

# Risoluzione degli esercizi di Analisi II

DI MONDINI GIANLUCA E DI CHIUNQUE ALTRO MI AIUTI

## Indice

1. Piano tangente . . . . .	3
1.1. Piano tangente a superficie cartesiana . . . . .	3
2. Vettore normale . . . . .	3
3. Gradiente . . . . .	3
4. Derivata parziale . . . . .	4
4.1. Derivate di ordine $\geq 2$ . . . . .	4
5. Derivata direzionale . . . . .	4
5.1. Formula del gradiente . . . . .	4
6. Polinomio di Taylor . . . . .	4
6.1. Formula di ordine 1 . . . . .	4
6.2. Formula di ordine 2 . . . . .	4
7. Studio della continuità in un punto . . . . .	4
8. Stabilire se una funzione è differenziabile . . . . .	5
9. Stabilire se è possibile effettuare un cambio di variabile nell'intorno di un punto . . . . .	5
10. Punti critici . . . . .	5
10.1. Casi . . . . .	5
11. Punti di massimo e di minimo . . . . .	5
11.1. Insiemi chiusi e limitati . . . . .	6
Metodo di Lagrange . . . . .	6
12. Formule trigonometriche utili . . . . .	6
12.1. Formule di addizione e sottrazione . . . . .	6
12.2. Formule di duplicazione . . . . .	6
12.3. Formule di bisezione . . . . .	6
12.4. Formule parametriche . . . . .	6
13. Lunghezza di una curva . . . . .	7
14. Integrale curvilineo . . . . .	7

## 1 Piano tangente

Il piano tangente esiste solo se la curva è regolare, ovvero se  $x, y, z \in C^1$  (dominio), quindi se la funzione è iniettiva. Un modo semplice per verificarlo è calcolare il vettore normale  $\Phi u \wedge \Phi v$  in  $x_0$  e verificare che sia  $\neq 0$

### 1.1 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

### 1.2 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

1. Calcolo il vettore normale

$$\Phi u \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi v \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (E_1, E_2, E_3)$$

e se  $=0$  la superficie è non regolare

2. Sostegno = sostituisco  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  in  $f = (x_0, y_0, z_0)$
3. Piano tangente =  $E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0)$

## 2 Vettore normale

Il vettore normale di  $f(x, y)$  si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

## 3 Gradiente

Il gradiente di una funzione è il vettore che ha come componenti le derivate parziali della funzione stessa.

## 4 Derivata parziale

È una derivata direzionale lungo gli assi.

Una funzione è derivabile parzialmente rispetto alla variabile  $x$  nel punto  $(x_0, y_0)$  se esiste finito il limite in una variabile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Nel caso della variabile  $y$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

In pratica, è necessario derivare “normalmente” una funzione rispetto ad una variabile ponendo l'altra come una costante

### 4.1 Metodo Giusti

1. Calcolo

$$g(t) = f(x + t v)$$

2. Sostituisco e calcolo il limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t v) - f(x)}{t}$$

### 4.2 Derivate di ordine $\geq 2$

Necessita di revisione!

Se la funzione è di classe  $C^?$ , non è importante l'ordine con cui vengono calcolate le derivate parziali.

Esempio:

$$f_{xxy} = f_{xyx}$$

## 5 Derivata direzionale

Consideriamo una funzione  $f(x, y)$  definita su un intervallo aperto  $A \subset \mathbb{R}^2$  a valori in  $\mathbb{R}$ , siano inoltre  $(x, y) \in A$  e  $v = (v_1, v_2)$  un vettore di norma unitaria.

Si definisce derivata direzionale di  $f(x, y)$  lungo la direzione  $v$  il limite, se esiste finito:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t v_1, y + t v_2) - f(x, y)}{t}$$

Attenzione! Se il vettore  $v$  non ha norma unitaria, è necessario procedere alla normalizzazione!

## 5.1 Calcolo concreto

Data la funzione  $f(x, y)$ , la derivata in direzione  $(v_1, v_2)$  in  $(x_0, y_0)$  vale

$$v_1 f_x(x_0, y_0) + v_2 f_y(x_0, y_0)$$

## 5.2 Formula del gradiente

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$

## 6 Direzione di massima pendenza

La direzione di massima pendenza di una funzione è rappresentata dal suo gradiente

- Ascendente  $= \nabla f(x_0, y_0)$
- Discendente  $= -\nabla f(x_0, y_0)$

## 7 Polinomio di Taylor

Necessita di revisione!

### 7.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

### 7.2 Formula di ordine 2

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

## 8 Studio della continuità in un punto

Necessita revisione!

Per verificare la continuità di una funzione in due variabili nel punto  $(x_0, y_0)$  è necessario studiare tre punti:

- La funzione deve essere definita in  $(x_0, y_0)$
- Deve esistere il limite in due variabili

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)$$

- Il limite precedente deve valere esattamente quanto la funzione nel punto

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

## 9 Stabilire se una funzione è differenziabile

Una funzione in due variabili definita su  $A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  se esiste una forma lineare  $L(h, k)$ :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + L(h, k) + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

dove l'incremento  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$ ,  $L(h, k) = \alpha h + \beta k$

Per essere differenziabile la funzione deve essere continua in  $(x_0, y_0)$ , deve esistere la derivata direzionale.

### 9.1 Teorema del differenziale totale

Se  $A$  ha derivate parziali continue in un intorno di  $(x_0, y_0)$  è differenziabile in quel punto.

## 9.2 Altre note

(necessita revisione)

Forma differenziale =  $A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$

Il campo associato a una forma differenziale è  $A = (A_1(x, y), A_2(x, y))$

- Forma differenziale chiusa: ha campo associato irrotazionale, ovvero le derivate in croce sono uguali:  $(A_1)_y = (A_2)_x$
- Forma differenziale esatta: chiusa con dominio semplicemente connesso ( $\exists$  una  $f$  per cui la forma è il differenziale) o chiusa e integrabile  $\rightarrow$  esiste una primitiva  $\rightarrow$  deve essere esatta

## 10 Calcolare il potenziale di una forma differenziale lineare

Forma differenziale

$$w(x, y) = A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$$

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)] dx = f(x, y) + c(y)$$

dove  $c(y)$  è una costante da determinare

2. Derivo  $f(x, y) + c(y)$  rispetto ad  $y$  e pongo  $= A_2(x, y)$

$$\frac{d}{dy} [f(x, y) + c(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo  $c$  (eventualmente integrando  $c'(y)$  dal passaggio precedente e sostituisco il valore trovato in  $f(x, y) + c(y)$ , il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

## 11 Stabilire se è possibile effettuare un cambio di variabile nell'intorno di un punto

Bozza, necessita revisione

Si studia il gradiente della funzione nel punto: se esso si annulla allora la funzione non è invertibile rispetto alla variabile per la quale si annulla.

## 12 Punti critici

Si definisce punto critico il punto  $x$  nel quale la derivata  $f'(x)$  si annulla (in questo caso si chiama anche punto stazionario) oppure non esiste.

### 12.1 Casi

- Se  $f: R^2 \rightarrow R$  un punto sarà critico se e solo se il gradiente  $\nabla f$  si annulla. Il piano tangente alla superficie individuata dal grafico di  $f$  in punto critico è il piano orizzontale. Se una curva di livello di  $f$  contiene un punto critico in tale punto la curva può non avere una tangente ben definita.
- Se abbiamo una curva  $\varphi: R \rightarrow R^m$  un punto critico è un valore di  $t$  tale che  $\varphi'(t) = 0$ . In tal caso nel punto  $\varphi(t)$  può esserci una cuspide in cui non è ben definita una tangente alla curva.
- Se abbiamo una superficie differenziabile nello spazio parametrizzata da una funzione differenziabile  $\phi: R^2 \rightarrow R^3$  un punto critico è un punto in cui la matrice jacobiana ha rango minore di 2. In un punto critico la superficie non ha un piano tangente ben definito.

## 13 Punti di massimo e di minimo

Devo considerare i punti critici della funzione ponendo tutte le derivate parziali = 0. L'annullamento di tutte le derivate in  $(x_0, y_0)$  è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché  $(x_0, y_0)$  sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di  $H$  e verificare:
  - $\det > 0$  e 1° elemento  $> 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo
  - $\det > 0$  e 1° elemento  $< 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo
  - $\det < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella
2. Calcolare  $\det(H - \lambda I)$  e trovare gli autovalori:
  - Se sono concordi  $< 0$  allora ho un punto di massimo
  - Se sono concordi  $> 0$  allora ho un punto di minimo
  - Se sono discordi ho una sella
  - Se uno di essi  $= 0$  allora “degenerare” (?)

### 13.1 Insiemi chiusi e limitati

È necessario studiare la frontiera usando la parametrizzazione: ricavo  $y$  in funzione di  $x$  dalla curva che definisce la frontiera e sostituisco nella funzione, ottenendo una funzione in una sola variabile incognita di cui trovare max e min studiando la derivata.

#### Metodo di Lagrange

Ho la funzione  $f(x, y)$  e la restrizione  $g(x, y)$

$$\alpha(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y))$$

$$\nabla \lambda = \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

e calcolo  $f(\bar{x}, \bar{y})$  nei punti  $(\bar{x}, \bar{y})$  trovati.

Dato che il valore di  $\lambda$  non serve, in genere è un buon metodo risolutivo quello di eguagliare le prime due equazioni in modo da semplificarla, ricavare un'incognita dall'altra e sostituire nell'ultima equazione, così da poter ricavare le incognite.

## 14 Insiemi

### 14.1 Insieme stella

Un insieme è “a stella” quando esiste un punto che riesce a vedere tutti gli altri punti.

Gli insiemi stella sono semplicemente connessi.

### 14.2 Insieme connesso

Un insieme è connesso quando, preso un punto  $x_0$ , posso trovare una curva che lo congiunga a tutti gli altri punti dell'insieme

### 14.3 Insieme semplicemente connesso

Un insieme è semplicemente connesso quando è connesso “senza buchi” (nota: questa definizione vale soltanto in  $R^2$ ).

Gli insiemi stella sono semplicemente connessi.

### 14.4 Insieme chiuso

Un insieme è chiuso quando è complementare di un insieme aperto

### 14.5 Insieme aperto

(necessita revisione)

Un insieme è aperto se per ogni  $x_0, r$   $B(x_0, r) \subseteq \Omega$

## 15 Formule trigonometriche utili

### 15.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

### 15.2 Formule di duplicazione

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

### 15.3 Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

### 15.4 Formule parametriche

$$\sin(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

### 15.5 Argomento di un vettore in $\mathbb{R}^2$

$$\Theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

### 15.6 Passaggio alle coordinate cartesiane

$$\begin{cases} \rho \cos(\Theta) \\ \rho \sin(\Theta) \end{cases}$$

## 16 Lunghezza di una curva

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt$$

Nel caso in una variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \quad \text{con } y = f(t)$$

## 17 Integrale curvilineo

Data la curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  con  $t \in [a, b]$  l'integrale curvilineo (o di linea) della funzione  $f(x, y)$  su  $\gamma(t)$  è:

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

## 18 Funzioni utili

### 18.1 Cardioide

$$\rho = 1 - \cos(\Theta) \quad \text{con } \Theta \in [0, 2\pi]$$

$$\rho(0) = \rho(2\pi)$$

