Indice

Sul quaderno ci sono scritti i limiti per funzioni a valore scalare e a valore vettoriale

1 Definizioni

1.1 Sfera

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $p > 0$ si definiscono

- Sfera Aperta (o intorno) di centro x_0 e raggio p $\mathrm{B}(x_0, p) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < p\}$
- Sfera Chiusa di centro x_0 e raggio p $\overline{\mathrm{B}}(x_0, p) = \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant p\}$

1.2 Punto Interno

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 si dice interno ad Ω se : $\exists p: B_p(x_0) \subseteq \Omega$

1.3 Punto Esterno

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 si dice esterno ad Ω se :

- $\exists p > 0: B_p(x_0) \cap \Omega = 0$
- $B_p(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n - \Omega$ (Ovvero se appartiene al complemento di Ω)

1.4 Punto di frontiera

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 si dice di frontiera per Ω se

- $\forall p > 0 \Omega \cap B_p(x_0) \neq 0 \wedge \Omega^c \cap B_p(x_0) \neq 0$
- $\forall p > 0$ $x_1 \in \Omega$, $x_2 \notin \Omega$ $x_1, x_2 \in B_p(x_0)$

1.5 Punto Isolato

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 si dice isoladato ad Ω se

- $\exists p > 0: B_p(x_0) \cap \Omega = \{x_0\}$ (Cioè è l'unico punto del suo intorno appartente all'insieme)

1.6 Punto di Accumulazione

Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$, x_0 si dice punto di accumilazione per Ω o apprissmabile da da punti di Ω se

- $\forall p > 0 \exists x \in \Omega \cap B_p(x_0) : x \neq x_0$
- $\forall p > 0 \exists x \in \Omega : x \in B_p(x_0) - \{x_0\}$

1.7 Insieme aperto

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce insieme aperto se $\forall x \in \Omega \exists p > 0: B_p(x) \subseteq \Omega$

1.8 Insieme Chiuso

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce insieme chiuso se

- Il suo complementare $\Omega^c = \mathbb{R}^n - \Omega$ è aperto
- Contiene tutti i suoi punti di accumulazione "$\partial\Omega \subseteq \Omega$"
- Contiene tutti i suoi punti di frontiera "$\mathrm{F}\Omega \subseteq \Omega$"

1.9 Insieme Limitato

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce insieme limiato se $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \wedge \exists p > 0: \Omega \subseteq B_p(x_0)$ ovvero se l'insieme è compreso in una sfera limitata.

1.10 Insieme Convesso

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce insieme convesso se :

- $\forall x_1, x_2 \in \Omega, \forall \lambda \in [0, 1]\ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \Omega$ (cioè se scelti due punti appartenti ad Ω il segmento che li congiunge appartiene a sua volta ad omega)

1.11 Insieme Connesso

Dato un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ si definisce connesso se $\forall x_1, x_2 \in \Omega\ \exists$ una curva γ: $[0,1] \to \Omega$ continua tale che $\gamma(0) = x_1$ e $\gamma(1) = x_2$.

1.12 Chiusura di un insieme

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce chiusura dell'insieme Ω, l'insieme Ω più l'insieme formato dai suoi punti di accuumulazione (quindi sè Ω è chiuso, la sua chiusura sarà uguale ad Ω):

- $\overline{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ se invece Ω è chiuso $\overline{\Omega} = \Omega$

1.13 Insieme compatto

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce compatto se è un insieme chiuso e limitato

1.14 Successione

Una successione $X_n \in \mathbb{R}^n$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}^n$ $\quad X_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

1.15 Successione convergente

$X_n \in \mathbb{R}^n$ si definisce successione convergente se

$\text{Lim}_{n \to \inf} X_n = x$ ovvero dalla definizione $=> \forall \varepsilon > 0, \exists \overline{n} : \forall n > \overline{n} |x_n - x| < \varepsilon$ si può anche dire che $\lim_{n \to \inf} |x_n - x| = 0$, dove $|x_n - x| = a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, perchè è una norma.

1.16 Successione divergente

$X_n \in \mathbb{R}^n$ si definisce successione divergente se $\lim_{n \to \inf} X_n = \inf$ ovvero se $\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} : \forall n > \overline{n}\ |X_n| > \varepsilon$

1.17 Successioni oscillanti

$X_n \in \mathbb{R}^n$ si definisce successione oscillante se se non converge e non diverge ovvero se

$\lim_{n \to +\inf} X_n = \text{NE}$

1.18 Continuità di f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Data la funzione f : $\Omega \to \mathbb{R}^m$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ f è continua in x_0 se :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom}\, f\ |x - x_0| < \delta\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

1.19 Curva parametrica

Una curva parametrica γ è una funzione $\gamma: [a, b] \to \Omega$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

1.20 Superfice Parametrica

Una seuperfice paramatrica ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è composta da ϕ(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))

1.21 Curva chiusa

Una curva chiusa γ è una funzione continua γ: $[a, b] \to \Omega$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a) = \gamma(b)$

1.22 Curva costante

Una curva costante γ è una funzione γ: $[a,\, b] \rightarrow \Omega$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(t) = x_0 \forall t \in [a, b]$ e $x_0 \in \Omega$

1.23 Curva Semplice

Una curva semplice γ è una funzione γ: $[a,\, b] \rightarrow \Omega$ iniettiva su (a,b) cioè che $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ con $t \neq s \forall t, s \in (a, b)$

1.24 Insieme connesso (per archi)

Dato $\Omega \subseteq R^n$ si definisce insieme connesso (per archi) se : $\forall x,\ y \in \Omega \exists \gamma$: $[a, b] \rightarrow \Omega$: $\gamma(a) = x\,, \gamma(b) = y$ continua

1.25 Funzione oscillante

Una funzione f si dice oscillante se non converge e non diverge

1.26 Derivata direzionale

Sia $f\colon \Omega \rightarrow R$ con $\Omega \subseteq R^n$ e sia $x_0 \in \Omega$ allora si dirà che f è derivabile nella direzione di v , $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, se esiste finito il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}[f(x_0 + \mathrm{hv}) - f(x_0)]$ ed esso verrà chiamato derivata direzionale di f nella direzione di v in x_0 e verrà indicato con il seguente simbolo $\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$ oppure $f_v(x_0)$ oppure $\partial_v(x_0)$. La derivata direzionale lungo le basi canonica viene detta derivata parziale e si denotano con $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, oppure $f_{x_i}(x_0)$ oppure $\partial_{x_i}(x_0)$.

1.27 Funzione α-omogenea

Una funzione f si dice α-omogenea (o omogenea di grado α) se $f(\mathrm{tx}) = t^\alpha f(x) \forall\, \mathrm{tx} \in \mathrm{dom}\, f$

Una funzione 0 omogenea è del tipo $f(\mathrm{tx}) = t^0\, f(x) = f(x)$

1.28 Differenziale

Sia $f\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$ allora f si dice differenziabile in x_0 se $\exists A\colon \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + w) - f(x_0) - A(w)}{|w|} = 0$. L'applicazione lineare A(w) si chiama differenziale di f nel punto x_0 secndo l'incremento w si indica con $\mathrm{df}(x_o + w) = A(w)\ x_0, w \in \mathbb{R}^n$. La formula con cui si calcola il differenziale è $A(w) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ ovvero corrisponde al prodotto scalare tra il gradiente è l'incremento -> $A(w) = \nabla f(x_0)\, w = \mathrm{df}(x_0, w)$.

1.29 Funzione di classe C^1

Una funzione $f\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^1 se è continua in Ω e se le sue derivate parziali prime sono continue in Ω,

1.30 Equazioni della curva di livello

Data una funzione $f\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e data γ: $[a, b] \rightarrow \Omega$ si dice curva di livello K di f su Ω se

$f(\gamma(t)) = k \quad \forall t \in [a, b]$.

Le curva di livello sono sempre perpendicolari al gradiente in quanto se $f(\gamma(t)) = k$ allora $\frac{d\,(f(\gamma(t)))}{\mathrm{dt}} = 0$ e di conseguenza $\nabla f(\gamma(t))\ \gamma(t)' = 0\ \forall t \in (a, b)$

1.31 Direzione di massima pendenza

Si definisce direzione di massima pendenza, crescente o decresente, la direzione nel quale la funzione "cresce" più„ velocemente.

- Versore nella direzione di massima pendennza crescenente $= \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$
- Versore nella direzione di massima pendennza decrescnete $= -\frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$

1.32 Funzioni tangent in punto

Data $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ e $g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ si definiscono tangenti in un punto $x_0\in\mathbb{R}^n$ se $\mathrm{Lim}_{w\to 0}\frac{f(x_0+w)-g(x_0+w)}{w}=0$

1.33 Vettore Normale, Piano Tangente e Retta tangente

- Dato una funzione $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ si definisce graph f=$\{(x, y) : x\in\mathrm{dom}\, f \quad y=f(x)\}$
- Mentre si definisce Piano tangente al graph di f l'equazione $z=f(x_o)+\nabla f(x_0)(x-x_0)$
- Si definisce vettore normale al piano tangente il vettore avente le seguenti coordinate $V=(\nabla f(x_0), -1)$ (Con il gradiente si intendono tutte le sue derivate parziali prime, una per componente).
- Si definisce invece Retta Tangente al sostegno di γ nel suo punto $\gamma(t_o)$ la retta parametrica $\sigma(t)=\gamma(t_0)+(t-t_0)\gamma(t_0)'$. Il vettore $\gamma(t_0)'$ oltre che derivata si dirà anche velocità di γ in $\gamma(t_0)$.

1.34 Matrice Hessiana e Jacobiana

Si definisce matrice Hessiana la matrice contente tutte le derivate parziali seconde (solo seconde).

Mentre si definisce matrice Jacobiana la matrice avente le funzioni e le sue derivate parziali prime.

1.35 Funzione di classse C^2

Una funzione $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ si dice di classe C^2 se è continua in Ω, se le se derivate parziali prime sono continue in Ω e se lo sono anche le derivate parziali seconde in Ω

1.36 Polinomio di Taylor

Si definisce Polinomio di Taylor il Polinomio costruito su una funzione avente la seguente forma:

$f(x_0+w)=\sum_{k=0}^{n} \quad \sum_{\mu_1\ldots\mu_n, \mu_1+\ldots\mu_n=k, \mu_i\geqslant 0} \quad \frac{f_{x_1}^{\mu_1}\ldots\ldots f_{x_n}^{\mu_n}(x_0)}{\mu_1!\ldots\mu_n!}w_1^{\mu_1}\ldots w_n^{\mu_n}+R_N(w)$

Dove R_n può essere

- Resto di Peano : $R_n(w)=O(|W|^n)$
- Resto di Lagrange : $R_n(w)=\frac{f^{n+1}(\xi)w^{n+1}}{(n+1)!}$

1.37 Primitive

Data una funzione f si dice se,date F e G primitive di f allora F' = f, G'=f , (F-G)' = 0 con soluzioni particolari u' = 0, u' = f.

1.38 Campo di vettori di classe C^k

Dato $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ si definisce campo (di vettori) in Ω, di classe C^k,una funzione A: $\Omega\to\mathbb{R}^n$ con $A=A(A_1, A_2, \ldots\ldots A_n)$ le cui componenti scalari $A_i:\Omega\to\mathbb{R}$ sono funzioni scalari continue e deriviabili fino all'ordine K $\forall i=1\ldots n$.Il vettore di arrivo di A(x) ha lo stesso numero di componenti del vettore di partenza x.

1.39 Campo Piano

Si definisce campo piano un campo definito su $\mathbb{R}^2$ o su un suo sottinsieme ed è composto da una coppia di funzioni $A(x, y)=(\alpha(x, y), \beta(x, y))$ che individuano il vettore in $\mathbb{R}^2$ associato al punto (x,y)

1.40 Forma differenziale lineare

Dato $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ si definisce forma differenziale lineare(o solo forma differennziale (o solo forma))) una funzione $\alpha\colon\Omega$ x $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tale che $\forall$ $\overline{x}\in\Omega$ la funzione $t\to\alpha(\overline{x}, t)$ si lineare in t.

1.41 Campo associato all forma e forma associata al campo

Qualunque forma $\alpha(x, w)$ per la quale $w \to \alpha(\overline{x}, w)$ è lineare ∀x̄ fissato si può definire un campo di vettori A(x) tale che $\alpha(\overline{x}, w) = A(\overline{x})w$. Il campo di vettori A(x) verrà detto associato alla forma α(x,w). α(x,w) verrà detto di classe C^k se A(x) è di classe C^k.

1.42 Integrale di un campo su una curva continua

Sia $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo di classe C^0 ∀ curva parametrica continua γ: $[a, b] \to \Omega$ si definisce integrale di A esteso alla curva γ l'integral $\int_\gamma A = \int_a^b A(\gamma(t))\,\gamma(t)'\,\mathrm{dt}$

1.43 Campo e Forma Integrabili

- Un campo di vettori $A: \Omega \to \mathbb{R}^n$ si dirà integrabile o potenziale se $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che ∇f =A.Ogni funzione verificante tale identità si dirà primitiva o potenziale.

- Una forma $\alpha: \Omega\, \mathrm{x} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dirà integrabile o esatta se $\exists f: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che df(x,w) = α(x,w) su Ω x $\mathbb{R}^n$. Ogni funzione f verificante tale indentità si dirà primitiva o potenziale della forma α

1.44 Curva Regolare

Una curva $\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dirà regolare se $|\gamma(t)'| \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

1.45 Superfice Parametica regolare

Data una superfice $\phi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ con Ω compatto ($\subseteq \mathbb{R}^2$) si definisce regolare se

- ϕ è iniettiva su Ω

- $\phi \in C^1(\Omega)$

- ϕ' jacobiano di ϕ è di rango 2

- $\phi_u \wedge \phi_v \neq 0 \forall (u, v) \in \Omega$

1.46 Curva Rettificabile

Una curva $\gamma[a, b] \to \mathbb{R}^n$ si definisce rettificabile (= lunghezza finita) se $\sup_\Pi$ (Π) $< +$ inf e si definisce Π la partizione della curva sull'intervallo [a,b]. La formula per la lunghezza della polinomiale della partizione è $\wedge(\Pi) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma_{t_i+1} - \gamma_{t_i}|$. Se una curva è rettificabile allora $\wedge(\gamma) = \int_a^b |\gamma(t)'|\,\mathrm{dt}$.

1.47 Campo Irrotazione e forma chiusa

- Una campo A di classe C^k è detto irrotazione se $(A_i)_{x_j} = (A_J)_{x_i} \forall i \neq j$

- Una forma differenziale α(x,w) = A(x)w si dirà chiusa se il suo campo associato A è irrotazionale

1.48 Congiunzione di curva

Date due curve $\gamma_1: [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2[b,c] \to \Omega$ si dirà congiunzione delle curve $\gamma_1 \oplus \gamma_2$ la curva definita da γ_1 se $t \in [a,b]$ mentre da γ_2 se $t \in [b,c]$.

1.49 Curva Opposta

Data una curva γ: $[a, b] \to \Omega$ si definisce curva opposta $\ominus\gamma$ la curva $\ominus\gamma$: $[a,b] \to \Omega$ tale che $\ominus\gamma(t) = \gamma(b - t + a)$.

1.50 Curve Deformabili od Omotope

Due curve $\gamma_1[0,1] \to \Omega$ e $\gamma_2[0,1] \to \Omega$ tale che $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ si dicono deformabili od omotope se $\exists h: [0,1]\mathrm{x}[0,1] \to \Omega$ continua tale che $h(0,t) = \gamma_!(t)$ e $h(1,t) = \gamma_2(t)$.

1.51 Insieme Semplicemente Connesso

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dirà semplicmente connesso se ogni curva chiusa $\gamma[0, 1] \to \Omega$ è omotopa in Ω ad una curva costante $\sigma(t) = x_0 \forall t \in [0,1]$.

1.52 Insieme a stella

Un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ verrà detto a stella se $\exists x_0 \in \Omega$ tale che il segmento $\overline{x_0}x \subseteq \Omega$ $\forall x \in \Omega$

1.53 Rotore

Dato $A\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di definisce rotore il rotA = $((A_2)_{x_3} - (A_3)_{x_2}, -[(A_1)_{x_3} - (A_3)_{x_1}], (A_1)_{x_2} - (A_2)_{x_1})$. Il rotore di un campo vettoriale è a sua volta un campo vettoriale ed è il prodotto vettore tra le componenti scalari del campo e le derivate parziali.

1.54 Componente connessa

Un insieme sconnesso è un insieme non connesso ed un insieme sconnesso può essere decomposto i componenti connesse.

Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in \Omega$ si definisce componente connessa contenente x_0 come : $\Omega(x_0) = \{x \in \Omega\colon \exists \gamma\colon [0,1] \to \Omega\colon \gamma(0) = x_0 \, e \, \gamma(1) = x\}$

1.55 Sostengo di una curva

Data una curva $\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^n$ si definisce sostegno l'immagine della curva γ Imγ={y $\in \mathbb{R}^n$: $\exists t \in [a,b]$: $y = \gamma(t)\}$. Il sostegno di una curva definisce il grafico di essa, ma non il verso e la velocità di percorrenza

1.56 Curve Equivalenti

Date due curve γ: $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma[c,d] \to \mathbb{R}^n$ si diranno equivalenti se $\exists \alpha$: $[a,b] \to [c,d]$ invertibile con $\alpha \in C^1([a,b])$ tale che $\gamma(t) = \sigma(\alpha(t))$.

1.57 Elementi delle teoria della misura e dell'integrazione secondo L

- Misura di un intervallo in $\mathbb{R}$: $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ allora n([a,b]) = b-a
- Miusra di un intervallo in $\mathbb{R}^2$: [a,b]x[c,d] = {(x,y) : x $\in$[a,b] e y $\in$[c,d]} -> n([a,b]x[c,d]) (b-a) * (c-d)
- Misura di un intervallo in $\mathbb{R}^n$: $\Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ = $\{(x_1, ..., x_n)$: $x_i \in [a_i, b_i]$ $\forall$i = 1...n} = I ->|I| = $\Pi_{i=1}^n (b_i - a_i)$
- Plurintervallo : è un insieme di intervalli che non hanno punti in comuni-> $\Pi = U_{i=1}^n I_i$ con $|I_i \cap I_j|$ = 0 $\forall i \neq j$
- Misura degli insiemi aperti : Ω aperto, Π plurintervallo contenuto in Ω $\Pi \subseteq \Omega$ -> $|\Omega|$= sup(Π)
- Misura degli insiemi compatti: K compatto, Π plurintervallo conenente Ω -> |K| = inf(Π)
- Misura interna ed esterna: E $\subseteq \mathbb{R}^n$ insieme arbitrario limitato, definiamo con
  - $|E|^*$ = inf(A) $A \supseteq E$ aperto (misura esterna)
  - $|E|_*$ = sup(K) $K \subseteq E$ compatto (msura interna)

1.58 Proprietà di un insieme misurabile

- Se E e F sono misurabili allora E U F , E$\cap F$ e E\F sono misurabili
- Se E e F misurabili con E $\cap F$ = 0 allora |E+F| = |E| + |F|
- Se E e F misurabili con $E \subseteq F$ allora |E| $\leqslant$|F| (MONOTONIA)

- Se E_i i= 1..n misurabili e $E_i \cap E_j = 0 \forall i \neq j$ allora $|\mathrm{U}_{i=1}^{n} E_i| = \sum_{i=1}^{n} |E_i|$ additiva numerabile

- Se $E_i\, i=1...n$ misurbuli $|\mathrm{U}_{i=1}^{n} E_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |E_i|$ subadditività numerabile

- Se $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... E_n$ misurabili con E $= U_{i=1}^{n} E_i$ allora |E| = $\sup_{i=1...n}(|E_i|)$ continuità verso l'alto

- Se $E_1 \supseteq E_2 \supseteq ....E_n$ misurabili sia E $= \cap_{i=1}^{n} E_i$ allora |E| = $\inf_{i=1...n}(|E_i|)$

1.59 Insieme Numerabile

Un insieme Ω si dice numerabile se ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$,cioè se è possibile stabilire una corrispondenza biuniovca tra N$e\Omega$. Se Ω numerabile allora $|\Omega| = 0$.

1.60 Misura di insiemi non limitati

Dato E insieme non limitato e data $B_r(0)$ sfera di raggio r >0 con $E \cap B_r(0)$ misurabile allora |E|= $\sup_r |E \cap B_r(0)|$

1.61 Funzione Misurabile

Una funzione si dice misurabile se l'insieme $\{x \in \text{domf}: f(x) \in I\}$ è misurabile per ogni intervallo I

1.62 Funzione Numerabile

Una funzione f si dice numerabile se $\forall$ intervallo I, $f^{-1}(I)$ è misurabile

1.63 Proprietà dell'integrale di Lebesgue

-

- Se f e g integrabili su E e $f \geqslant g$ allora $\int_E f \geqslant \int_e g$ (MONOTONIA)

- Se f$\geqslant$0 integrabile su E allora $\int_E F \geqslant 0$ (Positività)

- Se f integrabile su E e |E| = 0 allora $\int_E f = 0$

- Se f integrabile su E, f$\geqslant$0 tale che $\int_E f = 0$ allora $|\{$x $\in$ E : f(x) $\neq$ 0$\}|$ = 0

- Se f integrabile su E e F con $E \supseteq F$ e f $\geqslant$0 allora $\int_E f \geqslant \int_F f$

- Se f integrabile su $U_{i=1}^{n} E_i$, con $E_i \cap E_j = 0 \forall i \neq j$ allora $\int_{U_{i=1}^{n}} E_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_i} f$

- CNS: affinche f sia integrabile su E è che $\forall \varepsilon > 0 \exists \Pi: (\Sigma_\Pi - \sigma_\Pi) < \varepsilon$

1.64 Dominio Normale

Si deginisce Dominio normale lo spazio compreso tra due funzioni

- Rispetto ad x : E un dominio normale rispetto ad x se
  - $E_x = [a, b]$
  - $\exists \varphi: [a, b] \to \mathbb{R}: \psi: [a, b] \to \mathbb{R}$
  - E = $\{$(x,y) : x $\in$[a,b] e $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$
- Rispetto ad y : E un dominio normale rispetto ad y se
  - $E_y = [c, d]$
  - $\exists \varphi: [c, d] \to \mathbb{R}: \psi: [c, d] \to \mathbb{R}$
  - E = $\{$(x,y) : y $\in$[c,d] e $\varphi(d) \leqslant x \leqslant \psi(d)\}$