Risoluzione degli esercizi di Analisi II

di Mondini Gianluca e di chiunque altro mi aiuti

Indice

1 Piano tangente

1.1 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

2 Vettore normale

Il vettore normale di $f(x, y)$ si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

3 Gradiente

Il gradiente di una funzione è il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione stessa.

4 Derivata parziale

È una derivata direzionale lungo gli assi.

Una funzione è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se esiste finito il limite in una variabile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nel caso della variabile y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

In pratica, è necessario derivare "normalmente" una funzione rispetto ad una variabile ponendo l'altra come una costante

4.1 Derivate di ordine $\geqslant$2

Necessita di revisione!

Se la funzione è di classe $C^?$, non è importante l'ordine con cui vengono calcolate le derivate parziali.

Esempio:

$$f_{xxy} = f_{xyx}$$

5 Derivata direzionale

Consideriamo una funzione $f(x, y)$ definita su un intervallo aperto $A \subset R^2$ a valori in R, siano inoltre $(x, y) \in A$ e $v = (v_1, v_2)$ un vettore di norma unitaria.

Si definisce derivata direzionale di $f(x, y)$ lungo la direzione v il limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\,v_1, y + t\,v_2) - f(x, y)}{t}$$

Attenzione! Se il vettore v non ha norma unitaria, è necessario procedere alla normalizzazione!

5.1 Formula del gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla\, f(x_0, y_0) \cdot v$$

6 Polinomio di Taylor

Necessita di revisione!

6.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

6.2 Formula di ordine 2

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

7 Studio della continuità in un punto

Necessita revisione!

Per verificare la continuità di una funzione in due variabili nel punto $(x_0,\ y_0)$ è necessario studiare tre punti:

- La funzione deve essere definita in (x_0, y_0)
- Deve esistere il limite in due variabili

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

- Il limite precedente deve valere esattamente quanto la funzione nel punto

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

8 Stabilire se una funzione è differenziabile

9 Stabilire se è possibile effettuare un cambio di variabile nell'intorno di un punto

Bozza, necessita revisione

Si studia il gradiente della funzione nel punto: se esso si annulla allora la funzione non è invertibile rispetto alla variabile per la quale si annulla.

10 Punti critici

Si definisce punto critico il punto x nel quale la derivata $f'(x)$ si annulla (in questo caso si chiama anche punto stazionario) oppure non esiste.

10.1 Casi

- Se $f: R^2 \to R$ un punto sarà critico se e solo se il gradiente ∇f si annulla. Il piano tangente alla superficie individuata dal grafico di f in punto critico è il piano orizzontale. Se una curva di livello di f contiene un punto critico in tale punto la curva può non avere una tangente ben definita.
- Se abbiamo una curva $\varphi: R \to R^m$ un punto critico è un valore di t tale che $\varphi'(t) = 0$. In tal caso nel punto $\varphi(t)$ può esserci una cuspide in cui non è ben definita una tangente alla curva.
- Se abbiamo una superficie differenziabile nello spazio parametrizzada da una funzione differenziabile ϕ: $R^2 \to R^3$ un punto critico è un punto in cui la matrice jacobiana ha rango minore di 2. In un punto critico la superficie non ha un piano tangente ben definito.

11 Punti di massimo e di minimo

Devo considerare i punti critici della funzione pondendo tutte le derivate parziali $= 0$. L'annullamento di tutte le derivate in (x_0, y_0) è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (x_0, y_0) sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = 0 \\ f_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{\mathrm{xx}}(x_0,y_0) & f_{\mathrm{xy}}(x_0,y_0) \\ f_{\mathrm{yx}}(x_0,y_0) & f_{\mathrm{yy}}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di H e verificare:
   - det > 0 e 1° elemento > 0 allora (x_0, y_0) è un punto di minimo
   - det >0 e 1° elemento < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di massimo
   - det < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di sella
2. Calcolare $\det(H - \lambda I)$ e trovare gli autovalori:
   - Se sono concordi < 0 allora ho un punto di massimo
   - Se sono concordi > 0 allora ho un punto di minimo
   - Se sono discordi ho una sella
   - Se uno di essi $= 0$ allora "degenere" (?)

11.1 Insiemi chiusi e limitati

È necessario studiare la frontiera usando la parametrizzazione: ricavo y in funzione di x dalla curva che definisce la frontiera e sostituisco nella funzione, ottenendo una funzione in una sola variabile incognita di cui trovare max e min studiando la derivata.

Metodo di Lagrange

Ho la funzione $f(x,y)$ e la restrinzione $g(x,y)$

$$\alpha(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,(g(x,y))$$

$$\nabla\lambda=\begin{cases}\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0\\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}=0\\ \frac{\mathrm{d}\alpha}{\partial\lambda}=0\end{cases}$$

e calcolo $f(\bar{x},\bar{y})$ nei punti $(\bar{x},\bar{y})$ trovati.

Dato che il valore di λ non serve, in genere è un buon metodo risolutivo quello di eguagliare le prime due equazione in modo da semplificarla, ricavare un'incognita dall'altra e sostituire nell'ultima equazione, così da poter ricavare le incognite.

12 Formule trigonometriche utili

12.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)\pm\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

12.2 Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(a)$$

$$\cos(2\,\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-2\operatorname{sen}^2(\alpha)=2\cos^2(a)-1$$

$$\tan(2\,\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$

12.3 Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$$

12.4 Formule parametriche

$$\operatorname{sen}(\alpha)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

13 Lunghezza di una curva

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}\| \, \mathrm{dt}$$

Nel caso in una variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f\dot{(t)}} \, \mathrm{dt} \quad \text{con} \quad y = f(t)$$

14 Integrale curvilineo

Data la curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ l'integrale curvilineo (o di linea) della funzione $f(x, y)$ su $\gamma(t)$ è:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \left\| \gamma\dot{(t)} \right\| \mathrm{dt}$$