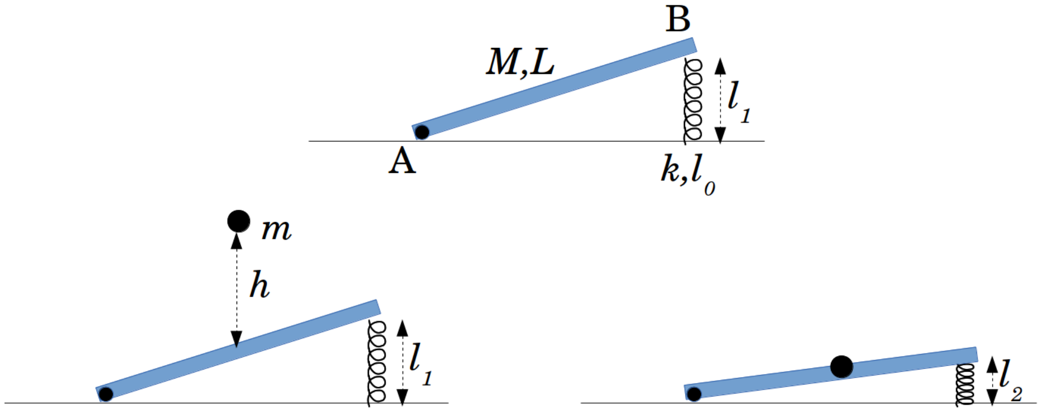
Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 24/02/2014
Cognome : .... Nome : ....

Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1



Un'asta sottile di massa $M = 5$ Kg e lunghezza $L = 1$ m è incernierata a terra come in figura ad un estremo A. Nell'altro estremo B dell'asta è fissata una molla di costante elastica $K = 20\ N/m$ e lunghezza a riposo l_0 ancorata a terra come mostrato in figura. Il sistema è inizialmente all'equilibrio.

a) Calcolare la lunghezza della molla nella e la posizione del centro di massa dell'asta nella posizione di equilibrio.

$l_1 =$ .... $y_{c.m.} =$ ....

All'equilibrio il momento totale delle forze che agiscono attorno al punto A è nullo, quindi:

$$M_{tot} = Mg\frac{L}{2}\sin\alpha - TL\sin\alpha$$

dove T è la forza della molla e α è l'angolo compreso tra la molla e l'asta.
Si ottiene dunque:

$$T = \frac{Mg}{2}$$

Dalla relazione $|T| = k|l_1 - l_0|$ si ottiene:

$$l_1 = l_0 - \frac{|T|}{k}$$

Dalla geometria del sistema, l'altezza è:

$$y_{CM} = \frac{l_1}{2}$$

Supponiamo ora che un corpo puntiforme di massa $m = 100$ g cada in verticale da una altezza $h = 20$ m e faccia un urto completamente anelastico con la stessa (dopo l'urto il corpo rimane attaccato all'asta).

b) Calcolare la velocita' angolare istantanea omega con la quale l'asta comincia a ruotare dopo l'urto.

$\omega =$ ....

La velocità del corpo puntiforme subito prima dell'urto è pari a:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg(h - y_{CM}) \Longrightarrow v_i = \sqrt{2g(h - y_{CM})}$$

Il momento angolare prima dell'urto si può calcolare come:

$$L_i = m v_i \frac{\sqrt{L^2 - l_i^2}}{2}$$

dove il braccio è stato calcolato con il teorema di Pitagora.

Il momento di inerzia del sistema dopo l'urto è pari a:

$$I = \frac{1}{3} M L^2 + m(L/2)^2$$

Durante l'urto l'unica forza impulsiva presente (il vincolo in A) ha braccio nullo, quindi vale la conservazione del momento angolare:

$$L_i = L_f = I\omega \Longrightarrow \omega = \frac{L_i}{I}$$

c) Calcolare la compressione massima della molla l_2.

$$l_2 = ...$$

Dopo l'urto non sono presenti forze dissipative e quindi vale la conservazione dell'energia $E_i = E_f$. Abbiamo che:

$$E_i = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} k(l_1 - l_0)^2 + Mg\frac{l_1}{2}$$

$$E_f = \frac{1}{2} k(l_2 - l_0)^2 + Mg\frac{l_2}{2}$$

Definendo $\Delta l = l_2 - l_0$, trovo:

$$E_i = E_f = \frac{1}{2} k\Delta l^2 + Mg\frac{\Delta l + l_0}{2} \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}k\right)\Delta l^2 + \left(\frac{1}{2}Mg\right)\Delta l + \left(\frac{1}{2}Mgl_0 - E_i\right)$$

che è un'equazione di secondo grado con

$$a = \left(\frac{1}{2}k\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{2}Mg\right)$$

$$c = \left(\frac{1}{2}Mgl_0 - E_i\right)$$

costanti note.

Posso quindi individuare le soluzioni:

$$\Delta l_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e considero la soluzione con Δl minore, che corrisponde alla massima compressione.

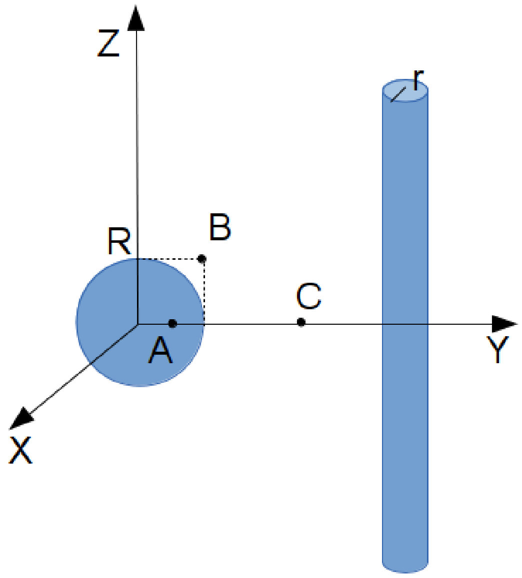
Infine trovo:

$$l_2 = l_0 + \Delta l$$

NB: per semplificare, si consideri la molla sempre verticale.

(punteggio: 1.a,b,c = 5 punti)

Esercizio 2



Una sfera non conduttrice di raggio $R = 10$ cm è caricata con una densità di carica omogenea $+\rho = 10^{-6}C/m^3$ ed è posizionata nell'origine del sistema di riferimento. Un cilindro non conduttore indefinito di raggio r e carico con densità lineare di carica $+\lambda = 10^{-7}C/m$ è posizionato come in figura ad una distanza $l = 3R$ dalla sfera carica.
Calcolare

a) l' intensita' della forza che agisce su una carica $-q = 0.1C$posta nel punto C di coordinate (0,2R,0)

$$F = ...$$

Il campo elettrico di una sfera, all'esterno, vale:

$$E_{sfera}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

dove $Q = \frac{4}{3}\pi r^3$
Il campo elettrico di una cilindro, all'esterno, vale:

$$E_{cilindro}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

La forza applicata nel punto C sarà dunque pari a:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}_{sfera} + \vec{E}_{cilindro}\right) \Longrightarrow F_y = -|q|\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{4R^2} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{R}\right)$$

b) la componente verticale del campo elettrico nel punto B di coordinate (0,R,R)

$$E_z = ...$$

Il campo elettrico generato dal cilindro non ha componente lungo $\hat{z}$ per motivi di simmetria. Basta calcolare il campo elettrico generato dalla sfera

$$E_z(B) = |E(B)|\sin 45° = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(\sqrt{2}R)^2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^2}$$

c) il potenziale elettrico nel punto A, interno alla sfera, di coordinate (0, R/2,0)

$$V = ...$$

Non è possibile calcolare il potenziale rispetto ad un punto a distanza infinita, calcoliamolo quindi rispetto al centro della sfera.

La differenza di potenziale tra due punti esterni al cilindo è pari a:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{r_f}{r_i}$$

All'interno della sfera il campo elettrico e quindi la differenza di potenziale sono pari a:

$$E_{sfera}(r) = \frac{1}{3}\frac{\rho r}{\epsilon_0} \Longrightarrow \Delta V = \frac{1}{6}\frac{\rho(r_f^2 - r_i^2)}{\epsilon_0}$$

La differenza di potenziale totale tra il centro della sfera e il punto A sarà quindi:

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log \frac{7R/2}{3R} - \Delta V = \frac{1}{6}\frac{\rho((R/2)^2 - 0)}{\epsilon_0}$$

(punteggio: 2.a.b.c = 5 punti)