Appunti Analisi II

Alessandro Sieni, Gianluca Mondini

March 5, 2015

Contents

1 Appunti 03/03/2015

1.1 Definizioni

1.1.1 Convergenza

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \nu \;:\; L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \quad \forall\, n > \nu$$

1.1.2 Sfera

$$B_\delta(x_0) = \{y \in X \;:\; d(y, x_0) < \delta\}$$

Una sfera è un insieme di elementi che distano dal centro della sfera (indicato dall'elemento tra parentesi) di massima distanza uguale al raggio (indicato dal pedice sulla lettera B).
Nel caso in cui (come quella sopra) la distanza sia obbligatoriamente **minore** del raggio allora la sfera si dice **aperta**, altrimenti se la distanza è minore o uguale del raggio la sfera si dice **chiusa**.
Esempio di sfera chiusa:

$$B_\delta(x_0) = \{y \in X \;:\; d(y, x_0) \leq \delta\}$$

Quando siamo in uno spazio metrico la sfera viene definita anche intorno.

1.1.3 Punto intero

Un punto $x_0$si dice interno se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\exists\, \delta > 0 : B_\delta(x_0) \subseteq \Omega$$

Ovvero spiegato a parole se l'insieme Ω contiene il punto (ovvero il centro della sfera) ed anche tutta la sfera di raggio δ a piacere.

1.1.4 Punto esterno

¡¡¡¡¡¡ HEAD Un punto x_0 si dice esterno ad un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se :

$$\exists\, \delta > 0 \;:\; B_\delta(x_0) \cap \Omega = 0$$

Ovvero un punto si dice esterno ad un insieme se una qualunque sfera centrata nel punto x_0 di raggio a piacere non si interseca con l'insieme.

1.1.5 Punto di frontiera

Un punto $x_0$si dice di frontiera se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)\ :\ x_1 \in \Omega\ e\ x_2 \ni \Omega$$

Ovvero un punto si dice di frontiera se sta al "bordo"dell'insieme, ovvero se presa una qualunque sfera centrata nel punto x_0 ci sarà almeno un punto appartenente alla sfera interno all'insieme e uno esterno all'insieme.

1.1.6 Insieme aperto/chiuso

Un insieme si dice **aperto** se ogni suo punto è interno (non contenendo quindi alcun punto di frontiera).
Un insieme si dice **chiuso** se contiene la propria frontiera.

1.1.7 Punto di accumulazione

Un punto x_0 si dice di accumulazione di un insieme Ω (si scrive $x_0 \in \partial\, \Omega$ se :

$$\forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in\ B_\delta(x_0)\ \cap\ \Omega \quad x \neq x_0$$

1.1.8 Punto isolato

Un punto x_0 si dice isolato rispetto ad un insieme Ω se :

$$\exists\, \delta\ :\ \Omega\ \cap\ B_\delta(x_0) = x_0$$

Un esempio di punto isolato può essere un generico punto x_0 appartenente ad Ω, che viene definito nel seguente mod: $\Omega = \Omega' + \{x_0\}$ con Ω' e $\{x_0\}$ molto distanti.

1.1.9 Insieme limitato

Un insieme Ω si dice limitato se

$$\exists\, [H, K] \sup seteq \Omega$$

Quindi se l'insieme Ω è contenuto in un intervallo chiuso i cui estremi sono H e K.
Un altro modo per definire un'insieme limitato è:

$$\exists\, x_0, \delta\ :\ \Omega \subseteq B_\delta(x_0)$$

Ovvero un insieme si dice limitato se esiste un punto x_0 la cui sfera di raggio δ di dimensione a piacere contiene tutto l'insieme. Dato che una sfera è limitata se contiene tutto l'insieme anche quest'ultimo per forza di cose dovrà essere limitato. =======

Un punto x_0 si dice esterno ad un insieme $\Omega \in \mathbb{R}^n$ se :

$$\exists\ \delta > 0\ :\ B_\delta(x_0) \cap \Omega = 0$$

Ovvero un punto si dice esterno ad un insieme se una qualunque sfera centrata nel punto di raggio a piacere non si interseca con l'insieme.

1.1.10 Punto di frontiera

Un punto $x_0$si dice di frontiera se preso un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si verifica la seguente condizione :

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ x_1, x_2 \in B_\delta(x_0)\ :\ x_1 \in \Omega\ e\ x_2 \ni \Omega$$

Ovvero un punto si dice di frontiera se sta al bordo dell'insieme, ovvero se presa una qualunque sfera centrata nel punto x_0 ci sarà almeno un punto appartenente alla sfera interno all'insieme e uno esterno all'insieme.

2 Appunti 04/03/2015

2.1 Diametro di un insieme

2.1.1 Definizione

Il diametro di un insieme Ω è definito come :

$$\sup_{x,y\in\Omega|} |x-y|$$

2.1.2 Esempi

Consideriamoci in $\mathbb{R}^2$ e più precisamente consideriamo Ω come il cerchio unitario, quindi da ciò ne deriva che presi $x, y \in \Omega$, $|x| \leq 1\ e\ |y| \leq 1$ quindi $|x-y| \leq 2$ e dalla disuguaglianza triangolare (che ricordiamo dice $|x+y| \leq |x| + |y|$):

$$|x-y| \leq |x| + |-y| \Longrightarrow |x-y| \leq |x| + |y| \leq 1 + 1 = 2$$

Quindi considerando la sfera $B_\delta(x_0)$ e presi $x = (0,1)$ e $y = (-1,0)$ otteniamo che:

$$sup_{B_\delta(x_0)}|x-y| \geq |(1,0) - (-1,0)| = |(2,0)| = 2$$

La disuguaglianza sopra deriva dal fatto che l'estremo superiore di $|x-y|$ è sempre maggiore uguale di $|x-y|$ qualunque punto si scelga, come ad esempio i punti $x = (0,1)$ e $y = (-1,0)$. *Altro esempio* Scelto

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| < 1\right\} \quad \Longrightarrow \quad sfera\ aperta$$

Abbiamo già provato prima che 2 è un maggiorante e dalla definizione di diametro otteniamo che:

$$d\,\Omega \leq 2$$

In quanto definito la sfera come un insieme aperto e quindi di conseguenza $|y - x| = 2 - 2\epsilon$.
Il 2ϵ deriva dal fatto che essendo aperta la sfera (ovvero che $|x| < 1$) il grande valore che può assumere sarà 1 - una piccolissima, quanto si vuole, quantità che noi chiameremo ϵ che gli impedirà di raggiungere 1. Ciò avviene anche quando x tenta di raggiungere il valore di -1 che in valore assoluto corrisponde ad 1, quindi posto $x = 1 - \epsilon$ e $y = -1 + \epsilon$ si ottiene $1 - \epsilon - (-1 + \epsilon) = 2 - 2\epsilon$.

2.1.3 Teorema

Teorema: *Se un'insieme Ω è limitato* $\Longleftrightarrow d\,\Omega < +\infty$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

2.2 Convergenza di successioni

2.2.1 Lemma

2.2.2 Teorema

Teorema: *Sia* $\quad x \in \mathbb{R}^N \quad \Longrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_N)$

Allora: $\quad |x_i| \leq |x| \quad \forall\, i = 1....N$

<u>Dimostrazione:</u>

Consideriamo

$$|x| \leq \sqrt{N} * \max_{i=1...N}(|x_i|)$$

Da cui otteniamo sostituendo alla norma del vettore il modo con cui è possibile calcolarla

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} \leq \sqrt{N} * \max_{i=1...N}(|x_i|)$$

A questo punto effettuiamo una stima dall'alto considerando che :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \geq \sqrt{x_i^2} = |x_i| \quad \forall\, i = 1....n$$

Mentre per effettuare una stima dal basso poniamo la seguente equazione:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq N * \max_{i=1...n}(x_i)^2$$

Adesso possiamo applicare la radice a entrambi i membri perché non varia il segno della disequazione e otteniamo:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{N * (\max_{i=1...n}(x_i))^2}$$

Ma dato che $(\max_{i=1...n}(x_i))^2$ è uguale ad $\max_{i=1...n}(x_i)^2$ quindi anche $\sqrt{(\max_{i=1...n}(x_i))^2}$ è uguale a $\sqrt{\max_{i=1...n}(x_i)^2}$ che a sua volta corrisponde a $\max_{i=1...n}|(x_i)|$, portando anche a termine la stima dal basso e quindi la dimostrazione.

2.2.3 Definizione

La definizione di convergenza è:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta \;:\; \forall\, n > \delta \;\; |x_n - \delta| < \epsilon$$

In poche parole la convergenza di una successione vettoriale (ovvero composta da vettori e non scalari) convergerà al punto le cui componenti corrisponderanno al punto di convergenza di ogni singola componente.

2.2.4 Teorema 1

Teorema: *Supponiamo che l'insieme C si chiuso e che la successione $x_n \in C$ che $x_n \to x$*

Allora: $x \in C$

DIMOSTRAZIONE

Ipotizziamo per assurdo che $x \ni C$. Ma cosa è x? Iniziamo partendo dalla definizione di punto convergente:

$$\forall\, \epsilon \quad \exists\, \nu \;:\; \forall\, n > \nu\, |x_n - x| < \epsilon$$

Quindi dalla definizione si può intuire che se $|x_n - x| < \epsilon$ allora significa anche che $x_n \in B_\epsilon(x)$, ma dato che la sfera è contenuta in C si verifica un assurdo perché anche il punto interno alla sfera è contenuto in C.

2.2.5 Teorema 2

Teorema: *Consideriamo il punto x_0 come punto di accumulazione dell'insieme Ω (ovvero $x_0 \, \partial \, \Omega$) e consideriamo $x_1, x_2, ..., x_N$ elementi distinti di Ω*

Allora: $x_n \to x_0$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Per procedere con questa dimostrazione dobbiamo seguire il principio di induzione e quindi specificare

2.2.6 Esempio

Un chiaro esempio della definizione è :

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n} \right) \longrightarrow (1, 0)$$

Questo risultato è dato dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2.3 Continuità

2.3.1 Definizione

Consideriamo la funzione $f \; : \; \Omega \to \mathbb{R}^N$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ed un punto $x_0 \in \Omega$ una funzione si dice continua in x_0 se

$$\forall \, \epsilon > 0 \quad \exists \, \delta > 0 \; : \; \forall \, x \in dom(f) \; se|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

In questo caso la definizione è la solita per le funzioni che lavorano sui numeri reali con la differenza che però essendo su $\mathbb{R}^N$ dovrà essere calcolata la norma dei vettori e non il valore assoluto del (che comunque giusto per chiarezza corrisponde alla norma di un vettore in $\mathbb{R}$. =======

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le N * \max_{i=1...n} (x_i)^2$$

Adesso possiamo applicare la radice a entrambi i membri perché non varia il segno della disequazione e otteniamo:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sqrt{N * (\max_{i=1...n}(x_i))^2}$$

Ma dato che $(\max_{i=1...n}(x_i))^2$ è uguale ad $\max_{i=1...n}(x_i)^2$ quindi anche $\sqrt{(\max_{i=1...n}(x_i))^2}$ è uguale a $\sqrt{\max_{i=1...n}(x_i)^2}$ che a sua volta corrisponde a $\max_{i=1...n}|(x_i)|$, portando anche a termine la stima dal basso e quindi la dimostrazione.

2.3.2 Definizione di convergenza

La definizione di convergenza è:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta \;:\; \forall\, n > \delta \;\; |x_n - \delta| < \epsilon$$

In poche parole la convergenza di una successione vettoriale (ovvero composta da vettori e non scalari) convergerà al punto le cui componenti corrisponderanno al punto di convergenza di ogni singola componente.

2.3.3 Esempio

Un chiaro esempio della definizione è :

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \frac{1}{n} \right) \longrightarrow (1, 0)$$

Questo risultato è dato dal fatto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

3 Appunti 05/03/15

3.1 Dimostrazione del 4/3/15 rivisitata

3.1.1 Ipotesi

$x_0 \in \Omega$

3.1.2 Tesi

$x_n \to x_0$

3.1.3 Dimostrazione

Si procede per induzione

$P(n) = x_1..x_n$ sono indipendenti, due a due distinti.

$$|x_i - x_0| < \frac{1}{2^{i-1}}$$

È necessario provare $P(1)$

$\delta = 1 \ \exists \quad x_1$ tale che $x_1 \in \Omega$, $x_1 \in B_1(x_0)$, $x_1 \neq x_0$

Supponiamo di avere $P(n)$

$$\delta = min\left\{\frac{1}{2^n}, |x_1 - x_0|, |x_2 - x_0| ... |x_n - x_0|\right\}$$

Questi ultimi valori sono tutti positivi maggiori di 0 in quanto l'esponenziale è una funzione positiva, la norma è definita positiva e $x_i \neq x_0$ per ogni $i = 1..n$

$\exists x_{n+1}$ tale che

1. $\in \Omega$
2. $\in B_\delta(x_0)$
3. $\neq x_0$

3.2 Fatto

Se Ω è chiuso e $x_0 \in \ \Omega$, $x_0 \in \Omega$

3.3 Definizione

Un insieme è chiuso se contiene la frontiera

3.4 Teorema della permanenza del segno

3.4.1 Ipotesi

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua in x_0
- $f(x_0) < 0$

3.4.2 Tesi

$$\exists \quad \delta > 0 \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \quad f(x) < 0$$

3.4.3 Dimostrazione

Dalla definizione di continuità abbiamo che:
$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tale che $\forall x \in dom\,(f)$
$|x - x_0| < \delta$ (cioè $x \in B_\delta\,(x_0)$)
$|f(x) - f\,(x_0)| < \epsilon$
$f\,(x_0) - \epsilon < f(x) < f\,(x_0) + \epsilon$
siccome
$f(x) < 0$ per ipotesi
Se $\epsilon < |f\,(x_0)|$ si ha $f\,(x_0) + \epsilon < 0$

3.5 Teorema di continuità della funzione somma (nome provvisorio)

3.5.1 Ipotesi

$f : \Omega \to \mathbb{R}^N$
$g : \Omega \to \mathbb{R}^N$
f, g continue in x_0

3.5.2 Tesi

$h(x) = f(x) + g(x)$ è continua in x_0
In pratica, se due funzioni sono continue in un punto anche la loro somma sarà continua in tal punto

3.5.3 Dimostrazione

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in dom(f+g) |x - x_0| < \delta$

$$|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

$$|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| < \epsilon$$

$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| < \epsilon$$

Grazie alla disugualianza triangolare abbiamo che:

$$|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| < \epsilon \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)|$$

Dall'ipotesi di continuità di f,g:

$\forall \sigma \exists \delta_1 : x \in dom(f) : |x - x_0| < \delta_1 \forall \epsilon > 0|$
$|f(x) - f(x_0)| < \sigma$ con $\sigma = \frac{\epsilon}{2}$
$\forall \sigma \exists \delta_2 : x \in dom(g) : |x - x_0| < \delta_2 \forall \epsilon > 0|$
$|g(x) - g(x_0)| < \sigma$ con $\sigma = \frac{\epsilon}{2}$

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$$
$$|h(x) - h(x_0)| < \delta$$

3.6 Primo teorema di composizione

3.6.1 Ipotesi

$f : \Omega \to \mathbb{R}^N continua$
$x_n \in \Omega$
$x_n \to x \in \Omega$

3.6.2 Tesi

$\lim f(x_n) = f(x)$

3.7 Dimostrazione

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu : \forall n > \nu \quad |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad \forall t \in \Omega |t - x| < \epsilon |f(t) - f(x)| < \epsilon$$

Poniamo $t = x_n$ $|x - x_n| < \delta$ implica che

$$|f(x_n) - f(x)| < \epsilon$$

Per quale n è verificata?