

Scritto analisi 2

1 Come risolvere gli esercizi

1.1 Insiemi

1.1.1 Insieme a stella

Un insieme $\Omega \subseteq R^n$ viene detto “a stella” se

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tale che il segmento } \bar{x}_0 x \subseteq \Omega \quad \forall x \in \Omega$$

In sostanza Ω è un insieme “a stella” se esiste un suo punto che “vede tutti gli altri”

1.1.2 Insieme connesso

Un insieme è connesso se esiste una curva che unisce ogni suo punto

1.1.3 Insieme semplicemente connesso

Un insieme $\Omega \subseteq R^n$ si dirà semplicemente connesso se ogni curva chiusa $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ è omotopa in Ω ad una curva costante $\sigma(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$. In R^2 un insieme è semplicemente connesso se è connesso “senza buchi”.

1.1.4 Insieme aperto

In ogni punto dell'insieme è possibile “spostarsi di poco” senza uscire dall'insieme

1.1.5 Insieme chiuso

È il complementare di un insieme aperto

1.2 Derivata direzionale

Data la funzione $f(x, y)$, la derivata in direzione (v_1, v_2) in (x_0, y_0) vale

$$v_1 f_x(x_0, y_0) + v_2 f_y(x_0, y_0)$$

1.3 Limiti

$$\lim_{0, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y, 0 \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L? \implies \lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = L$$

1.3.1 Restrinzione su retta

$$y = m(x - x_0) + y_0 \quad \text{con} \quad m \in R$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0)$$

Se il limite dipende da m allora significa che il limite di partenza non esiste. In caso contrario non è possibile concludere nulla.

1.4 Determinare la differenziabilità

1. Verifico che la funzione $f(x, y)$ sia continua in (x_0, y_0) , utilizzando il limite se necessario

2. Verifico che la funzione sia derivabile calcolando le derivate parziali utilizzando il limite, verificando che entrambe siano $< \infty$

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Teorema del differenziale totale: se A ha derivate parziali continue in un intorno di (x_0, y_0) è differenziabile in quel punto

3. Verifico la differenziabilità

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

1.5 Calcolare il potenziale di una forma differenziale

Forma differenziale $w(x, y) = A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$

Data una forma differenziale $A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$

1. Controllo che la forma differenziale sia chiusa (il campo associato $A = (A_1(x, y), A_2(x, y))$ deve essere irrotazionale)

$$(A_1)_y = (A_2)_x$$

Se la forma non è chiusa, significa che non può essere esatta e quindi neanche integrabile (grazie alla condizione del rotore) [fine].

2. Se il dominio è semplicemente connesso, oltre ad essere chiusa è anche esatta e quindi la forma è integrabile [fine].
3. Calcolo manualmente una primitiva
4. Verifico che $\nabla F = A$

Metodo manuale per il calcolo della primitiva

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)] dx = f(x, y) + C(y)$$

2. Derivo $f(x, y) + C(y)$ rispetto a y e pongo la derivata = $A_2(x, y)$

$$\frac{d}{dy}[f(x, y) + C(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo C (eventualmente integrando $C'(y)$ del passaggio precedente) e sostituisco il valore trovato in $f(x, y) + C(y)$, il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

1.6 Lunghezza di una curva

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

che in una sola variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Lunghezza di una curva in forma polare

La formula è da verificare

Data una curva polare $\rho(\theta)$ e $\theta \in [a, b]$, si ha

$$\Delta\rho(\theta) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2} d\theta$$

1.7 Integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} f(x, y) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

1.8 Integrale di campo (integrale di linea)

Dato il campo vettoriale $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
e una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) x'(t) + f_2(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

1.9 Area della porzione di grafico (o superficie di $f(x, y)$)

$$A = \int_a^b \int_c^d |f_x \wedge f_y| dy dx$$

$$A = \int_a^b \left(\int_c^d \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dy \right) dx$$

Per curve date in coordinate polari

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$$

1.10 Integrale superficiale

$$\int_{\Delta} f(\Phi_{(u,v)}) |\Phi_u \wedge \Phi_v| du dv$$

Esempio

Calcolare $\int_{\Sigma} x d\sigma$. $\Sigma = \text{graph}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$.

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 < x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}$$

Determino gli estremi di integrazione in coordinate polari: θ è compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ in quanto ci troviamo nel primo quadrante, mentre $1 < \rho < \sqrt{2}$ poiché $1 < \rho^2 < 2$. Per effettuare il cambio di coordinate necessito del determinante della Jacobiana, ovvero $\det(J) = \rho$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \rho \cos(\theta) \sqrt{\frac{1 + \rho^2}{\rho^2}} \rho = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \dots \end{aligned}$$

Esempio

Calcolo della superficie laterale di un solido di rotazione

$$S_{\text{laterale}} = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} \, dz$$

Esempio

Calcolo della superficie di una sfera

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

$$S_{\text{sfera}} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{1 - z^2}} \, dz = 4\pi$$

1.11 Volume

$$V = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz$$

Esempio

Calcolo del volume di un solido ottenuto ruotando una funzione $f(z) > 0$ attorno all'asse z

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : \begin{cases} a < z < b \\ 0 < \rho < f(z) \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases} \right\}$$

$$V(T) = \int_T dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho = 2\pi \int_a^b dz \frac{1}{2} f^2(z) = \pi \int_a^b f^2(z) \, dz$$

Esempio

Calcolo del volume di una sfera

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

$$V_{\text{sfera}} = \pi \int_{-1}^1 f^2(z) \, dz = \pi \int_{-1}^1 (1 - z^2) \, dz = \frac{4}{3}\pi$$

1.12 Integrale su un insieme**1.12.1 In 2 variabili**

Se T è “normale”

$$\int_T f(x, y) \, dy \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

1.12.2 In 3 variabili

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Integrazione per strati

$$\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\Omega(z)} f(x, y, z) \, dx \, dy$$

Integrazione per fili

$$\int_{\Pi_{x,y}(\Omega)} dx \, dy \int_{\Omega(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

1.12.3 Cambio di variabile

(necessita di revisione)

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\Omega'} f(g(y)) |\det(g'(y))| \, dy$$

- $g: \Omega \rightarrow \Omega'$

- Ω, Ω' aperti
- $g \in C'$
- g invertibile

1.13 Inversione locale

Data $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

$F(x, y)$ è localmente invertibile in (x_0, y_0) se il determinante Jacobiano in (x_0, y_0) è non nullo

$$|J(x_0, y_0)| = \left| \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

Metodo pratico

1. Determino $f(x, y)$ e $g(x, y)$
2. Calcolo f_x, f_y, g_x, g_y e li inserisco nella matrice Jacobiana

$$\begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$$

3. Calcolo il determinante e lo impongo uguale a 0. f sarà invertibile nei punti trovati.

Esempio 1

La trasformazione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $F(x, y) = (x y, x^2 - y^2)$ è localmente invertibile nell'intorno di $(1, 1)$ e $(1, 0)$?

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x y & f_x &= y & f_y &= x \\ g(x, y) &= x^2 - y^2 & g_x &= 2x & g_y &= -2y \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} y & 2x \\ x & -2y \end{pmatrix}$$

$$|J(1, 1)| = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \implies \text{si}$$

$$|J(1, 0)| = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \text{si}$$

Esempio 2

La trasformazione $T(x, y) = (x^2 y, x y^2)$ in $(0, 0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 y & f_x &= 2x y & f_y &= x^2 \\ g(x, y) &= x y^2 & g_x &= y^2 & g_y &= 2x y \end{aligned}$$

$$|J(0, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi non è localmente invertibile (ma è differenziabile..perché?)

1.14 Teorema del Dini

- Per esplicitare una funzione $f(x, y)$ rispetto alla variabile y (o alla x) è necessario che $f_y \neq 0$ (o $f_x \neq 0$)
- Per applicare il Th. del Dini in un punto (x_0, y_0) è necessario che

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

1.15 Direzione di massima pendenza

- Direzione di massima pendenza ascendente di f in (x_0, y_0)

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- Direzione di massima pendenza discendente di f in (x_0, y_0)

$$-\nabla f(x_0, y_0) = -\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se $(0,0)$ non è definita (punto stazionario).

La direzione della curva di livello di una funzione f in un punto (x_0, y_0) è ortogonale alla direzione di massima pendenza.

1.16 Vettore normale

Il vettore normale di $f(x, y)$ si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t}$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

Se la superficie S è data implicitamente, come la serie di punti (x, y, z) che soddisfano $F(x, y, z) = 0$, allora la normale nel punto (x, y, z) alla superficie è data dal gradiente

$$\nabla F(x, y, z)$$

1.17 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.18 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

Necessita di revisione!

1. Calcolo $f(x_0)$ se necessario
2. Calcolo il vettore normale alla superficie parametrica

$$\Phi_u \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi_v \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (E_1, E_2, E_3)$$

e se $=0$ la superficie è non regolare

3. Piano tangente $= E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0)$

1.19 Polinomio di Taylor

1.19.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.19.2 Formula di ordine 2

$$(\text{formula di ordine I}) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

1.20 Massimi e minimi

Devo considerare i punti critici della funzione ponendo tutte le derivate parziali = 0. L'annullamento di tutte le derivate in (x_0, y_0) è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (x_0, y_0) sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

con $f_{xy} = f_{yx}$ (perché??)

Adesso posso

- Calcolare il determinante di H e verificare:
 - $\det > 0$ e 1° elemento > 0 allora (x_0, y_0) è un punto di minimo
 - $\det > 0$ e 1° elemento < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di massimo
 - $\det < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto di sella
- Calcolare $\det(H - \lambda I)$ e trovare gli autovalori:
 - Se sono concordi < 0 allora ho un punto di massimo
 - Se sono concordi > 0 allora ho un punto di minimo
 - Se sono discordi ho una sella
 - Se uno di essi = 0 allora ho un punto degenere

2 Appunti utili

2.1 Discontinuità

Discontinuità di I specie (o di salto). Il limite sinistro e destro della funzione sono entrambi finiti ma non coincidono.

Discontinuità di II specie (o essenziale). Uno dei due limiti è infinito o non esiste

Discontinuità di III specie (o eliminabile). Il limite destro e quello sinistro coincidono ma la funzione nel punto non assume lo stesso valore del limite.

2.2 Derivate

2.2.1 Derivate fondamentali

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D(\log_b(x)) = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln(b)}$$

2.2.2 Derivate di funzioni composte

$$D(a^{f(x)}) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$$

$$D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$D(x^{f(x)}) = x^{f(x)} \cdot \left[f'(x) \cdot \ln(x) + \frac{f(x)}{x} \right]$$

2.3 Formule trigonometriche

2.3.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

2.3.2 Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

2.3.3 Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

2.3.4 Formule parametriche

$$\sin(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

2.4 Cambi di coordinate

2.4.1 Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \rho$$

Coordinate polari centrate in P_0

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos(\theta) \\ y = y_0 + \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

2.4.2 Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

$$|J| = \rho^2 \sin(\theta)$$

2.4.3 Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = h \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

2.5 Funzioni utili**2.5.1 Circonferenza****Equazione cartesiana**

Centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione cartesiana in forma canonica

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + c = 0$$

dove $c = a^2 + b^2 - r^2$

Condizione di realtà:

$$x_0^2 + y_0^2 - c > 0$$

Equazione in coordinate polari

$$\rho = r$$

Equazione parametrica

$$C: \begin{cases} x = x_0 + R \cos(t) \\ y = y_0 + R \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

2.5.2 Seno iperbolico

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

La funzione è sempre crescente e si annulla nel punto $x = 0$

2.5.3 Coseno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$D(\cosh(x)) = \sinh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

La funzione è sempre positiva

2.6 Limiti notevoli

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln(a)$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{(1 + f(x))^c - 1}{f(x)} = c$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arctan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sinh(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cosh(f(x)) - 1}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tanh(f(x))}{f(x)} = 1$$

2.7 Integrali

2.7.1 Integrazione per parti

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx + C$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

2.7.2 Integrali utili

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}[x - \sin(x) \cos(x)] + C$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}[x + \sin(x) \cos(x)] + C$$

$$\int \sin(t) \cos(t) dt = -\frac{1}{2} \cos^2(t) + C$$

Da verificare:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \int (1 + \cotan^2(x)) dx = -\cotg(x) + C$$

2.7.3 Sostituzioni utili

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} \implies x = \sinh(t) \\ \sqrt{x^2-1} \implies x = \cosh(t) \\ \sqrt{1-x^2} \implies x = \begin{cases} \sin(t) \\ \cos(t) \end{cases} \\ \sqrt{-1-x^2} \implies \text{non ha senso in } \mathbb{R} \end{array} \right.$$