Risoluzione degli esercizi di Analisi II

di Mondini Gianluca e di chiunque altro mi aiuti

Indice

1 Piano tangente

Il piano tangente esiste solo se la curva è regolare, ovvero se x, y, $z \in C^1$ (dominio), quindi se la funzione è iniettiva. Un modo semplice per verificarlo è calcolare il versione normale $\Phi u \wedge \Phi v$ in x_0 e verificare che sia $\neq 0$

1.1 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.2 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

1. Calcolo il vettore normale

$$\Phi u\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi_v\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (E_1, E_2, E_3)$$

   e se $=0$ la superfice è non regolare

2. Sostegno = sostituisco $(\bar{x_0}, \bar{y_0})$ in $f = (x_0, y_0, z_0)$

3. Piano tangente $= E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0)$

2 Vettore normale

Il vettore normale di $f(x, y)$ si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

3 Gradiente

Il gradiente di una funzione è il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione stessa.

4 Derivata parziale

È una derivata direzionale lungo gli assi.

Una funzione è derivabile parzialmente rispetto alla variabile x nel punto (x_0, y_0) se esiste finito il limite in una variabile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nel caso della variabile y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

In pratica, è necessario derivare "normalmente" una funzione rispetto ad una variabile ponendo l'altra come una costante

4.1 Metodo Giusti

1. Calcolo

$$g(t) = f(x + t\, v)$$

2. Sostituisco e calcolo il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, v) - f(x)}{t}$$

4.2 Derivate di ordine $\geqslant 2$

Necessita di revisione!

Se la funzione è di classe $C^?$, non è importante l'ordine con cui vengono calcolate le derivate parziali.

Esempio:

$$f_{xxy} = f_{xyx}$$

5 Derivata direzionale

Consideriamo una funzione $f(x, y)$ definita su un intervallo aperto $A \subset R^2$ a valori in R, siano inoltre $(x, y) \in A$ e $v = (v_1, v_2)$ un vettore di norma unitaria.

Si definisce derivata direzionale di $f(x, y)$ lungo la direzione v il limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\, v_1, y + t\, v_2) - f(x, y)}{t}$$

Attenzione! Se il vettore v non ha norma unitaria, è necessario procedere alla normalizzazione!

5.1 Calcolo concreto

Data la funzione $f(x,y)$, la derivata in direzione (v_1, v_2) in (x_0, y_0) vale

$$v_1\, f_x(x_0, y_0) + v_2\, f_y(x_0, y_0)$$

5.2 Formula del gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla\, f(x_0, y_0) \cdot v$$

6 Direzione di massima pendenza

La direzione di massima pendenza di una funzione è rappresentata dal suo gradiente

- Ascendente $= \nabla f(x_0, y_0)$
- Discendente $= -\nabla f(x_0, y_0)$

7 Polinomio di Taylor

Necessita di revisione!

7.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

7.2 Formula di ordine 2

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) +$$
$$+\frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

8 Studio della continuità in un punto

Necessita revisione!

Per verificare la continuità di una funzione in due variabili nel punto (x_0, y_0) è necessario studiare tre punti:

- La funzione deve essere definita in (x_0, y_0)
- Deve esistere il limite in due variabili
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$
- Il limite precedente deve valere esattamente quanto la funzione nel punto
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

9 Stabilire se una funzione è differenziabile

Una funzione in due variabili definita su $A \subseteq R^2 \to R$ è differenziabile in (x_0, y_0) se esiste una forma lineare $L(h,k)$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + L(h,k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

dove l'incremento $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$, $L(h,k) = \alpha\, h + \beta k$

Per essere differenziabile la funzione deve essere continua in (x_0, y_0), deve esistere la derivata direzionale.

9.1 Teorema del differenziale totale

Se A ha derivate parziali continue in un intorno di (x_0, y_0) è differenziabile in quel punto.

9.2 Altre note

(necessita revisione)

Forma differenziale $= A_1(x, y)\,\mathrm{dx} + A_2(x, y)\,\mathrm{dy}$

Il campo associato a una forma differenziale è $A = (A_1(x, y), A_2(x, y))$

- Forma differenziale chiusa: ha campo associato irrotazionale, ovvero le derivate in croce sono uguali: $(A_1)_y = (A_2)_x$
- Forma differenziale esatta: chiusa con dominio semplicemente connesso ($\exists$ una f per cui la forma è il differenziale) o chiusa e integrabile $\rightarrow$ esiste una primitiva $\rightarrow$ deve essere esatta

10 Calcolare il potenziale di una forma differenziale lineare

Forma differenziale

$$w(x, y) = A_1(x, y)\,\mathrm{dx} + A_2(x, y)\,\mathrm{dy}$$

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)]\mathrm{dx} = f(x, y) + c(y)$$

   dove $c(y)$ è una costante da determinare

2. Derivo $f(x, y) + c(y)$ rispetto ad y e pongo $= A_2(x, y)$

$$\frac{d}{d\,x}[f(x, y) + c(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo c (eventualmente integrando $c'(y)$ dal passaggio precedente e sostituisco il valore trovato in $f(x, y) + c(y)$, il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

11 Stabilire se è possibile effettuare un cambio di variabile nell'intorno di un punto

Bozza, necessita revisione

Si studia il gradiente della funzione nel punto: se esso si annulla allora la funzione non è invertibile rispetto alla variabile per la quale si annulla.

12 Punti critici

Si definisce punto critico il punto x nel quale la derivata $f'(x)$ si annulla (in questo caso si chiama anche punto stazionario) oppure non esiste.

12.1 Casi

- Se $f: R^2 \rightarrow R$ un punto sarà critico se e solo se il gradiente ∇f si annulla. Il piano tangente alla superficie individuata dal grafico di f in punto critico è il piano orizzontale. Se una curva di livello di f contiene un punto critico in tale punto la curva può non avere una tangente ben definita.
- Se abbiamo una curva $\varphi: R \rightarrow R^m$ un punto critico è un valore di t tale che $\varphi'(t) = 0$. In tal caso nel punto $\varphi(t)$ può esserci una cuspide in cui non è ben definita una tangente alla curva.
- Se abbiamo una superficie differenziabile nello spazio parametrizzada da una funzione differenziabile $\phi: R^2 \rightarrow R^3$ un punto critico è un punto in cui la matrice jacobiana ha rango minore di 2. In un punto critico la superficie non ha un piano tangente ben definito.

13 Punti di massimo e di minimo

Devo considerare i punti critici della funzione pondendo tutte le derivate parziali $= 0$. L'annullamento di tutte le derivate in (x_0, y_0) è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché (x_0, y_0) sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{\mathrm{xx}}(x_0, y_0) & f_{\mathrm{xy}}(x_0, y_0) \\ f_{\mathrm{yx}}(x_0, y_0) & f_{\mathrm{yy}}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di H e verificare:
   - det >0 e 1° elemento > 0 allora (x_0, y_0) è un punto di minimo
   - det >0 e 1° elemento < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di massimo
   - det < 0 allora (x_0, y_0) è un punto di sella
2. Calcolare $\det(H - \lambda I)$ e trovare gli autovalori:
   - Se sono concordi < 0 allora ho un punto di massimo
   - Se sono concordi > 0 allora ho un punto di minimo
   - Se sono discordi ho una sella
   - Se uno di essi $= 0$ allora "degenere" (?)

13.1 Insiemi chiusi e limitati

È necessario studiare la frontiera usando la parametrizzazione: ricavo y in funzione di x dalla curva che definisce la frontiera e sostituisco nella funzione, ottenendo una funzione in una sola variabile incognita di cui trovare max e min studiando la derivata.

Metodo di Lagrange

Ho la funzione $f(x, y)$ e la restrinzione $g(x, y)$

$$\alpha(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\,(g(x, y))$$

$$\nabla\lambda = \begin{cases} \frac{\partial\alpha}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\alpha}{\partial\lambda} = 0 \end{cases}$$

e calcolo $f(\bar{x}, \bar{y})$ nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ trovati.

Dato che il valore di λ non serve, in genere è un buon metodo risolutivo quello di eguagliare le prime due equazione in modo da semplificarla, ricavare un'incognita dall'altra e sostituire nell'ultima equazione, così da poter ricavare le incognite.

14 Insiemi

14.1 Insieme stella

Un insieme è "a stella" quando esiste un punto che riesce a vedere tutti gli altri punti.

Gli insiemi stella sono semplicemente connessi.

14.2 Insieme connesso

Un insieme è connesso quando, preso un punto x_0, posso trovare una curva che lo congiunga a tutti gli altri punti dell'insieme

14.3 Insieme semplicemente connesso

Un insieme è semplicemente connesso quando è connesso "senza buchi" (nota: questa definizione vale soltanto in R^2).

Gli insiemi stella sono semplicemente connessi.

14.4 Insieme chiuso

Un insieme è chiuso quando è complementare di un insieme aperto

14.5 Insieme aperto

(necessita revisione)

Un insieme è aperto se per ogni x_0, r $B(x_0, r) \subseteq \Omega$

15 Formule utili

15.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \pm \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

15.2 Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\,\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(a)$$

$$\cos(2\,\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\tan(2\,\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

15.3 Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

15.4 Formule parametriche

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

15.5 Argomento di un vettore in $\boldsymbol{R^2}$

$$\Theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

15.6 Passaggio alle coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho\cos(\Theta) \\ \rho\sin(\Theta) \end{cases}$$

15.7 Come smontare gli integrali noiosi con le radici

- $\sqrt{x^2 + 1} \longrightarrow$ si pone $x = \sinh(t)$

- $\sqrt{x^2-1} \longrightarrow$ si pone $x=\cosh(t)$
- $\sqrt{1-x^2} \longrightarrow$ si pone $x=\sin(t) \vee x=\cos(t)$ (in genere è indifferente)
- $\sqrt{-1-x^2} \longrightarrow$ non ha significato in R

16 Lunghezza di una curva

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}\| \,\mathrm{dt}$$

Nel caso in una variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1+\dot{f(t)}}\,\mathrm{dt} \quad \text{con} \quad y=f(t)$$

17 Integrale curvilineo

Data la curva $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ con $t\in[a,b]$ l'integrale curvilineo (o di linea) della funzione $f(x,y)$ su $\gamma(t)$ è:

$$\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\left\|\dot{\gamma(t)}\right\|\,\mathrm{dt}$$

18 Funzioni utili

18.1 Cardioide

$$\rho=1-\cos(\Theta) \quad \text{con} \quad \Theta\in[0,2\,\pi]$$

$$\rho(0)=\rho(2\,\pi)$$