_k)}{k}$$

$$|1 + a_k w_k| = 1 - |a_k w_k| \text{ in quanto } a_k w_k \text{ è negativo}$$

$$|q(w)| \leqslant 1 - |a_k|\, |w|^k + |w|^{k+1}\, |\tilde{q}(w)| =$$

$$= 1 - |w|^k [|a_k| - |w| |\tilde{q}(w)|] > 0 \text{ per il teorema della perm. del segno}$$

$[|a_k| + |w| |\tilde{q}(w)|]$ tende a $|a_k| > 0$ per $|w| \to 0$

$$|q(w)| \leqslant 1 - (\text{qualcosa di strettamente positivo}) < 1$$

Nota: se fossimo nei reali, $a_k w^k$ con $a_k > 0$ e k pari, $a_k w_k$ non può mai essere negativo.

6.1.5 Teorema di Gauss

Dimostrazione

Prendo $z^\#$ minimo di $|P(z)|$. Se fosse $|p(z^\#)| > 0 \Longrightarrow P(z^\#) \neq 0$. $z_0 = z^\# \Longrightarrow \exists : |P(Z)| < |P(z_0)| = |P(Z^\#)|$

6.2 Funzioni omogenee

6.2.1 Cono

X è un cono se $X \subseteq R^n \quad \forall \ x \in X \quad \forall t > 0 \quad t\,x \in X$

6.2.2 Funzione α-omogena

$F: X \to R$ è detta $\alpha -$omogenea se $F(t\,x) = t^\alpha F(x) \ \ \forall \ x \in X \ \forall \ t > 0$

Esempio forma quadratica

$\sum a_{\text{ij}} x_i x_j = F(x) \quad F(t\,x) = \sum_1^N a_{\text{ij}} (t\,x_i)(t\,x_j) = t^2 \sum_1^N a_{\text{ij}} x_i x_j = t^2 F(x)$

La forma quadratica è 2-omogenea

Esempio della norma

$F(x) = |x| \quad F(t\,x) = |t\,x| = |t| |x|$. Se $t > 0$ abbiamo $t|x|$

La norma è 1-omogenea

Esempio

Consideriamo F α-omogenea

$G(x) = ((F(x))^{\beta} \quad G(t\,x) = (F(t\,x))^{\beta} = (t^{\beta}(F(x))^{\beta}) = t^{\alpha\beta}(F(x))^{\beta} = t^{\alpha\beta}G(x)$

Esempio F 0-omogenea

$F(t\,x) = t^0 F(x) = F(x)$

Se $x \neq 0 \quad x = |x| \quad \hat{x} = |x|\frac{x}{|x|}$

$F(x) = F\left(|x|\frac{x}{|x|}\right)$ dove $|x|$ è uno scalare e $\frac{x}{|x|} \in B_1(0)$

Se F è 0-omogenea non costante allora $\lim_{x\to 0}F(x)$ non esiste.

$F(x_1) \neq F(x_2)$ perché $F(x)$ è non costante.

$F(t\,x_1) = F(x_1)$ e $F(t\,x_2) = F(x_2)$ perché la F è 0-omogenea, quindi tutti per punti "multipli" di x_k vale la relazione $F(t\,x_k) = F(x_k)$

$\bar{\varepsilon} < |F(x_1) - F(x_2)|$ in ogni intorno di 0 esistono punti di tipo $t\,x_1$ e $t\,x_2$ sui quali $|F(x_1) - F(x_2)| \geqslant \bar{\varepsilon}$

$t\,x_1 \in B_{\delta}(0) \;\; |t\,x_1| < \delta \quad |t|\,|x_1| < \delta \quad |t| < \frac{\delta}{|x_1|}$

7 Appunti 18 marzo 2015

7.1 Teorema

Ipotesi

- F(x) α-omogenea con $\alpha > 0 \Longrightarrow$ F(x) $= |x|^{\alpha}F\left(\frac{x}{|x|}\right) \Longrightarrow$ funzione scritta utilizzando i versori.
- F limitata in $\mathrm{dom}(F) \cap \{|x| = 1\}$(ovvero limitata nel dominio intersecato alla sfera unitaria centrata nell'origine $\Longrightarrow B_1(0)$).

Tesi

- $\mathrm{Lim}_0\, F(x) = 0$

Dimostrazione

Per dimostrare questo teorema scriviamo F(x) utilizzando i versori, e cioè F(x) $= |x|^{\alpha}F\left(\frac{x}{|x|}\right)$ e possiamo quandi porre la seguente disuguaglianza

$$0 \leqslant |F(x) = |x|^{\alpha}F\left(\frac{x}{|x|}\right)| \leqslant K|x|^{\alpha}$$

Con K che è un valore tale che $|F(x)| \leqslant K \quad \forall x \in \mathrm{dom}(F)$. Dalla disuglianza di sopra si vede che per $x \to 0$ si ha che

$$0 \leqslant |F(x)| \leqslant K\,0$$

e quindi di conseguenza

$$0 \leqslant |F(x)| \leqslant 0$$

Per cui per il teorema del confonto F(x) per $x \to 0 = 0$.

7.2 Forma quadratica

Una forma quadratica si scrive nel seguente modo $H(x) = \sum a_{\text{ij}} x_i x_j$ ed è omogenea di grado 2, perchè posso mettere due "t" in evidenza. Adesso proviamo a scrivere anche le forme quadratiche utilizzando i versori

$$H(x) = |x|^2 H\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^2 \sum a_{\text{ij}} \frac{x_i}{|x|} \frac{x_2}{|x|}$$

Adesso per capire il comportamento di una forma quadratica ne studiamo il segno:

- Se la forma è definita positiva con $x \neq 0$ allora $H(x) > \lambda$ e quindi $\lambda < H(x) = H\left(\frac{x}{|x|}\right)|x|^2$ che a sua volta è maggiore di $\lambda |x|^2 \to \infty$, e quindi anche H(x) $\to \infty$.

- Discorso simile se la forma è definita negativa prendendo $\Omega < 0$ (Ω assume il valore massimo della forma quadratica) allora $\Omega |x|^2 = -\infty$ per $x \to \infty$.

- Negli altri casi il limite non esiste, perchè lungo le rette viene assunto un valore sempre diverso (sia nel caso in cui la forma sia semidefinita che nel caso in cui sia indefinita).

7.3 Derivata direzionale

7.3.1 Definizione

Si intende derivata direzionale come la derivata di una funzione "F" lungo una specifica direzione (che chiamiamo V), in modo da vedere come si comporta F lungo la direzione V, e ,come per le derivate normali, esiste se è finito questo limite

$$\text{Lim}_{t-0} \frac{F(x_0 + \text{tv}) - F(x_0)}{t}$$

Quando vogliamo esprimere una derivata direzionale si usa la seguente notazione $\frac{\partial f}{\partial V}(x_0)$ oppure $F_v(x_0)$

7.3.2 Esempio

F(x,y) = $x^2 y$

$x_0 = (1, 2)$

v = (1,1)

$x_0 + v = (1, 2) +$ t(1,1) = (1+t,2+t).

$F_v(x_0) =$

8 Appunti 19 marzo 2015

8.1 Derivata parziale

9 Appunti del 25 marzo 2015

Teorema per "legare" la derivata direzionale a quella parziale

Con $f\colon\Omega\rightarrow R$ abbiamo che

$$\exists\,\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=d\,f_{A(v)}\,(x_0,v)\quad\text{con}\quad\text{A(v) lineare}$$

$$f_v(x_0)=A(v)=A\big(\sum\,v_j\,e_i\big)=\sum\,v_j\,A(e_i)$$

$$A(e_i)=\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ rappresenta proprio la derivata parziale.

Abbiamo quindi

$$f_v(x_0)=\sum_1^N\,v_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

9.0.1 Gradiente

Il gradiente di f si indica con ∇f (il simbolo ∇ è chiamato "nabla") e rappresenta

$$\nabla f(x_0)=\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)\\ \ldots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\end{cases}$$

di conseguenza

$$f_v(x_0)=\nabla f(x_0)v$$

Se f è differenziabile in x_0

$$d\,f(x_0,v)=\nabla f(x_0)v=\sum_1^N\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,v_i$$

Nota: per i fisici è rappresentato da:

$$d\,f(x_0,v)=\nabla f(x_0)v=\sum_1^N\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_1$$

9.0.2 Esempio: proiezione

$$\Pi_i(x)=x$$

$$\Pi_i(x+y)=\Pi_i(x_1+y_1,x_2+y_2,...x_n+y_n)=x_i+y_i=\Pi_i(x)+\Pi_i(y)$$

$$d\,\Pi_i(x_0,v)=\Pi_i(v)=V_i$$

$$d\,\Pi_i=d\,x_i$$

perché il differenziale di una applicazione lineare in un punto corrisponde all'applicazione calcolata nel punto stesso.

9.1 Studio dei diversi casi

9.1.1 Caso $\boldsymbol{R \to R}$

Funzione: $f\colon R \to R$

f è differenziabile se $\exists A\colon R \to R$ lineare $\Longrightarrow \exists a \in R : A(w) = a\,w$

$$\lim_{w \to 0} \left| \frac{f(x_0 + w) - f(x_0) - a\,w}{w} \right| = 0$$

Il valore assoluto può essere tolto perché il limite ha come valore 0. Se fossimo in più variabili non sarebbe possibile fare lo stesso in quanto effettuerei una divisione per un vettore, che non è definita.

$$\lim_{w \to 0} \frac{f(x_0 + w) - f(x_0)}{w} - a = 0$$

di conseguenza abbiamo che

$$a = f'(x_0)$$

in quanto otteniamo proprio il limite del rapporto incrementale.

Nota: nel caso in cui abbiamo una funzione ad una variabile, questa è necessariamente derivabile se è differenziabile e viceversa.

$$d\,f(x_0, v) = f'(x_0)\,v$$

Nota: $A(w \cdot 1) = w\,A(1) = a\,w$

9.1.2 Caso $\boldsymbol{R \to R^N}$

$\gamma\colon R \to R^N$ $\exists A\colon R \to R^N$ lineare tale che

$$\lim_{w \to 0} \frac{|\gamma(x_0 + w) - \gamma(x_0) - A(w)|_{\mathbb{R}^N}}{|w|}$$

per la proprietà della norma $|t\,w| = |t|\,|w|$ abbiamo che

$$\lim_{w \to 0} \left| \frac{1}{w} \begin{pmatrix} \gamma_1(x_0 + w) - \gamma(x_0) - a_1\,w \\ \gamma_2(x_0 + w) - \gamma(x_0) - a_2\,w \\ \ldots \\ \gamma_N(x_0 + w) - \gamma(x_0) - a_N\,w \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{1}{w} [\gamma_i(x_0 + w) - \gamma_i(x_0) - a_i\,w] = 0$$

$$a_i = \frac{d\,\gamma_i}{d\,t} \quad \text{con } t \text{ variabile "di partenza"}$$

$$\gamma(x_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x_0) \\ \gamma_2(x_0) \\ \ldots \\ \gamma_N(x_0) \end{pmatrix}$$

Per schiarire le idee, facciamo un collegamento con la fisica. Quando dobbiamo ricavare la velocità di un corpo di cui conosciamo l'equazione oraria, deriviamo singolarmente le sue componenti

9.1.3 Caso $\boldsymbol{R^n \rightarrow R^m}$

$f: R^n \rightarrow R^M$ con $m > 1$

con $w \in R^n$ e con

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)|}{|w|} = 0$$

Il fatto che sia =0 è un ipotesi in quanto supponiamo che la f sia differenziabile

$$\lim_{w \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{|w|}[f_1(x_0 + w)] - f_1(x_0) - A_1(w) \\ \dots \\ \frac{1}{|w|}[f_m(x_0 + w) - f_m(x_0) - A_m(w)] \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + w) - f_i(x_0) - A_i(w)}{|w_i|} = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$$

$$A_i(w) = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

$$A(w) = \begin{pmatrix} \sum_1^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} w_j \\ \dots \\ \sum_1^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Questa viene denominata matrice "Jacobiana".

Ricapitolando, abbiamo la relazione

$$d\, f(x_0, w) = f'(x_0)\, w$$

Vediamo adesso i significati che assumono $f'(x_0)$ ed il prodotto $f'(x_0) \cdot w$ nei vari casi dimensionali

Dimensione di partenza	Dimensione di arrivo	Significato di $f'(x_0)$	Significato del prodotto
1	1	derivata	prodotto tra numeri
1	m	derivata	prodotto vettore per scalare
n	1	$\nabla f(x_0)$	prodotto scalare tra vettori
n	m	$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ dove i è la riga e j è la colonna	prodotto matrice-vettore

Tabella 1.