Analisi I

Gianluca Mondini

January 8, 2015

Ora di compilazione: 14:03
Non mi ritengo responsabile di eventuali errori contenuti nella seguente dispensa.
I riferimenti del tipo [pagina x] si basano sul manuale "Analisi Matematica uno" di Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

Contents

Part I
Strumenti generici

1 Coefficiente binomiale

`[Pagina 63]`

Il numero delle combinazioni di k elementi tra n dati è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

2 Binomio di Newton

`[Pagina 64]`

Per ogni coppia di numeri reali a, b vale l'identità:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

3 Numeri complessi

`[Pagina 66]`

$$z = \varrho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

3.1 Inverso di un numero complesso

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

se quindi scriviamo z come $z_1 + iz_2$ otteniamo:

$$\frac{1}{z_1 + iz_2} = \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} - i\left(\frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2}\right)$$

4 Disuguaglianza triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

5 Parte frazionaria e intera

Si indica con $\{x\}$ la parte frazionaria di x, e con $[x]$ la sua parte intera. È quindi vera l'uguaglianza:

$$\{x\} = x - [x]$$

6 Serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n$$

quindi, in pratica:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ...$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$ la serie viene chiamata anche **serie di Maclaurin**

6.1 Resto di Peano

$$R_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

6.2 Resto di Lagrange

S ela funzione è derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0(si richiede che sia derivabile almeno n volte in un intorno del tipo $[x_0, x)$, più un altra volta in (x_0, x) per qualche x esiste ξ compreso tra x_0e x tale che:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

questa formula permette di interpretare il teorema di Taylor come una generalizzazione del teorema di Lagrange.

6.3 Alcuni sviluppi in serie di Maclaurin

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

6.3.1 Funzioni trigonometriche

$$\sin x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\arcsin x = \sum \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

6.3.2 Funzioni iperboliche

$$\sinh x = \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Per $|x| \leq 1$:

$$arsinh(x) = \sum \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1}$$

Per $|x| \leq 1, \quad x \neq \pm 1$:

$$artanh(x) = \sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Part II
Teoremi

1 Teorema sull'esistenza dell'estremo superiore

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente ha estremo superiore.

2 Teorema di Rolle

Definizione "a parole" Se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b) e assume valori uguali $f(a) = f(b)$ negli estremi dell'intervallo, allora esistema almeno un punto c interno ad (a, b) in cui la derivata si annulla, cioè $f'(c) = 0$ (punto critico o stazionario)

Definizione matematica Sia$f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e se vale $f(a) = f(b)$, allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$f'(c) = 0$$

3 Teorema di limitatezza per successioni di numeri reali

Una successione $(a_n) \quad n \in \mathbb{N}$ di numeri reali, convergente ad un limite finite l, è limitata, esiste cioè un numero reale K tale che $|a_n| \leq K$ per ogni n.

4 Teorema di unicità del limite

Una successione $\{a_n\}$di numeri reali non può avere due limiti distinti.

5 Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua, allora $f(x)$ assume massimo e minimo assoluti nell'intervallo $[a, b]$

6 Teorema di Lagrange (o del valor medio o dell'incremento finito)

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

Allora esiste un punto

$$c \in (a, b) \,:\, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

7 Teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua. Sia $f(a) < f(b)$ (o viceversa $f(b) < f(a)$). Allora la funzione assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, ovvero, per ogni y_0 tale che $f(a) < y_0 < f(b)$ (o rispettivamente $f(b) < y_0 < f(a)$), esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$

8 Teorema di Bolzano (o teorema degli zeri)

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to R$ continua. Supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto, ovvero

$$f(a) < 0 < f(b)$$

(oppure $f(b) < 0 < f(a)$)

Allora esiste un punto x_0 in (a, b) tale che

$$f(x_0) = 0$$

9 Teorema di Fermat sui punti stazionari

Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione e si supponga che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto di estremo locale (max o min) di f. Se f è derivabile nel punto x_0 allora $f'(x_0) = 0$

10 Teorema della permanenza del segno

Una successione $\{a_n\}$ che converge ad un limite strettamente positivo $a > 0$ (che può essere anche $+\infty$) ha definitivamente soltanto termini positivi. In altre parole, esiste un N tale che $a_n > 0 \quad \forall \quad n > N$

11 Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Il teorema del confronto per le successioni asserisce che se $\{a_n\}, \{b_n\}$ e $\{c_n\}$ sono tre successioni di numeri reali che definitivamente:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

e se si ha:

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} a_n = l$$

allora anche:

$$lim_{n\to\infty} b_n = l$$

12 Teorema successioni monotòne

Ipotesi

- $\{a_n\}$ è crescente ($a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
- a_n è limitata superiormente

Tesi

$$\exists L \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = L = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = L$$

Il 2ř teorema è simile, dice che se la successione non è limitata superiormente il limite di a_n vale ∞.

13 Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli-Barrow)

13.1 Parte I

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si definisce integrale di f la funzione F tale che:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b$$

Se f è limitata, allora F è una funzione continua in $[a, b]$.
Se inotrle f è una funzione continua in (a, b), allora F è differenziabile in tutti i punti in cui f è continua e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$

cioè la F risulta essere una primitiva di f.

13.2 Parte II

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette una primitiva G su $[a, b]$. Sia cioè $G(x)$ tale che:

$$G'(x) = f(x)$$

Se f è integrabile si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

14 Teorema della media integrale

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \qquad \int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Part III
Funzioni

0.1 Tipi di funzione

Iniettiva Si definisce iniettiva una funzione che associa elementi distinti del domnio in elementi distinti del codominio

Suriettiva Si definisce suriettiva una funzione che associ, per ogni elemento del dominio, almeno un elemento del codominio.

Bigettiva Una funzione si definisce suriettiva se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva

0.2 Funzione inversa

$$f : X \to Y$$

si dice invertibile se esiste una funzione $G : X \to Y$ tale che:

- $g\left(f(x)\right) = x \quad \forall x \in X$
- $f\left(g(x)\right) = y \quad \forall y \in Y$

Per essere invertibile, una funzione deve essere necessariamente iniettiva e suriettiva (quindi bigettiva)

0.2.1 Funzioni composte

Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono invertibili, allora l'inversa della loro composizione è data da:

$$\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

cioè si compongono le inverse in ordine invertito.

0.3 Funzione continue

$f : D \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in D$.
$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta(\epsilon) > 0 \quad : \quad |f(x) + f(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta$

Part IV
Limiti

1 Teorema di De Hopital

Il teorema si applica se abbiamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$

2 Limiti notevoli

2.1 Trigonometria

2.1.1 Seno

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=1$$

2.1.2 Coseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$$

2.1.3 Tangente

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x}=1$$

2.1.4 Arcoseno

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(x)}{x}=1$$

2.1.5 Arcotangente

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctan(x)}{x}=1$$

2.2 Logaritmi ed esponenziali

2.2.1 Logaritmi

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{ln(a)}$$

2.2.2 Esponenziali

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=ln(a)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

3 Proprietà degli «o piccoli»

- $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$
- $c \cdot o(x^n) = o \cdot (cx^n) = o(x^n)$
- $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$
- $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(o(x^n)) = o(x^n)$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

Part V
Derivate

1 Definizione

$$lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

2 Derivate fondamentali

$$k \to 0$$

$$x^n \quad n\in\mathbb{R} \to nx^{n-1}$$
$$|x| \to \frac{x}{|x|}$$
$$\frac{1}{x} \to -\frac{1}{x^2}$$
$$\sqrt{x} \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\sqrt[n]{x} \to \frac{1}{n \quad \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$
$$log_a x \to \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x\, ln(a)}$$
$$ln(x) \to \frac{1}{x}$$
$$a^x \to a^x ln(a)$$

$$e^x \to e^x$$
$$sin(x) \to cos(x)$$

$$cos(x) \to -sin(x)$$
$$tan(x) \to \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x)$$
$$arcsin(x) \to \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$arccos(x) \to -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$arctan(x) \to \frac{1}{1+x^2}$$

3 Regole di derivazione

3.1 Derivata di una somma di funzioni

$$k\,f(x) + h\,g(x) \to k\,f'(x) + h\,g'(x)$$

3.2 Derivata di un prodotto di funzioni

$$f(x)\,g(x) \to f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

3.3 Derivata di un rapporto di funzioni

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3.4 Derivata di una funzione composta (funzione di funzione)

$$g(f(x)) \to g'(f(x))\, f'(x)$$

3.5 Esempi particolari:

$$ln|x| \to \frac{1}{x}$$
$$[f(x)]^n \to n\,[f(x)]^{n-1} f'(x)$$
$$a^{f(x)} \to a^{f(x)}\, ln(a)\, f'(x)$$
$$e^{f(x)} \to e^{f(x)} f'(x)$$
$$ln|f(x)| \to \frac{f'(x)}{f(x)}$$

3.6 Derivata di una funzione composta esponenziale:

$$[f(x)]^{gx} \to [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x)\, ln(f(x)) + \frac{g(x)\, f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$f^{-1}(y) \to \left[\frac{1}{f(x)} \right]_{x-f^{-1}(y)}$$

3.7 Derivazione di una funzione integrale (necessita di revisione)

Esempio (ha senso?)

$$D\left[\int_4^{6x} e^{t^2}\, dt \right] = e^{(6x)^2} D[6x] = 6 \cdot e^{36x^2}$$

In generale

$$G(x) = \int_{x_0}^{f(x)} g(t) dt$$

$$G'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$$

Nel caso in cui gli estremi dell'integrale siano entrambi funzioni

$$\int_{-a(x)}^{b(x)} f(t)dt = \int_{-a(x)}^{0} f(t)dt + \int_0^{b(x)} f(t)dt = -\int_0^{a(x)} f(t)dt + \int_0^{b(x)} f(t)dt$$

3.8 Derivazione di una funzione integrale (lezione di Visciglia)

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

3.8.1 Caso semplice

$a(x) = a, \quad b(x) = x$

$$\left[\int_a^x f(t)dt \right]' = f(x)$$

3.8.2 Caso semisemplice

$$G(x) = \int_a^{b(x)} f(t)dt$$

$$F(y) = \int_a^y f(t)dt$$

$$G'(x) = F'\left(b(x)\right) \cdot b(x) = f\left(b(x)\right) \cdot b'(x)$$

3.8.3 Caso complicato

$$G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$$

divido l'integrale in due parti:

$$G(x) = \int_{a(x)}^{c} f(t)dt + \int_{c}^{b(x)} f(t)dt = -\int_{c}^{a(x)} f(t)dt + \int_{c}^{b(x)} f(t)dt$$

adesso ci siamo ricondotti al caso di prima. Otteniamo quindi la formula generale:

$$\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right]' = -f\left(a(x)\right) \cdot a'(x) + f\left(b(x)\right) \cdot b'(x)$$

Part VI
Integrali

1 Integrali notevoli

$$\int sin(x)cos(x)dx = -\frac{1}{2}cos^2(x) + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{log_e a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int sen^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(x - sen(x) \cdot cos(x)\right) + C$$

$$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + sen(x) \cdot cos(x)) + C$$

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C$$

$$\int f'(x)cos\left(f(x)\right)dx = sen\left(f(x)\right) + C$$

$$\int a^{f(x)}f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{log_e a} + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}dx = \begin{cases} arcsen\left(f(x)\right) + C \\ -arcsen\left(f(x)\right) + C \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}dx = arctg\left(f(x)\right) + C$$

$$\int |x|\,dx = \frac{x\,|x|}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) + C$$

Altri integrali (copiati da YouMath) $\int |x|dx = \frac{x|x|}{2} + c$

$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left(|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) + c$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$
$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx}}dx = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} + c$
$\int \sqrt{a+bx}dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + c$
$\int \frac{1}{a+bx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x\right) + c$
$\int \frac{1}{a-bx^2}dx = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\left|\frac{\sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx}\right|\right) + c$

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left(\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|\right) + c$ se $b^2-4ac > 0$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$ se $b^2-4ac < 0$
$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + c$
$\int \log_a(x)dx = x\log_a(x) - x\log_a(e) + c$
$\int \tan(x)dx = -\ln(|\cos(x)|) + c$
$\int \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$
$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + c$
$\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + c$
$\int \arcsin(x)dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + c$
$\int \arccos(x)dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + c$
$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$
$\int \text{arccot}(x)dx = x\text{arccot}(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

2 Integrale di Riemann

2.1 Proprietà

2.1.1 Linearità

Siano f e g due funzioni continue definite su di un intervallo $[a,b]$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

2.1.2 Additività

Sia f continua e definita in un intervallo $[a,b]$ e sia $c \in [a,b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.1.3 Monotonia

Siano f e g due funzioni continue definite in un intervallo $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2.1.4 Teorema del confronto

Siano f e g due funzioni continue definite in un intervallo $[a,b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ in $[a,b]$. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2.1.5 Valore assoluto

Sia f integrabile in un intervallo $[a,b]$, allora si ha:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

3 Scomposizioni

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 - ax + a^2)$$

3.1 Hermite

La scomposizione di Hermite si applica solo nel caso in cui il grado del denominatore sia maggiore di quello del numeratore. In caso contrario si utilizza la normale divisione tra polinomi.

Alcuni esempi:

- $ax+b \to \frac{A}{ax+b}$
- $ax^2+bx+c \to \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$
- $(ax+b)^n \to \frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
- $(ax^2+bx+c) \to \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + ... + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$

Ad esempio, se il denominatore è nella forma x^4-1 possiamo ricondurci alla differenza di quadrati $(x^2-1)(x^2+1)$.

A questo punto il termine (x^2-1) è a sua volta una differenza di quadrati. In pratica possiamo scrivere:

$$\left(x^4-1\right) = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) = (x+1)(x-1)\left(x^2+1\right)$$

e, grazie ad Hermite, il nostro integrale diventa:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

Part VII
Serie

1 Note sulle successioni

1.1 Successione di Fibonacci

$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

2 Condizione necessaria per la convergenza

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie è che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

3 Serie notevoli

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

da cui deriva, nel caso in cui $|q| < 1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

4 Serie a termini positivi

4.1 Primo criterio del confronto asintotico

$$a_n \leq b_n$$

- se la maggiorante converge, la minorante converge
- se la minorante diverge, la maggiorante diverge

4.2 Secondo criterio del confronto asintotico

- Se b_nè convergente e $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, dove l esiste ed è finito, allora a_nè convergente.
- Se b_nè divergente e $lim_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ (anche $+\infty$), allora a_nè divergente.

4.3 Criterio della radice (o di Cauchy)

Se esiste il limite k:

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

il carattere della serie risulta:

- convergente se $k < 1$
- divergente se $k > 1$
- sconosciuto se $k = 1$

4.4 Criterio del rapporto (o di d'Alambert)

Se esiste il limite k:

$$lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$$

il carattere della serie risulta:

- convergente se $k<1$
- divergente se $k>1$
- sconosciuto se $k=1$

4.5 Criterio integrale

Si deve avere una funzione f "simile" alla successione a_n.
Se f è:

- positiva;
- decrescente;
- infinitesima (per $x\to+\infty$)

allora la serie $\sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n$ converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_{n_0}^{+\infty}f(x)dx$$

5 Serie a termini discordi

5.1 Criterio di convergenza assoluta

Data una serie $\sum a_n$, si dice che essa è **assolutamente convergente** se $\sum|a_n|$ converge.

Teorema Se una serie è convergente assolutamente è anche convergente.

5.2 Criterio di Leibniz

Data una serie a segno alterno

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$$

se la successione $|a_n|$ è definitivamente positiva, decrescente e tende a 0, cioè

- $|a_n|\geq|a_{n+1}|>0 \quad \forall n<N$
- $lim_{n\to\infty}|a_n|=0$

allora si ha che:

- la serie è convergente ad $S\in\mathbb{R}$
- le somme parziali di orgine pari a quelle di ordine dispari sono monotone e tendono ad S
- $|S_n-S|\leq|a_{n+1}| \quad \forall n$, il resto n-esimo è minore al termine a_{n+1}

6 Serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k$$

6.1 Convergenza con il criterio di D'Alambert

$$\lim_{k \to +\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = l$$

$$R = \begin{cases} 0 & l = +\infty \\ +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \end{cases}$$

6.2 Convergenza con il criterio di Cauchy-Hadamard

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l$$

$$R = \begin{cases} 0 & l = +\infty \\ +\infty & l = 0 \\ \frac{1}{l} & 0 < l < +\infty \end{cases}$$

6.3 Conseguenza della convergenza

- $R = 0$ la serie di potenze converge puntualmente solo in x_0 (centro della serie)
- $R = +\infty$ la serie di potenze converge:
  - puntualmente in ogni $x \in R$
  - uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[x_0 + k, x_0 + k], \quad k > 0$
- $0 < R < +\infty$ la serie di potenze:
  - converge puntualmente per ogni x tale che $|x - x_0| < R$
  - non converge in alcun punto x tale che $|x - x_0| > R$
  - converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[x_0 - k, x_0 + k], \quad 0 < k < R$

Part VIII
Equazioni differenziali

1 Equazioni del prim'ordine a variabili separabili

$$y'(x) = g(x) \cdot f(y)$$

Esempio:

$$y'(x) = y(sinx)$$

y'può essere scritto come $\frac{dy}{dx}$

2 Equazioni lineari del prim'ordine

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$$

Esempio:

$$y' + \frac{y}{x} = 1$$

Procedimento:

1. Si calcola $m(x)$ primitiva di $p(x)$, $m'(x) = p(x)$
2. Si scrive quindi la soluzione nella forma

$$y(x) = e^{-m(x)} \int e^{m(x)} q(x) dx$$

3 Equazione di Bernoulli

`[Pagina 427]`

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

1. Si divide per y^{α} ottenendo:
$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$
2. Si effettua la sostituzione $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$:
$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$$
3. Si risolve "normalmente"
4. Ad ogni soluzione $z(x)$ corrisponde una soluzione $y(x)$ data da:
$$y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4 Equazione lineare del secondo ordine omogenea

Ha la forma

$$y" + ay' + by = 0$$

dove a e b sono coefficienti costanti.
Bisogna cercare una soluzione del tipo:

$$y = e^{\lambda x}$$

Si sostituisce nella precedente equazione omogenea, derivando e mettendo in evidenza $e^{\lambda x}$

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

Poiché l'esponenziale non si annulla mai, tale equazione si annulla se e solo se l'omogenea associata si annulla:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- $\Delta > 0$ Se le sue radici sono reali e distinte, ovvero $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora la soluzione è del tipo
$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$
- $\Delta = 0$ Se le soluzioni sono reali e coincidenti, la soluzione è del tipo:
$$y = (c_1 + xc_2)e^{\lambda_1 x}$$
- $\Delta < 0$ Se invece le soluzioni sono complesse e coniugate, ovvero $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ allora si possono considerare la parte reale e immaginaria separatamente:
$$y = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

5 Equazione differenziale lineare del second'ordine non omogenea

$$y" + ay' + by = f(x)$$

5.1 $f(x) = P(x)$

dove $P(x)$ è un polinomio di grado m.

Va ricercata una soluzione particolare del tipo

$$u(x) = P_1(x)$$

dove $P_1(x)$ è un polinomio di grado m.

Se però $\lambda = 0$ è soluzione (semplice) dell'equazione omogenea associata, allora si deve cercare una soluzione del tipo:

$$u(x) = xP_1(x)$$

in pratica $y_f(x) = x(bx + c)$

5.2 $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

dove $P(x)$è un polinomio di grado m. Se α non è una radice dell'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = P_1(x)e^{\alpha x}$$

dove P_1è un polinomio formale dello stesso grado m. Se invece α coincide con una delle radici, allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = x^r P_1(x)e^{\alpha x}$$

dove r è la molteplicità della radice α.

5.3 $f(x) = Acos(\beta x)$ oppure $f(x) = Asin(\beta x)$ oppure $f(x) = Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)$

dove A, B sono costanti date. In questo caso se $i\beta$ non è una radice dell'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = Ccos(\beta x) + Dsin(\beta x)$$

dove C e D sono costanti da determinare. In caso contrario, si cerca una soluzione del tipo

$$u(x) = x\left(Ccos(\beta x) + Dsin(\beta x)\right)$$

5.4 $f(x) = P(x)cos(\beta x)$ oppure $f(x) = Q(x)sin(\beta x)$ oppure $f(x) = P(x)cos(\beta x)+Q(x)sin(\beta x)$

dove $P(x), Q(x)$ sono polinomi. In questo caso, se $i\beta$ non è una radice dell'equazione $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ allora si cerca una soluzione particolare del tipo:

$$u(x) = P_1(x)cos(\beta x) + Q_1(x)sin(\beta x)$$

dove $P_1(x)$ e $Q_1(x)$ sono polinomi di grado rispettivamente uguale a quello di $P(x)$e $Q(x)$. In caso contrario, si cerca una soluzione del tipo:

$$u(x) = x\left(P_1(x)cos(\beta x) + Q_1(x)sin(\beta x)\right)$$

5.5 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$

per la linearità dell'equazione si può risolvere separatamente:

$$y" + ay' + by = f_i(x) \quad i = 1, ..., m$$

e successivamente sommare le $u_i(x)$ soluzioni:

$$u = u_1 + u_2 + ... + u_m$$

Part IX
Studio di funzione

1 Scaletta per lo studio di funzione

1.1 Studio del dominio (campo di esistenza)

1.2 Si verifica la parità o la disparità della funzione

- se $f(x) = f(-x)$ allora la funzione è **pari** ed è simmetrica rispetto all'asse y
- se $f(-x) = -f(x)$ allora la funzione è **dispari** ed è simmetrica rispetto all'origine O

1.3 Studio del segno e intersezione con gli assi

1.4 Studio degli eventuali punti di discontinuità

Qui è possibile trovare (degli asintoti verticali), dei "buchi" o dei "salti"

1.5 Studio del comportamento della funzione agli estremi del dominio

Si utilizzano i limiti. In questa parte viene effettuata la ricerca degli asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

1.5.1 Asintoto

Un asintoto è una funzione del tipo $g(x) = ax + b$ tale che:

- $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0$
- $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0$

In particolare (eventualmente cambiando il segno del limite)

- Se $a = 0$ (asintoto orizzontale) si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$$
- Se $a \neq 0$ (asintoto obliquo) si hanno
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = a$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} (g(x) - ax) = b$$

Questi asintoti lineari sono un caso particolare del concetto di comportamento asintotico, in cui si cercano approssimazioni di f tramite funzioni g, non necessariamente lineari.

1.6 Studi della crescenza e dei punti di massimo e minimo relativi

Si utilizza la derivata prima

- I punti dove si annulla f' sono i punti stazionari di f
- Se f' si annulla su tutto un intervallo, in quell'intervallo la funzione è costante e si ha un plateau
- Gli insiemi di positività (o di negatività) di f' sono insiemi in cui f è monotòna crescente (o decrescente)

Una funzione f può essere strettamente crescente in un intervallo anche se in quell'intervallo la sua derivata f' non è definita, o se è definita e si annulla.

Esempio La funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su tutto il dominio, anche se $f'(0) = 0$

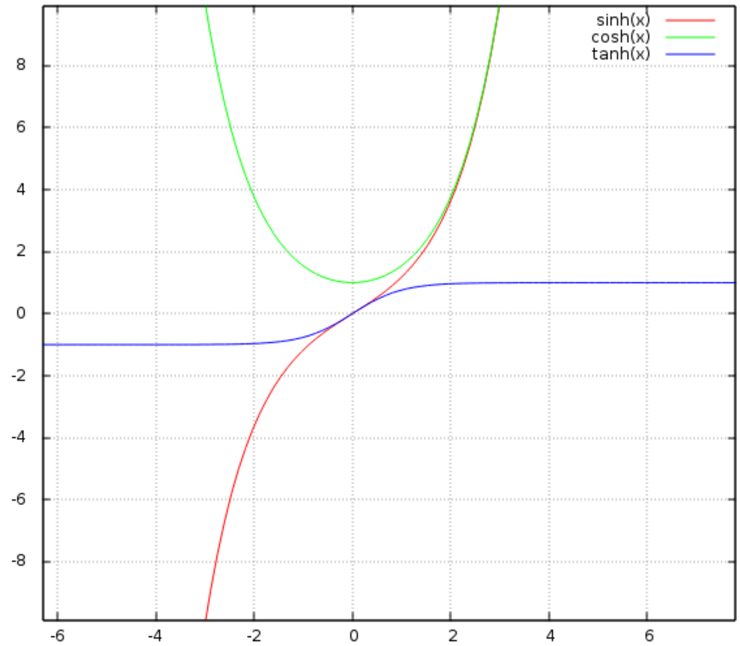
1.7 Studio della concavità e dei punti di flesso

1. Si utilizza, assieme alla derivata prima, la derivata seconda

Part X
Trigonometria

Nella sezione "Serie di Taylor" è disponibile lo sviluppo in serie di alcune funzioni trigonometriche e iperboliche

1 Funzioni iperboliche



$sinh0 = 0$, $cosh0 = 1$, $tanh0 = 0$, $sech0 = 1$
$(cosht)^2 - (sinht)^2 = 1$

1.1 Formule di addizione

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$

1.2 Formule di bisezione

$$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cosh(x)}{2}}$$

$$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$$

1.3 Relazioni con le funzioni trigonometriche

$sinh(x) = \imath\sin(\imath x)$, $\cosh(x) = cos(\imath x)$

1.4 Derivate

$\frac{d}{dx}sinh(x) = cosh(x)$, $\frac{d}{dx}cosh(x) = sinh(x)$

2 Tabella funzioni trigonometriche

α	0ř	30ř	45ř	60ř	90ř	120ř	135ř	150ř	180ř
$sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$
$tan(\alpha)$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$	"$+\infty$"	$-\sqrt{\frac{3}{1}}$	$-\sqrt{\frac{2}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$-\sqrt{\frac{0}{4}}$
$rad(\alpha)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

3 Formule trigonometriche

3.1 Identità fondamentale

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$

3.2 Formule di addizione

$$sen(x_1 \pm x_2) = sen(x_1)cos(x_2) \pm sen(x_2)cos(x_1)$$

$$cos(x_1 \pm x_2) = cos(x_1)cos(x_2) \mp sen(x_1)sen(x_2)$$

Scegliendo il segno + e ponendo $x_1 = x_2$ otteniamo:

3.3 Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$$