Corso di Laurea: Ingegneria Informatica

Esame di Fisica Generale del 16/01/2015
Cognome : .... Nome : ....

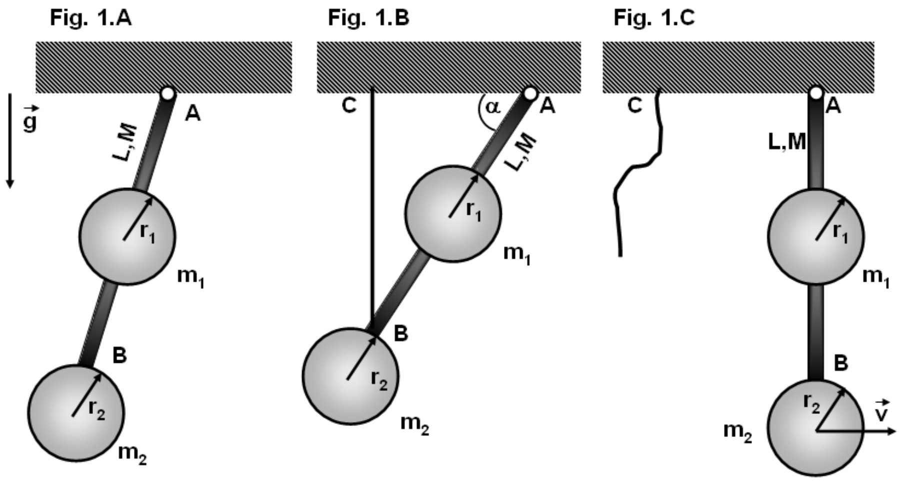
Matricola: .... Anno di corso : ....

Esercizio 1

Un'asta sottile rigida di lunghezza $L = 1$m e massa $M = 2$kg è vincolata al suo estremo in A e può muoversi senza attrito nel piano verticale. All'asta sono saldate due sfere di raggio $r_1 = r_2 = 0.1$m e massa $m_1 = m_2 = 1$kg (fig. 1.A). Il centro di m_1 coincide con il punto centrale dell'asta mentre il centro di m_2 si trova a distanza $L + r_2$ dall'estremo A. Si calcoli:

a) Il periodo delle piccole oscillazioni del sistema (asta+sfere):

$T =$ ....



Si supponga, ora, di fissare il punto B al punto C tramite una fune inestensibile tale che l'angolo α sia di $\frac{\pi}{4}$rad (fig. 1.B). Si calcoli:

b) La tensione della fune:

$F =$ ....

In seguito alla rottura della fune (fig. 1.C), si calcoli:

c) La velocità con la quale si muove il centro di m_2 quando l'asta passa per la verticale :

$v =$ ....

Soluzione

a) Inizialmente si calcola la posizione del centro di massa del sistema rispetto al punto A:

$$d_{cm} = \frac{(m_1 + M)(L/2) + m_2(L + r_2)}{M_{tot}}$$

con $M_{tot} = m_1 + m_2 + M$

Si calcola quindi il momento d'inerzia dell'asta con le due sfere riferito al punto A:

$$I_A = \frac{2}{5}m_1 r_1^2 + m_1(L/2)^2 + \frac{2}{5}m_2 r_2^2 + m_2(r_2 + L)^2 + \frac{1}{3}ML^2$$

Dalla conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{d}{dt}(M_{tot}g(d_{cm} - d_{cm}cos(\Theta)) + \frac{1}{2}I_A\dot{\Theta}^2) = 0$$

Derivando e sostituendo $sen(\Theta)$ con Θ (approssimazione di piccole oscillazioni) si ottiene:

$$M_{tot}gd_{cm}\Theta = -I_A\ddot{\Theta} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{M_{tot}gd_{cm}}}$$

b) Si uguaglia il momento della forza peso a quello della forza esercitata dalla corda (entrambi calcolati scegliendo come polo il punto A). Si ottiene:

$$M_p = M_F \Rightarrow M_{tot}gd_{cm}cos(\alpha) = FLcos(\alpha) \Rightarrow F = \frac{M_{tot}gd_{cm}}{L}$$

c) L'energia meccanica del sistema, dopo la rottura della fune, si conserva. Si scrive, quindi, l'energia meccanica del sistema in due situazioni particolari: I) subito dopo la rottura della fune; II) quando l'asta passa per la verticale. Lo zero dell'energia potenziale viene posto nel punto più basso raggiunto dal centro di massa del sistema.

I) In seguito alla rottura della fune l'energia meccanica del sistema è solo l'energia potenziale gravitazionale:

$$E_1 = M_{tot}gd_{cm}(1 - sen(\alpha))$$

II) Il momento d'inerzia del sistema rispetto al polo A è dato da I_A: Pertanto, quando passa per la verticale, l'energia meccanica del sistema vale:

$$E_2 = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

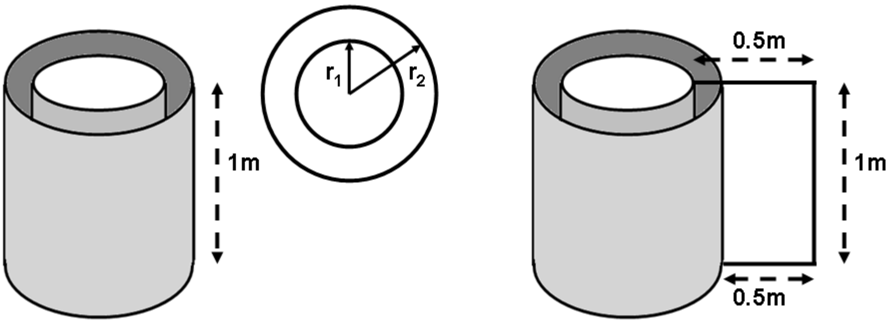
Uguagliando l'energia del caso I a quella del caso II si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{2M_{tot}gd_{cm}(1 - sen(\alpha))}{I_A}}$$

e quindi la velocità con la quale si muove il centro di m_2 quando l'asta passa per la verticale è:

$$v = \omega(L + r_2)$$

Esercizio 2



Un condensatore cilindrico che può essere considerato ideale, è formato da due armature concentriche di raggi $r_1 = 2$mm e $r_2 = 4$mm. Nell'ipotesi che la differenza di potenziale ΔV tra le due armature sia di 50V si calcoli:

a) la carica immagazzinata dal condensatore sulla lunghezza di 1m:

$$Q = ...$$

Si supponga, quindi, di connettere le due armature tramite un filo di resistività $\rho = 2.75 \cdot 10^{-8}\Omega$m, sezione circolare di raggio $r_f = 1$mm e lunghezza totale $l = 2$m (vedere la figura). Indicando con τ la costante di tempo del circuito si calcoli:

b) la differenza di potenziale tra le armature del condensatore dopo un tempo $t = 2\tau$

$$\Delta V_f = ...$$

c) l'istante in cui sul filo si dissipa la massima potenza e l'energia totale dissipata sulla resistenza.

$$t_{max} = ...; E_{dissipata} = ...$$

Soluzione

a) Nella zona tra le armature del condensatore ($r_1 < r < r_2$) il campo elettrico si può ottenere dal teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove, per motivi di simmetria, si è scelta una superficie cilindrica coassiale con le armature (del condensatore), di raggio r e di lunghezza L= 1m. Il flusso di campo elettrico che attraversa le superfici di base è nullo, perchè è nullo il prodotto scalare. Sulla superficie laterale il flusso vale invece:

$$\oint_{lat} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E2\pi rL$$

Da queste relazioni si ricava:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}$$

Imponendo una differenza di potenziale tra le armature del condensatore nota e costante si ottiene:

$$\Delta V = \int_{r_1}^{r_2} Edr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Da cui si ha:

$$Q = \frac{\Delta V 2\pi\epsilon_0 L}{ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

b) La resistenza del filo è data da:

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

con S pari a: πr_f^2 Essendo quindi un circuito RC si possono applicare le relazioni caratteristiche di questo tipo di circuiti e, in particolare, quella relativa alla variazione nel tempo della differenza di potenziale ai capi del condensatore:

$$\Delta V(t) = \Delta V e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V_f = \Delta V e^{-2}$$

c) La potenza dissipata in un dato istante dalla resistenza presente nel filo è:

$$P(t) = \frac{\Delta V(t)^2}{R}$$

Dalla relazione riportata nel punto precedente, relativa all'andamento della differenza di potenziale tra le armature del condensatore, si può osservare che l'istante in cui sul filo si dissipa la massima potenza è quello iniziale, cioè t=0. Per valutare l'energia totale dissipata sulla resistenza bisogna integrare nel tempo la potenza dissipata. Si ottiene quindi:

$$E = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V(t)^2}{R} dt = \int_0^\infty \frac{\Delta V^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{R} dt = \frac{\Delta V^2 \tau}{2R}$$