

# 1 Come risolvere gli esercizi

## 1.1 Insiemi

### 1.1.1 Insieme a stella

Un insieme  $\Omega \subseteq R^n$  viene detto “a stella” se

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tale che il segmento } \bar{x_0 x} \subseteq \Omega \quad \forall x \in \Omega$$

In sostanza  $\Omega$  è un insieme “a stella” se esiste un suo punto che “vede tutti gli altri”

### 1.1.2 Insieme connesso

Un insieme è connesso se esiste una curva che unisce ogni suo punto

### 1.1.3 Insieme semplicemente connesso

Un insieme  $\Omega \subseteq R^n$  si dirà semplicemente connesso se ogni curva chiusa  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$  è omotopa in  $\Omega$  ad una curva costante  $\sigma(t) \equiv x_0 \quad \forall t \in [0, 1]$

## 1.2 Derivata direzionale

Data la funzione  $f(x, y)$ , la derivata in direzione  $(v_1, v_2)$  in  $(x_0, y_0)$  vale

$$v_1 f_x(x_0, y_0) + v_2 f_y(x_0, y_0)$$

## 1.3 Lunghezza di una curva

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

che in una sola variabile si riduce a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

## 1.4 Integrale superficiale

$$\int_{\Delta} f(\Phi(u, v)) |\Phi_u \wedge \Phi_v| du dv$$

**Esempio**

Calcolare  $\int_{\Sigma} x d\sigma$ .  $\Sigma = \text{graph}(\arctan(\frac{y}{x}))$ .

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 < x^2 + y^2 < 2 \end{cases}$$

$$f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 + y^2}}$$

Determino gli estremi di integrazione in coordinate polari:  $\theta$  è compreso tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$  in quanto ci troviamo nel primo quadrante, mentre  $1 < \rho < \sqrt{2}$  poiché  $1 < \rho^2 < 2$ . Per effettuare il cambio di coordinate necessito del determinante della Jacobiana, ovvero  $\det(J) = \rho$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \rho \cos(\theta) \sqrt{\frac{1 + \rho^2}{\rho^2}} \rho = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \dots \end{aligned}$$

**Esempio**

Calcolo della superficie laterale di un solido di rotazione

$$S_{\text{laterale}} = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz$$

**Esempio**

Calcolo della superficie di una sfera

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

$$S_{\text{sfera}} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{1 - z^2}} dz = 4\pi$$

**1.5 Integrale curvilineo**

$$\int_{\gamma} f(x, y) = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

**1.6 Integrale di campo (integrale di linea)**

$$\int_{\gamma} f d\gamma = \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) x'(t) + f_2(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

**1.7 Area della porzione di grafico (o superficie di  $f(x, y)$ )**

$$A = \int_a^b \int_c^d |f_x \wedge f_y| dy dx$$

$$A = \int_a^b \left( \int_c^d \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dy \right) dx$$

**1.8 Volume**

$$V = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz$$

**Esempio**

Calcolo del volume di un solido ottenuto ruotando una funzione  $f(z) > 0$  attorno all'asse  $z$

$$T = \left\{ (\rho, \theta, z) : \begin{cases} a < z < b \\ 0 < \rho < f(z) \\ 0 < \theta < 2\pi \end{cases} \right\}$$

$$V(T) = \int_T dx dy dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b dz \int_0^{f(z)} \rho d\rho = 2\pi \int_a^b dz \frac{1}{2} f^2(z) = \pi \int_a^b f^2(z) dz$$

**Esempio**

Calcolo del volume di una sfera

$$f(z) = \sqrt{1 - z^2}$$

$$V_{\text{sfera}} = \pi \int_{-1}^1 f^2(z) dz = \pi \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi$$

## 1.9 Integrale su un insieme

### 1.9.1 In 2 variabili

Se  $T$  è “normale”

$$\int_T f(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

### 1.9.2 In 3 variabili

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Integrazione per strati

$$\int_{\mathbb{R}} dz \int_{\Omega(z)} f(x, y, z) \, dx \, dy$$

Integrazione per fili

$$\int_{\Pi_{x,y}(\Omega)} dx \, dy \int_{\Omega(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

### 1.9.3 Cambio di variabile

(necessita di revisione)

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\Omega'} f(g(y)) |\det(g'(y))| \, dy$$

- $g: \Omega \rightarrow \Omega'$
- $\Omega, \Omega'$  aperti
- $g \in C'$
- $g$  invertibile

## 1.10 Determinare la differenziabilità

1. Verifico che la funzione  $f(x, y)$  sia continua in  $(x_0, y_0)$
2. Calcolo le derivate parziali utilizzando il limite, verificando che entrambe siano  $< \infty$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

**Teorema del differenziale totale:** se  $A$  ha derivate parziali continue in un intorno di  $(x_0, y_0)$  è differenziabile in quel punto

3. Verifico la differenziabilità

$$\lim_{(h,k) \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

## 1.11 Inversione locale

Data  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$

$F(x, y)$  è localmente invertibile in  $(x_0, y_0)$  se il determinante Jacobiano in  $(x_0, y_0)$  è non nullo

$$|J(x_0, y_0)| = \left| \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix} \right| \neq 0$$

**Esempio 1**

La trasformazione  $F: \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}^2$  definita ponendo  $F(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$  è localmente invertibile nell'intorno di  $(1, 1)$  e  $(1, 0)$ ?

$$\begin{aligned} f(x, y) &= xy & f_x &= y & f_y &= x \\ g(x, y) &= x^2 - y^2 & g_x &= 2x & g_y &= -2y \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} y & 2x \\ x & -2y \end{pmatrix}$$

$$|J(1, 1)| = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 \implies \text{si}$$

$$|J(1, 0)| = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \implies \text{si}$$

### Esempio 2

La trasformazione  $T(x, y) = (x^2y, xy^2)$  in  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y & f_x &= 2xy & f_y &= x^2 \\ g(x, y) &= xy^2 & g_x &= y^2 & g_y &= 2xy \end{aligned}$$

$$|J(0, 0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi non è localmente invertibile (ma è differenziabile..perché?)

## 1.12 Teorema del Dini

- Per esplicitare una funzione  $f(x, y)$  rispetto alla variabile  $y$  (o alla  $x$ ) è necessario che  $f_y \neq 0$  (o  $f_x \neq 0$ )
- Per applicare il Th. del Dini in un punto  $(x_0, y_0)$  è necessario che

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$$

## 1.13 Direzione di massima pendenza

- Direzione di massima pendenza ascendente di  $f$  in  $(x_0, y_0)$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

- Direzione di massima pendenza discendente di  $f$  in  $(x_0, y_0)$

$$-\nabla f(x_0, y_0) = -\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se  $= (0, 0)$  non è definita (punto stazionario).

La direzione della curva di livello di una funzione  $f$  in un punto  $(x_0, y_0)$  è ortogonale alla direzione di massima pendenza.

## 1.14 Piano tangente a superficie cartesiana

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

## 1.15 Piano tangente al sostegno di una superficie parametrica

Necessita di revisione!

1. Calcolo il vettore normale alla superficie parametrica

$$\Phi_u \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \wedge \Phi_v \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = (E_1, E_2, E_3)$$

e se  $=0$  la superficie è non regolare

2. Piano tangente  $= E_1(x - x_0) + E_2(y - y_0) + E_3(z - z_0)$

## 1.16 Polinomio di Taylor

### 1.16.1 Formula di ordine 1

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

### 1.16.2 Formula di ordine 2

$$(\text{formula di ordine I}) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2$$

### 1.16.3 Formula di ordine 3

(incollata da Wikipedia)

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \\ &\frac{1}{2!} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] + \\ &+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(x_0, y_0)h^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)h^2k + 3f_{xyy}(x_0, y_0)hk^2 + f_{yyy}(x_0, y_0)k^3] + R(h, k) \end{aligned}$$

## 1.17 Calcolare il potenziale di una forma differenziale

$$\text{Forma differenziale } w(x, y) = A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$$

Data una forma differenziale  $A_1(x, y) dx + A_2(x, y) dy$

1. Controllo che la forma differenziale sia chiusa (il campo associato  $A = (A_1(x, y), A_2(x, y))$  deve essere irrotazionale)

$$(A_1)_y = (A_2)_x$$

Se la forma non è chiusa, significa che non può essere esatta.

2. Se il dominio è semplicemente connesso, essendo una forma chiusa è anche esatta e quindi la forma è integrabile
3. Se il dominio non è semplicemente connesso, devo calcolare manualmente una primitiva e verificare che  $\nabla F = A$

### Metodo manuale per il calcolo della primitiva

1. Calcolo

$$\int [A_1(x, y)] dx = f(x, y) + C(y)$$

2. Derivo  $f(x, y) + C(y)$  rispetto a  $y$  e pongo la derivata  $= A_2(x, y)$

$$\frac{d}{dy}[f(x, y) + C(y)] = A_2(x, y)$$

3. Ricavo  $C$  (eventualmente integrando  $C'(y)$  del passaggio precedente) e sostituisco il valore trovato in  $f(x, y) + C(y)$ , il risultato è il potenziale (ovvero una primitiva)

## 1.18 Vettore normale

Il vettore normale di  $f(x, y)$  si trova:

- Per una superficie parametrica:

$$f_x(x_0, y_0) \wedge f_y(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t}$$

- Per una superficie cartesiana:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere il versore normale è necessario dividere il vettore per la sua norma

Se la superficie  $S$  è data implicitamente, come la serie di punti  $(x, y, z)$  che soddisfano  $F(x, y, z) = 0$ , allora la normale nel punto  $(x, y, z)$  alla superficie è data dal gradiente

$$\nabla F(x, y, z)$$

## 1.19 Massimi e minimi

Devo considerare i punti critici della funzione ponendo tutte le derivate parziali = 0. L'annullamento di tutte le derivate in  $(x_0, y_0)$  è condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché  $(x_0, y_0)$  sia un punto di minimo o di massimo.

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

A questo punto calcolo l'Hessiana nei punti trovati

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

con  $f_{xy} = f_{yx}$  (perché??)

Adesso posso

1. Calcolare il determinante di  $H$  e verificare:
  - $\det > 0$  e 1° elemento  $> 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di minimo
  - $\det > 0$  e 1° elemento  $< 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo
  - $\det < 0$  allora  $(x_0, y_0)$  è un punto di sella
2. Calcolare  $\det(H - \lambda I)$  e trovare gli autovalori:
  - Se sono concordi  $< 0$  allora ho un punto di massimo
  - Se sono concordi  $> 0$  allora ho un punto di minimo
  - Se sono discordi ho una sella
  - Se uno di essi = 0 allora ho un punto degenere

## 1.20 Limiti

$$\lim_{0, x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y, 0 \rightarrow 0} (x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L? \implies \lim_{x, y \rightarrow 0} = L$$

### 1.20.1 Restrinzione su retta

$$y = m(x - x_0) + y_0 \quad \text{con} \quad m \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0)$$

Se il limite dipende da  $m$  allora significa che il limite di partenza non esiste. In caso contrario non è possibile concludere nulla.

## 2 Appunti utili

### 2.1 Funzioni iperboliche

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$D(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

$$D(\cosh(x)) = \sinh(x)$$

### 2.2 Prodotto vettore (o prodotto esterno)

Calcolo in  $\mathbb{R}^3$

$$a \wedge b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

### 2.3 Derivate

#### 2.3.1 Derivate fondamentali

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D(\log_b(x)) = \frac{\log_b e}{x} = \frac{1}{x \ln(b)}$$

#### 2.3.2 Derivate di funzioni composte

$$D(a^{f(x)}) = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln(a)$$

$$D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \cdot \left[ g'(x) \cdot \ln(f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$D(x^{f(x)}) = x^{f(x)} \cdot \left[ f'(x) \cdot \ln(x) + \frac{f(x)}{x} \right]$$

## 2.4 Formule trigonometriche

### 2.4.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

### 2.4.2 Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

### 2.4.3 Formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$$

### 2.4.4 Formule parametriche

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

## 2.5 Cambi di coordinate

### 2.5.1 Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \rho$$

### 2.5.2 Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \rho^2 \sin(\theta)$$

### 2.5.3 Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

$$|\mathbf{J}| = \rho$$



## 2.6 Funzioni utili

### 2.6.1 Circonferenza

Equazione cartesiana

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Equazione in coordinate polari

$$\rho = r$$

Equazione parametrica

$$C: \begin{cases} x = x_0 + R \cos(t) \\ y = y_0 + R \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

## 2.7 Limiti notevoli

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{(1 + f(x))^c - 1}{f(x)} = c$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\arctan(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sinh(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\cosh(f(x)) - 1}{f(x)^2} = 0$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\tanh(f(x))}{f(x)} = 1$$

## 2.8 Integrali

### 2.8.1 Integrazione per parti

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx + C$$

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

**2.8.2 Integrali utili**

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}[x - \sin(x) \cos(x)] + C$$

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}[x + \sin(x) \cos(x)] + C$$

$$\int \sin(t) \cos(t) dt = -\frac{1}{2} \cos^2(t) + C$$

Da verificare:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = \int (1 + \cotan^2(x)) dx = -\cotg(x) + C$$

**2.8.3 Sostituzioni utili**

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} \implies x = \sinh(t) \\ \sqrt{x^2-1} \implies x = \cosh(t) \\ \sqrt{1-x^2} \implies x = \begin{cases} \sin(t) \\ \cos(t) \end{cases} \\ \sqrt{-1-x^2} \implies \text{non ha senso in } \mathbb{R} \end{cases}$$