



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE ECONOMÍA • DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

La teoría de la realización como herramienta de determinación y control del cambio estructural

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
DOCTOR EN ECONOMÍA
PRESENTA
A R M A N D O R A N G E L G A L Á N

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARTÍN CARLOS PUCHET ANYUL
FACULTAD DE ECONOMÍA, UNAM

COMITÉ TUTOR:
DR. HÉCTOR BENÍTEZ PERÉZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS, UNAM

DR. JOSÉ MANUEL MÁRQUEZ ESTRADA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS, UNAM

DR. GUSTAVO CARREÓN VÁZQUEZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS, UNAM

Índice general

Índice	iv
Símbolos Matemáticos	v
1. Kalman y la Teoría de Realización	2
1.1. La visión clásica de la econometría y la perspectiva de la realización	2
1.2. Exposición del contraste bajo una implementación	5
2. Realización de sistemas lineales, invariantes y finitos	6
2.1. Sistema macroeconómico de determinación del ingreso y la teoría de la realización	7
2.2. Construcción de la realización	12
2.3. SVD en la TR: dimensionalidad y aleatoriedad	16
2.4. Acercamiento a los conceptos de estructura, cambio estructural y agrupamiento en la TR	18
2.5. Comentarios finales sobre el sistema económico de base contable	19
3. Profundizando en la TR: construcción, dinámica y cambio estructural	23
3.1. Caminata del sistema en la realización	24
3.2. Sistema, DE y realización	28
3.3. Conservación estructural de la Matriz de Hankel en la realización	31
3.4. Algoritmo de Factorización	37
3.5. Realización tiempo variante por acortamiento de series	46
3.6. Análisis de la estructura del sistema subyacente	49
4. Implementación de la TR a sistemas económicos de entrada-salida	52
4.1. Modelo entrada-salida sobre las incidencias de las componentes de la inflación de México	53
4.1.1. Realizaciones bajo el AF	55
4.1.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema de las incidencias de inflación	58
4.1.3. Modelo de incidencias de la inflación: algunas consideraciones sobre el proceso de factorización	59
4.2. Entrelazamiento de series de tiempo	61
4.2.1. Realizaciones bajo el AF	64
4.2.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema entre <i>BC</i> , <i>INPC</i> y <i>TD</i> con respecto a sus rezagos	69
4.3. Identificación y control del cambio estructural	70
4.3.1. Identificación del cambio estructural	71

4.3.2. Control del cambio estructural	81
Conclusiones	88
A. Teoría de la Realización	89
B. Álgebra Lineal	107
C. Algoritmos	118
D. Datos empleados	141
Bibliografía	148

Símbolos Matemáticos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente
$\mathbb{Z}^+, \mathbb{R}^+$	enteros positivos y reales positivos
$\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}_n^+$	primeros n naturales y primeros n enteros positivos
\mathbb{Z}^{+0}	enteros no negativos
$\mathbb{N}_{r:s}$	números naturales entre r y s , si $s = \infty$ son los naturales mayores a r .
$\in, \forall, \exists, \exists!$	pertenece a, para todo, existe algún, existe un único
$\subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq$	subconjunto de, superconjunto de, subconjunto propio de y superconjunto propio de
$A/B, A-B$	diferencia de conjuntos
$A \times B$	producto cartesiano de conjuntos
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espacios vectoriales de n -adas de números reales y complejos, respectivamente
$\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$ con entradas reales
$\mathcal{M}_{\mu \times \eta}(\mathbb{F})$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$ sobre \mathbb{F}
It_n	espacio de las matrices triangulares inferiores en \mathbb{R}
$\dim(V)$	dimensión del espacio vectorial V
$\text{rango}(A)$	rango de la matriz A
\underline{u}	vector (letra minúscula en negrita)
A	matriz (letra mayúscula en itálica)
\mathbf{u}', A'	transpuesta de un vector o matriz, respectivamente (apóstrofe superior derecho)
$\bar{a}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{A}$	conjugación compleja de un número, vector o matriz, respectivamente (barra superior)
\mathbf{u}^*, A^*	vector o matriz conjugada: $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}'}, A^* = \bar{A}'$
$\mathbf{0}, \mathbf{0}_{m,n}$	vector nulo y matriz nula del espacio $\mathcal{M}_{m \times n}$
A^{-1}, A^t, A^{-t}	inversa, potencia t -ésima e inversa de la potencia t -ésima de la matriz A , respectivamente.
I_n	matriz identidad en el espacio $\mathcal{M}_{n \times n}$
$\det(A)$	determinante de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$
$\mathbf{u}(k), A(k)$	vector y matriz parametrizados con parámetro k
$A_{i,j}, A_{:,j}, A_{i,:}$	elemento i, j , columna j -ésima, fila i -ésima de la matriz A
$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$	el vector coordenado del vector \mathbf{u} en base \mathcal{B}
$A_{r_1:r_2, s_1:s_2}$	columna i -ésima de la matriz A
$A_{:,s_1:s_2}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in \mathbb{N}_{r_1:r_2}$ y $j \in \mathbb{N}_{s_1:s_2}$
$A_{r_1:r_2,:}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in \mathbb{N}_m$ y $j \in \mathbb{N}_{s_1:s_2}$
$\{l(k)\}_{k \in \mathbb{N}}, \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, tomando $A_{i,j}$, $i \in \mathbb{N}_{r_1:r_2}$ y $j \in \mathbb{N}_n$
$\{l(k)\}_{k \in \mathbb{N}_n}, \mathcal{L}_{\mathbb{N}_n}$	sucesión infinita de matrices
$\{\mathcal{L}_{\mathbb{N}}\}, \{\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}\}$	sucesión parcial con n matrices
$\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})$	conjunto de elementos de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}$, respectivamente
$\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k})$	matriz de Hankel de m por n submatrices de la sucesión $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$
$\delta(k)$	matriz de Hankel de m por n submatrices de la sucesión parcial $\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}$
	delta de Kronecker

$\mathcal{H}_{r,s}$	MH de los elementos $1, \dots, s + r - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r,s_1:s_2}$	MH de los elementos $s_1, \dots, r + s_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r_1:r_2,s}$	MH de los elementos $r_1, \dots, s + r_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r_1:r_2,s_1:s_2}$	MH de los elementos $r_1 + s_1 - 1, \dots, r_2 + s_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathbb{F}^{a \times b}$	espacio de matrices de $a \times b$ sobre el cuerpo \mathbb{F} .

Introducción

El libro tiene como objetivo principal abordar el tema de la determinación y control del cambio estructural en sistemas económicos, utilizando la herramienta de la realización de espacio de estado. A lo largo de sus cuatro capítulos, se busca que el lector pueda sumergirse en un análisis teórico y práctico, explorando las diferencias entre la realización y la modelación econométrica tradicional, y proporcionando una base matemática y ejemplos concretos de su aplicación.

En su primer capítulo, el autor establece las bases conceptuales y teóricas al comparar las ideas del renombrado estadístico y matemático Kalman con las perspectivas de los economistas clásicos. Esta comparación revela las ventajas y desafíos inherentes a la realización como enfoque para entender los sistemas económicos. En particular, se explora en detalle las diferencias teóricas y prácticas que subyacen entre el método de la realización y la econometría clásica. A través de una cuidadosa modelación, expondremos las raíces de estas dos perspectivas y cómo influyen en la manera en que abordamos los problemas económicos y financieros.

El segundo capítulo se adentra en la exposición de conceptos clave de la realización, brindando la base matemática requerida para ilustrar su aplicación. Además, se presenta un ejemplo empleado en una investigación precedente, lo que permite a los lectores comprender de manera más concreta cómo se aplica esta técnica en la práctica. A través de sus resultados se desvelara la riqueza de esta teoría y cómo puede ser utilizada para analizar fenómenos económicos en la práctica.

El tercer capítulo profundiza en aspectos más avanzados de la realización que influyen en la estructura y dinámica de los sistemas económicos. Estos elementos incluyen la estructura de Hankel, el algoritmo de factorización y la incorporación de la varianza temporal. Además, se presentaran propuestas para mejorarlo, pero aunque no se abordan en detalle debido a su complejidad y el tiempo que demandan, si abren sendas de investigación para aquellos que deseen explorar más a fondo estos conceptos y su impacto en la economía. propone caminos de investigación para mejorar estos aspectos, lo que sugiere una dirección prometedora para futuros estudios.

Finalmente, el cuarto capítulo lleva a cabo la aplicación práctica de la realización a dos modelos económicos nuevos. Además de analizar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de estos, se destaca la aplicación de la propuesta para determinar y controlar el cambio estructural en sistemas económicos. Este capítulo es crucial, ya que pone en práctica todo el conocimiento adquirido en los capítulos anteriores y muestra cómo la realización puede ser una herramienta poderosa en la toma de decisiones económicas y la gestión de políticas.

A través de este libro, se espera proporcionar a los lectores una comprensión lo suficientemente profunda de la diferencia entre la realización y la econometría, y como la primera puede ayudar a entender el comportamiento de los complejos fenómenos económicos.

Capítulo 1

Kalman y la Teoría de Realización

1.1. La visión clásica de la econometría y la perspectiva de la realización

Dentro de la visión clásica tenemos al Trygve Haavelmo, quien fue un economista y estadístico noruego, conocido por su trabajo en econometría y por ser uno de los pioneros en la aplicación del análisis estadístico y estadístico en la teoría económica. Su trabajo fue fundamental para el desarrollo de métodos estadísticos en la economía y la econometría moderna. A continuación, se presentan algunas de las ideas clave que Haavelmo promovió en su enfoque de la econometría y la estadística. Su enfoque hizo hincapié en la importancia de establecer relaciones causales claras y teóricamente sólidas en los modelos económicos, y abogó por el uso de técnicas estadísticas avanzadas para respaldar empíricamente los resultados obtenidos de estos modelos. Su trabajo sentó las bases para gran parte de la práctica contemporánea en la econometría y la estadística aplicada.

Haavelmo enfatizó la importancia de establecer relaciones causales claras en los modelos económicos. Argumentó que los modelos económicos deberían reflejar las relaciones estructurales subyacentes en la economía y ser consistentes con las teorías económicas subyacentes. Su enfoque destacó la importancia de especificar modelos teóricamente coherentes y luego probar empíricamente sus implicaciones.

Además, abogó por el uso de técnicas estadísticas y probabilísticas en la estimación de parámetros en modelos económicos. Fue un defensor de la teoría de la estimación, argumentando que los modelos económicos deberían estar respaldados por pruebas estadísticas sólidas y basadas en muestras representativas. Su enfoque promovió la utilización de métodos estadísticos rigurosos para evaluar la validez y la precisión de los resultados obtenidos de los modelos económicos.

Así mismo, Haavelmo también realizó importantes contribuciones al desarrollo de modelos de ecuaciones simultáneas, que analizan las relaciones causales entre múltiples variables económicas interdependientes. Su enfoque ayudó a establecer el marco para el análisis de las interrelaciones complejas entre diferentes variables económicas, lo que permitió una comprensión más profunda de los fenómenos económicos y sociales complejos.

Por el lado de la realización se tiene Rudolf Emil Kalman, quien fue un matemático y estadístico húngaro-americano, reconocido por sus importantes contribuciones en la teoría de sistemas dinámicos y en el desarrollo de los filtros de Kalman, una técnica ampliamente utilizada en el procesamiento de señales y en la navegación. En su artículo “A Critique of the Mathematical

Models in Economic Theory”, publicado en 1960, Kalman realizó una crítica a la econometría, una disciplina que aplica técnicas estadísticas y matemáticas para analizar datos económicos y para construir modelos econométricos. Argumentó que ella se basaba en modelos matemáticos que eran demasiado simplificados y que no podían representar adecuadamente la complejidad del mundo real. Según Kalman, los modelos econométricos eran demasiado teóricos y no tenían en cuenta las variables ocultas, las interacciones complejas entre variables, la incertidumbre y las fluctuaciones aleatorias de los datos.

Kalman también criticó la falta de rigor matemático en la econometría, y señaló que los modelos econométricos a menudo se construían sin un análisis cuidadoso de la validez empírica y sin una verificación empírica adecuada. En su crítica, Kalman propuso un enfoque diferente para el análisis de los datos económicos, basado en la teoría de sistemas dinámicos y en los filtros de Kalman. Según Kalman, este enfoque permitiría modelar de manera más adecuada la complejidad del mundo real, y tendría en cuenta las variables ocultas, las interacciones complejas entre variables, la incertidumbre y las fluctuaciones aleatorias de los datos.

La crítica de Kalman a la econometría se centró en la falta de consideración de la estructura subyacente de los sistemas económicos y en la excesiva dependencia de las técnicas econométricas en modelos matemáticos complejos y datos históricos. Para ilustrar esto, podemos considerar un ejemplo de ecuaciones estructurales. Supongamos que estamos interesados en modelar el efecto del gasto público en el crecimiento económico. Podríamos escribir un modelo estructural como:

$$G = f(I, G^*, \pi, E)$$

$$C = g(G, G^*, \pi, E)$$

donde f y g son funciones; G es gasto público; I impuestos; G^* gasto privado; π productividad; E choques exógenos; y C crecimiento económico.

En este modelo, estamos explícitamente indicando la relación entre el gasto público y el crecimiento económico como una función de otras variables estructurales como los impuestos, el gasto privado y la productividad, y también consideramos la presencia de choques exógenos que afectan ambos. Pero este actuar fue lo que Kalman no aceptaba. Mencionó que en la econometría clásica no se prestaba suficiente atención a esta estructura subyacente de los sistemas económicos y, en su lugar, se dependía demasiado de la técnica econométrica. Es decir, simplemente se intentaba ajustar los datos históricos a modelos matemáticos complejos. En su opinión, esto puede conducir a modelos sobredeterminados e inestables que no reflejan la verdadera complejidad del mundo real.

Por lo tanto, Kalman abogó por una mayor atención a la modelización de la estructura subyacente de los sistemas económicos y por el uso de técnicas más avanzadas como el análisis de sistemas dinámicos para capturar mejor la complejidad de las relaciones económicas, cómo lo sería la Teoría de la Realización que se trata en este documento.

En este sentido, una de las críticas fundamentales de Kalman a Haavelmo se centró en la rigurosidad matemática de los modelos econométricos y su capacidad para capturar la dinámica subyacente de los sistemas económicos. Kalman argumentó que la falta de consideración de la estructura temporal en los modelos econométricos de Haavelmo limitaba su capacidad para capturar la complejidad de los fenómenos económicos en el tiempo.

Kalman argumentó que los modelos econométricos estáticos utilizados por Haavelmo y otros economistas no capturaban completamente la naturaleza dinámica de los sistemas económicos.

Señaló que las interacciones temporales y las dependencias a lo largo del tiempo eran cruciales para comprender plenamente la evolución de las variables económicas, y que los modelos dinámicos eran necesarios para capturar esta complejidad.

Kalman defendió un enfoque más orientado a la teoría de control, que enfatizaba la importancia de comprender las estructuras de retroalimentación y las interacciones dinámicas en los sistemas económicos. Argumentó que la aplicación de métodos de control y sistemas dinámicos permitiría una comprensión más profunda de la evolución temporal de las variables económicas y mejoraría la capacidad de previsión de los modelos.

Kalman también destacó la importancia de las técnicas de filtrado y suavizado en la modelización de sistemas económicos, argumentando que el uso de métodos de filtrado de señales podría mejorar la precisión de los modelos econométricos al tener en cuenta la información temporal pasada y presente de manera más efectiva.

En general, la crítica de Kalman a Haavelmo se centró en la necesidad de incorporar más enfoques dinámicos y de sistemas en la modelización econométrica para capturar la complejidad temporal y las interacciones dinámicas en los sistemas económicos. Su perspectiva influyó en el desarrollo posterior de la econometría y fomentó una mayor integración de métodos de control y sistemas en el análisis económico.

Dentro de un sistema económico real existen muchos y polifacéticos objetos, eventos, propiedades, patrones, relaciones y dinámicas. Estas son abstraídas y al simplificarse y generalizarse se obtiene el contexto en el cual los conceptos y relaciones económicas pueden ser definidas y utilizadas. A partir de estas se consuma la creación de teorías económicas, las cuales son un guión, una forma de condensar la dirección causal entre elementos económicos. No obstante, dentro de la teoría económica también habita otra abstracción del sistema que no se enmarca como causal. Esta sucede cuando cambios en unos conceptos ocurren en consonancia con otros, ya sea proporcional o no y en sentido directo o inverso, pero sin mediar mecanismos de transmisión entre ellos. A este fenómeno se le nombra habitualmente como correlación.

Cada concepto económico pasa a tener representaciones más específicas, que toman el nombre de variables, las cuales en varios casos pueden cuantificarse dentro del sistema económico real. Las mediciones hechas regularmente cambian al pasar el tiempo, como es fácil de percibir en el sistema económico. Esto induce una interrogante ¿qué es lo que genera dicho cambio? La teoría económica establece relaciones de causa entre la variable que fue medida y otras variables más, donde la magnitud de una variable, llamada respuesta, en un tiempo t está influida (direccionalidad) para todo propósito práctico principalmente por la magnitud de un puñado de variables (causas) en ciertos tiempos. Esto en virtud de identificar y abstraer en el sistema económico los mecanismos por los cuales los estados de las variables causales transmiten un efecto dentro del sistema hasta impactar en la plena determinación del estado del concepto respuesta.

Esto da paso a la operacionalización de dichos conceptos teóricos para obtener mediciones o atributos de ellos. Esto podría decirse que está sintetizado en la idea de las variables económicas $x_{i,t}$, donde x es el valor de la medición; i es un índice que asocia a la medida con un concepto operacionalizado; y t es el tiempo en que se hizo la medida.

Las variables económicas que tienen una respuesta rápida a los cambios en el entorno económico, o que están determinadas principalmente por factores exógenos como políticas gubernamentales o shocks externos, pueden tener una dependencia temporal menos pronunciada. Por otro lado, las variables que reflejan el comportamiento de agentes económicos con inercia o expectativas adaptativas pueden mostrar una dependencia temporal más fuerte.

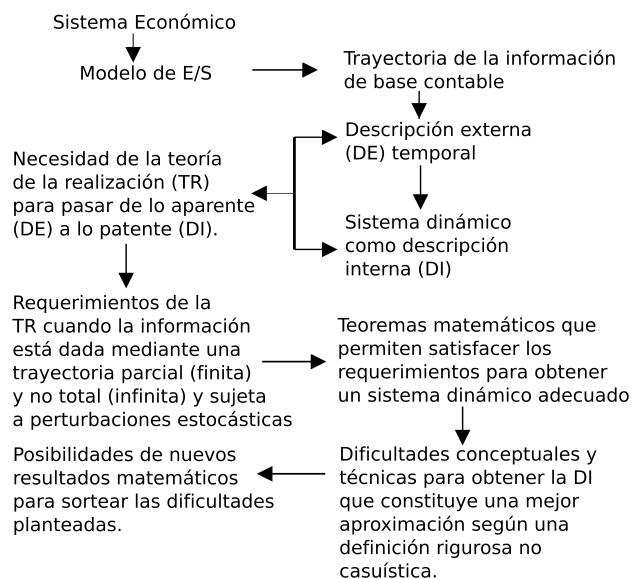
1.2. Exposición del contraste bajo una implementación

Capítulo 2

Realización de sistemas lineales, invariantes y finitos

En el presente capítulo se realiza una primera inmersión en la aplicación de la realización en la economía. Para esto se aprovechará la exposición hecha en Rangel G. (2019), que se puede esquematizar en la Figura 2.1. Con ello se espera dar algunas características iniciales del tipo de modelo económico a emplear y los pasos para construir su realización. Además, se muestra cómo las trayectorias de ciertas matrices formadas bajo relaciones de tipo contable se consideran la manifestación exterior, dinámica y condensada de la operación de un sistema económico subyacente; el cual será concebido lineal y de dimensión finita (completamente representado con una cantidad finita de variables). Además, se hace patente la forma en que podemos reconstruir dicho sistema y su dinámica usando las matrices de base contable de por medio, ya sea que posean aleatoriedad o no. Así mismo, se revisa una propuesta de cambio estructural desde la TR, empleando la reconstrucción del sistema subyacente que se realizó, y se dan algunas observaciones sobre sus alcances.

Figura 2.1: Flujo temático en Rangel G. (2019)



2.1. Sistema macroeconómico de determinación del ingreso y la teoría de la realización

El modelo económico que se emplea en Rangel G. (2019) es de base contable y extremadamente simple, pero tiene algunas características relevantes desde el punto de vista conjunto que representan los adjetivos dinámico, estructural y complejo.

Las relaciones del modelo son aquellas que sostienen, agrupados en dos sectores, los agentes residentes **r** (o internos) y los agentes no residentes **nr** (o externos). Estas relaciones se manifiestan en flujos corrientes, medidos en precios por cantidades y durante cada trimestre. Las transacciones entre ambos sectores se compilan en el siguiente cuadro que satisface los criterios contables del fluir de fondos, del primer principio de Say y de la ley de Walras.

Figura 2.2: Criterios contables de flujo de fondos

	r	nr	Ac.	Total
r	C_t	X_t	F_t	Y_t
nr	MC_t	0	MK_t	M_t
Ah.	Sr_t	Sn_t	0	S_t
	Y_t	M_t	I_t	

donde C_t es el consumo de mercancías intermedias; X_t exportaciones; F_t formación bruta de capital; Y_t ingreso interno bruto; MC_t consumo intermedio y final de mercancías importadas; MK_t formación bruta de capital de mercancías importadas; M_t importaciones, Sr_t ahorro de los residentes; Sn_t ahorro de los no residentes; S_t ahorro; e I_t inversión; el subíndice t indica el tiempo en que fue hecha la medición respectiva.

Las dos primeras filas del cuadro identifican a las identidades contables:

$$\begin{aligned} Y_t &\equiv C_t + X_t + F_t \\ M_t &\equiv MC_t + MK_t \end{aligned}$$

que originan la identidad macroeconómica

$$S_t \equiv I_t$$

con la cuál es posible plantear la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & X_t \\ MC_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

Así, a partir de (1), se construye el siguiente modelo entrada-salida

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$$

Es más, podemos expresar esta igualdad como

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \quad (2)$$

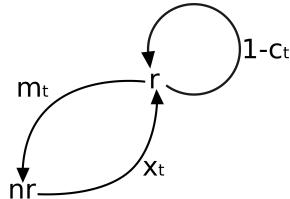
donde

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix} = 1 - c_t - m_t x_t$$

Este modelo cuenta con ciertas características sistémicas relevantes que se listan a continuación:

1. Interconecta en cada trimestre t a dos sectores **r** y **nr**, de forma tal que lo que se le vende a **nr** depende de lo que **nr** le compra a **r** y vice-versa;
2. La trayectoria de tres razones clave de las relaciones económicas internas y con el resto del mundo (o externas), son observables: c_t , la propensión marginal a consumir mercancías de consumo de producción interna; m_t , la propensión a importar mercancías para producir otras mercancías y para el consumo final; y x_t la razón del balance en cuenta corriente entre el ingreso por exportaciones y el gasto en importaciones;
3. Relaciona los flujos de entrada (o exógenos) de acumulación de capital $\begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$ con los de salida (o endógenos) mediante una descripción observable externa basada en $\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$, de periodicidad trimestral;
4. Goza de una correspondencia entre el grafo del modelo,

Figura 2.3: Grafo de intercambios entre residentes (r) y no residentes (nr)



y la matriz

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

que hace pensar que la retroalimentación entre **r** y **nr** hace emerger una representación que está determinada por una dinámica lineal del sistema subyacente.

El modelo (2) al ser de base contable, enlaza las variables de entrada F_t y MK_t con las de salida Y_t y M_t en cada tiempo, sin hacer suposiciones sobre la relación entre ellas, ni sobre su forma o duración. La causa es que la conexión contable subyacente es estable. Lo que falta en un lugar se acumula en otros sitios bajo un prorratoe de configuración fija. Versado de otra manera: *el principio contable de partida doble y la estructura de conexiones entre las diversas componentes contables son fijas e independientes a la forma en que sean reconfiguradas matemáticamente las identidades contables originales.*

La partida doble y las conexiones contables también permiten que el modelo (2) cuente con toda la información disponible sobre las relaciones entre los elementos que intervienen en él. Así mismo, establecen la noción de sistema en él. La matriz del modelo refleja una finalidad: transformar entradas en salidas. Esto lo realiza bajo el principio de partida doble y las conexiones fijadas entre los componentes contables, lo que brinda la noción de elementos interactuando para conseguir la finalidad antedicha.

Las características de los modelos contables como el (2) son importantes para la TR. Como se discutirá meticulosamente en el capítulo 2, se encuentran conectadas con la búsqueda de la identificación de invariantes en sistemas. Así mismo, serán el punto de partida para mostrar la debilidad de la modelación econométrica. Por el momento únicamente se mostrarán para enfatizar su existencia, que el lector comience a pensar en términos de sistemas y que pueda comenzar a realizar un análisis crítico de la modelación econométrica, deslindando sus bordes de actuación y los riesgos de no identificarlos.

Una vez el modelo económico de base contable es visto como un sistema, podemos identificar que se encuentra implícito a la sucesión de grafos, o de otra manera, a la sucesión de sus matrices, pero antes de ello vamos a formalizar algunas ideas. En lo siguiente haremos uso de los planteamientos hechos en Casti (1987).

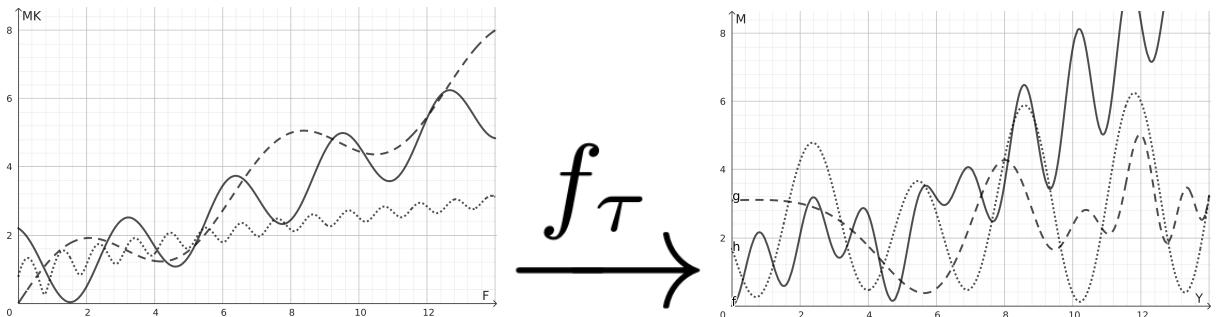
El sistema económico de base contable inicialmente lo podemos representar de forma resumida como algunos de los elementos de la familia de funciones $\{f_\alpha : T \times \Omega \rightarrow \Gamma | \alpha \in A\}$ con A un conjunto índice. A los f_α que representen al sistema los identifico como su **Descripción Externa** (DE) del sistema, y a cada uno en individual se le nombra como **función de entrada-salida** Casti (1987).

Además, en la definición de f_α existe una función μ que toma el índice α para generar un tiempo τ tal que $f_\alpha(\cdot, u)$ sólo estará definido para $t \geq \tau = \mu/\alpha$. Así mismo, Ω representa el conjunto de funciones de entrada $u : T \rightarrow \{(F \ MK)^T\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Por su parte, Γ es el conjunto de funciones de salida $y : T \rightarrow (Y \ M)^T \subseteq \mathbb{R}^2$. Por todo lo esclarecido, de forma inicial tenemos que el sistema puede verse como

$$y = f_\alpha(t, u)$$

es decir, la DE toma dos tiempos: $\tau = \mu(\alpha)$ y t , y además una infinidad de entradas $(F \ MK)^T$, una por cada elemento de T , que son representadas por u , y arroja una infinidad de salidas $(Y \ M)^T$, una para cada tiempo en T , representadas por y , ver Figura (2.4).

Figura 2.4: Ilustración de $f_\tau(t, \cdot)$ transformando funciones de entrada (izquierda) a funciones de salida (derecha). Ellas se corresponden según sean continuas, puntuales o segmentadas.



Otra propiedad que f_τ debe cumplir es que si $u_1(t') = u_2(t')$ en un intervalo $\mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$,

es decir, si dos funciones de entrada coinciden en un intervalo, entonces

$$f_\alpha(t, u_1) = f_\alpha(t, u_2), \quad \mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$$

es decir, si dos funciones de entrada coinciden en un segmento, entonces $f_\alpha(t, \cdot)$, $t > \tau = \mu(\alpha)$, debe ser indiferenciable para cualquiera de las dos funciones de entrada valuadas en el segmento $\mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$. Una forma alternativa de ver esto es que si $f_\alpha(t, u_1)$ genera respuestas diferentes a $f_\alpha(t, u_2)$, para el segmento en que coinciden las funciones de entrada, entonces la etiqueta α debe ser diferente según sea utilice u_1 o u_2 , digamos $\alpha = \alpha_1$ al tomar u_1 y $\alpha = \alpha_2$ si tomamos u_2 . Esto implica que la función entrada-salida debe ser etiquetada de manera diferente en cada caso ya que corresponde a dos activaciones diferentes del sistema: $f_{\tau_1}(t, u_1) = f_\tau(t, u_1) \neq f_\tau(t, u_2) = f_{\tau_2}(t, u_1)$, con $\tau_1 \neq \tau_2$.

Ahora, el modelo (2) solo toma datos trimestrales por lo cual se considera discreto. Además, como tiene matrices mediando las entradas y salidas, al menos en un entorno de las respectivas demandas de cada trimestre, $f_\alpha(t, \cdot)$ es establecido como lineal. En consecuencia, podemos encontrar matrices M_α asociadas a f_α , tales que

$$y = M_\alpha \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

donde t indica trimestres y no tiempo continuo. Por consiguiente, podemos decir que el sistema económico de base contable es **Lineal y Discreto**.¹ Así mismo, debido a que la transformación sustancial de las relaciones económicas demora en cristalizar, hablaríamos que f_α no es influida por el tiempo t ,² por consiguiente

$$y = M_\alpha u \tag{3}$$

debido a que f_α ya no depende de t , el sistema económico de base contable es **invariante temporal**.³

Existen más consideraciones teóricas que se podrían hacer para detallar aún más el nexo entre M_α , la DE y lo que será la identificación del sistema. Sin embargo, más formalidad podría incapacitar el entendimiento del lector no familiarizado con la matemática de la TR, además de volver más pantanoso el asunto, lo que está fuera del espíritu del capítulo. Por consiguiente, continuaremos desde una perspectiva un tanto más intuitiva aunque con dosis específicas de formalidad.

Es así que concluyo estas líneas formales indicando que las matrices teóricas M_α , que representan externamente al sistema económico, están asociadas con las 100 matrices empíricas a partir de las formas (2) y (3). Por ello es que, de manera intuitiva, podemos decir que estas 100 matrices empíricas son también concebidas como la DE del sistema.

En otro orden de ideas, pasamos a platicar sobre las descripción interna. Se comienza por decir que el sistema dado por (2), cuenta con muchas variables asociadas a los procesos internos que lleva a cabo para convertir funciones de entrada en funciones de salida. Dentro de estas existe un puñado que lo identifican, las cuales están asociadas a ciertos procesos clave. Ellas pueden resumir

¹Se considera un sistema discreto si tanto entrada como salida se definen únicamente en puntos discretos en el tiempo, como en este caso que fueron en trimestres.

²Al menos en un entorno de tiempo que involucra al que se usa en modelo contable.

³Un sistema invariante temporal se puede entender como aquel que mantiene su comportamiento a lo largo del tiempo, es decir, si su salida ante una entrada dada es autónoma al momento en que se aplique dicha entrada.

a todas las demás variables involucradas en el resto de procesos del sistema. Conociéndolas es posible saber el valor de las restantes en un tiempo dado. Es más, el sistema puede ser concebido como sinónimo de ellas, a las cuales aludiremos bajo el término de **variables de estado** (VE), o simplemente estados, y al conjunto de todas ellas se le denominará **espacio de estado** del sistema.

No obstante, el sistema económico no abriga la posibilidad de ser identificado de manera directa. No es posible establecer teórica o empíricamente reglas sobre su dinámica interna o, equivalentemente, no es posible determinar las VE ni la dinámica de estas. Lo único con lo que se cuenta es con una **cantidad finita** de “fotografías exteriores”, como mencionamos al final de la parte formal, solo tenemos una DE que condensa dicha operación, que en nuestro son 100 matrices trimestrales definidas como

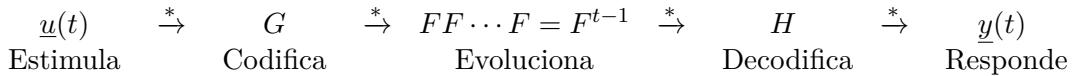
$$\mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

Aquí es donde la TR se vuelve tan relevante. Está concebida para *identificar a dicho sistema económico mediante la DE*. Por consiguiente, su uso es para la especificación del número de variables de estado y su evolución,⁴ *no así como mecanismo de ajuste de datos como lo sería la econometría*. Busca simular de mejor manera la DE para hallar al agente generador, al sistema económico que subyace al modelo económico.

La TR identifica al sistema invariante, lineal y discreto que venimos explicado, al construir mediante la DE una terna de matrices (F, G, H) independiente del tiempo, que puedan generar la DE, a esta construcción se le denominará **realización** y a la terna **Descripción Interna** (DI) del sistema. La matriz F es la matriz de espacio de estado e identifica el número y evolución de las VE. Por su parte, G es una matriz que codifica el estímulo, o entrada, en información legible para el sistema, mientras que H hace lo opuesto a G : decodifica el resultado de los procesos internos (y resumidos por F), generando una respuesta o salida legibles para el usuario. Así, por un lado tenemos que

$$HF^{t-1}G \approx \mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} \quad t = 1, \dots, 100$$

donde el símbolo de aproximación (\approx) se coloca ya que la DI no siempre simulará exactamente la DE.⁵ Esto sustenta que la órbita⁶ de la matriz de estado F pre y pos multiplicada por H y G , respectivamente, empate con la órbita observada del sistema, la DE. Además, mediante la construcción de la DI del sistema subyacente, en cada tiempo podemos analizar cualquier fase del siguiente esquema



donde $\underline{u}(t) = (F_t \quad MK_t)^T$ e $\underline{y}(t) = (Y_t \quad M_t)^T$. Se está entonces ante la posibilidad de formular más interrogantes sobre el papel del modelo macroeconómico mediante las relaciones estáticas y dinámicas que existen entre \mathcal{W}_t y (F, G, H) , respecto a:

⁴La TR también se puede emplear en sistemas identificados, pero estos no son muy usuales en Economía, a diferencia de Física o Ingeniería.

⁵Como se explica adelante, esto es debido a pérdida de información al construirla; por la finitud y calidad de los datos de la DE; o debido a que el sistema no está bien especificado, por ejemplo, puede ser no lineal o variante temporal.

⁶La órbita se puede entender como la sucesión generada por una función f , un valor x_0 en su dominio y la composición iterada: $f(x_0) = f \circ^1 (x_0), f(f(x_0)) = f \circ^2 (x_0), \dots, f \circ^n (x_0), \dots$

- i) las conexiones registradas en \mathcal{W}_t ,
- ii) las estructuras reveladas por (F, G, H) , y
- iii) los cambios en esas conexiones y los correspondientes invariantes que muestran las matrices de parámetros.

En consecuencia, el cambio estructural está englobado en la construcción de la realización del sistema subyacente, así como la dinámica de ajuste que sigue la interacción interna del sistema ante los efectos instigados por cambios intensionales o shocks imprevistos. Esto se irá desvelando con más detenimiento en los siguientes apartados del trabajo.

2.2. Construcción de la realización

Para comprender como construir la DI a través de la DE, inicialmente se explicará como elaborarla cuando los datos son finitos y “bien comportados”, esto último se pormenoriza un poco más adelante.⁷

- Partimos al identificar el tipo de sistema subyacente a modelar. Por ejemplo, en el modelo macroeconómico que tratamos, se asumió un sistema discreto, lineal e invariante. Este debe ser expresado de la siguiente forma

$$\underline{y}_t = \mathcal{W}_t \underline{u}_t \quad t = 1, \dots, p + q - 1 \quad (4)$$

con $\mathcal{W}_t \in \mathbb{R}^{\eta \times \mu}$ la matriz que condensa y “encubre” los procesos internos del sistema subyacente en el tiempo t ; transformando el input o multientrada \underline{u}_t en el output o multisalida \underline{y}_t ;

- A continuación, con las matrices \mathcal{W}_t $t = 1, \dots, p + q - 1$, que forman la DE del sistema subyacente, construimos la **Matriz de Hankel (MH)**

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \dots & \mathcal{W}_q \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \dots & \mathcal{W}_{q+1} \\ \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \dots & \mathcal{W}_{q+2} \\ \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \mathcal{W}_7 & \dots & \mathcal{W}_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{W}_p & \mathcal{W}_{p+1} & \mathcal{W}_{p+2} & \mathcal{W}_{p+3} & \dots & \mathcal{W}_{p+q-1} \end{pmatrix}$$

Con ésta representación explícita de $\mathcal{H}_{p,q}$ se puede ver que es de orden $p\eta \times q\mu$; p y q son la cantidad de bloques fila y columna de matrices \mathcal{W}_s , respectivamente; y, además, que su construcción se realiza al colocar el elemento \mathcal{W}_s en cada posición (i, j) tal que $(i + j) - 1 = s$. Para ejemplificar lo último, observe que para las posiciones (1, 4), (2, 3), (3, 2) y (4, 1) se cumple que $i + j - 1 = 4$, es decir, $(1 + 4) - 1 = (2 + 3) - 1 = (3 + 2) - 1 = (4 + 1) - 1 = 4$. Así, decimos que el cuarto bloque antidiagonal (en rojo) es homogéneo y está formado por el cuarto elemento de la sucesión, \mathcal{W}_4 . De esto se sigue que el k -ésimo bloque antidiagonal será homogéneo y estará dado por el k -ésimo elemento de la sucesión.

⁷Existe otra versión cuando los datos son infinitos y “bien comportados”. Sin embargo, en la aplicación económica los datos no satisfacen ninguna de estas dos condiciones, por ello se restringe el análisis a datos finitos y, eventualmente, a aquellos que no se “comportan bien”.

- c) En este paso se debe elegir una de todas las matrices de Hankel generadas en el paso anterior. Para ello se selecciona la matriz que cumpla con las condiciones del Teorema A.5 en el Anexo A. Con este fin en mente, dentro de las matrices de Hankel $\mathcal{H}_{u+1,\psi}(\mathcal{W})$ con $\psi = k - u$, que satisfacen $u + v < 100$ con $v \in \mathbb{N}$, y

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{u,v}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{u,v+1}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{u+1,\psi}) = n \quad (5)$$

seleccionamos aquella que haga a n mínimo, digamos $\mathcal{H}_{p+1,\psi}$. Cabe indicar que esta matriz no necesariamente es única, sin embargo, todas las matrices con este rango mínimo son equivalentes. Por otro lado, a n se le denomina la dimensión de la realización mínima.

- d) Por comodidad, renombramos a $\mathcal{H}_{p+1,\psi}$ como \mathcal{H} ⁸ y con ella se construyen las matrices $P \in \mathbb{R}^{\eta(p+1)}$ y $Q \in \mathbb{R}^{\eta(p+1) \times \mu\psi}$, bajo el siguiente **Algoritmo de Factorización**:⁹

1. Definir $Q_{1,:} = \mathcal{H}_{1,:};$
2. Determinar la condición:
 - 2.1. Si \mathcal{H} tiene solo una fila, se define $P = [1]$, y $Q = \mathcal{H}_{1,:}$
 - 2.1.1 Fin.
 - 2.2. Si \mathcal{H} tiene más de una fila, definimos $i = 1$;
3. Si $Q_{i,:} \neq \underline{0}$, hallar la primer columna j_i de $Q_{i,:}$ tal que $q_{i,j_i} \neq 0$ y definir $q_{s,j_i} = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}_{i+1:n\mu};$
4. Determinar $p_{u+i,i}$ como¹⁰

$$p_{u+i,i} = \frac{\mathcal{H}_{u+i,j_i} - \left(\sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i} \right)}{q_{i,j_i}}$$

para toda $u \in \mathbb{N}_{n\mu-i};$

5. Determinar $q_{i+1,j}$ como¹¹

$$q_{i+1,j} = \mathcal{H}_{i+1,j} - \sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_{m\eta}/\{j_r : \forall r \in \mathbb{N}_i\}$,¹²

6. Determinar la condición:

- 6.1. Si $Q_{i+1,:} = \underline{0}$, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF, y haciendo $Q_{i+1+k,:} = \underline{0}$, $\forall r \in \mathbb{N}_{n\mu-(i+1)}$, conformamos las matrices P y Q , y terminamos.

⁸En lo que sigue del documento se omitirán los subíndices sobre la cantidad de bloques fila y columna de la matriz de Hankel siempre que no se requieran, dejando de forma clara al lector sus valores al inicio de su uso. Esto permite una notación más simple y una lectura más ágil del documento.

⁹Este algoritmo fue expuesto en la **Definición B.1** de Rangel G. (2019), fundamentándose en lo expuesto en Casti (1987, pp.134-138)

¹⁰Esta expresión es equivalente a $\mathcal{H}_{u+i,j_i} = P_{u+i,:} Q_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i}$. Para ello considere el paso 3, que implica $\sum_{s=i+1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$. Además, está bien definida, por el inciso d3, $q_{i,j_i} \neq 0$.

¹¹Esta expresión es equivalente a $\mathcal{H}_{i+1,j} = P_{i+1,:} Q_{:,j} = \sum_{s \in \mathbb{N}_{m\eta}} p_{i+1,s} q_{s,j}$. Para ello considere que $P \in \text{It}_{n\mu}$, con unos en su diagonal principal. Lo que implica que $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j} = 0$ y $p_{i+1,i+1} = 1$.

¹²Es decir, todo j en $\mathbb{N}_{m\eta}$ que no corresponda a la columna del primer elemento no nulo de la fila $1, \dots, i$ de $Q_{n,m}$.

- 6.2. Si \mathcal{H} tiene sólo $i + 1$ filas, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF conformamos las matrices P y Q , y terminamos.
- 6.3. Si \mathcal{H} tiene más de $i + 1$ filas y $Q_{i+1,:} \neq \underline{0}$, entonces definimos $i = i + 1$, es decir, tomamos una nueva i igual a la i inmediatamente anterior, más 1, y repetimos el AF desde el inciso 3.

La primera matriz es triangular inferior con diagonal unitaria y la segunda una matriz con sus filas mayores a n nulas.¹³

- e) Por último, se genera la realización mínima (F, G, H) . Construimos las matrices $P_n \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$, $P_n^* \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$, definidas como

$$P_n = (P_{u+1})_{n,n} \quad P_n^* = (P_{u+1})_{n+1:n+r', 1:r'}$$

Luego, se define la realización mínima como se muestra a continuación,

$$(F, G, H) = (F_{r'}, G_{r'}, H_{r'})$$

donde $F_{r'} = (P'_{r'})^{-1} P_n^*$, $G_{r'} = (Q_{p+1,\psi})_{1:r', 1:m}$ y $H_{r'} = (P_{p+1})_{1:n, 1:r'}$

Explicado lo anterior, podemos evocar aquello de datos “bien comportados” para dilucidarlo. Dicha expresión denota que la DE (datos) puede constituir al menos una MH que satisfaga la condición (5) en el paso (c). Una DE que corrobore dicha condición se corresponde con que una parte consecutiva de ella pueda explicarla a toda, o equivalentemente, todo elemento de la DE es una combinación lineal de una subsucesión consecutiva de la DE.

Existen sistemas que al ser no lineales o poseer una dimensión infinita (requieren una cantidad infinita de variables de estado para representar la información interna) no permitirán que una parte consecutiva de su DE pueda representar a toda ella. Los cambios no lineales en la DE o la dimensión infinita requieren en este sentido una cantidad infinita para representar a la DE. Así mismo, la DE puede no estar “bien comportada” por algo ajeno al sistema subyacente: choques aleatorios o errores al generar la DE; o debido al tamaño de la DE, ya que si es insuficiente hace independientes a los elementos. Estas situaciones ponen un obstáculo a la realización que hasta ahora se ha explicado.

No obstante, realizar una DE franqueando el hecho de que no satisface la condición (5) para ninguna MH, es decir, que no es “bien comportada”, es posible. Esto puede hacerse al rectificar el paso (c) mediante la siguiente secuencia de acciones:

1. Dentro de todas las matrices de Hankel $\mathbf{H}_{p,q}$ generadas por medio de la DE de tamaño k , con $2 \leq p \leq k - 1$, se toma el conjunto de matrices que tenga el mayor rango y se factorizan mediante la Descomposición en Valores Singulares (SVD). Es decir, para cada matriz de rango máximo $H_{p,q}$ se encuentran tres matrices: $U_{pq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $V_{pq} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ortogonales; y Σ_{pq} diagonal con $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_{pq}} \geq 0$ valores singulares de $H_{p,q}$ en su diagonal principal, tales que

$$\mathcal{H}_{p,q} = U_{pq} \Sigma_{pq} V'_{pq} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \begin{pmatrix} u_{i1} v_{i1} & \cdots & u_{i1} v_{i(\alpha\eta)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i(\beta\mu)} v_{i1} & \cdots & u_{i(\beta\mu)} v_{i(\alpha\eta)} \end{pmatrix}$$

¹³Esto se sigue del Lema B.1 en Rangel G. (2019)

2. Tomamos la matriz de rango máximo que acumule el mayor porcentaje de peso de los valores singulares en los primeros lugares. Ahora, esta matriz $\mathcal{H}_{p,q}$ tiene rango igual al número de valores singulares, es decir, r_{pq} . Para ella creamos una versión compacta \mathcal{H}_s dada como

$$\mathcal{H}_{p,q} \approx \mathcal{H}_s = U_s \Sigma_s V'_s$$

donde s satisface $n \leq s \leq n(p-1)$, y expresa que en Σ solo se han dejado los primero s valores singulares, volviendo el resto 0. Así mismo, se crea el conjunto índice definido como $S = \{s \in \mathbb{N} : s < r \wedge n|s\}$

Como al aumentar el rango de una matriz, entonces aumenta el número de valores singulares, la elección de la MH con el mayor rango tiene por justificación que al tener más valores singulares, se pueden generar más matrices reducidas y, por tanto, un conjunto mayor de aproximaciones para optimizar la elección de una realización mínima. Otra justificación a esto es que, al tener más valores singulares y estos acumular su mayor peso en los primeros sitios, los últimos participan poco y así la aproximación es más detallada con los primeros valores singulares, pudiendo retirar más de los últimos.

Empero, ésta justificación no es teórica ni empírica y, por lo tanto, no necesariamente imbatible por otra condición. En una sección del siguiente capítulo se hablará de ella con más rigurosidad.

3. Para cada $s \in S$, hay que construir la matriz reducida H_s dada por

$$\mathcal{H}_s = U_s \Sigma_s V'_s$$

donde $\Sigma_s = (\Sigma)_{1:s, 1:s}$, $U_s = (U)_{:, 1:s}$ y $V_s = (V)_{:, 1:s}$. Esta matriz, en general, pierde la estructura antidiagonal de Hankel, es decir, ya no cuenta con bloques antidiagonales homogéneos de \mathcal{W} .

4. Obtenemos la realización (F_s, G_s, H_s) de H_s , para cada $s \in S$. Esto se consigue al aplicar los pasos (d) y (e) a H_s .
5. Se construye la sucesión estimada

$$\widehat{\mathcal{W}}_s = \left\{ H_s(F_s)^{t-1} G_s |_{t \in \mathbb{N}_k} \right\}$$

para cada $s \in S$. El atributo “estimada” es debido a que posee un grado de proximidad a la representación externa \mathcal{W} .

Mediante la realización de la matriz reducida no se puede reconstruir los elementos que componen la matriz reducida, debido a que no cuenta con estructura de hankel. Así, dado lo que se dijo en (3), cada sucesión estimada $\widehat{\mathcal{W}}_s$ acumula dos distanciamientos de \mathcal{W} : el generado al crear la matriz reducida y el derivado de la realización. El primero es necesario para retirar el ruido en los datos, el segundo, sin embargo, aun queda abierto a ser investigado.¹⁴

¹⁴Hay información en las antidiagonales de la matriz reducida que se pierden en el proceso de realización debido a que no son homogéneas. Esta información podría brindar un mejor ajuste a la matriz \mathcal{W} .

6. La proximidad de $\widehat{\mathcal{W}}_s$ a \mathcal{W} , para cada $s \in S$, está definida como el promedio de la distancia entre el elemento i de $\widehat{\mathcal{W}}_s$ y el elemento i de \mathcal{W} , para cada $i = 1, \dots, k$.

Esta definición se logra expresar matemáticamente utilizando la distancia de Frobenius, es decir, la función $d(\cdot, \cdot)_F : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ inducida por la norma de Frobenius,

$$d(A, B)_F = \|B - A\|_F$$

A partir de ella, la proximidad entre $\widehat{\mathcal{W}}_s$ y \mathcal{W} , como fue definida, está dada por

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_s)} = \frac{\sum_{i=1}^k d(W_i, \widehat{\mathcal{W}}_s i)}{k}$$

Definimos el conjunto de proximidad M_p como

$$M_p = \left\{ \overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_s)} : s \in S \wedge i = 1, \dots, k \right\}$$

7. Por último, se elige la realización que induce el mejor ajuste $\widehat{\mathcal{W}}_s$ a \mathcal{W} . Es decir, se toma $(F_{s^*}, G_{s^*}, H_{s^*})$ tal que

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_{s^*})} = \min M_p$$

2.3. SVD en la TR: dimensionalidad y aleatoriedad

La descomposición en valores singulares, SVD por sus siglas en inglés, es una técnica para descomponer matrices. Es empleada en la TR sobre la MH como proceso previo para obtener una representación de estado mínima. Permite esencialmente tomar la matriz de Hankel $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, con rango r , y encontrar tres matrices $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y Σ tales que

$$\mathcal{H} = U\Sigma V'$$

donde U y V son ortogonales o unitarias, dependiendo de si $n = m$ o no, y se denominan matrices de vectores singulares izquierdos y derechos, respectivamente; y donde Σ es una matriz diagonal donde los valores singulares de \mathcal{H} , $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$, están ordenados de mayor a menor en ella. Por consiguiente, bajo lo dicho sobre las tres matrices que factorizan \mathcal{H} , tenemos una forma alternativa de expresar a \mathcal{H} es bajo una combinación lineal de matrices generadas por los vectores singulares izquierdos y derechos,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v'_i \tag{6}$$

donde u_i es el i -ésimo vector singular izquierdo o la columna i -ésima de U ; y v_i es el i -ésimo vector singular derecho o la i -ésima columna de V .

A partir de U , Σ y V es posible definir las siguientes matrices: $\Sigma_k = (\Sigma)_{1:k, 1:k}$, $U_k = (U)_{:, 1:k}$ y $V_k = (V)_{1:k, :}$, con $k \leq r$, y con ellas, a su vez, establecer la siguiente matriz

$$\mathcal{H}_k = U_k \Sigma_k V'_k$$

a la cual denominamos la *matriz truncada* en k valores singulares de \mathcal{H} .¹⁵ Su nombre se entiende si tomamos a E_k como

$$E_k = \mathcal{H} - \mathcal{H}_k$$

¹⁵En el caso particular donde $k = r$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r$ y la factorización U_r , Σ_r V_r de \mathcal{H}_r se pasaría a llamar la *matriz compacta* de \mathcal{H} .

y en términos de la expresión (6), se sigue que

$$E_k = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i u_i v_i'$$

Aquí se hace más claro que \mathcal{H}_k es un truncamiento, debido a que es igual a \mathcal{H} , es decir, a la combinación lineal en (6), menos la suma de los últimos $r - k$ valores singulares multiplicados por las matrices generadas con sus vectores singulares correspondientes. Esto nos permitirá dar una interpretación de la matriz de truncamiento \mathcal{H}_k .

Consideremos para esto el método de Componentes Principales, PCA por sus siglas en inglés. Este busca disminuir la cantidad de dimensiones (componentes) para una matriz de datos, con la menor pérdida de variabilidad. Lo hace al emplear nuevos componentes, que resultan ser combinaciones lineales de los originales, cuya varianza absorbida sea alta. Ahora, como el SVD está relacionado con el PCA, su interpretación puede ser heredada. En efecto, como los vectores propios izquierdos y los valores singulares del SVD son las nuevas componentes y varianzas asociadas a estas, respectivamente, se sigue que la matriz truncada \mathcal{H}_k es una suerte de representación de los datos de \mathcal{H} bajo las nuevas k dimensiones más correlacionadas, de varianza más alta. En este sentido, los valores de \mathcal{H}_k son una aproximación a los valores de \mathcal{H} , una versión simplificada de estos, una compresión de la información original.

La utilidad de la aproximación \mathcal{H}_k estriba en que la TR requiere que la MH cumpla con las condiciones de rango enunciadas en la ecuación (5). Sin embargo, los datos de forma habitual no permiten que estas se satisfagan. En el registro y construcción de los datos económicos pueden existir errores aleatorios; el sistema del cual se toman puede ser no lineal; la dimensión del sistema es infinito; los datos pueden tener problemas de precisión por redondeo; la representación externa puede ser reducida; etc. En estos casos, que podemos englobar en dos: aquellos surgidos por ruido y otros por el tipo de sistema, el SVD es una forma eficiente para poder utilizar la TR. Ya sea que \mathcal{H}_k retire el ruido de \mathcal{H} o que comprima su información, al cumplir con los criterios de rango es posible llevar a cabo la realización sobre ella. De esto podemos decir que dicha realización sobre \mathcal{H}_k se puede entender como una explicación del sistema subyacente sin ruido o como una aproximación a éste.

La idea de aproximación también se puede ver vista de la siguiente manera. La diferencia que induce E_k entre \mathcal{H} y \mathcal{H}_k es la mínima entre todas las matrices en $\mathbb{R}^{n \times m}$ de rango menor o igual a k . En efecto, a partir de las demostraciones constructivas elaboradas por Eckart y Young (1936) y Mirsky (1960), podemos afirmar que dada \mathcal{H} , la minimización de $d_F(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{H}})$,¹⁶ dentro del conjunto de matrices $X' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sujetas a $\text{rango}(X') \leq k$, es tal que

$$d_F(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k) = \inf_{\text{rango}(X') \leq k} d_F(X', X) \quad (7)$$

Es decir, \mathcal{H}_k es la matriz más próxima a \mathcal{H} dentro de las matrices en $n \times m$ con rango menor o igual a k . Además, es única cuando y sólo cuando $\sigma_k \neq \sigma_{k+1}$. Esto puede permitir asegurar que en el proceso de realización, las matrices de Hankel reducidas son las de mínima distancia y únicas, dentro de las matrices con igual o menor rango al de la matriz de Hankel original, son la mejor aproximación dentro de la condición de rango dada.

Para concluir esta subsección, se ha de mencionar que el proceso de minimización afirmado en la desigualdad (7) cuenta con la siguiente expresión $\|X_p\|_F^2 / \|X\|^2$ para medir su bondad de ajuste

¹⁶La función $d_F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ es la distancia de Frobenius, Definición B.19.

(González y Valderrama, 1998, p.2). Aunque, por causa del Teorema B.13, la norma de Frobenius al cuadrado $\|\cdot\|_F^2$ es equivalente a la suma cuadrática de los valores singulares σ_i , o lo que es lo mismo, a la suma de los valores propios $\lambda_i = \sigma_i^2$ de la matriz $X'X$ (Definición B.18). Por lo que la bondad de ajuste puede ser vista como

$$\frac{\|X_p\|_F^2}{\|X\|_F^2} = \frac{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=p+1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}}$$

2.4. Acercamiento a los conceptos de estructura, cambio estructural y agrupamiento en la TR

Al sistema económico de base contable, cuando le aplicaron los pasos de la subsección precedente para obtener la realización, obtuvieron la DI siguiente

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz F indica que el número de VE del sistema es 2, lo que confirma algo ya indicado líneas atrás: el modelo es relativamente simple. Debido a los valores en sus entradas, que son los de la identidad, nos revela que para el periodo de 100 trimestres, los 2 estados evolucionan de forma independiente, teniendo así un sistema no acoplado. También expresa que no existen cambios internos en los estados del sistema, por lo que tenemos un sistema sin dinámica interna, únicamente es afectado por el estado inicial y las entradas. A su vez, como sus valores propios son ambos iguales a 1, no proporcionan información para hablar sobre la estabilidad o inestabilidad del sistema.

Por su parte, las matrices G y H nos permiten hablar sobre la controlabilidad y observabilidad del sistema, respectivamente. Lo primero se refiere a la posibilidad de alcanzar un estado deseado (valores de las 2 VE) en un tiempo finito al aplicar una función de entradas finita. La segunda precisa que un estado del sistema pueda ser identificado a partir de las mediciones de las salidas. Lo enunciado sobre G y H sólo se dirige a entablar la exposición acerca de la estructura y cambio estructural, por lo que evito prodigar más detalles al respecto en esta sección.

Con lo dicho podemos erigir el significado de la palabra estructura y cambio estructural desde el horizonte de la TR. El primer concepto alude a las características relevantes del sistema, las cuales permiten diferenciarlo de otros al compaginar cualidades estáticas y dinámicas. El segundo alude a la diferenciación del sistema con respecto a él mismo en otro tiempo, bajo el primer concepto.

Si observamos bien, las precisiones anteriores sobre la estructura y cambio estructural, están asentadas en las relaciones entre los estados, entradas y salidas del sistema. Al transmitir las ideas sobre el número de VE, dinámica interna, estabilidad, controlabilidad, observabilidad, acoplamiento, etc. se estaba partiendo de algún tipo de objeto relacional. Pormenorizando, se partía de la DI, es decir, de las matrices F , G y H . Por tanto, la estructura de un sistema pasa a convertirse en el conjunto de características estáticas y dinámicas de los objetos relacionales F , G y H . Así mismo, el cambio estructural pasa a significar un alto grado de disimilitud entre las DI de un sistema en dos momentos temporales distintos. Esto implica a su vez la disparidad entre las cualidades estáticas y dinámicas del sistema en ambos momentos.

El análisis para establecer la existencia de cambio en la estructura de un sistema desde la TR es un proceso que involucra varios pasos. Inicialmente se debe estudiar el sistema original y determinar su matriz de estado F . El siguiente paso es identificar cualquier cambio en el sistema que pueda afectar a ésta matriz. Esto puede incluir la adición o eliminación de variables del sistema.

Posteriormente se debe realizar un análisis de la observabilidad y la controlabilidad del sistema, antes y después de un supuesto cambio. Si se percibe una diferencia significativa entre los estados que se pueden conseguir o que pueden ser determinados bajo las salidas, entonces hay evidencia de cambio estructural. Otra vía puede ser el análisis de las matrices F y F' de los dos tiempos del sistema que se comparan. Si éstas matrices tienen una relación de similaridad, es decir, si existe una matriz J tal que $J^{-1}FJ = F'$, entonces podremos concluir que las diferencias en ambos tiempos no presuponen una alteración estructural del sistema. Usar ambos métodos puede ser recomendable si quiere robustecer el análisis de cambio estructural.

Una forma de percarnos del cambio estructural antes de hacer análisis como los anteriores, es el uso del mecanismo que empleado para simular la DE. La matriz F posee una órbita: $F^0, F^1, F^2, \dots, F^{100}$, y al pre y pos multiplicar cada uno de sus elementos por H y G , respectivamente, se puede aproximar un elemento respectivo de la DE del sistema.

$$HF^{t-1}G \approx \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

No obstante, cuando existe cambio estructural en el sistema, éste deja de ser tiempo invariante. Ahora su dinámica interna antes y después del cambio estructural es distinta. Es decir, F_a anterior al cambio y F_p posterior a él serían distintas, y por tanto las órbitas respectivas.

En este sentido, un sistema lineal con cambio estructural se puede considerar tiempo-variante, y si se modela con la TR para sistemas tiempo-invariantes lineales, la órbita de F fallaría, podría identificar mejor la órbita de F_a y diluir la de F_p , o visceversa. Por consiguiente, la aproximación $HF^{t-1}G$ podría representar mejor el primer bloque temporal de la DE (anterior al cambio estructural) o al segundo (del cambio estructural), pero con poca probabilidad a ambos. Es decir, la realización agrupa en uno de los dos bloques tiempo a los elementos simulados que mejor aproximan a la DE (en dicho bloque) y en el otro manifiesta una mayor pérdida de cercanía entre estos. Por tanto, este agrupamiento en la TR podría mostrar la existencia de cambio estructural en el sistema.

Por último, si se concluye que ha habido un cambio estructural en el sistema, se debe investigar las causas del cambio y evaluar su impacto en la dinámica del sistema. En algunos casos, el cambio puede ser beneficioso y mejorar el rendimiento del sistema, mientras que en otros casos puede ser perjudicial y reducir su eficiencia o estabilidad. Es más, en tal caso, aún se podría usar la realización para modelar este sistema, aunque empleando alguna variante, quizás la Teoría de la Realización Adaptativa, sin embargo, en el presente trabajo estas no se abordaran.

2.5. Comentarios finales sobre el sistema económico de base contable

Para concluir este capítulo retornamos a los resultados de la realización del sistema económico de base contable del que nos hemos venido apoyando. La simulación más cercana a la DE de éste

sistema bajo la DI, está dada de la siguiente manera

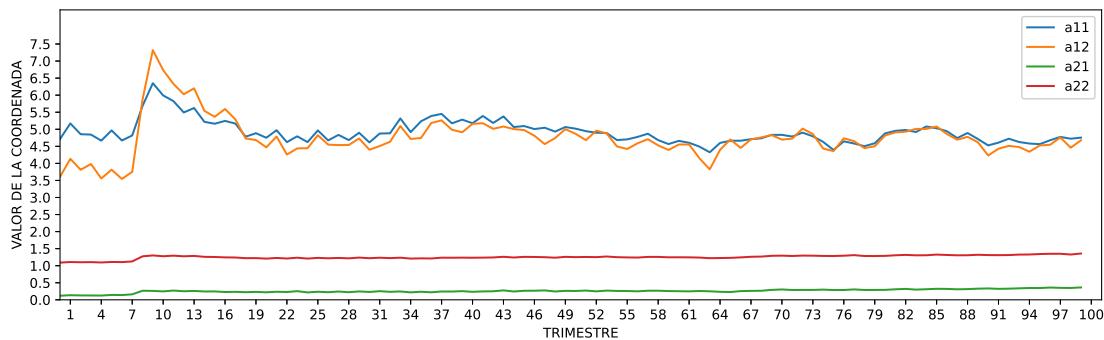
$$HF^{t-1}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t = 1, \dots, 100 \quad (8)$$

así se manifiesta que para el sistema subyacente, las 100 matrices de la DE son tan parecidas que se pueden representar mediante una única matriz:

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Observando a las matrices de la DE en la siguiente figura

Figura 2.5: Series de tiempo generadas con los valores en las mismas coordenadas de cada matriz en la DE del sistema económico de base contable



podemos decir que la matriz (8) estima relativamente bien a las matrices a partir del trimestre 17 en adelante y menos a los primeros 16 trimestres. Bajo lo mencionado en el apartado anterior, esto daría cierta evidencia de que existió un cambio estructural, donde el primer bloque temporal es del trimestre 1 al 16, y el segundo del 17 en adelante. Y de esto se puede intuir el por qué en Rangel G. (2019) se hablaba de la agrupación y la posibilidad de la identificación del cambio estructural mediante ello.

Ahora, con respecto a la interpretación económica de los resultado, a partir de (9) podemos obtener lo siguiente

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} F_t + MK_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} I_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix}$$

Esta relación indica que los trimestres entre 1993 y 2018 mantienen una relación de incremento de $5 = \frac{1}{0.2}$ por 1 entre inversión I_t e I_t , respectivamente. Además, en este proceso multiplicador, cada unidad de incremento en la formación bruta de capital F_t pesa lo mismo que cada unidad de incremento en la formación bruta de capital de mercancías importadas MK_t . Así mismo, el monto de importaciones M_t es uno a uno con respecto a la formación bruta de mercancías importadas MK_t , lo que implica que el consumo intermedio y final de mercancías importadas MC_t no tiene impacto sobre las importaciones totales M_t .

El análisis económico tradicional tiene su propia especificación de la matriz del modelo contable para el periodo, la cual se ve debajo

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si la expresamos como un modelo de entrada-salida tendriamos la siguiente forma

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Observe que esta matriz y la obtenida mediante la TR, $\frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$, tienen una gran similitud.

El modelo contable, además, remite directamente al núcleo básico de una economía abierta y permite una extensión que en varios sentidos pone a prueba a la TR mediante

- i) adherir otros sectores institucionales como el gobierno y la autoridad monetaria;
- ii) especificar el correspondiente modelo determinado por la oferta de ahorro en lugar de la demanda de inversión:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & MC_t \\ X_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

y con lo cuál se obtiene

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

- iii) aumentar la frecuencia de la información disponible en virtud de su consistencia contable y alta confiabilidad.

Además, en este marco es interesante pensar el efecto dinámico de F , G y H sobre elementos de la DE. Esto ya que, por ejemplo, pueden modificar el valor del multiplicador $\frac{1}{|A_t|}$. En efecto, si asumimos una matriz F con 2 valores propios distintos d_1 y d_2 , podemos descomponerla como

$$F = PDP^{-1}$$

donde P tiene por columnas los vectores propios de F ; y D es una matriz diagonal con d_1 y d_2 en su diagonal principal. De esta forma, se sigue que

$$\begin{aligned} |HF^tG| &= |H||F^t||G| = |H||P||F||P^{-1}||G| = |H||P||F^{t-1}| \frac{1}{|P|} |G| = |H||F^{t-1}||G| \\ &= |H| \left| \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}^{t-1} \right| |G| = |H| \left| \begin{pmatrix} d_1^{t-1} & 0 \\ 0 & d_2^{t-1} \end{pmatrix} \right| |G| = |H|d_1^{t-1}d_2^{t-1} |G| \end{aligned}$$

por consiguiente, como la TR garantiza

$$HF^{t-1}G \approx \frac{1}{|A_t|} \begin{pmatrix} a_{22t} & -a_{12t} \\ -a_{21t} & a_{11t} \end{pmatrix}$$

donde la expresión a la derecha es la matriz inversa de A_t , entonces se cumple que

$$\frac{1}{|A_t|} \approx |H||G|d_1^{t-1}d_2^{t-1}$$

así, encontramos una conexión entre los valores propios de la matriz de estados F , los cuales determinan su órbita, y los cambios en el multiplicador. Dependiendo como sean, mayores y/o menores a 1, podrán determinar la convergencia o no del sistema. Además, también el tiempo en que se dan los cambios en el multiplicador son determinados por ellos. Incluso, los determinantes de las matrices G y H modulan el tamaño de las variaciones. Por consiguiente, saber de qué dependen éstas matrices es relevante para entender al sistema. Otras relaciones de éste tipo se expondrán y profundizarán un poco más en siguientes capítulos.

Capítulo 3

Profundizando en la TR: construcción, dinámica y cambio estructural

En este capítulo se enfocan elementos de la realización que son clave para la obtención de una apropiada representación del sistema subyacente. Máxime se pasa a hablar del truncamiento mediante el SVD, la estructura de Hankel y el algoritmo de factorización. Se observará el efecto que tienen sobre la determinación de la estructura del sistema representado, y cómo esto se refleja en su dinámica o caminata del sistema, resultando en una mayor o menor precisión con respecto a la DE, y su proyección. Observar tales elementos clave con mayor profundidad hará más nítido en qué zonas hay que ubicar propuestas de mejora. Esto encaminado a adecuar de mejor manera la TR a las necesidades de la disciplina económica y la idiosincrasia de los sistemas económicos.

Cabe aclarar que aunque en el capítulo se busca situar las zonas mencionadas, también se harán algunas propuestas paliativas. No obstante, estas serán maduradas en la medida en que su complejidad, el tiempo y la coherencia con los objetivos de la presente investigación lo permitan. Es decir, la intención principal es mostrar sendas fértiles de investigación, aunque no necesariamente zanjarlas aquí, las cuales puedan ayudar a enriquecer la realización aplicada a la economía. Esto debido a la mejora que puedan lograr sobre la precisión, proyección, dinámica, dimensionalidad, controlabilidad, interpretación y, en general, en la información que la TR ofrece a la ciencia económica.

De igual forma, en el capítulo se aclaran aspectos que rodean al concepto de estructura de un sistema bajo la TR, en particular, de un sistema económico. Una vez que se explica lo que se entiende por estructura, se pasa a aclarar cómo podemos analizar su dinámica. El concepto principal para ello será el de estabilidad de Lyapunov o de entrada 0. Así mismo, se especifica lo que se entiende por un sistema observable y uno controlable, y cómo identificar en una realización si el sistema subyacente posee tales cualidades. Entatizando la relevancia de tal hecho para sistemas económicos.

Por último, después de haber examinado aquellos elementos que intervienen en el acondicionamiento de la estructura subyacente, se introduce el método para determinar el cambio en la estructura de un sistema, así como algunas medidas para controlarlo. El primero se verá que radica directamente en el contraste estructural. Por su parte, con respecto al control, se verá cómo poder efectuarlo mediante las entradas del sistema económico, donde la controlabilidad y observabilidad pueden guiar tal proceso o, por otro lado, alterando su propia constitución. De

igual forma, se puntualiza que al hablar sobre el control del sistema este se abordará bajo las limitaciones que impone la complejidad de los sistemas económicos, y los objetivos y nivel de profundidad de esta investigación.

3.1. Caminata del sistema en la realización

Comencemos por asumir una sucesión infinita de matrices, generada por algún sistema, de la cual extraemos una DE finita que puede ser realizada directamente y reconstruir el sistema generador. En este caso, la realización obtenida con datos finitos puede producir cualquier elemento de la sucesión infinita. Como se vio en el capítulo anterior, para esto requerimos elaborar \mathcal{H} con los elementos de la DE y después descomponerla en las matrices P y Q . A partir de estas construimos las matrices F , G y H . La primera de ellas es la matriz de estado y , como veremos a continuación, permitirá “caminar” sobre los estados del sistema, los cuales se pueden identificar como los bloques columna de Q , Figura 3.1 (superior).

En efecto, multiplicando F por una columna arbitraria j de Q^1 , asumiendo que la sucesión de matrices es de orden $\mu \times \eta$, el rango de \mathcal{H} de n y recordando del capítulo anterior que $F = (P_n)^{-1} P_n^* Q^2$ y la estructura de bloques antidiagonales de \mathcal{H}^3 , entonces

$$\begin{aligned} FQ_{:,j} &= (P_n)^{-1} P_n^* Q_{:,j} = (P_n)^{-1} P_{\mu+1:\mu+n,n} Q_{:,j} = (P_n)^{-1} \mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j} \\ &= (P_n)^{-1} \mathcal{H}_{n,j+\eta} = (P_n)^{-1} P_{n:n} Q_{:,j+\eta} = (P_n)^{-1} P_n Q_{:,j+\eta} = I_n Q_{:,j+\eta} \\ &= Q_{:,j+\eta} \end{aligned} \quad (1)$$

Es decir, la columna o estado j de Q “camina” al estado $j + \eta$ del bloque siguiente. Luego, habiendo alcanzado un estado dado, mediante algún elemento de la órbita de F , es decir, mediante algún elemento F , F^2 , F^3 , ..., podemos generar el elemento respectivo de la sucesión infinita mediante la pre-multiplicación de tal estado por H , esto es, mediante la expresión $HF^{t-1}G$. En consecuencia, la caminata de F sobre los estados del sistema no es otra cosa que elegir algún elemento de la órbita de F y pos-multiplicarlo por G , mientras que caminar sobre la DE y su extensión, también hay que pre-multiplicar por H . Con esto en mente, podemos afirmar que la caminata de F sobre los estados del sistema también induce la circulación sobre la DE y su extensión infinita, al transitar sobre el primer bloque fila de \mathcal{H} , Figura 3.1 (inferior).

¹Las filas de Q son más que las columnas de F , por ello, formalmente, no pueden multiplicarse. Sin embargo, como el rango de \mathcal{H} es n , por el AF, Q solo tiene sus primeras n filas no nulas, por lo cuál, dado que F es cuadrada de orden n , la multiplicación puede hacerse quitando las últimas filas de ceros de Q .

²Véase la definición de la realización en el inciso (e) del apartado 2.2 Construcción de la realización

³Esto permite saber qué si estamos en un elemento i, j de \mathcal{H} tal que i es mayor a las filas del bloque fila 1, y j menor a las filas del último bloque columna, éste es igual al elemento $i - \mu, j + \eta$, véase el inciso (b) del apartado 2.2. Una implicación inmediata de lo mencionado es que $\mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j} = \mathcal{H}_{n,j+\eta}$, lo cual usaremos en la siguiente igualdad.

Figura 3.1: Representación de la “caminata” del sistema bajo F . Arriba, la caminata sobre Q original y extendida se da premultiplicando una potencia de F a G . Abajo, caminata sobre \mathcal{H} y su extensión, solo sucede en el primer bloque fila. Se da al premultiplicar H a la caminata sobre Q y su extensión.

$$Q^{A_p} = \begin{pmatrix} Q & Q^{E_p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} G & FG & \cdots & F^{q-1}G & F^qG & \cdots & F^{p+q-1}G \\ \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \blacksquare \\ \begin{matrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,1} & Q_{n,2} & \cdots & Q_{n,q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} & \begin{array}{ccc|cc} Q_{1,q+1} & \cdots & Q_{1,p+q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,q+1} & \cdots & Q_{n,p+q} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{H}^{A_p} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & \mathcal{H}^{E_p} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} HG & HFG & \cdots & HF^{q-1}G & HF^qG & \cdots & HF^{p+q-1}G \\ \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \blacksquare \\ \begin{matrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_q \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} \end{matrix} & \begin{array}{ccc|cc} W_{q+1} & \cdots & W_{p+q} \\ W_{q+2} & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \vdots \end{array} \end{array} \right)$$

Un hecho más que se debe acentuar sobre F es que no solo permite recorrer las matrices Q y \mathcal{H} , también construye extensiones a dichas matrices: Q^{E_t} y \mathcal{H}^{E_t} , respectivamente, con el fin de proseguir su marcha. Cuando $t = p$, F puede recorrer los últimos elementos de la DE, los cuales van de $q + 1$ hasta $p + q$, Figura (3.1) (región azul). Por otro lado, si $t > p$ tendríamos que F transita por matrices no consideradas en la DE, una suerte de **proyecciones del sistema**.

Captar cómo F construye dichas extensiones, inicia por explorar la hipótesis de la realización mínima y su efecto sobre la prolongación de \mathcal{H} . Sin pérdida de generalidad, la enunciamos diciendo que una DE es realizable mínimamente si existen p y q mínimos tales que

$$\text{rango } \mathcal{H}_{p,q} = \text{rango } \mathcal{H}_{p,q+1} = \text{rango } \mathcal{H}_{p+1,q} = n \quad (2)$$

Así, de (2) se puede aseverar lo que sigue:

1. Existen n columnas en $\mathcal{H}_{p,q}$ que forman una base de su espacio de columnas, digamos que ellas son las primeras linealmente independientes, y que sus posiciones son v_1, \dots, v_n ;⁴
2. Las columnas de $\mathcal{H}_{p,q+1}$ en las posiciones v_1, \dots, v_n son una base de su espacio de columnas;⁵ y
3. Las columnas de $\mathcal{H}_{p+1,q}$ en las posiciones v_1, \dots, v_n también son una base de su espacio de columnas.⁶

⁴Esto ya que el rango de $\mathcal{H}_{p,q}$ es n .

⁵Esto ya que las columnas en los primeros q bloques columna de $\mathcal{H}_{p,q+1}$ son iguales a las de $\mathcal{H}_{p,q}$, y el rango de esta última también es n .

⁶Las columnas v_1, \dots, v_n en $\mathcal{H}_{p+1,q}$ son linealmente independientes, de otro modo, como ellas contienen a las columnas v_1, \dots, v_n de $\mathcal{H}_{p,q}$, estas no serían linealmente independientes, lo cual resulta en una contradicción.

Ahora, apoyándonos en la matriz ampliada en 1 tiempo de la Figura (3.2), observamos que el área verde es $\mathcal{H}_{p,q}$; la verde y azul $\mathcal{H}_{p,q+1}$; y la verde y naranja es $\mathcal{H}_{p+1,q}$. En consecuencia, por los incisos 1 y 2, la base de columnas de la zona verde, en las posiciones v_1, \dots, v_n , es la misma que la de la zona verde y azul. Por lo cual, la base de columnas de la zona verde, genera toda la zona azul. Ahora, tomando las columnas de la zona naranja en las posiciones v_1, \dots, v_n , bajo los mismos coeficientes con que la zona azul generó la verde, se construye la matriz E_1 (zona roja clara), la cual es la primer proyección de la DE. El bloque columna $q + 1$, zona azul y rojo claro, identifica a la matriz extendida \mathcal{H}^{E_1} . Además, como el inciso 3 implica que la base de columnas de la zona verde y naranja ($\mathcal{H}_{p+1,q}$) son las columnas en las posiciones v_1, \dots, v_n , entonces generan las columnas de \mathcal{H}^{E_1} , por la forma en que esta se construyó, manteniendo el rango de \mathcal{H}^{A_1} en n .

Figura 3.2: Ilustración sobre la primer extensión E_1 de la DE.

$$\mathcal{H}^{A_1} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida E_1 , vamos a explorar el proceso con el que se construyen las siguientes extensiones de la DE: E_2, E_3, \dots . Como se expuso antes, las columnas de \mathcal{H}^{A_1} en las posiciones v_1, \dots, v_n de la zona verde y amarilla, generan toda su zona azul y rojo claro, Figura (3.2). En particular, se cumple lo mismo tomando sus bloques fila mayores o iguales a 2, Figura (3.3) (superior izquierda). Pero debido a la estructura antidiagonal de Hankel, el área verde y naranja también se encuentra al desplazarnos un bloque fila hacia arriba y un bloque columna a la derecha, Figura (3.3) (superior derecha).

Es más, como antes al agregar un nuevo bloque columna $q + 1$ al construir E_1 , agregamos un nuevo bloque columna $q + 2$, Figura (3.3) (inferior izquierda). Él está compuesto por (i) el área azul y roja clara (E_1), y (ii) la matriz E_2 , quien es la segunda extensión de la DE. Además, como (i) es generada por las columnas del área verde y naranja en las posiciones v_1, \dots, v_n , bajo coeficientes $\alpha_{v_1j}, \dots, \alpha_{v_nj}$, la matriz E_2 será producida por las columnas del área cian en las posiciones v_1, \dots, v_n , usando los coeficientes anteriores.

Basándonos en la Figura (3.3) (inferior izquierda) y lo dicho previamente, podemos decir que el nuevo bloque $q + 2$ es generado por la zona verde, naranja y cian. No obstante, considerando que ésta zona es generada, a su vez, por los primeros q bloques columna,⁷ entonces tenemos que los bloques $q + 1$ y $q + 2$ deben ser generados por la base de los q primeros bloques columna, que en la Figura (3.3) (inferior derecha) aparecen en la zona verde, naranja y cian, como una manera de acentuar que la misma zona de la izquierda se recorrió un bloque columna. Entonces, \mathcal{H}^{E_2} (bloques $q + 1$ y $q + 2$) es generada por la base de la zona verde y naranja. Y, por tanto, también es base de la matriz ampliada \mathcal{H}^{A_2} , con lo cual su rango sigue siendo n .

⁷Esto es debido a la forma en que se construyó el bloque $q + 1$.

Figura 3.3: Fases del proceso de extensión de la DE en dos tiempos.

$$\left(\begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & E_1 \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & E_2 \end{array} \right) \implies \left(\begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & E_1 \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & E_2 \end{array} \right)$$

Aplicando el proceso precedente iterativamente se expande la DE, generando matrices extendidas \mathcal{H}^{E_t} ⁸ para valores arbitrarios de tiempo t . Ellas complementan la matriz \mathcal{H} como vimos, ampliándola a matrices \mathcal{H}^{A_t} . Cabe indicar que estas últimas, para todo $t \geq q$, conservan el mismo rango n . Es decir, las n columnas base de \mathcal{H} generan el espacio de columnas de $\mathcal{H}^A = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{A_t}$, la matriz con la DE infinita generada por el sistema. A este n que no cambia se le denomina dimensión (mínima) del sistema, no obstante, el concepto de dimensión del sistema tendrá más sentido en la explicación que se hace un poco más adelante sobre la matriz F .

Con base en lo anterior, podemos ver cómo es que la matriz de estado F construye las expansiones de \mathcal{H} y Q . Aplicando el algoritmo de factorización \mathbf{AF} a \mathcal{H} y su ampliación \mathcal{H}^{A_t} , para cualquier $t \geq q$, obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{H} = PQ \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{cc} \mathcal{H} & \mathcal{H}^{E_t} \end{array} \right) = \mathcal{H}^{A_t} = P^A Q^{A_t}$$

lo cual implica que

$$PQ = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{p+1,q}^{A_t} = P^A Q_{:,q}^{A_t}$$

y por el Lema A.3 tenemos $P = P^A$ y $Q = Q'_{:,q\eta}$, entonces el primer bloque columna de Q y Q^{A_t} es el mismo, el primer bloque fila de P y P^A es idéntico, y las matrices P_n y P_n^* en P y P^A también coinciden. Por consiguiente, por la definición de F , G y H , estas son iguales en \mathcal{H} y \mathcal{H}^{A_t} .

Por lo anterior, la caminata de F empieza en el estado G , tanto en Q como Q^{A_t} , y es semejante en ambas hasta el bloque columna q -ésimo. Después de este, la caminata continua sobre estados proyectados por el sistema en la matriz $Q^A = \lim_{t \rightarrow \infty} Q^{A_t}$.⁹ Además, por (1), la órbita de F ¹⁰ pre-multiplicada por G , es equivalente a una combinación lineal de las columnas de F . Esto hace que las columnas de F sean generadoras de cualquier bloque columna de Q^A . Además, como H

⁸La zona triangular inferior derecha de esta matriz en la Figura (3.1) se mostró vacía por simplicidad, no obstante, ahora vemos que realmente se acomodan las matrices de proyección E_1, \dots, E_p en el formato antidiagonal de Hankel.

⁹Esta matriz es la que contiene los estados infinitos del sistema, englobando a todas las ampliaciones de Q .

¹⁰O lo que es lo mismo F, F^2, F^3, \dots

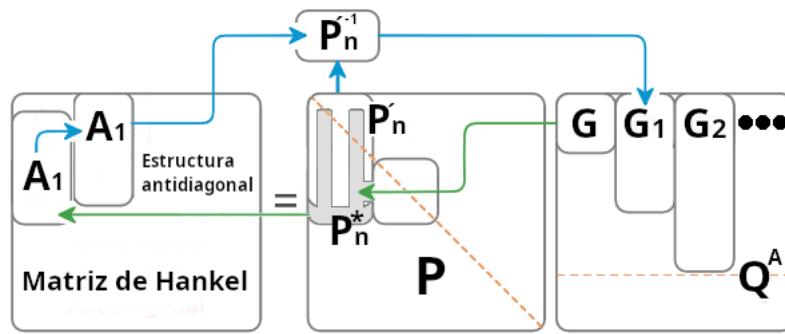
es igual en \mathcal{H} y \mathcal{H}^{A_t} , no aporta a la dinámica del sistema para obtener la DE o su extensión. En consecuencia, la matriz de estado F es la mínima información requerida para generar la dinámica interna del sistema (cambio en sus estados) y también el recorrido sobre la DE y su extensión. Por esto es que también se dice que la dimensión del sistema es el número de columnas de F .

La caminata del sistema ha mostrado un engarce fuerte con la hipótesis (2), tanto para poder definir F como para la construcción de E_1, E_2, \dots , que es la extensión o proyección de la DE. Sin embargo, la importancia de otro elemento decisivo no fue del todo aclarada: la estructura de Hankel. Aunque su relevancia ya se hizo presente, fue sutil, incluso podría ser desapercibida. En el momento de pasar de $\mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j}$ a $\mathcal{H}_{1:n,j}$ en la igualdad 4 de 1, se utilizó dicha propiedad. De lo cual se desprende que F requiere de la estructura de Hankel para hacer caminar las filas de Q^A y, por tanto, recorrer la DE y su proyección al caminar sobre el primer bloque fila de \mathcal{H}^A .

La Figura 3.4 nos sirve para identificar lo que se ha mencionado. Dado que $F = (P'_n)^{-1} P_n^*$, donde P'_n y P_n^* son las sumamatrices de P en blanco y gris claro, respectivamente, que se encuentran desplazadas un bloque fila entre ellas¹¹; y que G es el primer bloque columna de Q^A ¹², el efecto de premultiplicar F por G tiene dos partes. En la primera, G es premultiplicado por P_n^* para construir la submatriz A_1 de la MH. La segunda permite emplear la inversa de P'_n para conectar la submatriz A_1 con G_1 , donde la submatriz se encuentra desplazada un bloque fila hacia arriba y otro bloque columna hacia la derecha, con respecto a A_1 de la primera parte. De esto irradia la importancia de la estructura de Hankel: permite igualar A_1 de la primera parte con A_1 en la segunda, y con esto poder continuar con la caminata del sistema.

Esto mismo se puede repetir en otro ciclo, ahora tomando ya no G sino G_1 ; desplazando ambas A_1 un bloque columna a la derecha, que se mantienen iguales por la estructura de Hankel; y llegando así a G_2 . Y se puede continuar iterando este proceso de manera indefinida, recorriendo todo bloque columna de Q^A (los estados del sistema) y la DE y su proyección (después de premultiplicar el estado por H). Es así que F^{t-1} funciona y se convierte en el resumen de la dinámica del sistema.

Figura 3.4: Dinámica del sistema bajo las componentes P'_n y P_n^* de F .



3.2. Sistema, DE y realización

En el apartado anterior se asumió que la DE finita se podía realizar directamente, describiendo así la caminata del sistema que la reproduce y construye su expansión. No obstante, recordando

¹¹ Ambas matrices se empalan en la zona de las bandas blancas y grises, y solo difieren por su primer bloque P'_n y último P_n^* , los cuales no se empalan por el desplazamiento en un bloque fila.

¹² Y por tanto, el primero de cualquier Q^{A_t} .

lo dicho en Capítulo 2, se sabe que en general dicha asunción no es así, existen circunstancias que la impiden. Estas pueden ser relativas al sistema o ajena a él, pero principalmente hacen que \mathcal{H} no cumpla la condición (2) de dimensión mínima. Una primera causa es cuando la DE cuenta con una *cantidad de elementos insuficiente* para alcanzar la dimensión mínima del sistema. Esto significa que, según lo visto en la sección anterior, el número de columnas de la matriz F es doblemente insuficiente: posee menos columnas de las necesarias y, además, las que tiene, habitan una proyección del espacio de estados del sistema. Una forma de lidiar con esto sería aumentar las matrices en la DE, hasta alcanzar la dimensión del sistema. No obstante, generar mas elementos de la DE no siempre es asequible, ya sea por imposibilidades técnicas o económicas.

Un caso límite en el sentido anterior sería la situación donde el sistema nunca alcanza la dimensión mínima ya que requiere una DE infinita para ello.¹³ Versado de manera equivalente, el sistema necesita una cantidad infinita de información para ser realizado en el sentido en que aquí lo hacemos. Ya que esta información se encuentra almacenada en sus estados, entonces el sistema requiere una cantidad infinita de estos para construir cualesquiera otros. En tal caso, por lo hablado en la sección anterior, la matriz F sería infinita, y la realización finita impedida.

Además, cuando la DE contiene errores aleatorios, la realización lineal podría caer dentro de los casos mencionados. Es más, debido al ruido, en caso de ser realizada, la determinación y evolución del sistema mediante la realización lineal podría estar sobredimensionada. Es decir, el sistema subyacente que se obtenga tendría muchos estados que no son esenciales para representar su estructura y comportamiento. Por lo mismo, se vería afectado el tiempo en que se puede pasar de un estado a otro que fuese deseado, es más, la precisión en la reproducibilidad de la DE, la proyección de la DE, así como la interpretabilidad de la estructura y dinámica del sistema se verían desfavorecidos.

Otra tesitura donde una realización lineal tiene problemas es cuando intenta hallar al sistema subyacente que resulta ser no lineal. En este caso, la realización ya no estaría tan bien ajustada por medio de las matrices F , G y H constantes, en su lugar deberían ser funciones no lineales. Este hecho surge debido a que la no linealidad del sistema introduce comportamientos complejos, como oscilaciones no armónicas, caos o bifurcaciones, no bien representadas por F , G y H constantes. Además, el sistema ya no se comportaría de manera proporcional o aditiva, negando nuevamente a estas últimas matrices, incluso haciendo inadecuadas las técnicas lineales de control.

Una circunstancia más que degrada la efectividad de la realización lineal es cuando nos encontramos frente a un sistema tiempo variante. Este posee parámetros, propiedades o características que cambian con el tiempo. Esto significa que las relaciones entre las entradas y salidas del sistema también pueden variar. Los sistemas de este tipo pueden ser tanto lineales como no lineales. Un sistema lineal tiempo variante sería aquel en el cual las relaciones entre las entradas y salidas siguen siendo proporcionales, pero dichas proporciones pueden cambiar a lo largo del tiempo. Por otro lado, un sistema no lineal tiempo variante es aquel en el cual las relaciones entre las entradas y salidas no son proporcionales y además cambian con el tiempo.

Si el cambio temporal es alto en sistemas tiempo variante, los datos estarán muy dispersos y cambiarán significativamente en diferentes puntos de tiempo. Esto puede dificultar la construcción de una realización lineal compacta y precisa, volcándola en una representación ineficiente. En efecto, podría suceder que se tenga una cantidad insuficiente o excesiva de ecuaciones para determinar F , G y H . Esto podría llevar a una realización sub o sobre determinada, lo que dificulta la obtención de una representación precisa del sistema. Un problema adicional podría

¹³Un sistema para ejemplificar esto podría ser aquel cuya dinámica tiene por DE a los números primos.

ser que el sistema tiempo variante se volviera difícil de estabilizar mediante en una realización lineal, ya que su comportamiento cambia a lo largo del tiempo. Esto podría resultar en una realización lineal inestable o con malas propiedades dinámicas. Otro inconveniente sería que las predicciones a largo plazo pueden ser menos rigurosas, ya que el comportamiento del sistema puede cambiar drásticamente con el tiempo, limitando el tiempo de proyección y verificación del efecto del control aplicado sobre él.

Ahora, aunque la realización que se trabaja en este documento asume que el sistema es lineal, constante y de dimensión finita, en la práctica aún existen ventajas de su uso en sistemas o situaciones como los mencionadas con prelación. Esto ya que al tratar con sistemas de dimensión grande (incluso infinita), no lineales y/o tiempo variantes, la realización lineal puede ser razonablemente precisa en un entorno de tiempo. Además, al simplificar el modelado y el análisis, puede brindar resultados más interpretables y fáciles de manipular. Incluso puede hacer factible la aplicación de técnicas de análisis y control lineal a este tipos de sistemas. No obstante, es importante subrayar que su precisión, predicción y control puede que se encuentren limitados, especialmente cuando el sistema presenta no linealidades significativas o cambios bruscos en el tiempo. Por lo mismo, es razonable considerar la validez de la aproximación en función de la magnitud de las perturbaciones, la no linealidad del sistema o el monto de información que puede quedar fuera en un sistema de dimensión infinita.

Por otro lado, para los sistemas referidos, como en situaciones donde se tiene una DE con ruido, al implementar la realización lineal se puede conseguir una aproximación al sistema subyacente pero cuya dimensión sea excesiva. Esto se debe a que las variaciones aleatorias en los datos, la alta dimensión de los sistemas, los efectos no lineales y/o los cambios temporales, hacen que la MH no pueda cumplir la condición (A.5) para un número de bloques fila y columna pequeños. Así, la MH que se emplea poseería un rango holgado, incrementando por descontado la dimensión del sistema; menoscabando el análisis, interpretación y control del sistema. Además, ya que las matrices de la realización serán grandes, también requerirán más recursos computacionales para su determinación, análisis, predicción y control.

Por lo anterior, se busca disminuir la alta dimensión en realizaciones lineales por medio de técnicas de compresión. Unas de ellas se aplican después de obtener una realización de alta dimensión, como la de Rosenbrock (1970),¹⁴ y otras lo hacen antes. En este último tipo tenemos una que se exploró en el capítulo anterior, aquella que emplea el truncamiento mediante el SVD. Recordando, ella consiste en retirar los valores singulares más pequeños de la MH y operar la realización sobre la matriz resultante. Este proceso reduce la complejidad del sistema, lo que facilita su manipulación y comprensión. Además, la menor dimensión permite cálculos más rápidos y eficientes, y ayuda a identificar estados realmente importantes, y otros que pueden ser eliminados, sin perder información crucial. La compresión también puede simplificar el análisis de estabilidad y la determinación de propiedades del sistema. Es más, en sistemas tiempo variantes, puede ayudar a detectar cambios en la dinámica del sistema con menos parámetros. No obstante, es importante resaltar que la compresión debe hacerse con cuidado para no perder información esencial del sistema y ocasionar distorsiones significativas en temas de predicción, ajuste, control y convergencia, por nombrar algunos de ellos.

Cuando se efectúa una realización lineal con información comprimida previamente, debido a sistemas como los aludidos, por circunstancias donde los datos tienen ruido o simplemente por

¹⁴En esta investigación no se aborda este tipo de métodos. Sin embargo, son de gran utilidad y aunque el resultado de la compresión de dimensión no es fácilmente interpretable, pueden ser interesante su uso en la aplicación de la TR a la ciencia económica.

las ventajas de simplificar el sistema, no solo existirá una fase de pérdida de información, sino dos, las cuales son representadas por las siguientes aproximaciones:

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_k \approx \mathcal{H}^*$$

La primera de ellas simboliza la pérdida de información en \mathcal{H}_k con respecto a \mathcal{H} , a causa de la compresión realizada. Específicamente, enfatiza el hecho de que los valores en las entradas de ambas matrices serán diferentes debido a retirar valores singulares.

Por su parte, para comprender la segunda aproximación volvemos un momento a la Figura 3.4. En esta notamos nuevamente cómo la dinámica del sistema equivale a caminar sobre la MH. Como se ve, esto se sustenta en poder pasar de A_1 en la punta de la flecha verde, a la submatriz A_1 en la punta de la flecha azul, es decir, en la estructura de Hankel. No obstante, si usamos \mathcal{H}_k , como no posee tal estructura por la compresión, entonces A_1 en la punta de la flecha verde no sería igual a A_1 en la punta azul. Así, ya que la realización hará una caminata bajo la idea de una matriz con estructura de Hankel, forzaría la creación de una nueva matriz \mathcal{H}^* . Es así como la realización usaría a \mathcal{H}_k para construir F , G y H , pero su caminata la haría sobre \mathcal{H}^* , perdiendo en el proceso información y precisión.

Por consiguiente, cuando generamos una compresión de información y aplicamos la realización lineal, existen tres partes que se encuentran en el origen de la inexactitud en la identificación del sistema y en la desemejanza entre la serie estimada y la DE. La primera de ellas es la variación en los valores de las entradas de \mathcal{H} , la segunda es la pérdida de la homogenidad antidiagonal en \mathcal{H}_k o estructura de Hankel, y la tercera es el efecto de la factorización de \mathcal{H}_k en la determinación de \mathcal{H}^* . En las siguientes secciones se hablará sobre ellas y se darán algunas propuestas con las que se intenta abrir senderos de investigación para disminuir el efecto adverso de estas sobre la especificación del sistema subyacente.

3.3. Conservación estructural de la Matriz de Hankel en la realización

La doble pérdida de información anterior puede ser suavizada en cuanto a su efecto sobre F , G y H mediante el tratamiento a la perdida de la estructura de Hankel. Digamos que tenemos una DE dada por las matrices $\{W_i\}_n$. Con ella construimos la matriz de Hankel de $p \times q$ bloques $\mathcal{H}_{p,q}$, con bloques antidiagonales homogéneos, de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & \dots & W_q \\ W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & \dots & W_{q+1} \\ W_3 & W_4 & W_5 & W_6 & \dots & W_{q+2} \\ W_4 & W_5 & W_6 & W_7 & \dots & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & W_{p+2} & W_{p+3} & \dots & W_n \end{pmatrix}$$

Además, se vio que bajo la descomposición en valores singulares podemos re-expresar ésta matriz de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_{p,q} = U \Sigma_s V^T$$

donde s es el número total de valores singulares en la diagonal principal de Σ . Ahora, debido a Eckart y Young (1936) y Mirsky (1960), la matriz truncada $\mathcal{H}_r = U\Sigma_r V^T$ ¹⁵ donde Σ_r es la matriz se obtiene al retirar los últimos $r < s$ valores singulares a Σ_s , satisface que

$$\|\mathcal{H}_r - \mathcal{H}_{p,q}\| = \inf_{\text{rank}(H) \leq s-r} \|H - \mathcal{H}_{p,q}\|$$

Es decir, \mathcal{H}_r es la matriz más próxima a $\mathcal{H}_{p,q}$ dentro de las matrices de rango menor o igual a $s-r$. No obstante, la cercanía que se proclama en éste resultado induce un defecto. Como se aclaró en el apartado anterior, la estructura de bloques antidiagonales homogéneos que poseía $\mathcal{H}_{p,q}$ se termina perdiendo en \mathcal{H}_r , generando una primera fuente de imprecisión entre la estimación por la TR y DE.

La opción que propongo para preservar parte de la estructura de bloques antidiagonales de la MH original, estriba en lo desarrollado por Golub *et al.* (1987). Inicialmente tomamos $\mathcal{H}_{p,q}$ como una matriz compuesta por dos matrices,

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix}$$

donde las columnas de H_1 son k , y hacemos $l = \text{rank}(H_1)$; P la proyección ortogonal sobre el espacio de columnas de H_1 ; P^\perp la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de H_1 ; y $T_n(\cdot)$ un operador de truncamiento.¹⁶ Entonces, si $l \leq r$ tenemos que

$$\hat{H}_2 = PH_2 + T_{r-l}(P^\perp H_2) \quad (3)$$

permite satisfacer la siguientes desigualdad e igualdad,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} H_1 & \bar{H} \end{pmatrix} &\leq r \\ \left\| \begin{pmatrix} H_1 & \hat{H}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \right\| &= \inf_{\text{rank}[(H_1 \bar{H})] \leq r} \left\| \begin{pmatrix} H_1 & \bar{H} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (4)$$

así, la matriz $\hat{\mathcal{H}}_r$ aproxima a $\mathcal{H}_{p,q}$ preservando la parte H_1 de ésta última. Para afianzar el significado de lo dicho, ilustraremos su uso mediante un ejemplo. Inicialmente tomemos una hipotética MH y $k = 6$, obteniendo H_1 y H_2 ,

$$\mathcal{H}_{10,8} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 9 \\ 9 & 2 \\ 2 & 8 \\ 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹⁵Bajo la norma de Frobenius, o por Mirsky (1960), para cualquier norma invariante unitariamente

¹⁶Toma una matriz A y la mapea en A_n , donde ésta última sólo preserva los primeros n valores singulares de A .

Además, como $P = H_1(H_1^T H_1)^{-1} H_1^T$ y $P^\perp = I - P$, con I la matriz identidad del mismo tamaño que P , entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0.580 & 0.055 & -0.198 & -0.168 & 0.091 & 0.041 & 0.106 & 0.271 & 0.226 & 0.166 \\ 0.055 & 0.738 & 0.126 & -0.044 & -0.096 & 0.208 & -0.012 & -0.235 & 0.248 & 0.054 \\ -0.198 & 0.126 & 0.657 & 0.085 & 0.018 & -0.036 & 0.256 & 0.031 & -0.125 & 0.282 \\ -0.168 & -0.044 & 0.085 & 0.741 & 0.107 & 0.195 & 0.070 & 0.169 & 0.165 & -0.211 \\ 0.091 & -0.096 & 0.018 & 0.107 & 0.901 & -0.024 & -0.073 & -0.170 & 0.060 & 0.146 \\ 0.041 & 0.208 & -0.036 & 0.195 & -0.024 & 0.568 & -0.321 & 0.171 & -0.105 & 0.132 \\ 0.106 & -0.012 & 0.256 & 0.070 & -0.073 & -0.321 & 0.451 & 0.112 & 0.213 & 0.007 \\ 0.271 & -0.235 & 0.031 & 0.169 & -0.170 & 0.171 & 0.112 & 0.524 & -0.033 & 0.141 \\ 0.226 & 0.248 & -0.125 & 0.165 & 0.060 & -0.105 & 0.213 & -0.033 & 0.432 & -0.170 \\ 0.166 & 0.054 & 0.282 & -0.211 & 0.146 & 0.132 & 0.007 & 0.141 & -0.170 & 0.408 \end{pmatrix}$$

$$P^\perp = \begin{pmatrix} 0.580 & 0.055 & -0.198 & -0.168 & 0.091 & 0.041 & 0.106 & 0.271 & 0.226 & 0.166 \\ 0.055 & 0.738 & 0.126 & -0.044 & -0.096 & 0.208 & -0.012 & -0.235 & 0.248 & 0.054 \\ -0.198 & 0.126 & 0.657 & 0.085 & 0.018 & -0.036 & 0.256 & 0.031 & -0.125 & 0.282 \\ -0.168 & -0.044 & 0.085 & 0.741 & 0.107 & 0.195 & 0.070 & 0.169 & 0.165 & -0.211 \\ 0.091 & -0.096 & 0.018 & 0.107 & 0.901 & -0.024 & -0.073 & -0.170 & 0.060 & 0.146 \\ 0.041 & 0.208 & -0.036 & 0.195 & -0.024 & 0.568 & -0.321 & 0.171 & -0.105 & 0.132 \\ 0.106 & -0.012 & 0.256 & 0.070 & -0.073 & -0.321 & 0.451 & 0.112 & 0.213 & 0.007 \\ 0.271 & -0.235 & 0.031 & 0.169 & -0.170 & 0.171 & 0.112 & 0.524 & -0.033 & 0.141 \\ 0.226 & 0.248 & -0.125 & 0.165 & 0.060 & -0.105 & 0.213 & -0.033 & 0.432 & -0.170 \\ 0.166 & 0.054 & 0.282 & -0.211 & 0.146 & 0.132 & 0.007 & 0.141 & -0.170 & 0.408 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, como $r \geq l = \text{rank}(H_1) = 6$, entonces al tomar $r = 7$, y sustituyendo las expresiones anteriores en (3), obtenemos \hat{H}_2 y, por tanto, la matriz $\hat{H} = (H_1 \ \hat{H}_2)$ que satisface (4),

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} H_1 & \hat{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 2.542 & 5.358 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7.597 & 3.364 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 5.187 & 3.736 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5.256 & 3.727 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4.176 & 4.812 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 4.163 & 9.892 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7.948 & 3.121 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2.276 & 7.706 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 6.698 & 1.387 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & -1.802 & 2.919 \end{pmatrix}$$

Esto mismo se puede realizar tomando cualesquier columnas de $\mathcal{H}_{p,q}$ para formar H_2 , sin importar si son contiguas o no, y proyectando mediante la expresión de (3) sobre las restantes, que constituirían la matriz H_1 . Las columnas de la matriz \hat{H}_2 , creadas bajo este procedimiento, se deberán acomodar en $\hat{\mathcal{H}}_{p,q}$ en las mismas posiciones que tenían las columnas de H_2 en $\mathcal{H}_{p,q}$. Por otro lado, este procedimiento también puede ser aplicado a filas, con los respectivos ajustes. Es más, partiendo de los resultados obtenidos, se pueden indagar técnicas para optimizar la realización al adecuar la precisión de los valores antidiagonales de \hat{H}_2 a los de H_2 , variando la precisión en los de H_1 . No obstante, investigar más profundamente estos temas queda fuera de los objetivos de la investigación.

Un comentario más al respecto de la propuesta es que no necesariamente busca representar con alta precisión a la DE. Esto es así ya que si esto ocurre podríamos estar frente a un sobreajuste, u *overfitting* en inglés. Cuando esto sucede, la realización puede mostrar un rendimiento excelente para representar la DE, pero no así en datos nuevos o de prueba. Esta inefficiencia se debe a que el modelo ha "memorizado" la DE dentro del sistema subyacente comprimido en lugar de grabar en él patrones y relaciones generales. Algunos signos comunes de sobreajuste que podría mostrar el sistema subyacente incluyen:

1. Rendimiento de entrenamiento muy alto, pero rendimiento de prueba bajo.
2. Diferencia significativa entre las métricas de rendimiento (por ejemplo, precisión, exactitud) en el conjunto de entrenamiento y en el conjunto de prueba.
3. La realización muestra una alta sensibilidad a pequeñas variaciones en los datos de entrenamiento.

Este tema no se explora más en la investigación por lo mismo que no profundizamos aún más en la propuesta de compresión. Sin embargo, se menciona que para evitar el sobreajuste hay que indagar en la posible aplicación de técnicas de regularización y validación cruzada durante la realización. Estas técnicas pueden incluir la reducción de la complejidad del modelo, el uso de conjuntos de validación para ajustar del modelo y la recopilación de más datos de entrenamiento, si es posible. El objetivo es encontrar un equilibrio entre la capacidad del modelo para capturar patrones relevantes en los datos con los cuales explicitar al sistema subyacente, y su capacidad para generalizar y realizar predicciones precisas en datos no vistos previamente.

Para concluir esta sección, se hará una exploración preliminar de la propuesta anterior al ser incorporada en la realización. El carácter de preliminar consistirá en tener una comprensión inicial de la efectividad de la propuesta al aplicarse a la realización de cierta clase de datos simulados. Esto es así ya que la búsqueda de una comprensión más profunda de la propuesta se desvía demasiado de los objetivos de la presente investigación, así mismo, puede vulnerar los tiempos establecidos para el desarrollo y conclusión de la misma. Proceder de en esta forma preliminar trae algunas ventajas más, de operar de esta manera es la posibilidad de identificar ciertos desafíos y oportunidades de la propuesta, los cuales podrán ayudar a ajustar el enfoque o realizar mejoras posteriormente, en una propuesta de investigación más completa.

Los datos simulados son originados a partir de un modelo estocástico aditivo, es decir, un modelo con una componente determinista a la cual se le agrega, de forma aditiva, una componente aleatoria. La base determinista de dicho modelo incorpora dos partes: una que adiciona estacionalidad y otra que anexiona tendencia. Estas se pueden ver en la siguiente expresión,

$$f(x) = \sin(x^2) + \sqrt{x}$$

donde la componente sinusoidal se asocia a la primera, y la raíz cuadrada a la segunda. Por su parte, el choque aleatorio $\varepsilon_x \sim N(0, 3)$ se añade a la parte determinista para cada elección de x que tome. Así, la expresión completa con la cual se generarán los datos y será

$$y = f(x) + \varepsilon_x = \sin(x^2) + \sqrt{x} + \varepsilon_x \quad (5)$$

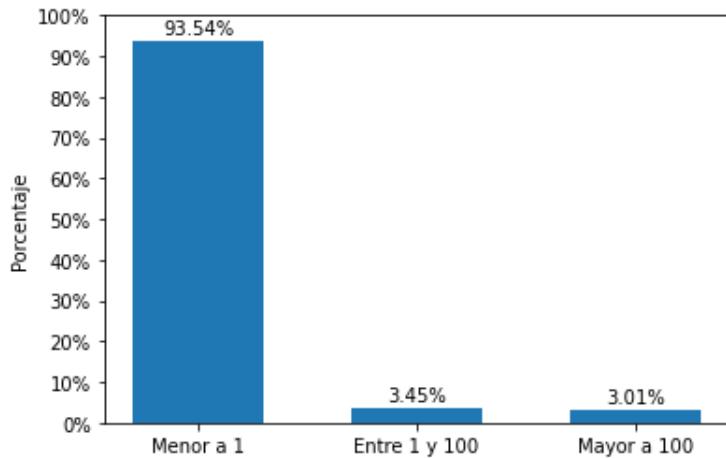
Con ella se construyen 10000 muestras de 100 datos¹⁷, es decir, $\mathcal{L}_k = \{y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{100,k}\}$, con $k = 1, \dots, 10000$. Cada una de estas se toma como la DE de un sistema, y pasa a usarse en la

¹⁷Los valores asumidos para x en la parte determinista serán $x = 1, 2, \dots, 100$, que se mantendrá en todas las muestras

construcción de una MH, $\mathcal{H}_{51,50}(\mathcal{L}_k)$. Luego, esta última se compacta de 24 formas distintas con la propuesta mostrada en la primer parte de esta sección, una por cada número de pares de columnas que se elijan para construir la matriz H_2 ¹⁸. En cada una de ellas, el operador de truncamiento $T_{r-l}(\cdot)$ se usa tomando $l = \text{rank}(H_1) - 1$ y r como el número de filas de $\mathcal{H}_{51,50}(\mathcal{L}_k)$.¹⁹ Despues de efectuarse lo anterior, se continua de forma habitual con la realización.

El Código C.3 lleva a cabo las realizaciones enunciadas²⁰, y también permite seleccionar en cada muestra la mejor de ellas. En la Figura 3.5 podemos ver a todas estas, dispuestas en un gráfico de barras. Se observa que un porcentaje grande de las 10000 mejores aproximaciones es muy cercano a la DE respectiva (su distancia menor a 1), al rededor de 93.5 % según el código. Por su parte, el resto de distanciamientos son pocos, incluso se puede ver que aquellos excesivamente grandes lo son aún menos.

Figura 3.5: Porcentaje de las mejores realizaciones con preservación estructural, clasificadas por la magnitud de proximidad a su respectiva DE simulada, $n = 10000$



Ahora, del grupo del 93.54 % de las realizaciones, mediante el Código C.3, se obtuvo aquella cuya distancia promedio fuera la más cercana a la media del grupo, que fue la 2774. Despues, empleando la DE simulada respectiva a esta realización, se paso a determinar cuales eran las realizaciones compactas cuya distancia promedio era menor a 0.003, las cuales fueron 4 y se pueden ver en la Figura 3.6. La linea azul representa la DE simulada, la roja la mejor estimación y las naranjas las 3 restantes realizaciones.²¹ Además, las 4 realizaciones en la Figura 3.6 poseen una proyección de 15 posiciones más, del 101 al 115.

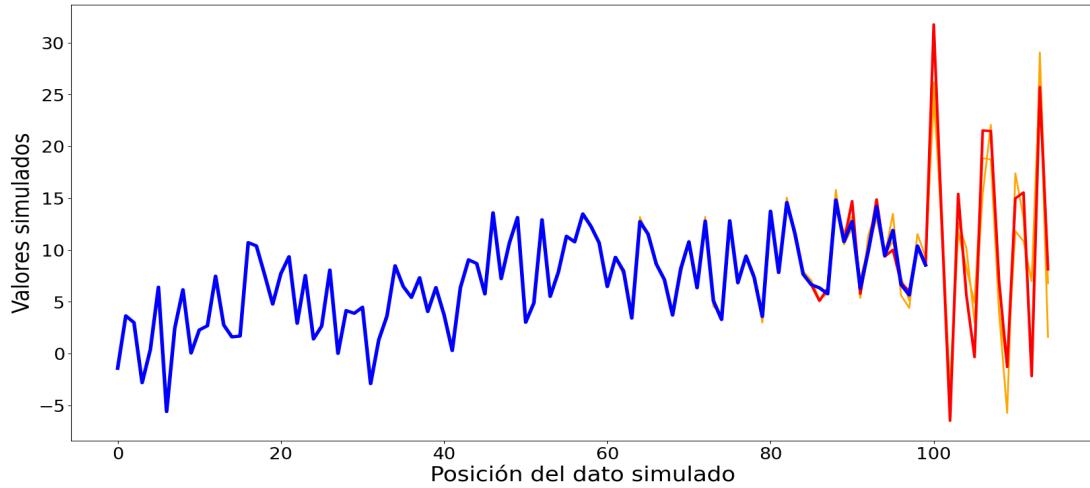
¹⁸Una cuando H_2 se construye con las últimas 2 columnas de la MH, otra cuando se toman 4 columnas, y así hasta tomar las últimas 48 columnas. Elegir pares de columnas, y no tomar de una en una, se emplea para mantener una cantidad grande de pruebas para la propuesta, sin que esto genere un impacto considerable en el tiempo de procesamiento.

¹⁹La elección que se hace de l y r es para tener una perdida de información pequeña. Esto es así debido a que es una exploración preliminar, y al tiempo de procesamiento de 240000 realizaciones y la determinación de las mejores de ellas.

²⁰Con el fin de que estas se puedan replicar, en el código se ha fijado una semilla que abarca a la construcción de los choques aleatorios $\varepsilon_{1,k}, \varepsilon_{2,k}, \dots, \varepsilon_{100,k} \sim N(0, 3)$, para $k = 1, \dots, 10000$

²¹Se consideró el uso de un solo color para estas 3 estimaciones debido a su notable superposición.

Figura 3.6: DE simulada 2744 (azul), estimación de la mejor realización (rojo) y estimaciones de otras 3 realizaciones con distancia a la simulación menor al 0.005 (naranjas)



En la Figura 3.6 también podemos observar que los datos generados por las 4 realizaciones están muy bien empalmados a la DE simulada (azul), con ligeras disparidades en la parte final de los 100 datos. Además, en la proyección a 15 períodos, las 4 realizaciones mantienen una tendencia que parece afín a la de los primeros 100 datos, que si recordamos la parte determinista de 5, corresponde a \sqrt{x} . Es más, la parte de la oscilación periódica, $\sin x^2$, también aparece en la proyección. Por consiguiente, hay evidencia de que la realización con la preservación estructural dada, puede identificar de forma aproximada el sistema generador subyacente, la parte determinista del modelo. Estos hechos sugieren que la realización incorporando la preservación tiene cierta robustez y capacidad para lidiar con una variedad de tipo de datos, como los simulados. Esto indica que puede ser una herramienta valiosa en aplicaciones prácticas.

Por último, para cerrar con esta revisión preliminar, se brindan algunas observaciones sobre el método de preservación estructural, que podrían ser punto de partida para una investigación más profunda. Inicialmente, el método también puede ser optimizado y adaptado al considerar tanto las debilidades en el ajuste del 6,46 % de las realizaciones, como las fortalezas en el 93.54 % restante. A partir de las primeras se puede identificar patrones o factores desencadenantes que pueden ser indicadores de sistemas específicos en los que, en general, el método podría fallar. Por su parte, con las segundas se pueden adaptar enfoques alternativos para sistemas como los mencionados y, a su vez, optimizar la propuesta en sistemas propicios, llevando a mejoras en el alcance y refinamientos.

Por otro lado, al ver la Figura 3.6 se puede notar la existencia de una variabilidad relativamente mayor en la proyección que en los primeros 100 datos. La realización capta al sistema subyacente determinista, tanto su tendencia como su estacionalidad, sin embargo, los choques aleatorios sobredimensionan esta última. Por lo cual, es importante identificar cómo influyen las distintas configuraciones de preservación estructural en la mitigación o acentuación de variabilidad de la proyección. Esto podría permitir modular la oscilación, haciéndola más acorde al sistema determinista subyacente. De otro modo, lo que se busca es limpiar la señal del ruido implicado por la compresión del proceso de conservación estructural. Incluso, se podría investigar la incorporación en el proceso de conservación estructural algunas técnicas del filtrado, como las transformadas de Fourier o Wavelet, entre otras.

3.4. Algoritmo de Factorización

El **AF** fue mostrado en el inciso d, al inicio del apartado 2.2 Construcción de la realización, como el proceso por el cual una matriz, en nuestro caso \mathcal{H} , se puede expresar como la multiplicación de P por Q , donde la primera es triangular inferior, y la restante cuenta con sus últimas filas nulas.²² Una forma compacta de verlo se encuentra en la Tabla 3.1²³.

Tabla 3.1: Forma compacta del Algoritmo de Factorización

	Columna i de P	Fila i de Q
$i = 1$	$P_{:,i} = \frac{\mathcal{H}_{i,i}}{Q_{i,i}}$	$Q_{i,:} = \mathcal{H}_{i,:}$
$i > 1$	$P_{:,i} = \frac{\mathcal{H}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{i,k} Q_{k,i}}{Q_{i,j_i}}$	$Q_{i,:} = \mathcal{H}_{i,:} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{i,k} Q_{k,:}$

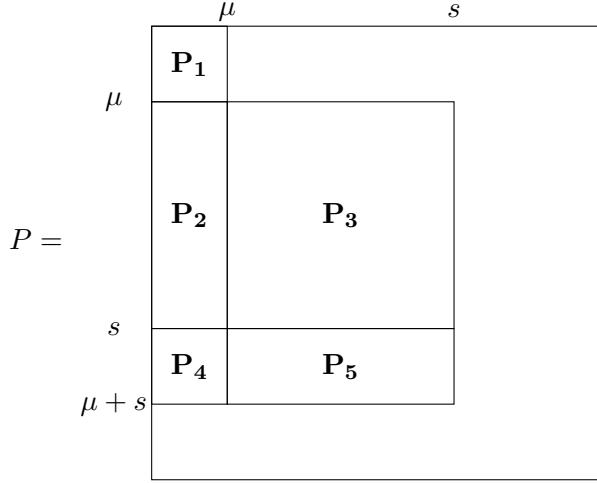
Aunque la forma e intensidad en que el AF impacta sobre la determinación del sistema subyacente no se puede percibir y descifrar de forma llana y general, es altamente notable. Por ejemplo, si se piensa cómo los pesos en las entradas de la matriz de estado F influyen sobre su órbita, queda claro que la forma en que se coloquen estos en las distintas posiciones de F está dando más peso a un comportamiento dinámico que a otros. En este sentido, el AF incidiría en la negatividad o no de la parte real de los valores propios de F . Así, en caso de inclinar todas las partes reales a ser negativas, haría que la órbita del sistema fuera estable o, en su defecto, inestable. Es más, como también determina la magnitud de los valores propios, afecta de igual manera intensidad de oscilación de los valores estimados y, por tanto, la precisión entre ésta y la DE. En consecuencia, podemos decir que el AF contribuye a la definición del plazo en que las proyecciones de la DE pueden ser oportunas o no.

Para aterrizar lo que se ha mencionado, amén de mencionar otras características sobre las que el AF influye al momento de gestar el sistema subyacente, partamos de una DE de $\mu \times \eta$ arbitraria. Al usar el AF sobre la \mathcal{H} respectiva a la DE, asumiendo que el rango de esta es s y que cumple con la hipótesis de la realización (2), en particular obtenemos la matriz P , a la cual podemos dividir en submatrices P_1, \dots, P_5 , siguiendo lo que se muestra en la Figura 3.7. La matriz F en términos de estas submatrices sería dada de la siguiente manera

$$F = P_s^{-1} P_s^* = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

²²Como se vio, si el rango de \mathcal{H} es n , y cuenta con $N > n$ filas, entonces tiene sus últimas $N - n$ filas nulas.

²³Esta forma compacta está basada en el algoritmo de Casti (1987, pp.134-138)

Figura 3.7: División de la matriz P en submatrices relevantes para la dinámica del sistema

Ahora, el segundo elemento de la órbita de la matriz de estado F bajo la expresión anterior, es decir, en términos de las P_i , quedaría de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2P_1^{-1} - P_2P_1^{-1} & I_{s-\mu} \\ P_4P_1^{-1} - P_5P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{r-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y si ahora tomamos el tercer elemento de su órbita en función de las P_i tendríamos

$$\begin{aligned}
 F^3 &= FF^2 \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2P_1^{-1} - P_2P_1^{-1} & I_{s-\mu} \\ P_4P_1^{-1} - P_5P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

de los tres primeros elementos de la órbita de la matriz de estado podemos entrever de manera relativamente fácil el siguiente resultado general para $t > 1$,

$$F^{t-1} = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

Y acoplando la expresión general de F , en términos de las P_i , a las matrices G y H , obtenemos una fórmula que representa o estima la DE a partir del sistema subyacente que se determinó, la cual es

$$\begin{aligned} HF^{t-1}G &= H \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} G \\ &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu} \\ &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1} P_2 P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu} \\ &= \begin{pmatrix} I_\mu & \mathbf{0} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu} \end{aligned}$$

En esta última expresión la dinámica del sistema para cada $s \leq m(\mu - 1)$ es determinada por la órbita de la matriz $s \times s$

$$D_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Es más, dependiendo de si $s \geq 2\mu$ (es decir, $s - \mu \geq \mu$) o $s < 2\mu$ (o lo que es lo mismo, $s - \mu < \mu$), la traza de D_s contendrá sólo elementos de la matriz $P_5 P_3^{-1} \in \mathbb{R}^{\mu \times s-\mu}$, o de ésta y la matriz $[P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1}$, respectivamente. Así, podemos definir la matriz $P_6(s)$ como

$$P_6(s) = \begin{cases} (P_5 P_3^{-1})_{:,2\mu-s+1:s-\mu} & s \geq 2\mu \\ ([P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} \quad P_5 P_3^{-1})_{:,\mu-s+1:s} & s < 2\mu \end{cases}$$

y si tomamos a los λ_i como los valores propios de D_s , se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(D_s) = \text{tr}(P_6(s))$$

Luego, considerando que la estabilidad y la rapidez de convergencia del sistema son determinadas por los valores propios de D_s , y debido a la igualdad anterior, tenemos que la traza de $P_6(s)$ puede proporcionar información en términos generales sobre el sistema, como la velocidad de convergencia. Si es grande (en valor absoluto), implica que las partes reales de los valores propios son grandes en valor absoluto, lo que generalmente puede indicar una convergencia más rápida. Por otro lado, si la traza es pequeña, las partes reales de los valores propios son pequeñas, lo que puede sugerir una convergencia más lenta.

Como vemos, la traza de $P_6(s)$ permite tener una lectura cualitativa de ciertas características del sistema, sin embargo, no proporciona una medida precisa. Un análisis detallado debe basarse

necesariamente en un examen directo de los valores propios de D_s , y sus ubicaciones en el plano complejo. No obstante, hablar de la traza de $P_6(s)$ y su relación con los valores propios busca enfatizar la importancia del AF. Mostrar cómo ciertos elementos de combinaciones de las submatrices P_1, \dots, P_5 de P intervienen en la confección de la órbita del sistema subyacente y su vaivén, marca la pauta sobre el tamaño de los elementos. La influencia diferenciada de los pesos en las matrices P_1, \dots, P_5 , que componen a $P_6(s)$, y el valor s , que evoca el truncamiento elegido, sobre los valores propios de D_s es ahora más directa. Con ello podemos ver de cierta manera cómo influyen estos sobre su dinámica, la estimación de la DE y la proyección de la DE, así mismo, es posible establecer como el AF tiene efectos sobre la estructura, dimensión, estabilidad, convergencia, observabilidad y controlabilidad del sistema, vía las matrices F , G y H .

Cabe aclarar que el uso de la traza de $P_6(s)$ para hacer notar lo anterior, estriba en lo complejo que resulta delinear e interpretar con mayor precisión las conexiones anteriores. La relación entre características y la dinámica del sistema, el valor de s y la forma de construir P y Q mediante el AF, no es fácil de expresar y glosar. En efecto, tomando al AF, este construye las entradas de las matrices P y Q de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\boxed{Q_{1,:}} &= H_{1,:} \\
\boxed{P_{:,1}} &= \frac{1}{Q_{1,1}} H_{:,1} \\
\boxed{Q_{2,2}} &= H_{2,2} : \\
P_{2,:,2} &= \frac{1}{Q_{2,2}} (H_{2,:,2} - \boxed{P_{2,:,1} Q_{1,2}}) \\
Q_{3,3} : &= H_{3,3} : - \boxed{P_{3,1} Q_{1,3}} \\
P_{3,:,3} &= \frac{1}{Q_{3,3}} (H_{3,:,3} - \boxed{P_{3,:,1} Q_{1,3}} - P_{3,:,2} Q_{2,3}) \\
&= \frac{1}{Q_{3,3}} \left(H_{3,:,3} - \boxed{P_{3,:,1} Q_{1,3}} - \frac{1}{Q_{2,2}} (H_{3,:,2} - \boxed{P_{3,:,1} Q_{1,2}}) \boxed{Q_{2,3}} \right) \\
&= \frac{1}{Q_{3,3}} \left(H_{3,:,3} - \boxed{P_{3,:,1} Q_{1,3}} - \frac{\boxed{Q_{2,3}}}{Q_{2,2}} (H_{3,:,2} - \boxed{P_{3,:,1} Q_{1,2}}) \right) \\
Q_{4,4} : &= H_{4,4} : - \boxed{P_{4,1} Q_{1,4}} - P_{4,2} Q_{2,4} : \\
&= H_{4,4} : - \boxed{P_{4,1} Q_{1,4}} - \frac{Q_{2,4,:}}{Q_{2,2}} (H_{4,2} - \boxed{P_{4,1} Q_{1,2}})
\end{aligned}$$

Es inmediato notar que dicho proceso es sinuoso y tiende a volcar a las entradas en una mezcla compleja de los elementos de \mathcal{H} . Para enfatizar este hecho, tomemos una sucesión de elementos: a, b, c, d, e y f , y construyamos con ellos la matriz de Hankel siguiente

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Luego, aplicamos sobre esta el Código C.4, que efectúa una descomposición simbólica de ella en P y Q , siguiendo el AF mostrado con anterioridad. Procediendo de esta manera, las matrices P y Q resultan ser,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c}{a} & \frac{d-\frac{bc}{a}}{\frac{c-\frac{b^2}{a}}{a}} & 1 & 0 \\ \frac{d}{a} & \frac{e-\frac{bd}{a}}{\frac{c-\frac{b^2}{a}}{a}} & \frac{f-\left(\frac{d-\frac{bc}{a}}{a}\right)\left(e-\frac{bd}{a}\right)}{\frac{c-\frac{b^2}{a}}{a}}-\frac{cd}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d-\frac{bc}{a} \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} & d-\frac{bc}{a} & \frac{(d-\frac{bc}{a})^2}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{c^2}{a} \\ 0 & 0 & e-\frac{(d-\frac{bc}{a})^2}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{c^2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En las expresiones se muestra cómo los elementos de la sucesión se irán mezclando de forma cada vez más enrevesada para construirlos, es más, será más engorrosa en cuanto la sucesión crezca o los elementos de ella sean matrices de mayor dimensión.²⁴ Así, a partir de cierto momento, determinar e interpretar cómo es la expresión que relaciona los elementos de \mathcal{H} y D_s será inviable. Es más, la matriz de estado padece lo mismo, no es fácil conectarla con los datos de \mathcal{H} , y también es difícil interpretar sus entradas. Esto se puede ver en la siguiente matriz simbólica, que representa a la matriz de estado F del ejemplo anterior.

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 & 0 \\ \frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2} & \frac{d-\frac{bc}{a}}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{b}{a} & 1 \\ \frac{b(bd-c^2)}{a(ac-b^2)}+\frac{c(-ad+bc)}{a(ac-b^2)}+\frac{d}{a} & \frac{bd-c^2}{ac-b^2}+\frac{\left(d-\frac{bc}{a}\right)(-ad+bc)}{\left(c-\frac{b^2}{a}\right)(ac-b^2)}+\frac{e-\frac{bd}{a}}{c-\frac{b^2}{a}} & \frac{f-\left(\frac{d-\frac{bc}{a}}{a}\right)\left(e-\frac{bd}{a}\right)-\frac{cd}{a}}{e-\frac{\left(d-\frac{bc}{a}\right)^2}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{c^2}{a}}+\frac{-ad+bc}{ac-b^2} \end{pmatrix}$$

La enmarañada forma de construcción de P y Q utilizando el AF, como se ve, hace más engorrosa la conexión e interpretación entre los datos de \mathcal{H} , o sus truncamientos, y los valores en la realización, la órbita de la matriz de estado y otras propiedades importantes del sistema subyacente.

En virtud de la influencia que tienen las matrices P y Q sobre la determinación del sistema subyacente, la aproximación a la DE y la proyección de esta, en el caso de operar sobre un truncamiento de la MH, investigar la manera de optimizar su construcción es relevante. En este sentido, la optimización buscaría distribuir los elementos de \mathcal{H}_s entre P y Q ,²⁵ tal que la órbita de la matriz F o, equivalentemente, la matriz D_s , permita que la distancia entre la DE y la sucesión estimada por la realización, bajo P y Q , sea la más armoniosa y mínima posible.²⁶

El problema de optimización que aquí se plantea es interesante y desafiante. Consideremos que \mathcal{F} es el conjunto de funciones $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $f(\mathcal{H}_s) = (P, Q)$, con P una matriz triangular inferior con unos en su diagonal principal, Q una matriz con sus últimas k filas

²⁴En lector puede modificar el Código C.4, aumentando el tamaño de la sucesión a, b, c, d, e y f , o convirtiéndola en una sucesión simbólica de matrices, y comprobar así cómo de intrincada se ve la mezcla de los elementos de la sucesión sobre las entradas de P, Q y F .

²⁵Dentro de este proceso, las matrices P y Q tienen la misma estructura que en el caso del AF, lo único que cambia es la forma de llenar las entradas no nulas en cada una, que será lo que deberá optimizarse.

²⁶Cuando se habla de armoniosa y mínima se quiere enfatizar el hecho de que F tenga la menor dimensión posible, explicando lo mejor posible la DE.

nulas²⁷, y $\mathcal{H}_s = PQ$. Entonces, la optimización busca encontrar a $f_* \in \mathcal{F}$ tal que la realización (F_*, G_*, H_*) , bajo sus respectivas matrices P_* y Q_* , permite que

$$\left| DE - \{H_* F_*^{t-1} G_*\} \right| = \min \left\{ \left| DE - \{HF^{t-1}G\} \right| : (H, F, G) \text{ es generada por } f \in \mathcal{F} \right\} \quad (6)$$

Una variante de este proceso de optimización que podría ser interesante investigar, sería aquella en la cual se use directamente la matriz de Hankel \mathcal{H} y no su truncamiento \mathcal{H}_s . Este proceso, a diferencia del enunciado anteriormente, buscaría encontrar la función f_* que satisfaga 6, restringido a que

Los problemas de optimización planteados requieren una combinación de elementos de álgebra moderna, análisis matricial y, posiblemente, algunas otras técnicas analíticas, numéricas y heurísticas más. Así mismo, poseen limitaciones y suposiciones cruciales, por lo que explorar estrategias para enfrentarlas también cobra importancia. Por lo mismo, es bastante complejo dar respuesta al problema de la definición de las funciones anteriores y garantizar el cumplimiento de las condiciones mencionadas, las que pueden limitar las opciones de f_* . Así, en virtud de que podría ser una investigación por sí misma, que el tiempo que demanda tal investigación puede ser considerablemente amplio y con ello la presente investigación se desviaría demasiado de sus objetivos, por tanto, el proceso de optimización queda como tema para una investigación futura.

Sin embargo, a pesar de no emprender la búsqueda de alguno de los procesos de optimización planteados, en la presente investigación sí se hace una propuesta de apertura para mostrar la importancia y los beneficios de tal investigación, lo cual está conectado con los objetivos de la investigación. Además, dicha propuesta se aplicará al modelo del capítulo siguiente con el fin de observar algunas propiedades destacadas de ella, las cuales pueden redundar en beneficios de contraste para la presente investigación, además en la posterior atención de los procesos de optimización antedichos.

La propuesta de factorización que se hará, surgió al observar el peso que tenían las últimas filas de la matriz Q , construida al aplicar el AF directamente sobre \mathcal{H} del modelo en el Capítulo 2. En este caso, al no aplicar el AF sobre acotamientos de la MH, los últimos valores no eran nulos, y si me ocurrió que una descomposición que permita que estos pudieran ser pequeños al momento de aportar a la construcción de \mathcal{H} . Entonces, podrían ser suprimidos, ocasionando una compresión de información con poca pérdida de información y poco perjuicio sobre la estructura de Hankel.

Con lo anterior en mente, considerando una DE con matrices W_i de $m \times n$ y una MH de $\mu \times \eta$, elaboré una descomposición que denominé factorización en suma finita **FSF**. Su construcción comienza con la construcción de las matrices P y Q_0 . La primera tiene una estructura similar a la matriz P en el AF: triangular inferior con diagonal principal de unos, pero los valores por debajo de la diagonal principal ahora serán iguales a los de \mathcal{H} en las mismas posiciones, divididos entre el valor en la diagonal principal de \mathcal{H} .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{w_{21}}{w_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{m\mu,1}}{w_{11}} & \cdots & \frac{w_{m\mu,m\mu-1}}{w_{m\mu-1,m\mu-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

²⁷El valor de k es la cantidad de filas de \mathcal{H}_s menos su rango s .

Por su parte, Q_0 tiene ceros por debajo de su diagonal principal e iguala a \mathcal{H} entrada a entrada en el resto de posiciones.

$$Q_0 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,n\eta-1} & w_{1,n\eta} \\ 0 & w_{22} & \cdots & w_{2,n\eta-1} & w_{2,n\eta} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_{m\mu,n\eta-1} & w_{m\mu,n\eta} \end{pmatrix}$$

Luego, bajo la siguiente igualdad

$$\mathcal{H} = P * Q_0 - \sum_{i=1} Q_i$$

donde las matrices Q_i , que tienen las primeras i filas e i columnas nulas, se construyen de la siguiente manera

$$Q_i = \frac{1}{w_{ii}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_{i+1,i}w_{i+1,i} & \cdots & w_{i+1,i}w_{i+1,i} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_{i+1,i}w_{i+1,i} & \cdots & w_{i+1,i}w_{i+1,i} \end{pmatrix}$$

y debido a que P en el FSF es invertible por como fue definida, entonces podemos construir la nueva matriz Q de la siguiente forma

$$Q = Q_0 - P^{-1} \sum_{i=1} Q_i$$

donde las matrices Q_i sumadas y pre-multiplicadas por P^{-1} , se restan para disminuir el peso de las últimas filas de la matriz Q en el proceso de construcción de \mathcal{H} . Esta forma de construir la matriz Q no es la única ni la más rápida. De hecho, de forma directa se puede generar Q al pre-multiplicar la inversa de P a \mathcal{H} ,

$$P^{-1}\mathcal{H} = Q$$

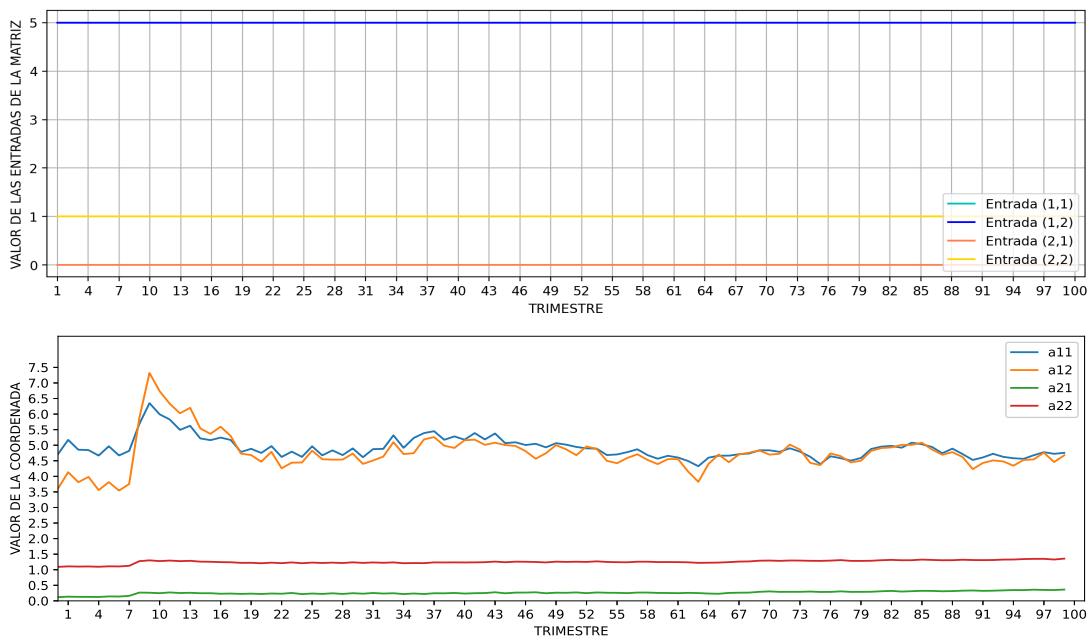
sin embargo, de haber aplicado este proceder, no habría sido posible ilustrar el efecto de las matrices Q_i , al ser pre-multiplicadas por la inversa de P , sobre la zona inferior de Q_0 , elemento que puede ayudar a entender la importancia del proceso de optimización que quedó abierto.

Esta propuesta de factorización puede tener ventajas importantes en el proceso de realización para ciertos sistemas, afianzando las ideas expuestas sobre la necesidad de un proceso de optimización. Para poner esto en claro, se mostrará cómo es que construir P y Q mediante el FSF puede brindar mejores resultados que hacerlo con el AF. Con este fin, primero revisaremos la DE del modelo del Capítulo 2 y la mejor representación compacta de la DE bajo el AF. En la Figura 3.9 notamos como la mejor aproximación bajo el AF (arriba)²⁸ puede representar relativamente

²⁸La serie de tiempo de la entrada (1,1) en las matrices estimadas, que poseen el color cian, no aparecen debido a que se encuentran por debajo de la linea azul, que corresponde a la serie de tiempo de la entrada (1,2) de las matrices estimadas.

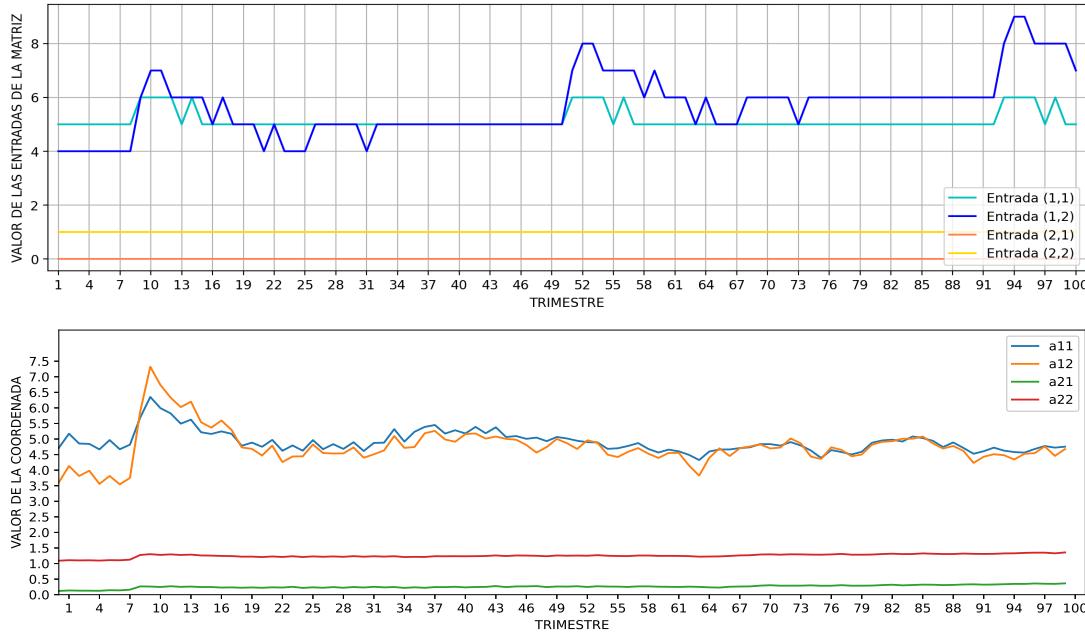
bien el periodo posterior al trimestre 22 de la DE (abajo), pero subestimando la variabilidad que se encuentra en los primeros trimestres de este.

Figura 3.8: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de la mejor aproximación dada por la realización (arriba) tomando el AF



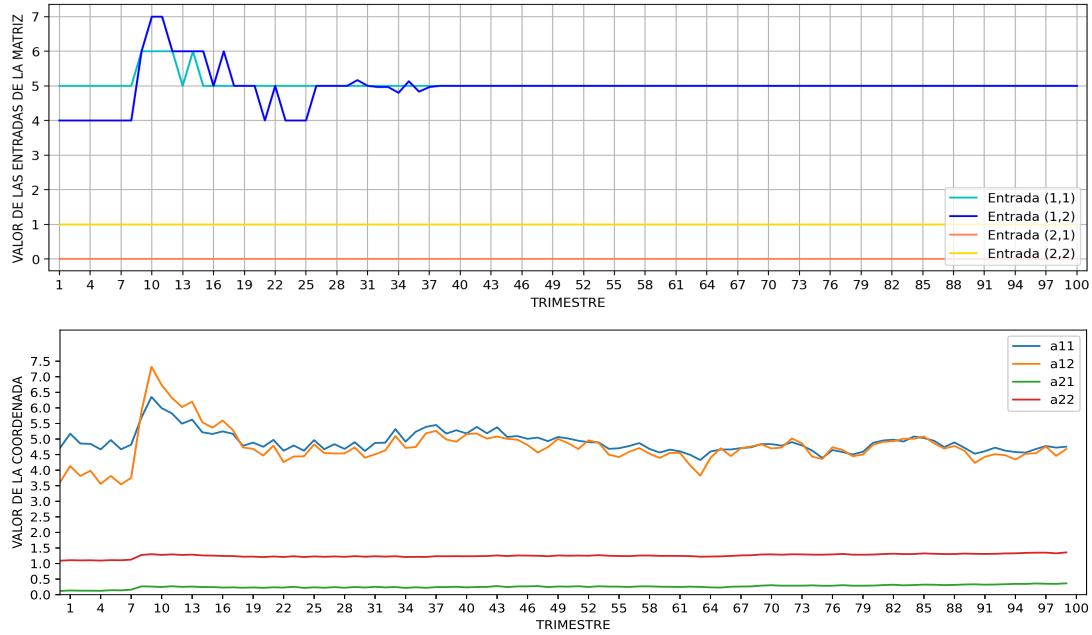
Podríamos considerar el uso de otras de las mejores aproximaciones bajo el AF, las cuales puedan representar la primer parte que posee mayor variabilidad. No obstante, éstas generan un tipo de patrón que aunque ahora sí representa mejor la primer parte de la DE, sobreestima a los valores de los períodos posteriores al 20, Figura 3.9 (arriba).

Figura 3.9: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de una de las primeras mejores aproximaciones dada por la realización (arriba) bajo el AF



Si ahora vemos la Figura 3.10, podemos observar las gráficas que representan la evolución temporal de las entradas en las matrices de la DE del modelo del Capítulo 2 (abajo), y compararlas con las respectivas entradas de la mejor aproximación conseguida bajo la realización con el FSF (arriba). Es inmediato observar cómo es que la mejor aproximación del FSF ahora sí puede representar de mucha mejor manera la zona de mayor variabilidad en los primeros 20 primeros períodos, y también la parte posterior que es menos veleidosa.

Figura 3.10: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de la mejor aproximación dada por la realización (arriba) bajo el FSF



3.5. Realización tiempo variante por acortamiento de series

Los sistemas reales a menudo evolucionan al pasar el tiempo, en particular, aquellos en el ámbito económico. Estos lo consiguen en la medida en que las interacciones entre individuos se transforman y, macroscópicamente, causan modificaciones promedio sostenidas de las relaciones económicas, o por alguna otra fuerza de cambio. Sin embargo, como se indicó en una sección previa, la variabilidad del sistema no siempre es bien capturada por una realización invariante. En este sentido, al igual que la conservación estructural o el grado de optimización de la factorización, la calidad de la realización se ve influida por el grado de inclusión del cambio del sistema en ella.

Por otro lado, la inclusión del efecto temporal también desempeña un papel esencial en el control dinámico del cambio estructural. Para ilustrar el punto se puede pensar en lo habitual que es la aplicación de estrategias o políticas económicas a corto, mediano y largo plazo. Ellas inducen cambios en el sistema económico, los cuales pueden modificar su estructura. Debido a las complejidades del proceso, esta alteración estructural puede no resultar como se esperaba. Por ello, para dirigir la estructura a un estado deseado se debe prever el sentido del cambio, así como saber ajustar la dimensión y profundidad de la estrategia o política de forma continua. Es aquí donde la realización tiempo variante tiene una zona donde podría aprovecharse.

Por todo lo anterior es que se desarrolla la presente propuesta de implementación de un tipo de realización tiempo variante. Ella intenta ofrecer una mayor flexibilidad al permitir que las entradas en las matrices F , G y H varíen con el tiempo, es decir, que se vuelvan $F(t)$, $G(t)$ y $H(t)$. Esto facilita la adaptación de la realización a sistemas complejos, fuertemente cambiantes o que tienen ciclos marcados. Sin embargo, la propuesta que se hace aquí únicamente queda en el ámbito teórico. Esto es debido a que requiere solventar unas situaciones que se mencionan al final del apartado, alejándose de los fines y tiempos de la presente investigación. Además de que

también precisa que se solventen los temas de la preservación estructural y la optimización del algoritmo de factorización para poder obtener mejores resultados.

Para comenzar con la construcción de la propuesta, asúmase una serie de datos $\{L_t\}_{\mathbb{N}_n}$ que pueden ser números, vectores o matrices. Entonces, su dinámica se puede establecer como sigue

$$\begin{aligned} L_2 &= f_1(L_1) \\ L_3 &= f_2(L_2) \\ \vdots &= \vdots \\ L_n &= f_{n-1}(L_{n-1}) \end{aligned}$$

donde cada función f_t representa un sistema de forma externa, es decir, es una fotografía de él que resume toda su actividad entre el tiempo $t - 1$ y el tiempo t , la cual permite pasar de L_{t-1} a L_t . Si este sistema es lineal o lo aproximamos linealmente, tendríamos que la dinámica se torna de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L_2 &= A_1 L_1 \\ L_3 &= A_2 L_2 \\ \vdots &= \vdots \\ L_n &= A_{n-1} L_{n-1} \end{aligned}$$

donde A_t es la matriz asociada a la función lineal f_t y, por consiguiente, ellas representan la DE del sistema. A esta le podemos aplicar la realización, pudiendo ser con o sin compresión de información, dependiendo cual es la que brinda el mejor ajuste, y así obtener la siguiente expresión para $t = 1, 2, \dots, n$,

$$L_t \approx \hat{L}_t = H_1 F_1^{t-1} G_1 \quad (7)$$

Pero esta expresión también se puede obtener de la DE quitando el primer elemento, L_2, \dots, L_n ; los dos primeros elementos, $L_3, \dots, L_n; \dots$; y los $n - 2$ primeros elementos, L_{n-1}, L_n . Así, este proceso crea las realizaciones (F_j, G_j, H_j) con $i = 1, \dots, n - 2$, ubicadas en la última fila de la Figura 3.11, las cuales permiten cumplir la expresión

$$L_{t,j} \approx \hat{L}_{t,j} = H_j F_j^{t-1} G_j$$

con $j = 0, 1, \dots, n - 2$ indicando el número de elementos que se retiraron a la DE para efectuar la realización. Estas realizaciones junto con la DE original generan sucesiones longitudinales (verticales), que corresponden a las columnas de la Figura 3.11.²⁹

Figura 3.11: Esquema del método RAS para un sistema tiempo-variante

L_n	$\hat{L}_{n,1}$	$\hat{L}_{n,2}$	\dots	$\hat{L}_{n,n-2}$	(F'_n, G'_n, H'_n)
L_{n-1}	$\hat{L}_{n-1,1}$	$\hat{L}_{n-1,2}$	\dots	$\hat{L}_{n-1,n-2}$	$(F'_{n-1}, G'_{n-1}, H'_{n-2})$
L_{n-2}	$\hat{L}_{n-2,1}$	$\hat{L}_{n-2,2}$	\dots	■	$(F'_{n-2}, G'_{n-2}, H'_{n-2})$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	■	\vdots
L_2	$\hat{L}_{2,1}$	$\hat{L}_{2,2}$	\dots	■	(F'_2, G'_2, H'_2)
L_1	$\hat{L}_{1,1}$	■	\dots	■	(F'_1, G'_1, H'_1)
<hr/>					
$(F_1, G_1, H_1) \quad (F_2, G_2, H_2) \quad \dots \quad (F_{n-2}, G_{n-2}, H_{n-2}) \quad (F_r, G_r, H_r), \quad r = F', G', H'$					

²⁹Sin considerar ni la fila inferior ni la columna extrema derecha.

Así mismo, para un mismo tiempo t , podemos encontrar un elemento de la DE y una o varias estimaciones de dicho elemento, $\hat{L}_{t,j}$, donde $t = 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n - 2$ y $\hat{L}_{t,0} = L_t$. En la Figura 3.11 estas se corresponden con las filas, exceptuando la que se encuentra en la parte de abajo, y también sin incluir en ellas los elementos en la columna de la extrema derecha. Los elementos en una fila de tiempo t poseen más información sobre el estado del sistema en dicho tiempo. Es más, esta se vuelve más específica en cuanto más a la derecha se encuentre.³⁰ Así, podemos incorporar un orden a los elementos de las filas, desde izquierda a derecha. A partir de esto se puede decir que los elementos en la fila reflejan al sistema subyacente en el tiempo t con cierta precisión asociada a su orden. Por tanto, son una representación externa del sistema en tal tiempo, y se puede pasar a efectuar una realización (F', G', H') sobre ella, columna extrema derecha en la Figura 3.11.

$$\hat{L}_{t,j} \approx H'_t (F'_t)^j G'_t \quad (8)$$

A partir de estas realizaciones de corte transversal, podemos generar a su vez tres sucesiones: F'_1, \dots, F'_n ; G'_1, \dots, G'_n y H'_1, \dots, H'_n , y como cada una de las sucesiones representa la misma parte del sistema subyacente en cada tiempo, podemos verlas como una representación externa de dicha característica. Por lo cual les podemos encontrar su realización, las cuales se pueden ver en la esquina inferior derecha de la Figura 3.11. La primer serie tiene por realización a $(F_{F'}, G_{F'}, H_{F'})$; la segunda a $(F_{G'}, G_{G'}, H_{G'})$; y la tercera a $(F_{H'}, G_{H'}, H_{H'})$.

A partir de las últimas realizaciones se tiene que

$$F'_t \cong H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \quad G'_t \cong H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \quad H'_t \cong H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'}$$

y sustituyendo en (8), tomando $j = t - 1$, se sigue que

$$L_t \cong \hat{L}_{t,t-1} \cong \left(H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'} \right) \left(H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \right)^{t-1} \left(H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \right) \quad (9)$$

Así, la terna de matrices $(F(t), G(t), H(t))$ definidas como

$$\begin{aligned} F(t) &= H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \\ G(t) &= H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \\ H(t) &= H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'} \end{aligned}$$

serían la propuesta de realización tiempo variante que hago de la DE, a la cual denomino realización por acortamiento de series (RAS).

Para cerrar este apartado he de mencionar brevemente algunos inconvenientes de esta propuesta que contribuyen a que se mantenga en un dominio teórico. El primero de ellos es que las realizaciones de corte transversal F'_t , G'_t y H'_t , tienden a cambiar sus dimensiones para cada t . Esto genera problemas para poder obtener las realizaciones (F_r, G_r, H_r) con $r = F', G', H'$. Esto en virtud a que no se tiene una realización para la cual la matriz de Hankel tenga bloques antidiagonales con matrices de distinto tamaño. Incluso si damos pie a la homogenidad al agregar más filas y columnas de ceros a las matrices con dimensión pequeña, habitualmente tal incremento de tamaño en las matrices exigirá un aumento en el costo computacional de procesamiento, lo que aumentará el tiempo para efectuar la realización.

Otro inconveniente es la estabilidad numérica del proceso presentado. Dado todas las realizaciones que demanda la propuesta, además de lo mencionado sobre la falta de homogenidad y el gran

³⁰Esto debido a que la realización tiende a aproximar de mejor manera a los primeros elementos de la DE.

tamaño de las matrices F'_t , G'_t y H'_t , las imprecisiones, aun siendo pequeñas, pueden llegar a acumularse y sobreponerse al umbral donde el algoritmo propuesto preserva su estabilidad numérica. Esto conlleva una pérdida de precisión y el correlato de una fuerte divergencia entre las estimaciones y la DE, así como una identificación del sistema subyacente altamente cuestionable. Una forma de lidiar con esto es aumentando la precisión de manera considerable en los pasos de la realización. No obstante, de nueva cuenta, el peso de tal acción implica una gran demanda de recursos computacionales, además de poder requerir un tiempo cuantioso para llevarla a cabo.

Los últimos problemas emanan del gran tamaño que pueden alcanzar las matrices $F(t)$, $G(t)$ y $H(t)$. Por un lado aumenta la dificultad de interpretar la realización. Por otro, debido a la amplitud de elementos, identificar como llevar a cambio el control del cambio estructural se vuelve sinuoso. Es más, el tamaño afecta la aplicación de métodos para la determinación de entornos de confianza, como el bootstrap, elevando el tiempo requerido para definirlos. Es por esto, así como por los puntos anteriores, que no se aborda más que teóricamente la propuesta de realización variante. Es más, aquí se hace evidente la importancia de investigar la optimización del algoritmo de factorización y la preservación estructural. Ellos podrían ayudar a disminuir la imprecisión y aplicar métodos de compresión de información para homogenizar los tamaños de las matrices, así como hacerlos interpretables.

3.6. Análisis de la estructura del sistema subyacente

La estabilidad en un sistema de espacio de estado que se analiza con frecuencia se encuentra relacionada con la capacidad de este para mantenerse en un estado de equilibrio o regresar a él con soltura, después de una perturbación. Es evaluada a través de los autovalores de la matriz de estado F . Si todas las partes reales de los autovalores son negativas ($Re(\lambda) < 0$ para todos los λ), el sistema se considera asintóticamente estable. Esto significa que, a medida que pasa el tiempo, las variables económicas convergen hacia un estado de equilibrio. Por otro lado, si al menos un autovalor tiene una parte real positiva ($Re(\lambda) > 0$ para al menos un λ), el sistema se considera inestable. Esto indica que el sistema no tiende a un equilibrio y puede experimentar oscilaciones no controladas y divergencia en sus variables económicas. Una última situación es que algunos autovalores tienen partes reales negativas y otros tienen partes reales positivas. En este caso, el sistema puede ser semiestable o marginalmente estable. De esto se sigue que algunas variables económicas pueden converger a un equilibrio mientras que otras pueden divergir o permanecer en oscilación.

Así mismo, la magnitud de la parte real de los autovalores también proporciona información sobre la velocidad a la que se producirán las transiciones económicas. Cuanto más negativa sea la parte real de un autovalor, más rápido será el proceso de convergencia hacia un equilibrio. La estabilidad del sistema económico es fundamental para su salud y funcionamiento. Una interpretación práctica de un sistema económico estable es aquella que expresa que las políticas económicas actuales tienden a mantener la economía en un estado de equilibrio. Si el sistema es inestable, pueden ser necesarias intervenciones adicionales para estabilizar la economía y evitar crisis económicas.

Otro concepto en el análisis estructural del sistema es el de observabilidad. Esta es una propiedad que se refiere a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las observaciones de las salidas (o variables de estado medidas). Un sistema se dice que es completamente observable si es posible determinar su estado inicial a partir de las observaciones disponibles. Esto está relacionado con la matriz de observabilidad \mathcal{O} , que se construye a partir de las matrices F y H .

del sistema de la siguiente forma

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

donde n indica la dimensión del espacio de estado o, equivalentemente, la dimensión del espacio de columnas de F . Luego, si la matriz \mathcal{O} tiene rango completo, es decir, igual a n , se sigue que el sistema es completamente controlable. Mientras que si este es menor a n , el sistema no es completamente controlable.

La observabilidad para un sistema económico permite estimar el estado actual del sistema económico a partir de variables económicas disponibles. Esto es valioso para comprender y analizar la dinámica interna del sistema, especialmente cuando algunas variables económicas internas no son directamente observables. Además, dado que permite conocer el estado actual, al aplicar modelos matemáticos adecuados, sería posible prever cómo evolucionarán las variables económicas. Es más, también puede funcionar como un indicador ya que si las estimaciones del estado actual no coinciden con las observaciones reales, podría indicar que algo inusual está ocurriendo en la economía.

Así mismo, la capacidad de observar y estimar el estado del sistema es fundamental para el diseño de políticas económicas efectivas. Los responsables de la toma de decisiones podrían utilizar esta información para implementar políticas que estabilicen el sistema económico en cuestión o que ayuden a alcanzar objetivos económicos específicos. Igualmente, la observabilidad es importante en el análisis de sensibilidad debido a que si el sistema no es completamente observable, algunos estados pueden no estar directamente relacionados con las salidas observadas, lo que dificulta el análisis de sensibilidad en esos estados no observables.

Un concepto más es la controlabilidad, la cual se refiere a la capacidad de llevar el sistema desde un estado inicial a un estado deseado, suministrando al sistema algunas entradas, a las cuales llamaremos entradas de control. Esta propiedad se puede comprobar mediante la matriz de controlabilidad \mathcal{C} , que se construye a partir de las matrices F y G del sistema de la siguiente forma

$$\mathcal{C} = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

donde n indica la dimensión del espacio de estado o, equivalentemente, la dimensión del espacio de columnas de F . Si la matriz \mathcal{C} tiene rango igual a n o completo, entonces se dice que el sistema es completamente controlable. No obstante, si el rango es menor que el valor n , el sistema no es completamente controlable. Así mismo, si un sistema es completamente controlable, teóricamente se pueden diseñar entradas de control para lograr la transición de un estado inicial a un estado deseado en un tiempo finito. Sin embargo, el tiempo para lograrlo puede ser amplio y dependerá de las restricciones específicas del sistema y las entradas de control disponibles.

En un sistema económico determinado, el concepto de controlabilidad significa que se puede influir en el sistema para moverlo desde un estado económico inicial a un estado económico deseado, utilizando políticas o intervenciones adecuadas. Y en este caso, el tiempo de transición dependerá de varios factores, como las políticas efectuadas, las decisiones económicas tomadas y el monto de recursos para su implementación. También influirá la complejidad, inercias y

la dinámica del sistema económico en cuestión. Es más, circunstancias exógenas y en ciertos casos fortuitas, como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos, influyen en los objetivos específicos de intervención y pueden tener un impacto significativo en esta, haciéndola más gradual o, por el contrario, más rápida.

El análisis de la estructura y comportamiento del sistema puede involucrar más elementos que los anteriores. Algunos de estos serían el estudio de la forma modal del sistema mediante forma de Jordan de la matriz F ; el estudio de los polos y ceros de la representación de espacio de estado en el dominio de la frecuencia; el impulso-respuesta del sistema; la revisión de la sensibilidad de F , G y H ; el análisis de perturbaciones; la identificación de patrones mediante simulación numérica; entre otros. Sin embargo, la investigación únicamente se enfoca en los conceptos básicos de los párrafos antecedentes.

Centrarse en elementos clave como estabilidad, controlabilidad y observabilidad permite brindar información crítica y general sobre la dinámica, viabilidad y desempeño de sistemas económicos, así como de su respuesta a perturbaciones y acciones de control. Es más, permite tener claridad y simplicidad sobre la teoría de la realización, así como de elementos y estrategias de la teoría del control, aplicados al análisis estructural y control de sistemas económicos. Esto lo logra al sortear análisis y elementos más complejos, los cuales requieren una interpretación, implementación y resultados más detallados e intrincados, más aún pensando en que deben estar entonados a la óptica económica. No obstante, cómo se verá en el siguiente capítulo, se tratarán algunos elementos más, aunque no para el análisis estructural. Ellos estarán dispuestos para la determinación del cambio estructural dentro de un sistema.

Capítulo 4

Implementación de la TR a sistemas económicos de entrada-salida

En el presente capítulo se aplica la realización sobre dos sistemas económicos específicos en los que no ha sido empleada con anterioridad. El primero de ellos está enfocado en la incidencia de la inflación y el restante en la conexión sistémica entre inflación, tasa de desocupación y balanza comercial con su pasado. La intención de plantearlos va más alla de su novedad, busca ofrecer formas para la identificación de relaciones entre variables dentro del marco de sistemas y bajo una representación entrada-salida. Esta última no necesariamente es única y, además, ella permite desdobljar las interacciones complejas subyacentes que suceden en el sistema, que son las que en realidad conectan a las variables en la entrada y salida. Además, se evita forzar la determinacion de las relaciones entre variables, no adjudicando una forma funcional entre ellas, asumiendo en cambio una relación de tipo contable. Con todo esto se busca brindar una comprensión más profunda y práctica sobre formas en que se puede aplicar la realización en la modelización económica.

De igual forma, en el capítulo se lleva a cabo un análisis básico sobre la estructura del sistema subyacente en los modelos tratados. Se verá cómo este es fundamental para comprender y analizar la dinámica subyacente de los sistemas. Por un lado se manifiesta si los sistemas poseen estabilidad o no, con base en la matriz F , además se expone si los estados de estos se pueden controlar y son observables. Esto con base en la información esencial reunida por las matrices F , G y H , tal como fue expuesto en el capítulo anterior. Así mismo, se muestra cómo poder aplicar la realización en la determinación del cambio estructural en los sistemas. De igual forma, se brinda una guía elemental sobre los mecanismos para gestionar el control del cambio en la estructura del sistema económico.

A lo largo de este capítulo también se enfocan con parquedad dos aspectos valiosos. El primero estriba en la comparación de los resultados de la realización bajo el AF y el FSF, al aplicarse sobre el modelo de incidencia de la inflación bajo el FSF. El segundo aspecto, por su parte, radica en la importancia que la precisión numérica posee al momento de la implementación del algoritmo de la realización. Esto quedará establecido dentro del contexto del segundo sistema tratado. Ahí se resaltará cómo la falta de una precisión adecuada puede comprometer la estabilidad numérica del algoritmo. Así, los cálculos se vuelven significativamente imprecisos, poniendo en riesgo la confiabilidad de los resultados y, por tanto, también a las características estructurales, así como a la determinación del cambio y control estructural.

4.1. Modelo entrada-salida sobre las incidencias de las componentes de la inflación de México

El INPC (Índice Nacional de Precios al Consumidor) es un indicador económico que mide la variación promedio de los precios de un conjunto de bienes y servicios que conforman la canasta de consumo de los hogares en un país. Se calcula mediante una canasta ponderada de bienes y servicios que representan el consumo típico de una población específica. Sus componentes son los diferentes grupos de bienes y servicios que se incluyen en la canasta de consumo y que se utilizan para calcular el índice. Estos se clasifican en dos grandes grupos: componentes **Subyacente** y **No Subyacente**. Así mismo, cada una engloba dos sub-componentes más: el primero a **mercancías y servicios**, y el segundo a **agropecuarios y energéticos y tarifas autorizadas por el gobierno**, respectivamente. Aunque la desagregación puede hacerse aún más detallada, para la presente sección, la clasificación dada es suficiente.

Por su parte, la incidencia de los componentes del INPC sobre la inflación general se refiere al impacto que cada grupo de bienes y servicios tiene en el cálculo del índice general de precios al consumidor. Cuando se calcula el INPC, cada componente o grupo de bienes y servicios se pondera en función de su participación en el gasto total de la población. Es decir, aquellos grupos de bienes y servicios que representan una mayor proporción del gasto total tienen un mayor peso en el cálculo del índice. Por lo tanto, los cambios en los precios de estos grupos tendrán un impacto más significativo en la inflación general medida por el INPC.

A guisa de ilustración, si el grupo de mercancías y servicios tiene un peso del 30 % en el INPC y los precios de los servicios aumentan significativamente, esto tendrá un impacto importante en la inflación general, ya que el grupo de alimentos y bebidas tiene un peso significativo en el cálculo del índice.

Las componentes del INPC cuentan con una medida llamada incidencia la cuál indica qué tanto participan en la inflación general. Esto depende de varios factores, incluyendo el peso que se le asigna a cada componente en el cálculo del índice y las variaciones de precios que ocurren en cada componente. Los cambios en los precios de diferentes grupos de bienes y servicios pueden tener efectos diferentes en la inflación general, y una de las tareas a realizar es estudiar estos patrones y tendencias para entender mejor los factores que influyen en la evolución de la inflación en una economía.

La Incidencia puede pensarse acumulativa (aunque hay variaciones estadísticas). Las Incidencias de las componentes Subyacente y No Subyacente son, respectivamente, la suma de las incidencias de sus subcomponentes. De esto se desprenden las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} I_S &= I_m + I_s &= I_m + I_v + I_c + I_{os} \\ I_N &= I_a + I_{et} &= I_a + I_e + I_{tag} \end{aligned}$$

donde I es la incidencia y su subíndice indica el componente al cual está asociada: S , subyacente; N , no subyacente; m , mercancías; s , servicios; v , vivienda; c , educación (colegiatura); os , otros servicios; a , agropecuario; et , energéticos y tarifas autorizadas por el gobierno; e , energéticos; y tag , tarifas autorizadas por el gobierno. Las igualdades anteriores se pueden convertir en la siguiente igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + I_c + I_{os} \\ I_a + I_{tag} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix}$$

y a partir de ésta se obtiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_m}{I_S} & \frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ \frac{I_a}{I_S} & \frac{I_{tag}}{I_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{I_m}{I_S} & -\frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ -\frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ahora, si llamamos A a la matriz que se debe invertir en la última igualdad, entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{I_m}{I_S} & -\frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ -\frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{I_m}{I_S}\right) \left(1 - \frac{I_{tag}}{I_N}\right) - \frac{I_a}{I_S} \frac{I_c + I_{os}}{I_N}$$

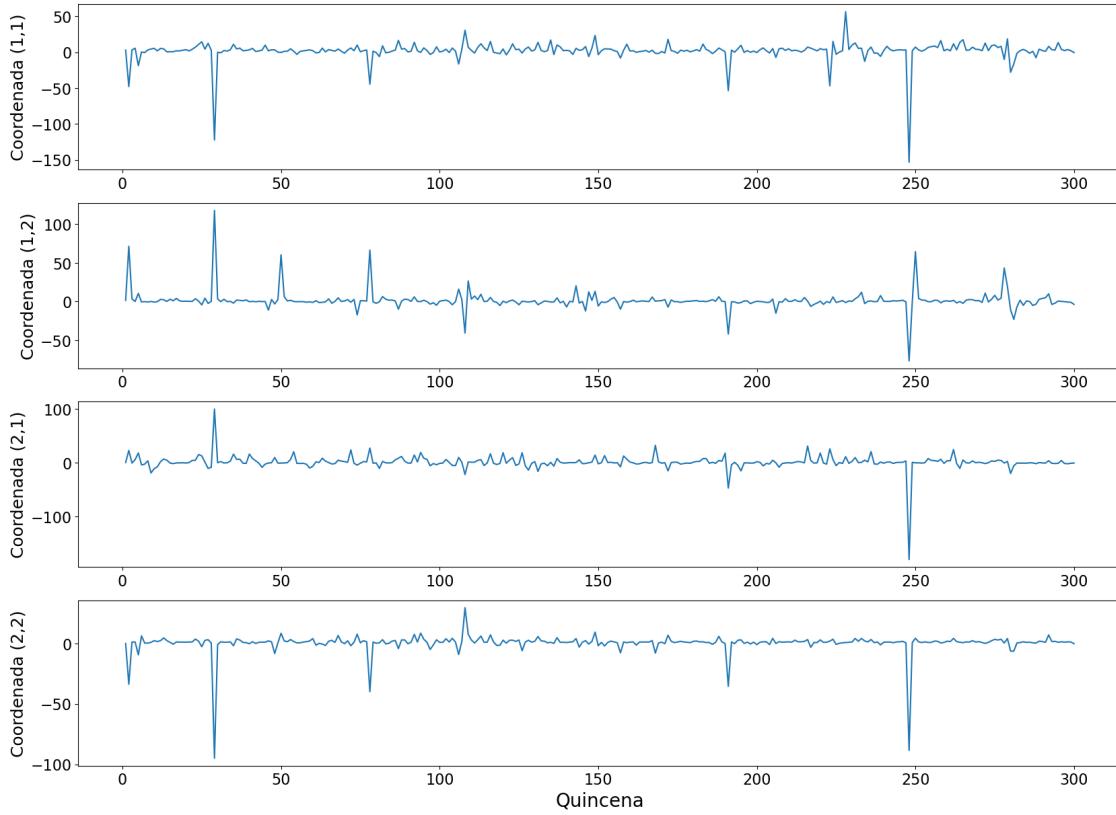
Por consiguiente, la última igualdad en (1), ahora tomando el modelo para el tiempo t , es equivalente a

$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix}_t = \frac{1}{\det(A_t)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} & \frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ \frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_m}{I_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix}_t \quad (2)$$

El modelo (2) expresa cómo en el tiempo t , el cual tomaremos quincenal, el vector de incidencia subyacente y no subyacente es determinado por el vector de incidencia de la vivienda y los energéticos. Los datos empleados para construir la DE del modelo, es decir, la sucesión de matrices de (2), se pueden ver en la Tabla (D.2), Apéndice D. Ellos abarcan 300 períodos, desde la primer quincena de enero de 2011¹, hasta la segunda quincena de junio de 2023, Además, la construcción de la DE puede replicarse con el código en el Apéndice D. Las series de tiempo elaboradas con cada una de las entradas de la DE pueden verse en la Figura 4.1.

¹Esto ya que antes de esta quincena no se tienen todas las incidencias por componente requeridas para construir (2)

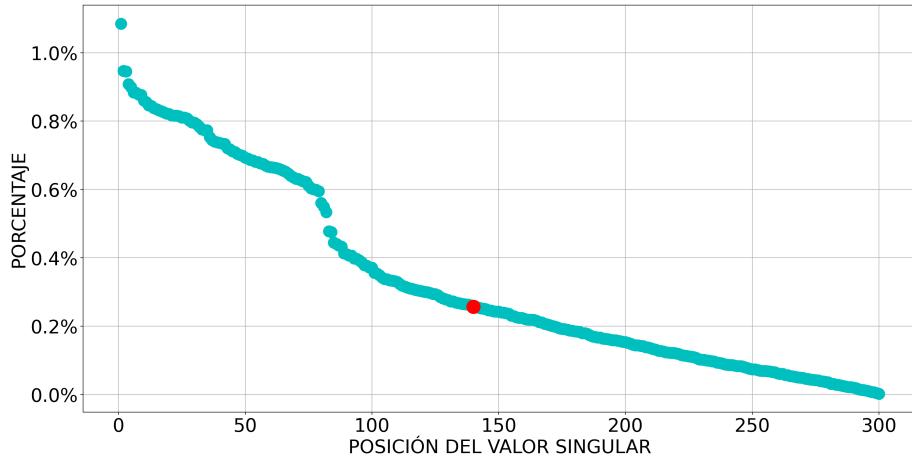
Figura 4.1: Series de tiempo de cada coordenada en la DE del modelo de incidencia



4.1.1. Realizaciones bajo el AF

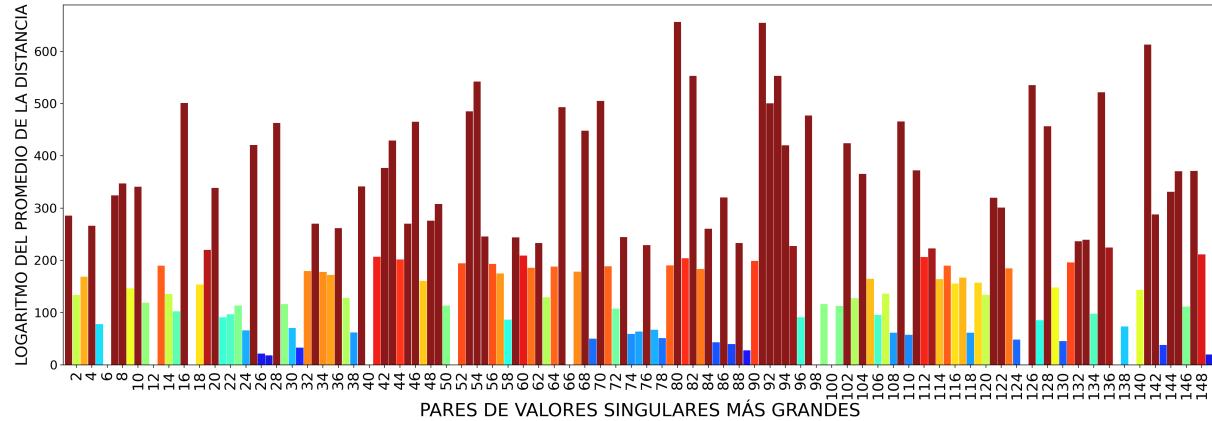
A partir de la DE generamos las realizaciones con datos compactados. Con este fin construimos la matriz con mayor dimensión posible, es decir, $\mathcal{H}_{151,150}$. Buscar este rango la matriz permite obtener un mayor número de opciones de realización, además de que los pesos de los valores singulares no dominantes pueden ser de menor tamaño, pudiendo afectar menos la compresión de información y a la estructura de Hankel. Los valores singulares de $\mathcal{H}_{151,150}$ se pueden observar en la Figura 4.2. El valor singular en rojo que se muestra indica la posición y el tamaño del valor singular para el cual, si se acumulan todos los anteriores, se supera el 80% del total. En este caso, los valores singulares tienen una caída suave y no parecen poseer valores dominantes considerablemente grandes.

Figura 4.2: Valores singulares de la Matriz de Hankel



Ahora, mediante el Código C.5 efectuamos 149 realizaciones para varios truncamientos de $\mathcal{H}_{151,150}$. Cada uno de ellos asociado a mantener un cierto número de pares de valores singulares más grandes. Además, el código permitió calcular la estimación de cada realización y compararla con la DE, obteniendo así la cercanía promedio que hay entre ellas. Esto se muestra en la Figura 4.3, donde el uso del logaritmo de los promedios se entiende al considerar los órdenes de magnitud de las distancias, los cuales limitarían las comparaciones. Para ilustrar el punto², el valor mínimo obtenido fue de 9.3×10^7 , el máximo de aproximadamente 7.81×10^{284} , la media de 6.82×10^{282} y la desviación estándar de 6.75×10^{283} .

Figura 4.3: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento

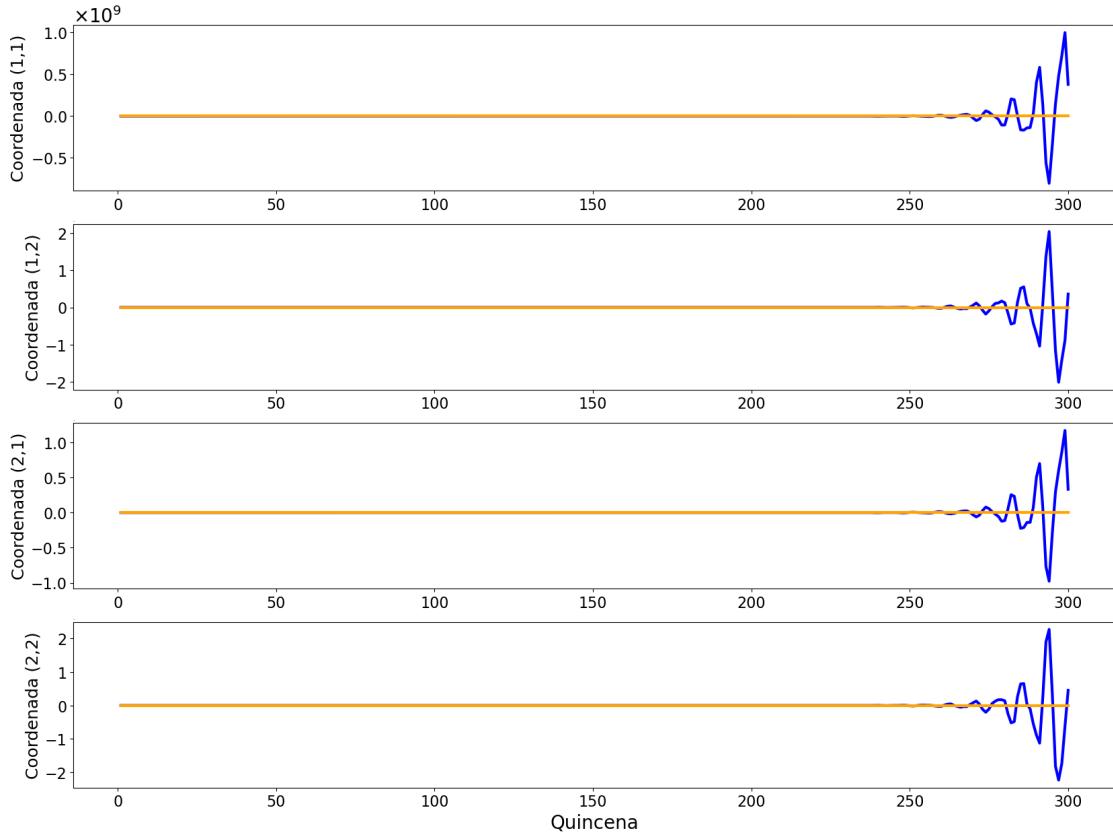


El valor mínimo mencionado, al aplicarle el logaritmo, arroja un 18.35, que corresponde a la mejor realización obtenida entre las 149 y, mediante la Figura 4.3, podemos notar que se ubica en los 27 pares de valores singulares más grandes. No obstante, aunque es la mínima distancia, sigue siendo una cantidad descomunal, la manifiesta la no estabilidad del sistema y la divergencia abrupta en la parte final de los 300 períodos, Figura 4.4. Debido a la paupérrima proximidad de la mejor estimación, se llega a la conclusión de que la compresión de información parece que

²Los siguientes valores se calculan en el Código C.5, y no consideran aquellos valores NaN generados por distancias excesivamente grandes, relativos a las barras ausentes en la Figura 4.3.

ha afectado la identificación del sistema subyacente. La causa de ello puede ser alguna de las situaciones que platicamos en una sección del capítulo anterior. El sistema subyacente posee varianza temporal, no linealidad, dimensión más grande, entre otras situaciones, como podría ser una DE con ruido. En cualquier caso, la identificación del sistema subyacente mediante una realización lineal compacta generada con el AF no resulta útil para hacer proyecciones o para entender cualidades del sistema subyacente, como la observabilidad y controlabilidad de los estados, y mucho menos para analizar la estructura y su cambio, o bien para el control de esta.

Figura 4.4: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)

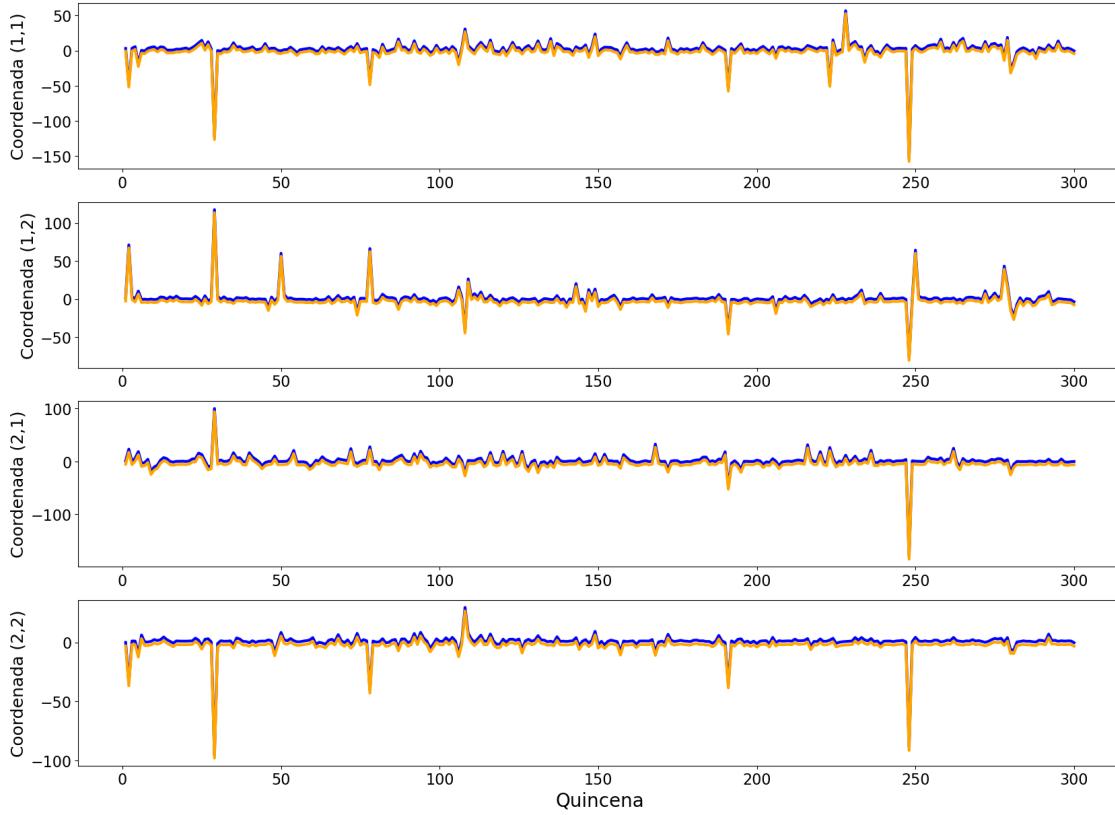


Debido a que las compresiones no son viables para poder analizar el sistema subyacente, pasamos a emplear toda la información en la DE, esto es, usaremos $\mathcal{H}_{151,150}$ sin compactarla bajo truncamientos. Los inconvenientes de hacerlo así es que la dimensión de la matriz de estado F resulta ser grande en la medida en que la DE lo es; en nuestro caso la dimensión fue de 300×300 . Esto no permite tener una interpretación sencilla de sus valores o su dimensión, a diferencia de una matriz de estado surgida de una compresión de información. Sin embargo, con ella si es viable revisar la observabilidad y controlabilidad del sistema, la estabilidad, además de permitir mayor certeza sobre la estructura subyacente, los cambios en esta e, incluso, cómo poder dirigirlos hacia un objetivo (control estructural).

En este sentido, el Código C.6 nos brinda la realización sin compresión de la MH. Además, nos ofrece la distancia promedio entre la estimación de la realización y la DE, la cual resulta ser notablemente pequeña, alrededor de 1.73×10^{-3} . Es por ello que en la Figura 4.5, las series de tiempo de las entradas en la estimación (azules) son tan cercanas a las respectivas de la DE

(naranjas) que prácticamente se encuentran superpuestas.

Figura 4.5: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en las aproximaciones de la realización sin compresión de información (azul)



4.1.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema de las incidencias de inflación

La realización sin compresión que se realizó para el modelo de incidencia de la inflación permite efectuar un análisis sobre la estabilidad del sistema subyacente, así como de su observabilidad y controlabilidad. Para el primer caso, el Código C.6 nos permite obtener los valores propios de la matriz de estado F y determinar la proporción de ellos con parte real negativa, la cual resulta ser 0 %. Por consiguiente, ninguno tiene parte real negativa y así el sistema no cuenta con estabilidad. Esto implica que el sistema es inestable bajo condiciones de entrada nula, es decir, cuando $(I_v \ I_e) = (0 \ 0)$. En consecuencia, bajo una perturbación inicial, el sistema no posee la capacidad de volver a un estado de equilibrio o mantenerse cerca de un estado a medida que evoluciona, divergiendo en el tiempo. Es decir, no es posible encontrar un control adecuado, esto es, una entrada acotada $(I_v \ I_e)^T$, para la cual el sistema pueda hacer volver a la salida $(I_S \ I_N)^T$ a una posición de equilibrio; en su lugar esta tenderá a oscilar de manera veleidosa e incontrolable al pasar el tiempo. Es así que no es factible influir en la convergencia de I_S e I_N bajo el esfuerzo de intervenir los valores de las incidencias de entrada, I_v e I_e .

La falta de estabilidad de entrada cero indica que incluso pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o el ruido en el sistema pueden causar respuestas no deseadas y potencialmente caóticas en ausencia de entrada. Esto puede ser problemático en aplicaciones donde se necesita que el sistema se mantenga en un estado estable o cerca de un punto de operación deseado. La

inestabilidad del sistema puede limitar las aplicaciones en las que se puede utilizar de manera efectiva. Algunos sistemas inestables pueden requerir un diseño especializado o pueden no ser adecuados para ciertas aplicaciones críticas. Como el sistema es inestable, se requerirá algún tipo de control o retroalimentación para estabilizarlo y mantenerlo dentro de los límites deseables. Esto puede implicar la implementación de controladores adecuados para mantener el sistema bajo control.

Por otra parte, en cuanto a la observabilidad y controlabilidad del sistema recordamos que se refieren a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las salidas observadas y la capacidad de controlar el estado del sistema utilizando entradas apropiadas, respectivamente. Así, un sistema es completamente observable si, a partir de las salidas disponibles y las entradas conocidas, es posible determinar el estado inicial del sistema. La observabilidad se relaciona con la matriz de observación H . Por su parte, un sistema es completamente controlable si es posible llevarlo de cualquier estado inicial a cualquier estado deseado en un tiempo finito mediante una adecuada elección de las entradas de control. La controlabilidad se relaciona con las matrices de entrada F y G del sistema.

En nuestro caso, bajo lo visto en el capítulo anterior y debido a que la dimensión del espacio de estados es $n = 300$, las matrices de controlabilidad C y observabilidad O están dadas como

$$C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{299}G \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{299} \end{bmatrix}$$

Con ayuda del Código C.6 se pudieron construir tanto C como O , así como obtener su rango. El resultado obtenido fue que ambas tenían el mismo rango que la matriz F . Por consiguiente, dado que el rango de esta última matriz es igual a la dimensión del sistema, podemos decir que este es completamente controlable y observable.

La completa observabilidad en este sistema permite que a partir de las medidas observadas de $(I_S \ I_N)_t^T$ podamos estimar el estado $x(t)$ del sistema en cualquier momento. Por su parte, la completa controlabilidad facilita el diseño de entradas de control $(I_v \ I_e)_t^T$, de manera que se pueda llevar el sistema desde cualquier estado inicial $x(0)$ a cualquier estado deseado $x^*(t)$. Sin embargo, aún siendo posible el control de dicha transición de estados, determinar cuánto tiempo requiere demanda aún más información. Deberá analizarse las limitaciones específicas del sistema de incidencias de las componentes de la inflación. Dentro de estas podrían encontrarse los objetivos, políticas y decisiones económicas; los factores externos, como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos; las complejidades del sistema; las entradas de control disponibles; entre otras. No obstante, este análisis escapa a los objetivos de la presente investigación, por lo que solo se menciona como un detalle a considerar cuando se tenga en mente un diseño de control de un sistema económico específico.

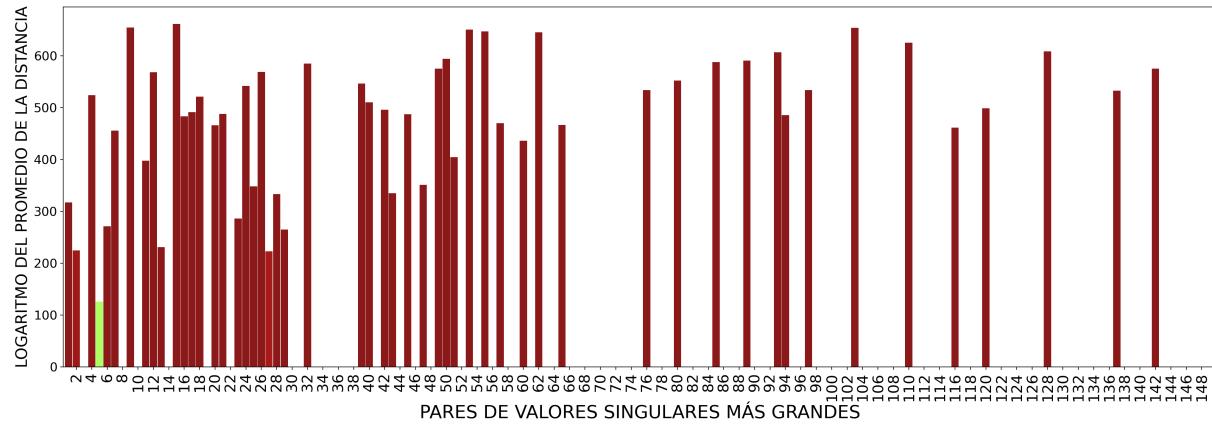
4.1.3. Modelo de incidencias de la inflación: algunas consideraciones sobre el proceso de factorización

Como se mencionó en el capítulo anterior, haremos uso de la FSF para efectuar realizaciones compactas en el modelo de incidencias de la inflación. A partir de esto se darán algunas observaciones provechosas sobre la FSF, las cuales involucrarán . La finalidad de realizar este apartado estriba

en hacer notar la necesidad de encontrar una proceso de optimización general de la factorización de la MH y, además, en poder dar algunos rasgos útiles que se encontraron con la FSF.

Para empezar, se emplea de nuevo el Código C.6, ahora para hacer las realizaciones compactas bajo el FSF. El resultado de su uso se puede apreciar la Figura 4.6, que muestra el logaritmo de la distancia promedio entre las estimaciones hechas con el FSF y la DE. Se aprecia a simple vista que, en general, los valores son más grandes que los mostrados en Figura 4.3 con el AF. Además, los espacios en blanco han aumentado, significando una alta imprecisión de las realizaciones obtenidas con el FSF. Incluso, se puede notar que la estimación más cercana a la DE es asaz grande con respecto a la obtenida con el AF, alrededor de 47 órdenes de magnitud más grande. Esta realización se encuentra en la posición 5 (construida con 5 pares de valores singulares), con un valor promedio de 4.324×10^{54} o de 125.8 al tomar su logaritmo.

Figura 4.6: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el FSF para cada truncamiento



Tomando en cuenta los resultados del FSF, podemos avalar la idea que fue mencionada en el capítulo anterior: el FSF está especializado en el modelo en aquel momento enunciado. Es decir, es poco general, no puede librarse de fallas en el proceso de construcción de una realización compacta y con aproximación promedio mínima a la DE en otros sistemas. Debido a su imprecisión, sus resultados no son útiles para analizar temas de estabilidad, controlabilidad, estructura u otros del modelo de incidencias de la inflación.

Sin embargo, aunque la FSF tuvo peores resultados en esta modelación con respecto al AF, su contraste numérico con la aplicación hecha en el capítulo anterior brinda algo de información útil para el proceso de optimización que también quedó abierto en dicho capítulo. Sin embargo, como se mencionó, el estudio de esto se encuentra fuera de los propósitos de la investigación, por lo cual no se ahondó demasiado en ello. Unicamente se brindó una explicación teórica de la importancia de tal contraste. Esto por si algún lector gusta usar los códigos respectivos para cotejar y profundizar, sepa el por qué y hacia donde poder apuntar.

Partamos de la expresión teórica del capítulo anterior

$$P^{-1}\mathcal{H} = Q$$

donde P^{-1} es la inversa de la matriz P construida con el FSF. A partir de esta igualdad se puede

ver a cada fila de Q como sigue

$$Q_i = P_i^{-1} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} p_{i1}^- & \dots & p_{ii-1}^- & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}^- \mathcal{H}_{j,:} + \mathcal{H}_{i,:}$$

donde los p_{ij}^- se toman no todos nulos. Así, cuando los pesos en la fila i de Q cumplen que $Q_i \approx \underline{0}$, se debería tener lo siguiente

$$\sum_{j=1}^{i-1} -p_{ij}^- \mathcal{H}_{j,:} \cong \mathcal{H}_{i,:} \quad (3)$$

Por tanto, los valores asignados a P^{-1} bajo esta expresión determinan una cierta configuración de pesos livianos en las filas de Q , en particular, para las últimas. Esto puede permitir que la omisión (compresión de Q) de estas últimas filas livianas puedan no tener un efecto inadecuado sobre la órbita de F , ni en la determinación de G y H , pudiendo mitigar inestabilidades del sistema con el paso del tiempo.

No obstante, la expresión (3) puede que esté “acotada”, es decir, sin importar los pesos asignados p_{ij}^- , la combinación lineal de las primeras $(i-1)$ -filas de \mathcal{H} (lado izquierdo) no podría acercarse indefinidamente a la fila i (lado derecho). Esto limitaría lo liviano de las fila i de Q y, por tanto, afectaría la compresión de información y sus efectos sobre la estabilidad del sistema. Incluso, si la determinación de los valores p_{ij}^- de P^{-1} permiten una buena compresión,³ debido a su relación farragosa con los pesos p_{ij} de P (por el proceso de inversión), y que estos últimos determinan F y H , podría haber un efecto amortiguador sobre la realización, haciendo que las ventajas de la compresión se pierdan debido a su impacto sobre P .

Lo dicho en los últimos párrafos es lo que hace que el contraste numérico entre el FSF del presente apartado y el del capítulo anterior brinde información importante. Por decir algo, el cotejo permite identificar patrones en los valores de \mathcal{H} que permitan conocer previo a algún cálculo, el grado de proximidad en expresión (3) que se puede alcanzar, independientemente de la elección de P^{-1} . Así mismo, da información sobre las relaciones entre P^{-1} y P , es decir, entre la compresión y la determinación de F y H . Es más, puede ayudar a comparar métodos como el de proyección, el de mínimos cuadrados, de gradiente conjugado, entre otros, para hallar los mejores pesos de P^{-1} para obtener una proximidad en (3), sujeta a una adecuada compresión y una adecuada determinación de F y H .

4.2. Entrelazamiento de series de tiempo

Cuando se trabaja con múltiples series de tiempo, es crucial encontrar metodologías que permitan capturar de manera efectiva las interacciones y las relaciones entre ellas. Una posibilidad que se propone en este apartado es el uso de la TR, la cual permitirá efectuar un análisis conjunto de series de tiempo a través de la realización de espacio de estado. Este enfoque a diferencia de otros, tiene el propósito de identificar y modelar el sistema subyacente que genera estas series de tiempo y, posteriormente, buscar una representación en espacio de estado que capture de manera efectiva su dinámica. A partir de esto se podrá capturar las dependencias o correlaciones entre las series dentro de un marco unificado y bajo una estructura entrada-salida. Además, a través

³Perdiendo la menor cantidad de información de \mathcal{H} y preservando lo mejor posible su estructura antidiagonal.

de esta metodología es posible descomponer cada serie de tiempo en sus componentes fundamentales, modelar sus interacciones mutuas y, en última instancia, realizar análisis predictivos y estructurales.

El enfoque conjunto que se presenta aquí, cómo se mencionó, es especialmente útil cuando se tienen múltiples series de tiempo que están interconectadas por un sistema subyacente común. No obstante, también permite trabajar con aquellas que no cuentan con vínculos dentro de un sistema, ya sean causales o correlacionales.⁴ Identificar y modelar este sistema subyacente, o sistemas (en el caso de que pertenezcan a sistemas independientes), es esencial para comprender la relación o no entre las series de tiempo y tomar decisiones informadas en una variedad de aplicaciones, como la predicción de datos futuros, el control de sistemas o la detección de anomalías.

Para comenzar asumamos la existencia de n variables económicas que teóricamente pueden o no estar asociadas causalmente o poseer correlaciones bajo un mismo sistema económico subyacente. Es decir, dichas variables pueden estar vinculadas bajo un mismo sistema, o pueden encontrarse disociadas y pertenecer a sistemas distintos, los cuales no tienen un nexo directo o significativo entre sí. Ahora, de cada una tomamos observaciones en tiempos regulares, con las cuales generamos sendas series de tiempo: $\{x_{it}\} i = 1, \dots, n$. Cada una de ellas posee información sobre la dinámica observada de su respectiva variable, pudiendo o no aportar información sobre el resto. Dicha información, bajo el supuesto $x_{it} \propto x_{i(t-1)}$ ⁵, se puede resumir en el concepto de tasa de crecimiento

$$a_{it} := \frac{x_{it}}{x_{i(t-1)}}$$

Esta medida representa una fotografía de los cambios que ocurren en el sistema entre los tiempos $t - 1$ y t para que la variable $x_{i(t-1)}$ se convierta en x_{it} . En cierto sentido, dicha tasa es una DE del sistema de cambios del sistema económico subyacente. Es decir, el sistema que refleja la DE no es directamente el sistema económico subyacente,

Con esto en mente, las tasas de crecimiento de sendas series se convierten en elementos a ser tratados mediante la TR. Para realizarlo conjuntamente, primero escribimos las series de tiempo en formato entrada-salida de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x_{1t} &= a_{1t}x_{1(t-1)} \\ x_{2t} &= a_{1t}x_{2(t-1)} \\ &\vdots && \vdots \\ x_{nt} &= a_{1t}x_{n(t-1)} \end{aligned}$$

Luego, sin alterar las relaciones y sin imponer interacciones en la representación externa entre las distintas variables, podemos acomodar cada una de las igualdades anteriores bajo la siguiente

⁴Esto debido a que en tal circunstancia, la realización conjunta podrá considerarse equivalente a las realizaciones individuales, lo cual puede ahorrar tiempo de procesamiento.

⁵Si se toma un tiempo entre observaciones sucesivas que se considere lo suficientemente pequeño para que el sistema subyacente sea estable en la tecnología, patrones de consumo y otras variables que influyan en la variable, dicha proporcionalidad puede tener validez.

igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} x_{1t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1(t-1)} \\ \vdots \\ x_{n(t-1)} \end{pmatrix} \quad (4)$$

El modelo (4) no indica la existencia de influencias entre variables en el ámbito externo, es decir, la matriz que representa a la DE sólo conecta una variable i en el tiempo t con su primer rezago. Sin embargo, la realización sí que podría mostrar interacciones de forma interna en el sistema, al nivel del espacio de estado. Además, en caso de que no, no hay mayor inconveniente, la realización lo podría reflejar del mismo modo.

Ahora se pasa a efectuar una aplicación del modelo (4) sobre 3 variables económicas. La primera de ellas es la balanza comercial, BC , una medida de la diferencia entre el valor de las exportaciones y el valor de las importaciones de bienes y servicios de un país. La balanza comercial positiva (superávit) ocurre cuando un país exporta más de lo que importa, lo que puede ser un signo de fortaleza económica. Por otro lado, un déficit comercial (importaciones superiores a las exportaciones) puede indicar una dependencia de bienes extranjeros o una falta de competitividad en la producción nacional.

La segunda variable a emplear es la tasa de desocupación, TD , una medida que indica el porcentaje de personas en edad de trabajar que están desempleadas y buscando activamente empleo en relación con la fuerza laboral total. Es una variable crítica porque el desempleo puede indicar problemas económicos, como una falta de oportunidades laborales o una desaceleración económica. Un alto nivel de desempleo puede tener efectos adversos en el bienestar económico y social de una población. Por último, se emplea la inflación, π , variable que se refiere al aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios en una economía durante un período de tiempo. Si la inflación es muy alta o inestable, puede erosionar el poder adquisitivo de la moneda y crear incertidumbre económica. Mantener la inflación bajo control es esencial para un crecimiento económico estable y sostenible.

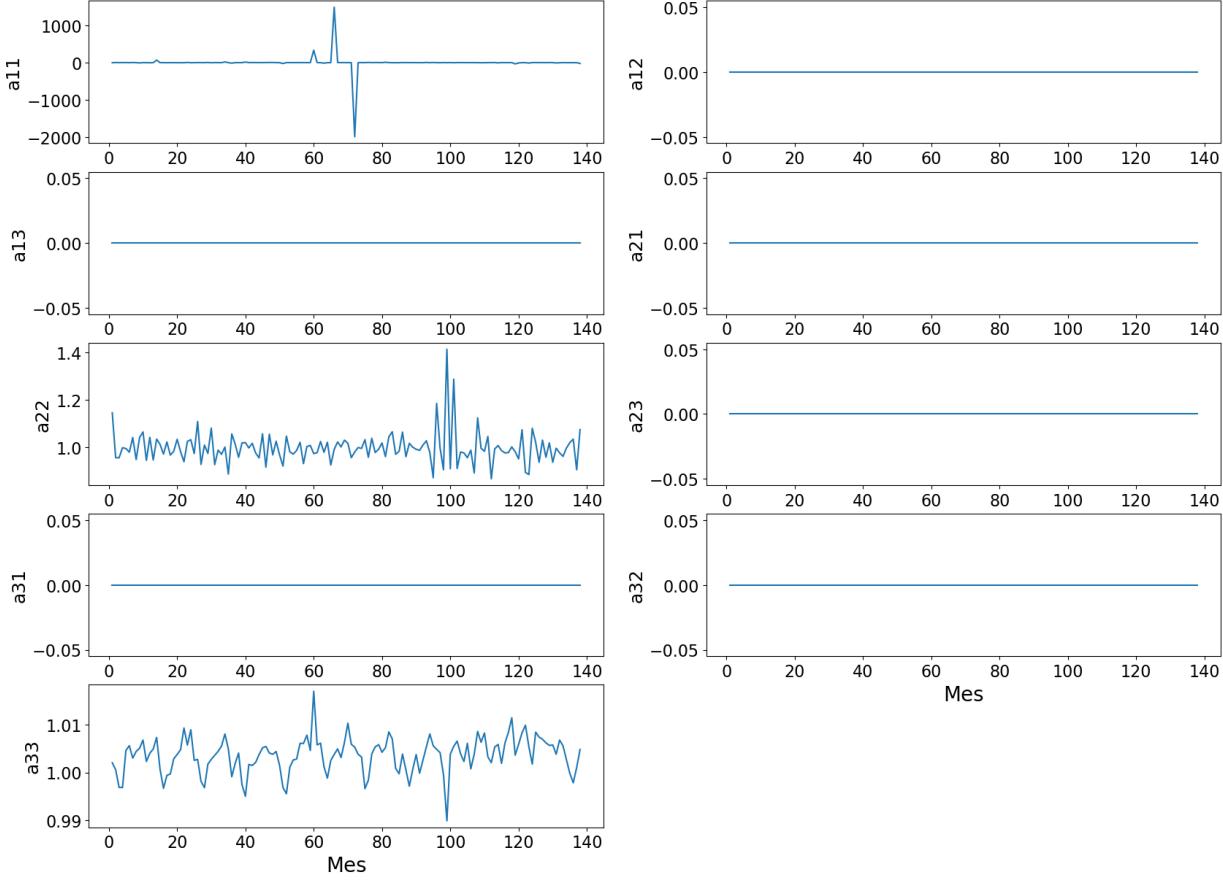
Por otro lado, según la teoría clásica, hay una relación inversa entre la TD y el $INPC$. Esto se conoce como la curva de Phillips, que sugiere que cuando la tasa de desempleo es baja, la inflación tiende a ser alta, y viceversa. Así mismo, dado que una BC positiva (es decir, un superávit) puede indicar una alta demanda de exportaciones, entonces esto puede afectar la TD de manera positiva al generar más empleos en el sector exportador. Es más, las fluctuaciones en BC pueden estar relacionadas con el ciclo económico de una nación. Por ejemplo, una balanza comercial negativa (déficit) puede indicar una desaceleración económica y, por lo tanto, una posible disminución de la demanda de mano de obra, lo que puede contribuir a un aumento de la TD . Inclusive, como la TD , el $INPC$ y BC también pueden estar influidas por las mismas políticas fiscales y monetarias del gobierno, pueden sostener correlaciones entre ellas. En consecuencia, hay evidencia sobre una interacción entre las variables bajo un mismo sistema económico, la cual pasaremos a descubrir internamente con ayuda de la realización.

Con este objetivo, tomamos $n = 3$, $x_{1t} = BC_t$, $x_{2t} = TD_t$ y $x_{3t} = \pi$, y lo aplicamos al modelo

(4), con lo cual podemos obtener lo siguiente

$$\begin{pmatrix} BC_t \\ TD_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{BC_t}{BC_{t-1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{TD_t}{TD_{t-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BC_{t-1} \\ TD_{t-1} \\ \pi_{t-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Figura 4.7: Series de tiempo de cada coordenada en la DE del modelo de entrada-salida BC , TD y π con respecto a sus rezagos



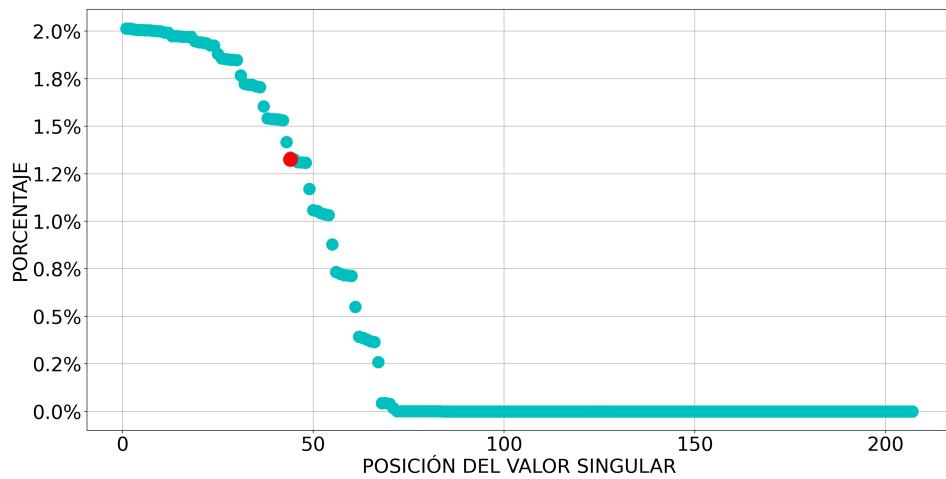
Los datos para la construcción de la DE, es decir, las matrices con las tasas de crecimiento en su diagonal principal y el resto 0, se pueden consultar en la Tabla D.3 en el Apéndice D. La temporalidad de las series es mensual y el periodo abarcado va desde enero de 2012 hasta julio de 2023. En la Figura 4.7 se puede ver las 9 series de tiempo correspondientes a las entradas de la DE.

4.2.1. Realizaciones bajo el AF

Los pasos siguientes serán efectuados con ayuda del Código C.7. Inicialmente, se construye $\mathcal{H}_{70,69}$ con la DE y se pasa a verificar si la compresión podría tener cabida en la realización. Para ello se hace una revisión visual y numérica de sus valores singulares. En el primer caso, la Figura 4.8 permite apreciar que estos poseen una caída relativamente pronunciada. En el ámbito numérico tenemos que de los 207 valores singulares, el 22.2% más grande (primeros 46, hasta el punto

rojo), absorben un 80 % del total de la variabilidad de los datos. Ambas revisiones sugieren que una parte relativamente pequeña de las dimensiones asociadas a los datos de la MH son las que contienen la mayor parte de la información importante sobre ellos. Por consiguiente, la reducción de dimensiones parece buena idea, pudiendo generar un modelo más eficiente y con mejor comprensión de los patrones latentes, características más influyentes y factores más significativos de los datos.

Figura 4.8: Valores singulares de la Matriz de Hankel del modelo entrada-salida entre BP , π y TD y su primer rezago



⁶Esto significa que se tomaron los primeros $30 = 10 \times 3$ valores singulares, es decir, las primeras 10 ternas más grandes de valores singulares

Figura 4.9: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento

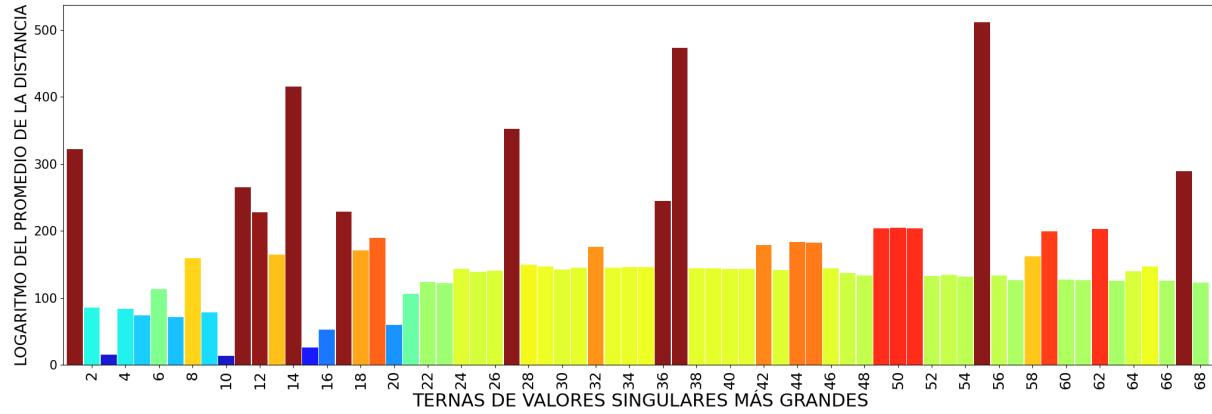
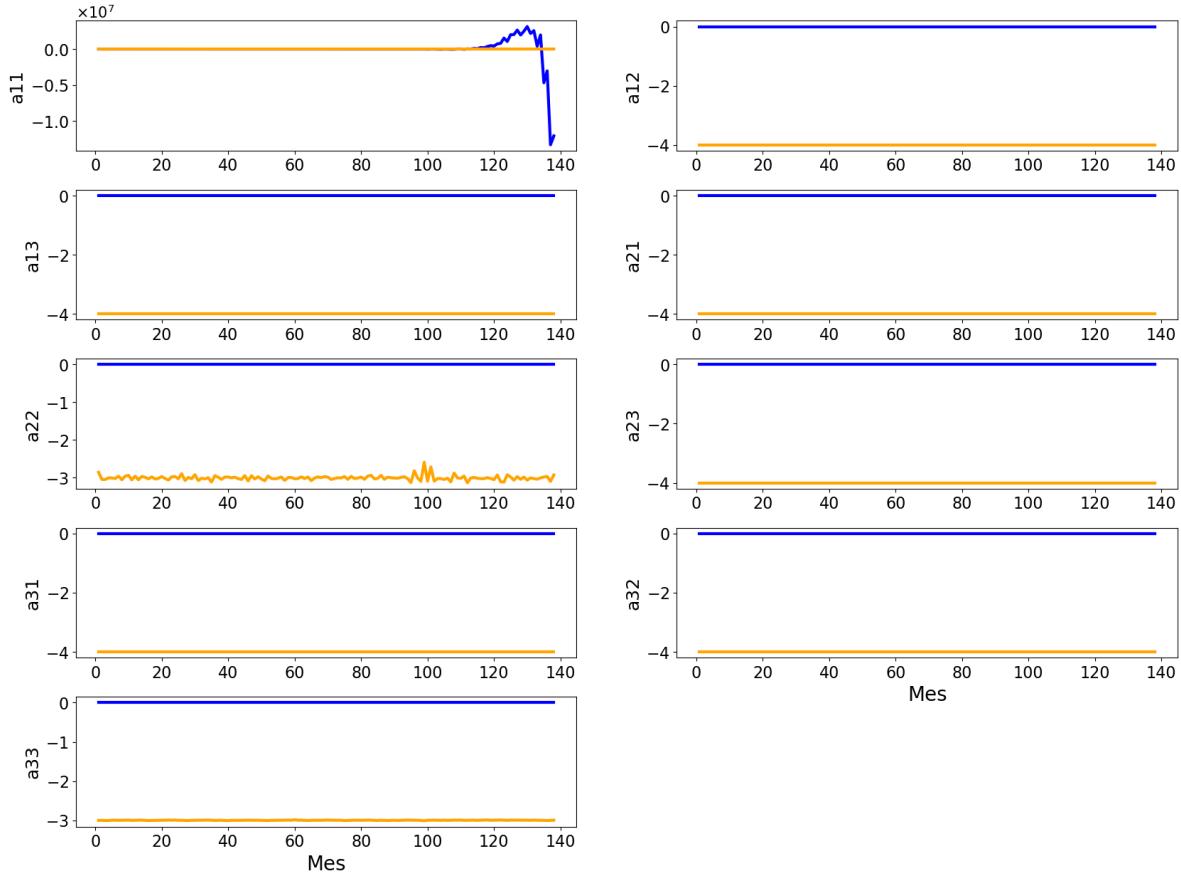


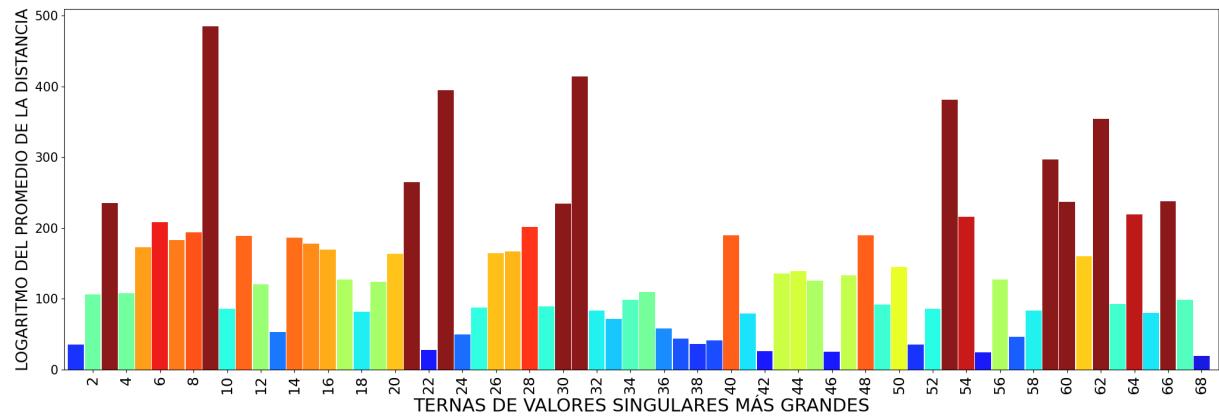
Figura 4.10: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)



No obstante, debido a la implementación del caso sin compresión, que se verá más adelante, se notó que la estabilidad numérica del algoritmo de la realización para el modelo (5) fue afectada por la acumulación de errores. Por consiguiente, se construyó en Código C.8 donde se efectúa la

realización con un grado más alto de precisión, tomando ahora 40 decimales.⁷

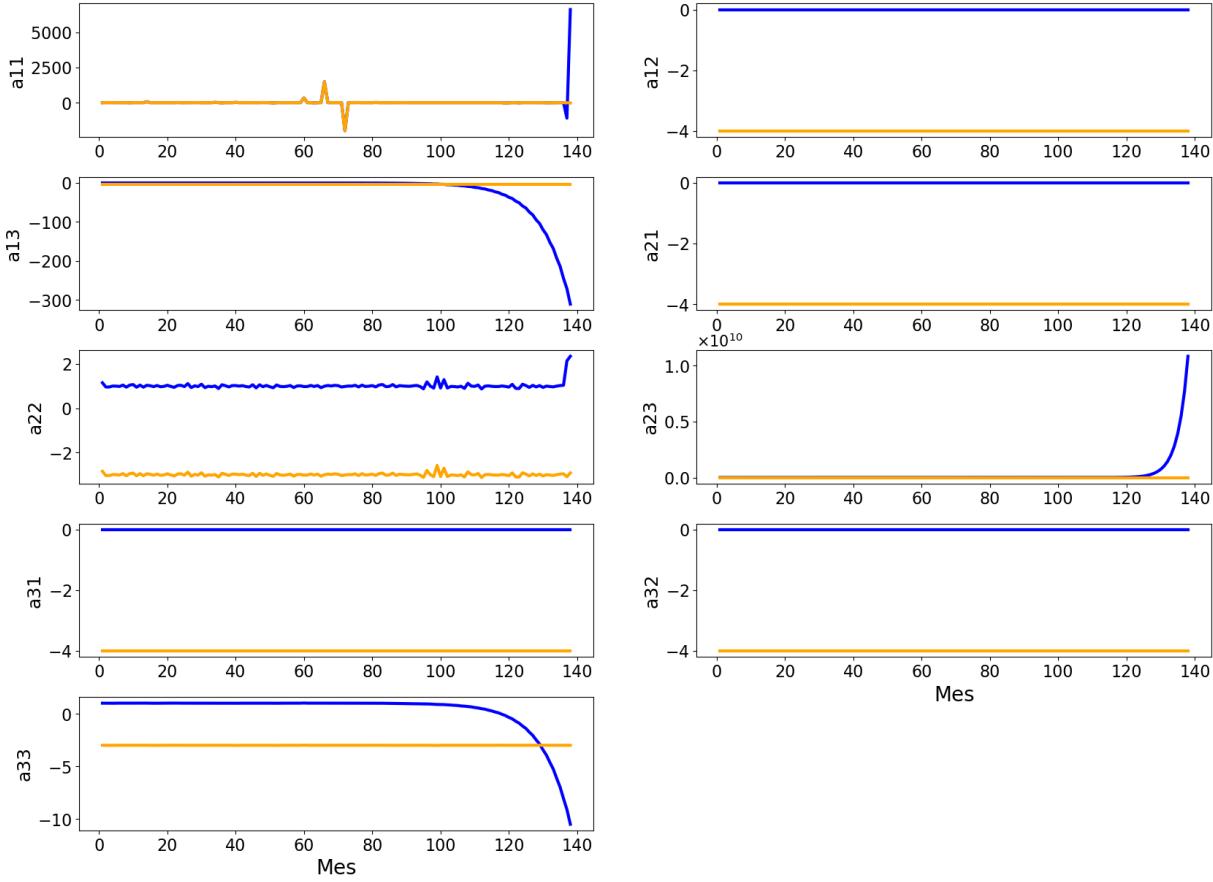
Figura 4.11: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento con mayor precisión



Recordando lo advertido en el Capítulo 3, es posible que la compresión pueda perder sus virtudes en la realización debido al detrimiento en la estructura de Hankel, la descomposición de la MH empleada y por ciertas características del sistema de que se trate. Para averiguar si realmente los beneficios de la compresión se sostienen, revisemos. Nos permite notar que la identificación del sistema subyacente mediante una realización lineal compacta generada con el AF no resulta útil para hacer proyecciones o para entender cualidades del sistema subyacente. Es evidente que al compactar la MH, la realización ha resultado ser inestable en el tiempo, divergiendo abrupta y rápidamente al final del periodo de tiempo.

⁷En los casos donde se conservan 14 y 16 ternas de valores singulares, aún con precisión de 40, una matriz relevante para la realización, que es triángular inferior de diagonal unitaria, aparecía como singular. Por consiguiente, para sólo esta inversión, se tuvo que aumentar la precisión a 45, lo cual permitió que los errores acumulados ya no hicieran que ellas fueran identificadas como singulares.

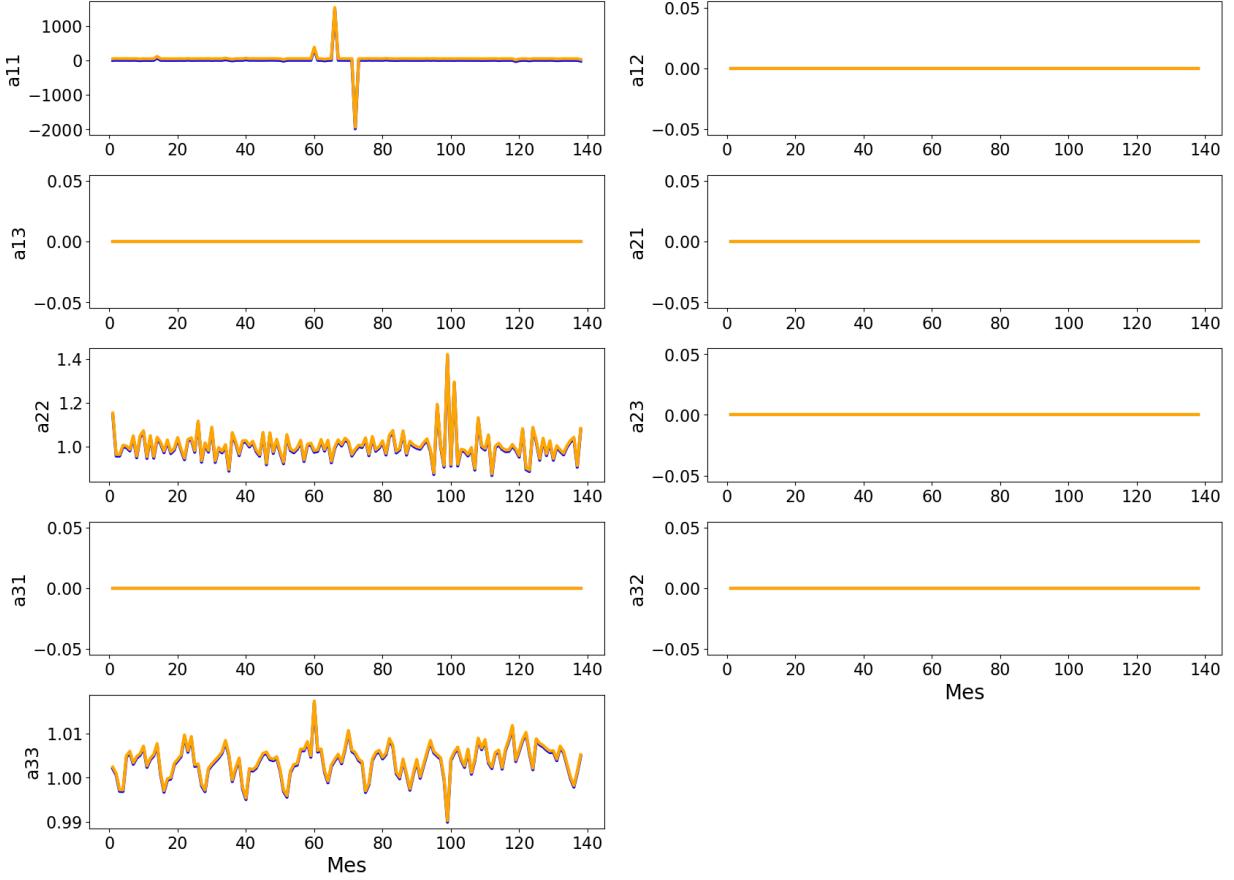
Figura 4.12: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)



Mediante el Código C.9 obtenemos la realización sin compactar la MH y con la precisión de 50 decimales. En la Figura 4.13 podemos ver las entradas de su estimación, comparada con las de la DE. Debido a que las compresiones no son viables para poder analizar el sistema subyacente, se pasa a realizar toda la DE, sin truncamientos. Para esto se empleó el Código C.7, que sigue el mismo esquema de realización efectuado hasta ahora, pero aumentando la precisión a 50 decimales. Esto último debido a que al tomar la precisión que se venía usando, el algoritmo de la realización perdía su estabilidad numérica. Esto daba pie a que se acumularan imprecisiones significativas sobre las matrices F , G y H , generando que la órbita $HF^{t-1}G$ divergiera de manera abrupta de la DE.

La realización con el aumento de la precisión pudo lograr lo esperado teóricamente: una pequeña diferencia promedio de su estimación con respecto a la DE, que rondó el 8.16×10^{-11} . Una forma de acentuar este resultado es advertir la Figura 4.13. En ella se observa como las series de tiempo de las entradas de la estimación (azules) y las respectivas de la DE (naranjas), son tan parecidas que prácticamente se encuentran superpuestas.

Figura 4.13: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en las aproximaciones de la realización sin compresión de información (azul)



4.2.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema entre BC , $INPC$ y TD con respecto a sus rezagos

La ejecución sin compresión del modelo (5) permite llevar a cabo un análisis de la estabilidad del sistema subyacente, así como de su observabilidad y controlabilidad. En cuanto a la estabilidad del sistema, el Código C.9 nos brinda la capacidad de calcular los valores propios de la matriz de estado F y determinar la proporción de aquellos con parte real negativa, que resulta ser el 50.2 %. Por lo tanto, ya que solo la mitad de los valores propios tiene parte real negativa, se tiene que el sistema carece de estabilidad. Esto significa que el sistema es inestable y puede manifestar comportamientos oscilatorios, divergentes y sensibilidad a condiciones iniciales. En consecuencia, ante una perturbación inicial, el sistema no puede retornar a un estado de equilibrio a medida que avanza en el tiempo. De esto se sigue que no es posible influir en la estabilidad de BT , π e TD únicamente manipulando sus valores rezagados. Debido a su inestabilidad, será necesario implementar algún tipo de control o retroalimentación para estabilizar el sistema y mantenerlo dentro de los límites deseados.

Por otro lado, en relación con la observabilidad y la controlabilidad del sistema, estas se refieren a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las salidas observadas y la capacidad de controlar el estado del sistema mediante entradas apropiadas, respectivamente. Un sistema es completamente observable si es posible determinar el estado inicial del sistema a partir de las salidas observadas y las entradas conocidas. La observabilidad se relaciona con la

matriz de observación H . Por otro lado, un sistema es completamente controlable si es posible llevarlo desde cualquier estado inicial a cualquier estado deseado en un tiempo finito mediante una elección adecuada de las entradas de control. La controlabilidad se relaciona con las matrices de entrada F y G del sistema.

En nuestro caso, con base en lo explicado en el capítulo anterior y considerando que la dimensión del espacio de estados es $n = 207$, las matrices de controlabilidad C y observabilidad O se pueden expresar de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{206}G \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{206} \end{bmatrix}$$

Utilizando el Código C.9, pudimos construir tanto C como O y determinar sus rangos. El resultado mostró que ambos tenían el mismo rango que la matriz F , es decir, 207. Por lo tanto, podemos afirmar que el sistema es completamente controlable y observable. La completa observabilidad en este sistema nos permite estimar el estado $\underline{x}(t)$ del sistema en cualquier momento a partir de las medidas observadas $(BP \pi TD)_t^T$. Por otro lado, la completa controlabilidad facilita el diseño de entradas de control $(BP \pi TD)_{(t-1)}^T$ para llevar el sistema desde cualquier estado inicial $\underline{x}(0)$ a cualquier estado deseado $\underline{x}^*(t)$. Sin embargo, como se mencionó ante, conocer el tiempo que tomará tal cambio de estados requerirá un análisis más profundo sobre las tres variables. Este podría incorporar objetivos económicos, políticas y decisiones económicas, factores externos como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos, entre otros, escapando por lo mismo del alcance de la presente investigación.

4.3. Identificación y control del cambio estructural

Las transformaciones en la estructura de una economía son sucesos incesantes y complejos. Ellos surgen por situaciones notables que alteran el comportamiento proverbial del sistema económico. Una de tales situaciones sería el avance tecnológico, el cual cambia drásticamente la forma en que se producen y distribuyen los bienes y servicios. Además, puede afectar la demanda de habilidades laborales, la naturaleza de la producción y la estructura de los mercados. Otra situación más es el cambio en las preferencias de los consumidores, que modifican las tendencias en la demanda de bienes y servicios, y puede impulsar variaciones en la estructura de los sectores económicos. Por ejemplo, la creciente demanda de bienes y servicios relacionados con la sostenibilidad ha llevado a cambios en las industrias relacionadas con energías renovables y productos ecológicos.

Así mismo, las políticas gubernamentales, como regulaciones, impuestos, subsidios y políticas comerciales, son otras situaciones que pueden instigar transformaciones en el sistema económico. Ellas logran fomentar o desalentar la inversión en ciertos sectores, alterando la competitividad y la dinámica del mercado. Igualmente, las crisis económicas y financieras, como recesiones, burbujas financieras o crisis de deuda, pueden desencadenar transformaciones importantes al exponer vulnerabilidades en determinados sectores y estimular ajustes en la asignación de recursos y en la priorización de sectores clave. Es más, variaciones en la demografía, como el envejecimiento de la población, el crecimiento de la población urbana o los cambios en la estructura familiar, también son parte de las situaciones que pueden influir en la transformación económica, al impactar sobre la demanda de ciertos bienes y servicios, y conducir a cambios en la estructura de la producción y el empleo.

La detección y comprensión del cambio en la estructura de un sistema económico, originada por lo precedente o por otro tipo de situaciones, es crucial por múltiples razones. En primer lugar, permite a los responsables de la formulación de políticas adaptar estrategias para abordar los desafíos específicos que surgen por tales transformaciones. Además, puede ayudar a prever posibles impactos de tal suceso, como variaciones en el empleo, la distribución de ingresos y la competitividad internacional, permitiendo una planificación más efectiva para mitigar efectos negativos. Así mismo, brinda información para la construcción de herramientas de detección temprana de cambios estructurales, favoreciendo el aprovechamiento de oportunidades emergentes. Incluso, puede fomentar el crecimiento económico sostenible gracias a la identificación de mecanismos de control del cambio estructural.

4.3.1. Identificación del cambio estructural

Para llevar a cabo la tarea de determinación del cambio estructural, la teoría de la realización es una herramienta a ser considerada. Como se vio, ella utiliza las realización (FGH) para representar la estructura del sistema económico subyacente y, por consiguiente, en estas matrices radica la identificación y entendimiento del cambio estructural. Siendo más prolífico, determinar la existencia o no de un cambio estructural en un sistema económico bajo la realización se puede efectuar mediante

- (i) Contrastar directamente las realizaciones en dos períodos de tiempo contiguo, y
- (ii) Comparar elementos derivados de las realizaciones

Para atender el punto (i) podemos emplear una función de distancia sobre las realizaciones de períodos contiguos de un sistema. Sea $(F_1G_1H_1)$ la realización del sistema en un período dado y $(F_2G_2H_2)$ la del período subsecuente inmediato, la semejanza entre ambas se podrá determinar en la medida en que al aplicar la distancia de Frobenius a pares respectivos de matrices en ambas realizaciones, esta sea próxima a 0, es decir,

$$d_F(F_1, F_2) \approx 0, \quad d_F(G_1, G_2) \approx 0, \quad d_F(H_1, H_2) \approx 0$$

Por otro lado, para un sistema también es posible hallar la existencia de proporcionalidad entre sus relaciones de entrada-salida y dinámicas internas en períodos contiguos. Esto significa que las realizaciones son equivalentes, por lo que las estructuras fundamentales del sistema en cada período son análogas, invariantes bajo alguna transformación lineal,⁸ pudiendo verse distintas pero sólo por diferir en escalas, unidades o magnitudes. Es por ello que la equivalencia puede fungir como otra medida directa de similitud entre realizaciones, y por ello ser usada dentro del contraste del punto (i).

Para emplear la equivalencia como medida de semejanza, partimos de $(F_1G_1H_1)$ y $(F_2G_2H_2)$, las realizaciones de dos períodos contiguos de un sistema. Ahora, para decidir su grado de similitud, hay que encontrar la transformación lineal T que permita la mayor proximidad de las siguientes expresiones

$$F_2 \approx TF_1T^{-1} \quad G_2 \approx TG_1 \quad H_2 \approx H_1T^{-1} \quad (6)$$

Cabe aclarar que para probar el grado de cercanía, igual que en la prueba de semejanza previa, emplearemos la distancia de Frobenius.

⁸Para revisar con mayor detalle el tema de equivalencia entre realizaciones se recomienda Friedland (1986).

Antes de proseguir con la explicación sobre los procesos de análisis de cambio estructural del punto (ii), hay algo más que decir sobre (6). Primeramente hay que mencionar que aquellos se basan en conceptos matemáticos que están muy relacionados con las dinámicas internas, estabilidad, control y observabilidad del sistema. Por lo cual, si (6) se convierte en una equivalencia, es decir, las proximidades pasan a ser igualdades, entonces las dos realizaciones tendrían las mismas características asociadas a estos conceptos matemáticos. Por ende, indirectamente se estará validando lo que atañe al punto (ii), no teniendo sentido efectuar cada uno de sus procesos. Es más aún cuando (6) no sea una equivalencia, pero sí demasiado próxima, podría ser válido soslayar el análisis del punto (ii).

Para analizar el cambio estructural desde el punto (ii), empezamos por hacerlo mediante dos conceptos de los cuales ya se habló: la observabilidad y la controlabilidad del sistema. Si se recuerda, un sistema posee ambos en cuanto sus matrices de observabilidad y controlabilidad, O y C respectivamente, son de rango completo. Así, si consideramos un sistema en dos períodos colindantes, lo que brindaría evidencia de cambio estructural es que la cualidad de rango completo de O o la de C difiriera en cada periodo. Es decir, si para el primero se verifica el rango completo en alguna de las matrices O y C , en el segundo no se debería de cumplir, o viceversa. Esto es así ya que si un sistema fuera controlable en una tiempo, por decir algo, y luego deja de serlo en otro tiempo, algo en las interacciones del sistema y en su dinámica debió cambiar para que fuera así. Como estas son partes de su estructura interna, se podría concluir que esta debió de cambiar.

Por otro lado, existe otro concepto matemático que también es útil para lo que se lleva a cabo en el punto (ii): la función de transferencia. En nuestro caso, este es una representación matemática que describe la relación entre la entrada y la salida de un sistema dinámico lineal e invariante, pero no en el dominio del tiempo más que en el dominio de la frecuencia.⁹ Su uso facilita el estudio de cómo los sistemas responden a cambios en las condiciones iniciales y cómo se comportan en el estado estable. Además, favorece el diseño de controladores que ajusten el sistema para cumplir con ciertos criterios de rendimiento y especificaciones. También es crucial para analizar la estabilidad de un sistema y proporciona información sobre cómo un sistema responde a diferentes frecuencias de entrada, permitiendo comprender su sensibilidad y robustez.

La función de transferencia en nuestro caso es una matriz, llamada matriz de transferencia, y para construirla requerimos la realización. Digamos que esta es dada por (FGH) , entonces como el sistema es discreto, se puede construir la matriz de transferencia bajo la siguiente transformación¹⁰

$$\mathcal{H}(z) = H(zI - F)^{-1}G$$

donde $z \in \mathbb{C}$ y se puede ver como $z = re^{j\omega}$, donde ω es la frecuencia y j la unidad imaginaria, y por ello es que se dice que se encuentra en el dominio de la frecuencia. Por consiguiente, si $(F_1G_1H_1)$ y $(F_2G_2H_2)$ son las realizaciones de dos períodos contiguos del sistema, podemos construir sendas funciones de transferencia,

$$\mathcal{H}_1(z) = H_1(zI - F_1)^{-1}G_1, \quad \mathcal{H}_2(z) = H_2(zI - F_2)^{-1}G_2$$

A partir de la confrontación de ambas es como se podrá constatar el grado de similaridad que

⁹Para entender teóricamente y ver ejemplos de aplicación de la función de transferencia se recomienda el libro de Franklin *et al.* (2020).

¹⁰La transformación que se aplica es la transformada Z , la cual es una extensión para sistemas discretos de la transformada de Laplace aplicada a sistemas continuos.

poseen las realizaciones y, por tanto, si existe o no cambio estructural en el sistema. Así, para realizar el contraste de las matrices de transferencia se hará por tres vías,

- (a) Identificando si sus coeficientes son proporcionales;
- (b) Comparando polos y ceros; y
- (c) Determinando si sus respuestas son parecidas ante mismas señales de entrada

Como la matriz de transferencia tiene cocientes de polinomios de variable compleja en cada una de sus entradas, entonces para efectuar (a) simplemente habría que corroborar que tan proporcionales son los coeficientes de dichos polinomios en una entrada de $\mathcal{H}_1(z)$ con respecto a los del elemento de $\mathcal{H}_2(z)$ en la misma posición, tanto del numerador como del denominador. Igual que en el caso de la equivalencia del punto (i), esto se puede llevar a cabo mediante métodos numéricos. Con respecto a (b), hay que verificar si las raíces de los polinomios en el numerador (ceros) y en el denominador (polos) son cercanos para las mismas entradas en las matrices de transferencia. En tal caso, como los polos son críticos para comprender la estabilidad¹¹, los ceros para la respuesta del sistema¹² y la ubicación de ambos para la dinámica del sistema¹³, entonces si las dos funciones de transferencia poseen polos y ceros cercanos, eso querrá decir que estas cualidades son parecidas, por lo que habría evidencia de que estructuralmente son parecidos.

En lo que concierne a la operación de (c), se usan señales de entrada sobre las matrices de transferencia para obtener respuestas que identifiquen cualidades estructurales y dinámicas del sistema, capturando así diversas características del sistema. La meta de esto es poder comparar las respuestas e identificar si el sistema en ambos períodos tiene las mismas. Algunas señales comunes para este propósito incluyen a la señal impulso, la cual es útil para entender como el sistema responde a cambios instantáneos en la entrada. Otra más es la señal escalón unitario que es útil para analizar la respuesta del sistema a cambios abruptos y continuos en la entrada. Además, proporciona información sobre la estabilidad y la respuesta en régimen permanente. Una señal más es la senoidal, que permite variar la frecuencia para evaluar cómo el sistema responde a diferentes valores de ella. Adicionalmente, las señales rampa y pulso ayudan a entender el comportamiento del sistema ante cambios graduales y a identificar cómo lo afectan secuencias de pulsos, es decir, cómo responde a cambios intermitentes y pulsantes en la entrada. También es posible hacer señales más complejas al combinar distintas de las anteriores. Esta mezcla permite obtener información conjunta sobre el sistema, brindando en algunas casos más detalles sobre la forma en que funciona y sus límites de operación. No obstante, esto depende del tipo de sistema y las cualidades que se busquen en él.

Hablando un poco sobre cómo se introduce la señal a las matrices de transferencias, cabe aclarar que en un sistema SISO, que recibe una sola entrada y responde con una sola salida, como se vio en el capítulo 2, la señal ingresa por una única entrada y con ello se genera una única respuesta a analizar. No obstante, en lo que respecta a sistemas MIMO o de múltiples entradas y múltiples salidas, la respuesta global es un vector, y cada posición de él es una respuesta individual a la señal que se incorpora. Además, en cuanto a la entrada, esta también es un vector, y la señal se incorpora desde cualesquiera de sus posiciones. Es común iniciar incorporando la señal de forma

¹¹El sistema es estable si todos los polos tienen partes reales negativas. Por otro lado, si al menos un polo tiene una parte real positiva, el sistema es inestable.

¹²Los ceros de la función de transferencia indican las frecuencias en las que la función de transferencia es nula. Esto afecta cómo el sistema responde a diferentes frecuencias de entrada.

¹³Polos cercanos al eje imaginario pueden dar lugar a oscilaciones, mientras que polos lejanos indican un comportamiento más amortiguado.

aislada, esto es, ingresando la señal en una posición del vector de entrada, dejando el resto de las posiciones con ceros. Esto nos dirá como son influenciadas los valores en el vector de respuestas por dicha posición del vector de entrada, además de incorporar los efectos que porta el tipo de señal usada. Esto hace posible encontrar combinaciones de posiciones en el vector de entrada, así como el tipo de señales que permitan estabilizar al sistema y/o llevarlo a un estado estacionario, entre otras acciones. No obstante, cuando no se desea aislar la señal, o dicho de otra manera, cuando se busca incorporar más efectos conjuntamente, se pueden incorporar varias señales a lo largo de las posiciones del vector de entrada. La elección de cuales señales y en qué posiciones usar para ingresarlas depende de lo que se esté indagando, del tipo de sistema del que se trate y del grado de complejidad que se busque. En lo que sigue únicamente se emplean señales aisladas como las mencionadas, sorteando así obstáculos que eclipsan lo esencial del método.

Así mismo, en cuanto al tiempo en que se introducen las señales de entrada (impulso, escalón unitario, sinusoidal, etc.), y por tanto se dispone el tamaño de las series de tiempo de las respuestas, hay que decir que debe poseer una duración que permita que la señal respectiva destaque las diferencias o similitudes en el comportamiento de los sistemas. En una señal impulso y en la escalón unitario, por ejemplo, puede ser recomendable elegir un tiempo suficiente para ver si la respuesta del sistema se estabiliza por la primera y alcanza un estado estacionario por la segunda. A su vez, en lo que atañe a la señal sinusoidal, se podría elegir un duración que permita observar varios ciclos de la señal y comprender el comportamiento periódico del sistema. Incluso, en este último caso, también es interesante incorporar la variación de la frecuencia de la señal para explorar diferentes comportamientos del sistema y cambios de estado en las respuestas, lo que podría promediarse para la elección del tiempo adecuado de duración de la señal.

Por otro lado, además de la señal y el tiempo en que es suministrada, hay que tener maneras de determinar la semejanza entre las respuestas. Esto puede darse de varias formas, una de ellas es mediante el método visual. Correspondiente a su nombre, este consiste en contrastar las series de tiempo de las respuestas mediante observación, inicialmente en valores absolutos, encontrando discrepancias evidentes en sus patrones y magnitudes. Separaciones amplias o patrones distintos entre ellas, como en varianza, tendencia, media, picos o valles, entre otros, brindan evidencia de una semejanza pobre. Un ejemplo podría ser cuando la respuesta tenga una oscilación divergente, pero en la respuesta correspondiente a contrastar se tenga una oscilación convergente. Incluso, en caso de que las diferencias visuales sean pequeñas para declarar tajantemente algo sobre su parecido o diferencia a nivel absoluto, se podría pasar a visualizar transformaciones de dichas series, como podría ser series de diferencias relativas o porcentuales de las respuestas, y a partir de esto hacer meridianas las disparidades existentes, pudiendo asumir una postura más concluyente al respecto.

Además, en el caso en que los métodos visuales no sean tan claros o se puedan considerar ambiguos, es posible basarse en otro tipo de métodos más. Uno de ellos podrían ser los numéricos, basado en el error cuadrático medio; la métrica de Frobenius, Mahalanobis u otras; el coeficiente de correlación; los índices de similitud, como el de Jaccard; y el coeficiente de similitud de coseno, entre otros (Shumway y Stoffer, 2011). Es más, otro tipo de métodos que se pueden emplear buscan comparar la forma de la curva de manera global. Dentro de estos encontramos el contraste mediante la alineación dinámica de tiempo o el por el índice de similitud estructural, los cuales se pueden revisar junto a otros en Bishop (2006); Blanchet y Charbit (2006); Keranen (2018). Todos estos aparejos para el contraste de las respuestas estarán en función de los valores que ellas posean, el nivel de evidencia y precisión que se requiera en la investigación, así como a criterios emergentes y dependientes del tipo de sistema económico y la forma de construir su

representación en espacio de estado.

Por último, reconociendo la diversidad de formas de identificar y entender el cambio estructural, se debe advertir que no existe una fórmula que se pueda aplicar a los sistemas de manera global, y menos aún en sistemas de corte económico, que pueden llegar a ser muy complejos. Lo único que existe son ciertas guías para poder elegir un entorno de criterios de validación; la prueba y ajuste; y el apoyo de la teoría y patrones cuantitativos y cualitativos existentes en la disciplina económica sobre el sistema. Así, en un sistema económico el cambio estructural deberá ser analizado con base en distintos tipos comparaciones entre períodos, incluso más de las que fueron enunciadas, y bajo diversos grados de profundidad, así como a la luz de la teoría, historia y patrones cuantitativos y cualitativos, con lo cual se podrá fortalecer la validación de la identificación.

Ilustración sobre el modelo de series entrelazadas

Para descifrar cómo llevar a cabo la identificación del cambio estructural, emplearemos el modelo de entrelazamiento de series de tiempo. No obstante, debido a que esta es solo una ilustración, no se tomará la sucesión completa de datos del modelo de series entrelazadas, sino una subsucesión. Esta reducción del tamaño se basa en la necesidad de disminuir el tiempo de procesamiento, el cual se dilata debido a que se emplean entre 50 a 60 decimales para disminuir el efecto de acumulación de imprecisiones. Además, otra ventaja de tal reducción es que el lector podría reproducir, entender los procesos y obtener los resultados sin la demora y dificultad innecesarias de emplear series demasiado grandes.

Así mismo, la subsucesión empleada será dividida en dos períodos del mismo tamaño. Esto se hace también con el ánimo de simplificar la explicación, aplicación y reproducibilidad. Sin embargo, se quiere aclarar que también se puede hacer si los períodos son de distinto tamaño. Si este fuera el caso, generalmente se tendrían diferentes tamaños de los espacios de estado, ya que como se vio en el capítulo anterior, no siempre la compresión con el truncamiento y el AF es adecuada, además de quedar abierta la investigación sobre la optimización de la factorización. Pero aun así, existen métodos de compresión de la realización completa. Uno de ellos es el método de Rosenbrock (1970), del que se habló con parquedad en un capítulo previo. Por consiguiente, con este tipo de métodos aún habría manera de hacer que las dos realizaciones fueran comparables en cuanto a dimensión del espacio de estado y, por tanto, se podrían aplicar los contrastes vistos en ese apartado.¹⁴

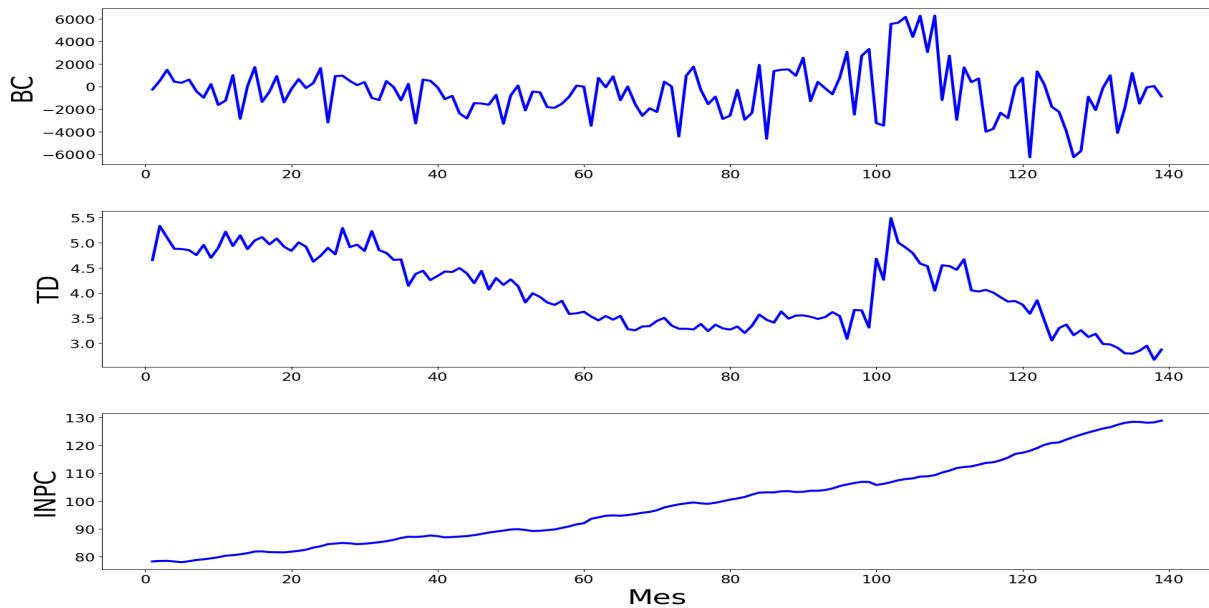
Un segundo punto a mencionar es que en la búsqueda de la matriz T que minimice la proximidad en 6, es requerido emplear métodos numéricos de optimización como los de Powell, decenso del gradiente, Nelder-Mead, cuasi-Newton (BFGS), entre otros, (Nocedal y Wright, 2006; Press *et al.*, 2007). No obstante, estos pueden ser muy tardados, y más en la medida en que se tienen realizaciones grandes y, no se usan métodos numéricos adecuados. Por consiguiente, en la aplicación que se lleva a cabo se soslaya este proceso, pero esto no resta información sobre el cambio estructural, ya que como se mencionó, se puede nivelar la situación si se explorarán los elementos de (ii), cosa que haremos. Pero si aún así, el lector tiene tiempo y quisiera realizar el ejercicio, en el Código C.10 también se encuentra la rutina para poder emplear algunos de los métodos aludidos.

Una vez aclarado lo anterior, se pasa a elegir los períodos donde consideramos que existe cambio

¹⁴A pesar de ser viables para efectuar el contraste, existen salvedades en su uso para determinar la realización. Una de ellas que para darle una interpretación económica, se requeriría desgranar el proceso de compresión para darle tal sentido, lo cual, como se vio en nuestro caso, podría ser complejo.

estructural. Como preámbulo, se deben analizar las series de cada valor en el vector de entrada y de salida del sistema. La finalidad es poder elegir un punto de corte, donde se considere que lo anterior y posterior a él surge bajo un sistema con características estructurales y dinámicas distintas. En nuestro caso, debido a como se construyó el modelo de entrelazamiento de series, tenemos la facilidad de únicamente usar las series de datos originales, las cuales se puede ver en la Figura 4.14. Al observarlas, vemos que BC parece tener un cambio en su varianza a partir del periodo 100, mientras que TD muestra un cambio en la tendencia aproximadamente en el mismo periodo. Por su parte, el INPC no parece mostrar cambios abruptos, y aunque eso no es del todo concluyente, para finalidades del apartado, no la consideraremos para definir el punto de corte de interés.

Figura 4.14: Series de tiempo de Balanza Comercial (BC), Tasa de desempleo (TD) e INPC



Con base en lo mencionado, al emplear BC y TD, y dado los cambios indicados en estas series, podríamos tener como hipótesis de trabajo que el punto de corte se encuentra entre el periodo 100 y 101. Así mismo, como se explicó antes, los 2 períodos aledaños a este punto de corte serán de tamaño relativamente moderado así como simétricos. Pero serán lo suficientemente amplios para mantener información del comportamiento de cada periodo, es decir, preservando las diferencias visuales que encontramos en la gráfica. Con esto en mente, se define que el primero de estos períodos abarca el tiempo 70 hasta el 100, mientras que el segundo engloba del 100 y hasta el 131. Cabe aclarar que hay formas más rigurosas con las cuales se puede seleccionar el punto de corte y el tamaño de los períodos, y aunque se recomienda su uso, en este apartado no son acuciosas.

Con la selección de los períodos hecha, se pasa a obtener las realizaciones de cada uno de ellos mediante el Código C.10. A partir de estas, como se indicó en el primer paso del punto (i) del sub apartado anterior, se hace la revisión de la distancia entre pares respectivos de matrices. Los valores obtenidos fueron

$$d_F(F_1, F_2) = 6210409163.24 \quad d_G(G_1, G_2) = 0.1528365 \quad d_H(H_1, H_2) = 0$$

Por consiguiente, aunque las matrices G_1 y G_2 , así como H_1 y H_2 son aparentemente cercanas,

las matrices de estado difieren de forma considerable. Así tenemos la primera evidencia en este proceso a favor de avalar que ambos periodos son estructuralmente distintos.

A continuación se pasa a los contrastes del punto **(ii)** del subapartado anterior. El primero que empleamos es aquel que enfoca la inversión en las realizaciones en cuanto a la controlabilidad y observabilidad. Según lo obtenido con el Código [C.10](#), en ambas realizaciones el rango de las matrices C_1 , C_2 , O_1 y O_2 es de 45. Por lo mismo, al tener rango completo se sigue que no hay evidencia de que ambas realizaciones tengan estructuras distintas, aunque esto tampoco implica que ellas sean las mismas. Por esto, ahora damos paso a la revisión de las características de las matrices de transferencia \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 de las realizaciones.

Por un lado, al comparar si los coeficientes de los polinomios en el denominador de ambas realizaciones son proporcionales o poseen una cercanía a ella, se tiene que no. Esta respuesta surge ya que los denominadores de \mathcal{H}_1 son de grado 15, mientras que los de \mathcal{H}_2 son de grado 45, es decir, son de la forma

$$p_1(s) = \sum_{n=1}^{15} a_n s^n \quad s \in \mathbb{C} \qquad p_2(s) \sum_{m=1}^{45} b_m s^m \quad s \in \mathbb{C}$$

por lo cual, los coeficientes de los denominadores en ambas realizaciones no se igualan en número y, por tanto, se vuelve evidente que no pueden ser múltiplos unos de los otros. Incluso sucede lo mismo con los coeficientes de los polinomios en los numeradores. Al observarlos en el Código [C.10](#), se nota que los de \mathcal{H}_2 tienen grados alrededor de 3 veces más grandes que los de \mathcal{H}_1 . Los primeros tomando valores de 45, 42, 43, 42, 45, 43, 43, 42, 45, respectivamente, mientras que los segundos de 15, 13, 12, 13, 15, 12, 12, 13 y 15. Ello nos brinda más información a favor de concebir a las dos realizaciones como partes de sistemas distintos, que para el caso significa que es posible que el sistema sufrió un cambio apreciable.

Al continuar con el análisis de los conjuntos de polos y ceros de las matrices \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , es inmediato ver que estos serán distintos. La causa es lo mismo que impidió la proporcionalidad entre coeficientes de polinomios en el denominador y numerador: la diferencia de grados. Esta diferencia provoca que existan en \mathcal{H}_2 más ceros en sus numeradores y más polos en sus denominadores, que en los respectivos de \mathcal{H}_1 . Por lo cual, las dos matrices de transferencia poseen conjuntos diferentes de ceros y polos, lo que a su vez significa que la estabilidad, respuesta en frecuencia y comportamiento dinámico también serán diferentes entre ambas. Con esto incorporamos aún más evidencia a favor de considerar que las dos realizaciones poseen diferencias estructurales.

Prosiguiendo con el proceso final del punto **(ii)**, se reviza si frente a las mismas señales, las respuestas de las matrices de transferencia no son próximas. Con este fin, se toman las señales comentadas con precedencia: escalón unitario; impulso; senoidal con amplitud de 1 y frecuencia angular de 0.5; rampa; y pulsos con orden de repetición 4. Las gráficas de las respuestas a estas señales se pueden ver en las Figuras [4.15](#), [4.16](#), [4.17](#), [4.18](#) y [4.19](#), respectivamente. En cada una de estas se ven 9 gráficas ya que la señal se incorpora en cada una de las 3 posiciones del vector de entrada, dejando las restantes 0, teniendo así 3 formas de introducirse, y ya que el vector de salida tiene 3 posiciones, cada una generando una respuesta a los tres vectores de entrada. Por esto es que en el lado izquierdo y superior de las figuras se lee **Salida** y **Entrada** acompañadas de un número. Aclarando más, si una gráfica está en la Salida 1 y Entrada 3, su gráfica está elaborada con los valores del vector de respuestas en la posición 1, inducidos por una señal incorporada en la posición 3 del vector de entradas (con posiciones 1 y 2 igual a 0). Además, existen dos colores de líneas en las gráficas, esto ya que una corresponde a \mathcal{H}_1 (naranja) y la otra a \mathcal{H}_2 (azul).

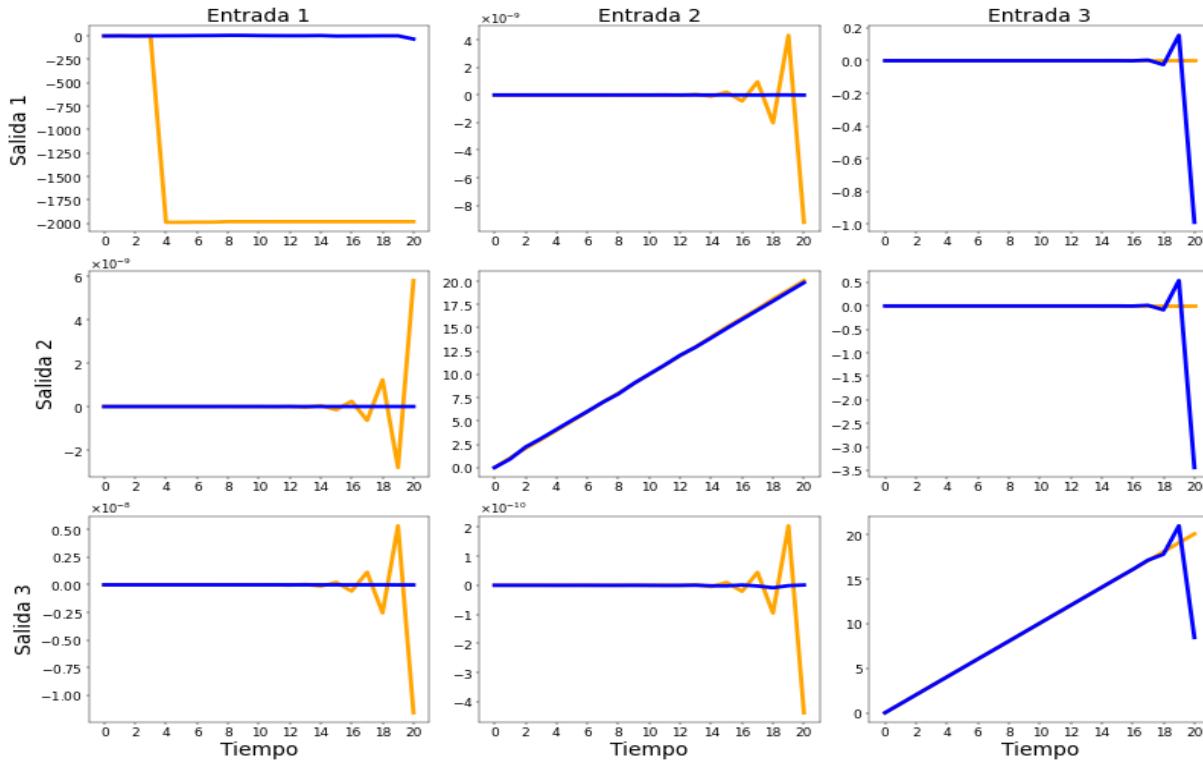
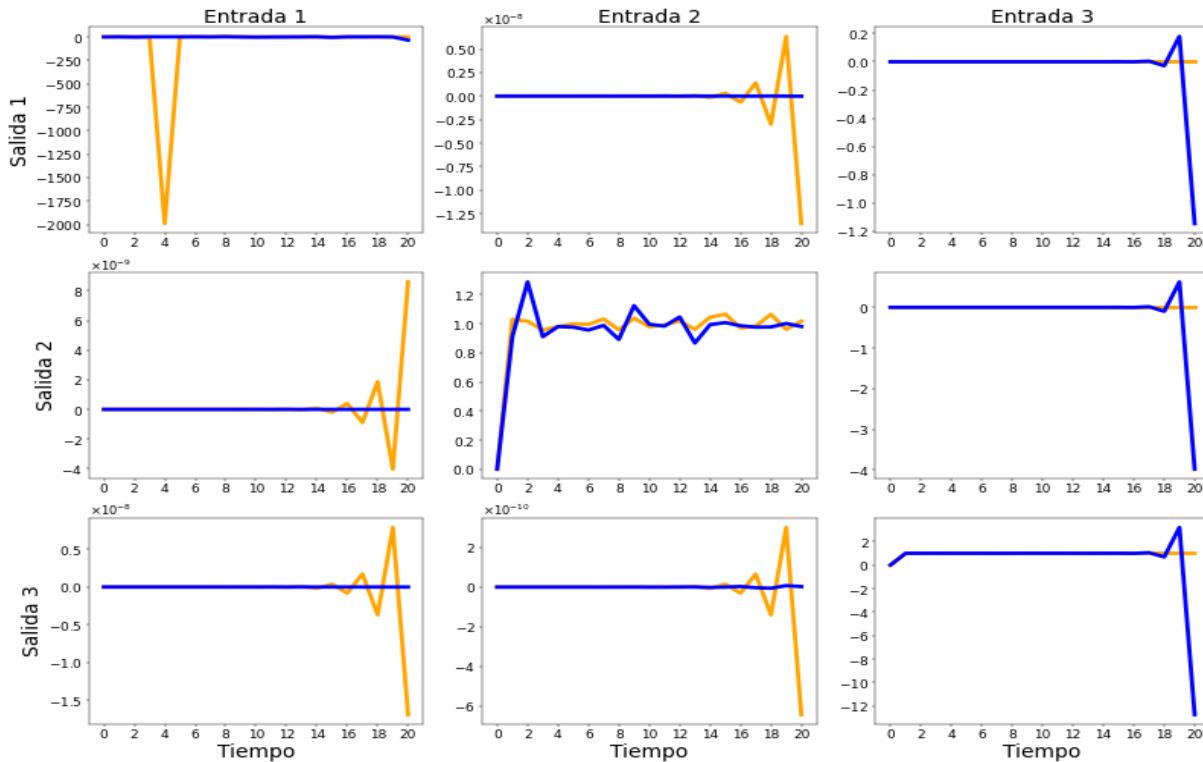
Figura 4.15: Respuestas de \mathcal{H}_1 (naranja) y \mathcal{H}_2 (azul) a una señal escalón unitarioFigura 4.16: Respuestas de \mathcal{H}_1 (naranja) y \mathcal{H}_2 (azul) a una señal impulso

Figura 4.17: Respuestas de \mathcal{H}_1 (naranja) y \mathcal{H}_2 (azul) a una señal senoidal con amplitud de 1 y cuya frecuencia angular es de 0.5

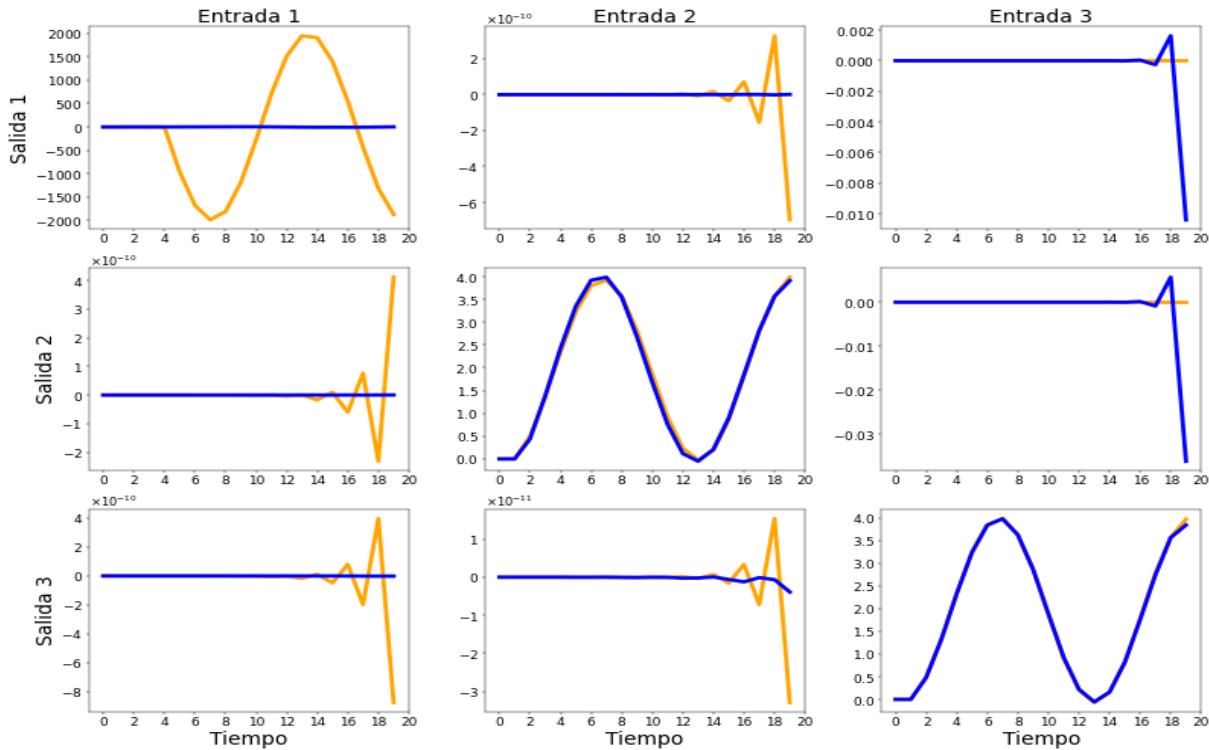


Figura 4.18: Respuestas de \mathcal{H}_1 (naranja) y \mathcal{H}_2 (azul) a una señal rampa

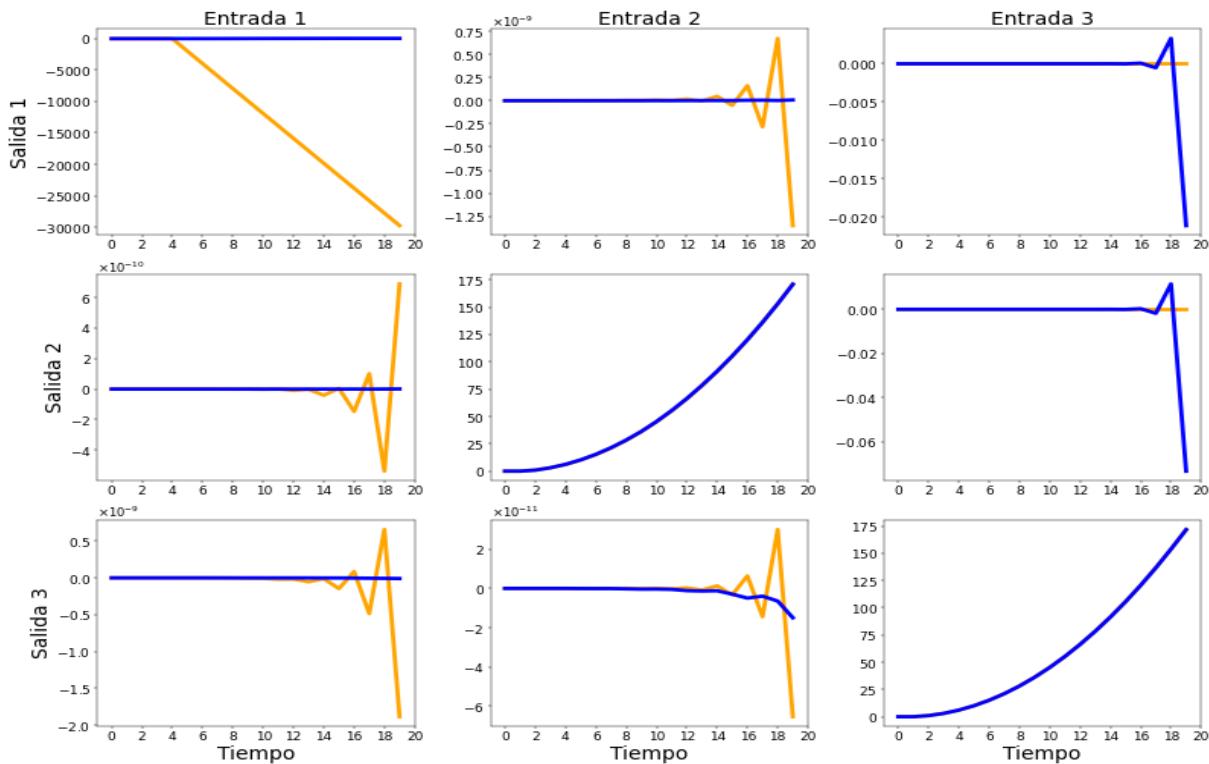
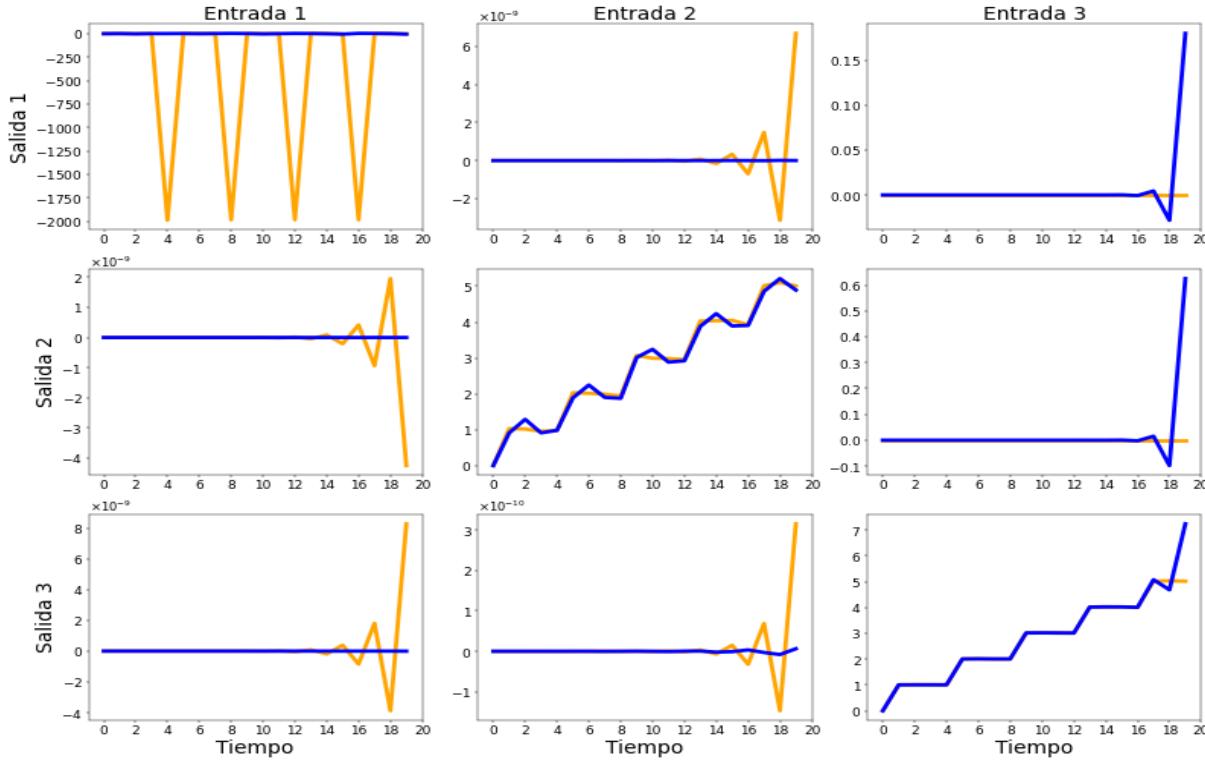


Figura 4.19: Respuestas de \mathcal{H}_1 (naranja) y \mathcal{H}_2 (azul) a una señal de pulsos

Como se vio, existen muchas formas de abordar la comparación, en nuestro caso, debido a los resultados obtenidos en las gráficas, y por la finalidad del apartado y la investigación, únicamente nos basaremos en el método visual en valores absolutos. Aunque quiero recalcar, además, que en una implementación más profunda, la combinación de métodos es una práctica proverbial. Basarse en una o pocas pautas de equiparación podría malograr la adecuada determinación del cambio estructural, amén de perjudicar el entendimiento sobre su emergencia. Es por esto que aunque no se emplean aquí, en el Código C.10 están incorporados dos elementos numéricos: el error cuadrático medio y métrica de Frobenius, ambas aplicadas a los dos primeros tipos de señales que se vieron: escalon únitario e impulso.

A partir del método visual en valores absolutos se podría creer hay evidencia para apoyar la conjectura sobre el cambio en la estructura. Esto en virtud de las diferencias que se perciben en las Figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19. No obstante, estas no son significativas globalmente, en particular, de las 9 respuestas compulsadas para las distintas señales, sólo 1 o 2 de ellas por cada señal difieren considerablemente. Las restantes que aparecen ses desaparecen, en realidad poseen una escala con un orden de magnitud entre -8 y -11, por lo que la diferencia no parece ser notable. Así mismo, ya que el uso de señales únicas en cada posición del vector de entrada permitió notar que hay respuestas que reaccionan menos que otras a su estímulo, entonces el sistema preserva en ambos periodos el comportamiento asociado al tipo de señal. Es decir, hay una conservación de ciertas características estructurales y dinámicas según el tipo y magnitud de la señal, así como en virtud a la distribución de la señal entre las posiciones disponibles en el vector de entradas.

Considerando lo anterior, la diferencia en algunas series de respuestas no necesariamente implica que los sistemas sean completamente distintos. Podría señalarse que hay cualidades del sistema que se preservan, las cuales están asociadas a una entrada específica, que afecta a las salidas de

manera diferenciada al sistema en ambos periodos. Es decir, el sistema puede ser parcialmente similar en ambos períodos en las cualidades asociadas a la señal, y en el ámbito de las variables menos reactivas a ella. Por consiguiente, dos matrices de transferencia bien podrían tener diferencias en ciertas series de respuestas, aún es factible que sean parcialmente similares. Existen diversas razones por las que esto podría suceder, como lo es el tipo de configuración del sistema. Las matrices de transferencia pueden representar sistemas con diferentes configuraciones (por ejemplo, diferentes topologías de conexiones), pero compartir algunas respuestas similares.

Además de lo anterior, la especificación del modelo en el caso de las series entrelazadas también puede ser la causa de la conexión parcial y del desfase en los cambios del sistema entre un período y otro. Esto se puede aclarar debido a que entre algunas variables entrelazadas puede que sean menos fuertes de lo esperado para ciertas señales y posiciones en el vector de entrada, lo cual parece ser detectado por la realización. Es por esto que al colocar las distintas señales en ciertas posiciones del vector de entrada, la respuesta generada por ellas en las distintas posiciones del vector de respuesta se ven afectadas de forma diferenciada, impulsando con mayor fuerza a unas y frenando a otras. Esto indica que dependiendo la intensidad, forma y posición del estímulo, se pueden o no activar características estructurales. Es más, el propio ajuste de la realización F , G y H podría estar impactando el ajuste de las matrices de transferencia y haciendo que existan parecidos en ciertas señales. En ciertos casos también puede que la realización sobreidentifique, subidentifique o, simplemente, no identifique bien al sistema subyacente. Y esto causa que el sistema sea más complejo de lo esperado, derivado de los motivos expuestos en el Capítulo 2, permitiendo una mezcla entre similitudes y diferencias estructurales.

Otra manera de determinar si dos sistemas son realmente distintos, es decir, si las diferencias son insignificantes, se podría considerar un análisis detallado de los parámetros de la matriz de transferencia. Por ejemplo, un análisis de sensibilidad ayudaría a censar la exitabilidad del sistema ante pequeños cambios en dichos parámetros y así poder comprender cómo estos afectan las respuestas. También es posible el uso de pruebas estadísticas para evaluar la significancia de las diferencias observadas. Aunque debido al entorno de desarrollo de la investigación, el cual se encuentra detallado en el Capítulo 1 y bajo la elección hecha frente a la polémica que se planteó, no es lo primero que se puede sugerir.

4.3.2. Control del cambio estructural

Por lo que se refiere al control del cambio estructural mediante la TR, este consta en poder dirigir la estructura F , G y H del sistema a una nueva estructura objetivo F^* , G^* y H^* en un lapso de tiempo Δt^* elegido y sin efectos nocivos sobre el sistema. Aquí la estructura objetivo se determina mediante criterios concernientes al sistema modelado, en el caso de sistemas económicos, debe basarse en la teoría económica, leyes, simulaciones y patrones cuantitativos y cualitativos surgidos del propio sistema. Este cambio tiene como fin el favorecer la relación entre entradas $u(t)$ y salidas $y(t)$ del sistema a partir del tiempo $t > t_0 + \Delta^*t$, donde Δ^*t es el tiempo en donde se deberá alcanzar el ajuste estructural.

El formato anterior de control no es igual al control dinámico del sistema. Este último intenta cambiar el comportamiento del sistema pero sin modificar su estructura física, componentes, relaciones, etc. lograr ciertos objetivos deseados, como estabilizar el sistema, seguir una referencia, rechazar perturbaciones, etc. mediante la introducción de una señal de control adecuada. Esta señal es la entrada que se aplica al sistema con el propósito de modificar su comportamiento y llevarlo a un estado deseado. Además, en este proceso se diseña un controlador, el cual es un

componente encargado de generar la señal de control en función de la diferencia entre el estado actual del sistema y el estado deseado (o la referencia). Por su parte, el control del parrafo anterior es uno estructural que, como se plantea aquí, busca guiar la intervención selectiva sobre el sistema económico, en los elementos y relaciones que constituyen su DE, con el fin de transformar su estructura y, paulatinamente, haciendo que se parezca a (F^*, G^*, H^*) , evitando su reversibilidad y haciendo que sus sostenimiento sea natural, sin medidas de contención.

No obstante, hay que aclarar que en algunos casos la aplicación de un control dinámico puede tener efectos secundarios que influyen en la configuración física del sistema, es decir, que puede cambiar la estructura del sistema. Como ejemplos se pueden pensar los sistemas biológicos y también en sistemas económicos, específicamente aquellos con cierto grado de complejidad. Es así que la conversión estructural de un tipo de sistemas económicos también se podría conseguir al aplicar unas adecuadas señales de entrada durante el lapso de tiempo. El efecto que logra tal acción es provocar una adaptación del sistema hasta trasladarlo a una estructura objetivo. Sin embargo, por la complejidad del sistema económico, dicha acción puede ser lenta, amortiguada parcial o totalmente, o dirigirse a una estructura del sistema un tanto volátil, no estable o, simplemente, no deseable. Aunque cabe aclarar que un control estructural puede ser complementado con un control dinámico, ayudando a estabilizarlo en momentos de inestabilidad.

Ahora, aunque el control dinámico podría servir para el cambio en la estructura, en nuestro caso únicamente nos concentraremos en la presentación de un modelo de control estructural mediante la realización. Para trabajar algunos elementos de la explicación emplearemos el modelo de insumo-producto, aunque un poco más adelante al exponer el esquema de control, se pondrá en términos del modelo de incidencias de la inflación del inicio del capítulo, aunque no se hará mucho énfasis a él, en su mayoría se enfocarán las partes del esquema. Así mismo, ahí se dan más detalles acerca de los pasos que se enuncian a continuación.

Continuando, la DE del modelo insumo-producto está dada por L_1, \dots, L_n , las matrices inversas de Leontief en cada uno de los tiempos observados. Cada una de ellas, por como son construidas, podemos escribirlas también como $L_t = (I - A_t)^{-1}$ con A_t la matriz de coeficientes técnicos en el tiempo t e I la matriz identidad. A partir de esta expresión y tomando F , G y H como la realización de la realización del sistema, entonces garantizamos lo siguiente

$$(I - A_t)^{-1} = HF^{t-1}G \Rightarrow I - A_t = (HF^{t-1}G)^{-1} \Rightarrow A_t = I - (HF^{t-1}G)^{-1}$$

A partir de la última igualdad podemos ver la relación que existe entre los coeficientes técnicos A y las matrices F , G y H . Esto permite identificar cómo es que se cambia la estructura, es decir, estas tres matrices, esto se logra mediante la modificación selectiva de los valores de A . Siendo más detallado, por el cambio en las condiciones del sistema que afectan a las variables que constituyen los coeficientes técnicos. A las variables que se busca modificar se les llama variables de control, pues son las que se utilizan para operar el cambio del sistema.

Ahora se brinda una propuesta de pasos para el control del cambio de la estructura de un sistema económico. El primero es definir la estructura específica que se desea lograr. Esta involucra determinar la matriz de coeficientes técnicos objetivo y asociar a ella una estructura, lo cual se vera un poco más abajo. Además, también se le necesita incorporar cualidades a dicha estructura objetivo, como podría ser la estabilidad o mantener ciertas variables del sistema dentro de rangos predefinidos. La comprensión completa de los objetivos es esencial antes de continuar con el diseño del controlador, el mecanismo encargado de implementar los cambios.

El siguiente paso implica el diseño del controlador, el cual es el mecanismo que determinará cómo se deben cambiar las variables de control con el fin de lograr la estructura objetivo que

fuerza establecida. El diseño del controlador generalmente implica pasar por ciertas etapas. La primera indica que antes de diseñar un controlador, es crucial conocer bien el sistema que se va a controlar. Esto implica comprender las matrices F , G , y H que describen la dinámica del sistema. También puede requerir la identificación de parámetros para modelos más precisos.

Una vez que se comprende el sistema, se selecciona el tipo de control apropiado. Esto puede incluir controladores de retroalimentación, o técnicas de control más avanzadas, como control óptimo o control adaptativo, según la complejidad del sistema y los objetivos de control. Una vez definido y antes de implementar el controlador en el sistema real, es fundamental simular su desempeño para asegurarse de que cumple con los objetivos de control. Las simulaciones serán un instrumento esencial para la implementación del control estructural ya que permiten ajustar el controlador y resolver problemas potenciales.

Una vez que el controlador se ha diseñado y probado en simulaciones, se procede a su implementación en el sistema real. Durante la implementación, es común realizar ajustes finos en el controlador para garantizar un rendimiento óptimo. Luego, una vez que el controlador está en funcionamiento, es crucial monitorear continuamente el sistema para garantizar que se mantenga alineado con las metas del proceso de control estructural. Esto puede requerir retroalimentación constante y ajustes en el controlador en respuesta a cambios en las condiciones del sistema o en los objetivos de control. Es importante diseñar cuidadosamente el controlador para evitar la inestabilidad. Además, si es factible reducir el orden del sistema, se podría reducir el número de estados y así se podría simplificar la tarea de ajustar las matrices.

Esquema de implementación empleando el modelo de incidencias de la inflación

Lo primero es determinar la estructura predominante en el sistema subyacente presente. Es decir, la estructura que es el punto de partida para nuestro proceso de control. En nuestro caso, si la sucesión con la que se cuenta es $\{L_t\}$, entonces dentro de todas las colas de $\{L_t\}$, es decir, subsucesiones que abarcan datos desde un punto de tiempo hasta el final de $\{L_t\}$, elegimos aquella $\{L_{t'}\}$ con t' , tal que **(i)** su estructura de espacio de estado sea distinta a la de su complemento, el primer segmento de $\{L_t\}$, y **(ii)** que en ella no exista un cambio estructural. Para validar estas dos condiciones se deberá emplear el método de determinación de cambio estructural del apartado anterior, el cual debe de mostrar un grado significativo de disparidad en el primer punto, y de semejanza para segunda propiedad de $\{L_{t'}\}$.

Definida como antes, $\{L_{t'}\}$ es la información que representa la estructura vigente, y por lo cual su realización (F_0, G_0, H_0) se podría considerar la estructura inicial o de partida del proceso de control. Se justifica tal paso debido a que de no hacerlo, fenómenos propios del sistema, como los vistos en el Capítulo 3, o la mezcla de información de dos estructuras dispares pueden dañar la representación de espacio de estado de salida, generando por descontado fallas gratuitas en el mecanismo de control.

Lo siguiente es ajustar las propiedades dinámicas de la realización de partida (F_0, G_0, H_0) . Dicha calibración tiene el fin de poder efectuar predicciones lo más acertadas posibles, recordando que al ser la estructura vigente, y sabiendo que los cambios estructurales en sistemas económicos son por lo regular lentos, su proyección daría un indicio valedero sobre los valores futuros de la DE. En este punto del proceso de control, con la realización de partida bien graduada para la predicción, se hace una proyección de la DE. Por decir algo, se determinan todos los períodos futuros dentro de una ventana máxima de 5 años, el primer quinquenio. Ahora, dichas matrices proyectadas de la DE las observamos desde la perspectiva de lo que significan económicamente,

es decir, hacemos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{\det(A_t)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} & \frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ \frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_m}{I_S} \end{pmatrix}_t = H_0 F_0^t G_0 \quad (7)$$

donde t abarca los periodos de la proyección, y donde temos que

$$\det(A_t) = \left(1 - \frac{I_{m_t}}{I_{S_t}}\right) \left(1 - \frac{I_{tag_t}}{I_{N_t}}\right) - \frac{I_{a_t}}{I_{S_t}} \frac{I_{c_t} + I_{os_t}}{I_{N_t}}$$

Se observa que en la igualdad (7) no es posible definir los valores futuros de las distintas incidencias. No obstante, existen opciones para disminuir el exceso de grados de libertad. Esto se puede hacer empleando medidas descriptivas y la información con la que se contruyó la sucesión $\{L_{t'}\}$. Pero una formato más, que encaja de mejor manera, es el uso del modelo de series entrelazadas que se vio con anterioridad. Se pueden seleccionar las variables que se quieran, dejando algunas como únicos grados de libertad. Por decir algo, tomemos las variables I_S , I_N , I_{tag} , I_c , I_{os} y contruyamos su realización (F', G', H') al usar las sucesiones de estas para el mismo periodo que $\{L_{t'}\}$.

La realización (F', G', H') también permitirá proyectar los valores y con ellos obtener la siguiente igualdad para la misma ventana de t de tiempo que en el caso de (F_0, G_0, H_0) ,

$$H'(F')^{t-1} G' = \begin{pmatrix} \frac{I_{S_t}}{I_{S_{t-1}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_{N_t}}{I_{N_{t-1}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_{tag_t}}{I_{tag_{t-1}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_{c_t}}{I_{c_{t-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{os_t}}{I_{os_{t-1}}} \end{pmatrix}$$

ahora, sin pérdida de generalidad, tomemos la variable I_S en el último periodo de tiempo observado, denotado por t_0 , entonces por la igualdad de arriba, para $t_1 = t_0 + 1$ se tiene que

$$\frac{I_{S_{t_1}}}{I_{S_{t_0}}} = (H'(F')^{t_1-1} G')_{1,1} = (H'(F')^{t_0} G')_{1,1}$$

pero como la expresión de la derecha y S_{t_0} son valores conocidos, entonces tenemos que

$$I_{S_{t_1}} = I_{S_{t_0}} \times (H'(F')^{t_0} G')_{1,1}$$

Es más, si repetimos este proceso tomando $t_n = t_0 + n$, vemos que podemos obtener los valores de I_S en la ventana de proyección,

$$\begin{aligned} I_{S_{t_n}} &= I_{S_{t_{n-1}}} \times (H'(F')^{t_{n-1}} G')_{1,1} = I_{S_{t_{n-2}}} \times (H'(F')^{t_{n-2}} G')_{1,1} \times (H'(F')^{t_{n-1}} G')_{1,1} = \dots \\ &= I_{S_{t_0}} \prod_{k=0}^{n-1} (H'(F')^{t_k} G')_{1,1} \end{aligned}$$

y esto también es extrapolable al resto de variables consideradas en el modelo de series entrelazadas,

$$\begin{aligned} I_{N_{t_n}} &= I_{N_{t_0}} \prod_{k=0}^{n-1} (H'(F')^{t_k} G')_{2,2} & I_{tag_{t_n}} &= I_{tag_{t_0}} \prod_{k=0}^{n-1} (H'(F')^{t_k} G')_{3,3} \\ I_{c_{t_n}} &= I_{c_{t_0}} \prod_{k=0}^{n-1} (H'(F')^{t_k} G')_{4,4} & I_{ost_{t_n}} &= I_{ost_{t_0}} \prod_{k=0}^{n-1} (H'(F')^{t_k} G')_{5,5} \end{aligned}$$

Estos valores permiten que reduzcamos los grados de libertad en (7), y por consiguiente, lo único que falta determinar son los valores de $I_{a_{t_n}}$ e $I_{m_{t_n}}$ siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{I_{a_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}} &= (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1} \times \det(A_{t_n}) \\ &= (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1} \times \left(1 - \frac{I_{m_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}}\right) \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) - (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1} \frac{I_{a_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}} \frac{I_{c_{t_n}} + I_{ost_t}}{I_{N_{t_n}}} \\ \frac{I_{m_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}} &= 1 - (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2} \times \det(A_{t_n}) \\ &= 1 - (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2} \times \left(1 - \frac{I_{m_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}}\right) \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) + (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2} \frac{I_{a_{t_n}}}{I_{S_{t_n}}} \frac{I_{c_{t_n}} + I_{ost_t}}{I_{N_{t_n}}} \end{aligned}$$

lo cual puede ser resscrito de la siguiente manera

$$\begin{aligned} I_{a_{t_n}} &= c_{1,t_n} I_{m_{t_n}} + c_{2,t_n} I_{a_{t_n}} + c_{3,t_n} \\ I_{m_{t_n}} &= c_{4,t_n} I_{m_{t_n}} + c_{5,t_n} I_{a_{t_n}} + c_{6,t_n} \end{aligned} \quad (8)$$

donde c_{i,t_n} , $i = 1, \dots, 6$, son constantes dadas como

$$\begin{aligned} c_{1,t_n} &= -\frac{(H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1}}{I_{S_{t_n}}} \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) & c_{4,t_n} &= \frac{(H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2}}{I_{S_{t_n}}} \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) \\ c_{2,t_n} &= -(H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1} \frac{I_{c_{t_n}} + I_{ost_t}}{I_{S_{t_n}} I_{N_{t_n}}} & c_{5,t_n} &= (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2} \frac{I_{c_{t_n}} + I_{ost_t}}{I_{S_{t_n}} I_{N_{t_n}}} \\ c_{3,t_n} &= (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,1} \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) & c_{6,t_n} &= 1 - (H_0 F_0^{t_n-1} G_0)_{2,2} \left(1 - \frac{I_{tag_{t_n}}}{I_{N_{t_n}}}\right) \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones en (8) se pueden expresar como

$$\begin{pmatrix} I_{a_{t_n}} \\ I_{m_{t_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_{2,t_n} & -c_{1,t_n} \\ -c_{5,t_n} & 1 - c_{4,t_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_{3,t_n} \\ c_{6,t_n} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{(1 - c_{2,t_n})(1 - c_{4,t_n}) - c_{1,t_n} c_{5,t_n}} \begin{pmatrix} 1 - c_{4,t_n} & c_{1,t_n} \\ c_{5,t_n} & 1 - c_{2,t_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{3,t_n} \\ c_{6,t_n} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{c_{3,t_n} - c_{4,t_n} c_{1,t_n} + c_{1,t_n} c_{6,t_n}}{(1 - c_{2,t_n})(1 - c_{4,t_n}) - c_{1,t_n} c_{5,t_n}} \\ \frac{c_{5,t_n} c_{3,t_n} + c_{6,t_n} c_{2,t_n} - c_{2,t_n} c_{6,t_n}}{(1 - c_{2,t_n})(1 - c_{4,t_n}) - c_{1,t_n} c_{5,t_n}} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Este resultado nos da valores para las variables que no se emplearon en el modelo entrelazado. Pero este no es el objetivo en sí de haber hecho todo este proceso. La primera cosa por la cual se

hace es para robustecer la realización (F_0, H_0, G_0) . Esto debido a que una vez determinados los valores en (9), es posible rehacer el modelo de series entrelazadas, pero ahora también involucrando a las 2 variables omitidas inicialmente. Así, una vez obtenida su realización, se hace una proyección para poder determinar por esta otra vía los valores en (9). Del contraste entre estos dos pares de valores es que se puede ajustar la realización inicial.

La segunda cosa por la que se hizo todo el proceso anterior es debido a que él nos puede ayudar a identificar si el control de un sistema esta conduciendo a situaciones de riesgo, y con base en ello poder realizar acciones correctivas. Siguiendo el proceso anterior ya se vio que es posible encontrar relaciones entre variables. En particular se puede hacer entre unas variables llamadas de control, que serán intervenidas para llevar a cabo el proceso de cambio estructural y que se encuentran imbuidas en la definición de los elementos de la DE, y otras cuya variación se ve influenciada por estas y que, además, son de cuidado para el bienestar del sistema. Además, también es posible que a diferencia de (9), dichas relaciones permitan más de una solución. En este sentido, el proceso previo nos puede mostrar entornos de cambio normales en ciertas variables en función de cambios en las variables de control. Entonces, cuando se intervengan las variables de control, y se note que las variables asociadas cambian fuera de los márgenes dispuestos por este proceso, entonces estaremos frente a una alerta, pudiendo intervenir en la estructura del sistema o mediante un control dinámico a través de señales de entrada. Es por ello que el proceso anterior es una suerte de punto de referencia dinámico sobre las relaciones entre variables de control y aquellas que puede influenciar, con base en la estructura de salida.

Con lo visto ya se ha abordado una manera de obtener proyecciones robustas de la DE, también se cuenta con la estructura inicial para que en ciertos períodos de tiempo se pueda probar si existe un cambio estructural y en qué sentido se ha dado. Además, tenemos la posibilidad de identificar patrones riesgosos en los cambios experimentados por otras variables frente a cambios en variables de control. No obstante, aunque tenemos esto, existe aún la interrogante de saber hacia dónde encaminar los cambios en las variables de control.

Para poder guiar el proceso de control, se debe definir una matriz objetivo con características deseables, una matriz sobre la cual se quiera que la DE orbite. La definición y construcción de una tal matriz puede ser muy compleja y en sí misma es el origen de otra interesante investigación. Además, no es una acción genérica, esta completamente determinada por el sistema de que se trate. Por ello es que debe ser elaborada por especialistas en el sistema tratado. Por consiguiente, su elaboración no se aborda en este trabajo. No obstante, dado que aquí solo tratamos con el esquema de control estructural, podemos continuar sin que la falta de detalles al respecto menoscabe lo que aquí se comenta.

Por lo tanto, asumiendo que se posee la matriz objetivo para la DE, lo que sigue es determinar la estructura asociada a ella. Sin embargo, el asunto es que con solo una matriz no es asequible determinar la realización. Es por ello que la estrategia no sólo será tener esa matriz, si no también entornos de variación de sus entradas. A partir de estos se pueden generar simulaciones que representen escenarios plausibles del sistema. Estas simulaciones estarán orbitando alrededor de la matriz objetivo y, por tanto, todas ellas son un grupo bajo una misma estructura. Por consiguiente, al efectuar la realización empleando los elementos de la simulación, se obtiene (F^*, G^*, H^*) la cual se convierte en la estructura objetivo.

En este punto ya contamos con una estructura de salida (F_0, G_0, H_0) y una estructura objetivo o de llegada (F^*, G^*, H^*) . Pero aunque sabemos como delimitar los pasos seguros al ir haciendo cambios en las variables de control, no sabemos cuál es el trayecto a seguir para avanzar de la primer estructura a la última. Una forma en que esto puede realizarse inicia por determinar un

tiempo de transición Δt para llegar de (F_0, G_0, H_0) a (F^*, G^*, H^*) , el cual dependerá del sistema y de las condiciones estipuladas por los especialistas, institucionales, políticas, de seguridad, etc. Como segundo paso se tienen que fijar trayectorias que deben seguir las variables de control desde la matriz de la DE de salida y hasta la matriz objetivo. Dichas trayectorias deberán estar en función del tiempo, el cual no debe ser excesivamente corto, para evitar problemas en el sistema. Además, deberán ser definidas con base en simulaciones, las cuales deben incorporar información teórica y patrones cuantitativos y cualitativos. En estas simulaciones, las variables que no sean de control absorberán los efectos de las trayectorias, pero sin permitir saltos abruptos que pongan en riesgo la viabilidad del sistema. Así mismo, se deben definir bloques de tiempo en dicho periodo, donde en cada bloque, o en cierto número de ellos, el sistema debe alcanzar una estructura objetivo intermedia. Dicha estructura es definida y construida de la misma forma que (F^*, G^*, H^*) . Además, para saber si se el sistema ha llegado al objetivo, se utilizan también los métodos que se vieron en la identificación del cambio estructural, ya que aunque esta hecho para comparar un sistema en periodos contiguos, también es funcional para comparar sistemas estructuras de sistemas que no son el mismo.

Este proceso de transición es recomendable que sea acompañado por controles dinámicos. Esto ya que ante problemas, ellos pueden ayudar a aliviar y estabilizar el sistema, minando secuelas negativas. Así mismo, conforme se van alcanzando nuevas estructuras en la transición, y éstas se anclan, es decir, ya no son fácilmente reversibles, es posible que las variables de control pierdan efectividad. Por lo mismo, también es conveniente acompañar este proceso de control con medidas que permitan ver el grado de influencia que tienen la variable de control. Esto se puede efectuar desde el ámbito de los sistemas, por ejemplo, mediante análisis de sensibilidad o a partir de la teoría económica. Lo recomendable es ir haciendo pruebas conjuntas sobre tales variables y, en su caso hacer cambios o adecuaciones. Otra circunstancia relevante es que la estructura objetivo también tiende a cambiar con el tiempo, en tal supuesto, se deberá de reajustar el trayecto así como las estructuras intermedias.

Por último, se ha de reiterar que este es un esquema de control, no una implementación. Es sólo una guía sobre cómo podría usarse la realización en el proceso control estructural. Esto se debe a que hay muchos detalles que son muy intrincados como para ser tratados en un apartado. Unos desde la parte económica como la definición de estructuras objetivo, final e intermedia, definición del trayecto, selección de variables de control, y condiciones y restricciones económicas sobre las cuales basar las simulaciones. Además, desde el lado de la realización se encuentra todo lo que fue tratado en el Capítulo 3, así como el tema de la identificación del cambio estructural. No obstante, ha cumplido el cometido de mostrar que puede volverse un instrumento interesante a la hora de buscar transformar un sistema económico, así como para la regulación de la transición y la identificación y entendimiento de diferencias estructurales entre sistemas.

Conclusiones

Apéndice A

Teoría de la Realización

Definición A.1 (Sistema Dinámico) (Casti, 1987)). *Un sistema dinámico Σ es un concepto matemático definido por los siguiente axiomas: Un sistema dinámico Σ es un concepto matemático definido por los siguiente axiomas:*

(i) *Existe un conjunto de tiempo T , un conjunto de estado X , un conjunto de valores de entrada U un conjunto de funciones de entrada $\Omega = \{u : T \rightarrow U\}$, un conjunto de valores de salida Y , y un conjunto de funciones de salida $\Gamma = \{y : T \rightarrow Y\}$.*

(ii) *T es un subconjunto ordenado de números reales.*

(iii) *Ω satisface las condiciones:*

a) $\Omega \neq \emptyset$

b) *Un segmento de entrada $u(t)$, $t_1 < t \leq t_2$ en Ω está restringido a $(t_1, t_2] \cap T$. Si $u, u' \in \Omega$ y $t_1 \leq t \leq t_3$, entonces existe $u'' \in \Omega$ tal que $u''(t) = u(t)$, $t_1 \leq t < t_2$ y $u''(t) = u'(t)$, $t_2 \leq t < t_3$.*

(iv) *Existe una función de transición de estado*

$$\psi : T^2 \times X \times \Omega \rightarrow X$$

cuyo valor es el estado $x(t) = \psi(t; \tau, x, u) \in X$, que se obtiene en el tiempo $t \in T$ del estado inicial $x(\tau) \in T$ en el tiempo inicial $\tau \in T$, bajo la acción de la entrada $u \in \Omega$. ψ tiene las siguientes propiedades:

a) *ψ está bien definida para todo $t \geq \tau$ pero no necesariamente para todo $t < \tau$.*

b) *$\psi(t; t, x, u) = x$ para todo $t \in T$, $x \in X$, $u \in U$.*

c) *Para todo $t_1 < t_2 \leq t_3$, tenemos que $\psi(t_3; t_1, x, u) = \psi(t_3; t_2, \psi(t_2; t_1, x, u), u)$ para todo $x \in X$, $u \in U$.*

d) *Si $u, u' \in \Omega$ y $u(t) = u'(t)$, $\tau < t \leq \tau_2$, entonces $\psi(\tau_2; \tau, x, u) = \psi(\tau_2; \tau, x, u')$*

(v) *Existe una función de salida legible $\eta : T \times X \rightarrow Y$ que asigna la salida $y(t) = \eta(t, x(t))$ en el tiempo t .*

Definición A.2 (Equivalencia de Sistemas). *Sean (F, G, H) y $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ las RI de sendos sistemas MDLIF. Se dice que los sistemas representados por (F, G, H) y $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ son equivalentes algebraicos siempre y cuando $\exists Z \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$ no singular, tal que*

$$\bar{F} = Z^{-1}FZ \quad \bar{G} = Z^{-1}G \quad \bar{H} = HZ$$

Definición A.3 (Matriz de Controlabilidad). *Sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario y sea (F, G, H) la RI de un sistema MDLIF, donde $F \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$ y $H \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$. Se dice que*

$$\mathcal{C}_j = \begin{pmatrix} G & FG & \cdots & F^{j-1}G \end{pmatrix}$$

es la j -matriz de controlabilidad $q \times jr$ del sistema. Y se dice que $\alpha \in \mathbb{N}$ es el índice de controlabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que $\text{rango}(\mathcal{C}_\alpha) = \text{rango}(\mathcal{C}_{\alpha+1})$.

Definición A.4 (Matriz de Observabilidad). *Sea $j \in \mathbb{N}$ arbitrario y sea (F, G, H) la RI de un sistema MDLIF, donde $F \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$ y $H \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$. Se dice que*

$$\mathcal{O}_j = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{j-1} \end{pmatrix}$$

es la j -matriz de observabilidad $jp \times q$ del sistema. Y se dice que $\beta \in \mathbb{N}$ es el índice de observabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que $\text{rango}(\mathcal{O}_\beta) = \text{rango}(\mathcal{O}_{\beta+1})$.

Definición A.5 (Matriz de Hankel con Entradas Matriciales). *Sea la sucesión $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$, y sean $n, m \in \mathbb{N}$. La matriz de hankel con entradas matriciales (MHEM) de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$, de orden (n, m) y dimensión $n\mu \times m\eta$ es la función $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}}) : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \rightarrow \{\mathcal{L}_{\mathbb{N}}\}$ definida como*

$$\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})(i, j) = L_{i,j} = L(i + j - 1) \quad (1)$$

donde a $L_{i,j}$ lo llamamos la entrada matricial (i, j) .

Definimos el bloque fila $i \in \mathbb{N}_n$ como la función (1) cuando se fija $i \in \mathbb{N}_n$. En caso de fijar $j \in \mathbb{N}_m$ se dice que la función (1) es el bloque columna j .

Sea $\lceil \cdot \rceil$ la función techo.¹ La entrada escalar $(r, s) \in \mathbb{N}_{n\mu} \times \mathbb{N}_{m\eta}$ de $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})$ está definida como $(\mathcal{H}_{n,m})_{r,s} = (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s}$, donde $i_r = \lceil \frac{r}{\mu} \rceil$, $j_s = \lceil \frac{s}{\eta} \rceil$, $w_r = r - (i_r - 1)\mu$ y $w_s = s - (j_s - 1)\eta$.

Lema A.1. *Sea la sucesión de matrices $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Para toda $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_{n-1}$ y $q \in \mathbb{N}_{m-1}$ se cumple que*

$$\mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = (\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}))_{1:p\mu, 1:q\eta} \quad (2)$$

Demostración. Por la Definición A.5, para $(r, s) \in \mathbb{N}_{p\mu} \times \mathbb{N}_{q\eta}$ arbitrario,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{p,q})_{r,s} &= (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s} \\ &= (L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} \\ (\mathcal{H}_{n,m})_{r,s} &= (L_{i'_r, j'_s})_{w'_r, w'_s} \\ &= (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s} \end{aligned}$$

¹ $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida como $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$.

Pero como $i_r = \left\lceil \frac{r}{\mu} \right\rceil = i'_r$ y $j_s = \left\lceil \frac{r}{\eta} \right\rceil = j'_s$, entonces $w_r = r - (i_r - 1)\mu = r - (i'_r - 1)\mu = w'_r$ y $w_s = s - (j_s - 1)\mu = r - (j'_s - 1)\mu = w'_s$, por consiguiente $(L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} = (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s}$. Con lo cuál tenemos que

$$(\mathcal{H}_{p,q})_{r,s} = (\mathcal{H}_{n,m})_{r,s}$$

para cualquier $(r, s) \in \mathbb{N}_{p\mu} \times \mathbb{N}_{q\eta}$.

$$\therefore \mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = (\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}))_{1:p\mu, 1:q\eta}$$

■

Teorema A.1 (Realización Mínima). (a) La sucesión $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{p \times q}$, es realizable si y sólo si existen enteros positivos α, β y n tales que

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = \text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = n \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty} \quad (3)$$

(b) Si $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es realizable, entonces n es la dimensión de su realización mínima.

(c) Si $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es realizable y β, α son los primeros enteros para los cuales (3) es verdad, entonces β es el índice de observabilidad y α es el índice de controlabilidad de cualquier realización mínima de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$.

Demostración. (a) (\Leftarrow) Esta demostración es en sí un algoritmo para generar una realización. En su desarrollo remarco con un número romano el paso correspondiente del algoritmo.

I. Sean α, β y n enteros positivos tales que

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = \text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = n \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$$

II. Sean r_1, r_2, \dots, r_n las posiciones de las primeras n filas independientes de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$. Se definen $\Lambda_{\alpha} \in \mathcal{M}_{n \times \alpha q}$ y $\Lambda_{\alpha}^* \in \mathcal{M}_{n \times \alpha q}$ como las matrices compuestas por las filas r_1, r_2, \dots, r_n de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$, y por las filas $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$ de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$, respectivamente.

III. Sean s_1, s_2, \dots, s_n las posiciones de las primeras n columnas independientes de Λ_{α} . Definimos a $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $\mathbf{A}^* \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{p \times n}$ y $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{n \times q}$ como las matrices compuestas por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de Λ_{α} , por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de Λ_{α}^* , por las columnas s_1, s_2, \dots, s_n de $\mathcal{H}_{1,\alpha}$, y por las primeras q columnas de Λ_{α} .

Un resultado indispensable para la última parte de la demostración es la siguiente

Proposición A.1. Sean r_1, r_2, \dots, r_n las posiciones de las primeras n filas independientes de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$, sea $j \in \mathbb{N}$ y sean Λ_j y Λ_j^* las matrices compuestas por las filas r_1, r_2, \dots, r_n de $\mathcal{H}_{\beta,j}$ y por las filas $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$ de $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$, respectivamente. Entonces, para toda $j \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes igualdades²

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1} \Lambda_j = \Lambda_j^* \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}^{-1} \Lambda_j = \mathcal{H}_{1,j} \quad (5)$$

$$(\mathbf{A}_2 | \Lambda_j^*) = \Lambda_{j+1} \quad (6)$$

²Como las columnas de A son independientes y el rango de columnas es igual al de filas (Teorema 24 en Hoffman y Kunze (1971, p.114)), entonces las filas de A son independientes. Por lo tanto, A es invertible (Corolario 3 en Hoffman y Kunze (1971, p.46)).

Demostración. Sea W el conjunto de las columnas de A . Entonces, W es una base del espacio columna de Λ_j , para toda $j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$. Para demostrarlo, observamos que Λ_α tiene rango fila n ,³ entonces por el Teorema B.3, su rango columna es n . Y como W es el conjunto de n columnas independientes de Λ_α , entonces W es una de sus bases. Supongamos que para $k \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$, W es base del espacio columna de Λ_k . Entonces, por el Teorema B.3, Λ_k tiene rango fila n y sus n filas son una base de su espacio fila.⁴ Por consiguiente, las n filas de Λ_{k+1} son una base de su espacio fila.⁵ Y por el Teorema B.3 el rango columna de Λ_{k+1} es n , lo que concluye la demostración.

Además, si a lo anterior se añade que cada columna de Λ_j , $j \in \mathbb{N}_\alpha$, es combinación lineal de W ,⁶ se sigue que

$$(\Lambda_j)_{:,u} = \sum_{k=1}^n c_{(u,k)} (\Lambda_\alpha)_{:,s_k} \quad (7)$$

para toda columna $u \in \mathbb{N}_{jp}$ de Λ_j , y para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Luego, como

$$\begin{aligned} I_n &= A^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} \left((\Lambda_\alpha)_{:,s_1} \quad (\Lambda_\alpha)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_\alpha)_{:,s_n} \right) \end{aligned}$$

es decir, $A_{i,:}^{-1}(\Lambda_\alpha)_{:,s_k}$ es 1 si $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$, tenemos que

$$\begin{aligned} A^{-1}\Lambda_j &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} \left((\Lambda_j)_{:,1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_n} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,jq} \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_{(1,s_1)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(s_2,s_1)} & \cdots & c_{(s_n,s_1)} & \cdots & c_{(jq,s_1)} \\ c_{(1,s_2)} & \cdots & c_{(s_1,s_2)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(s_n,s_2)} & \cdots & c_{(jq,s_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(1,s_n)} & \cdots & c_{(s_1,s_n)} & \cdots & c_{(s_2,s_n)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(jq,s_n)} \end{pmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

Sea S el conjunto de las columnas s_1, \dots, s_n de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$. Entonces S es una base del espacio columna de $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$, $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$.⁷ Además, las columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$, $j < \alpha$ son columnas

³Sus n filas son independientes y generan su espacio de filas.

⁴Suponiendo que no, serían dependientes. Lo que implica que un número de filas menor a n genera el espacio de filas de Λ_k , contradiciendo el Corolario B.2.1 (a)

⁵Suponiendo lo contrario serían dependientes. Luego, $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_{k+1})_{i,:} = \bar{0}$ con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \mathbb{N}_n$. Sin embargo, como $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_{k+1})_{i,1:p_k} = \sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_k)_{i,:} = \bar{0}$ con $a_i \neq 0$, para algún $i \in \mathbb{N}_n$, llegamos a una contradicción puesto que las filas de Λ_k son independientes.

⁶Como las columnas de Λ_j , $j \in \mathbb{N}_\alpha$, son columnas de Λ_α y como W es una base del espacio columna de Λ_α , entonces las columnas de Λ_j , $j \in \mathbb{N}_\alpha$ son combinación lineal de W .

⁷Por hipótesis $\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}) = n$, $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$, entonces el rango del espacio columna de $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$ es n , $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$. Si S no es base de algún espacio columna de $\mathcal{H}_{\beta+1,j^*}$, entonces es dependiente o no genera tal espacio. Si es dependiente, $\sum_{i=1}^n a_i (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,s_i} = \bar{0}$ con algún $a_i \neq 0$, implicando $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_j)_{:,s_i} = \bar{0}$ con algún $a_i \neq 0$, una contradicción. Así S no genera tal espacio y $\exists \bar{y}$ del espacio columna que no es combinación lineal de S . Entonces, $S \cup \{\bar{y}\}$ es independiente con $n+1$ elementos, lo que contradice el Corolario B.2.1 (a). Luego, S cumple ambas condiciones, por lo tanto es una base.

de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$, y por lo tanto, son combinaciones lineales de S . Entonces, cualquier columna $u \in \mathbb{N}_{jq}$ de $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$, con cualquier $j \in \mathbb{N}$, garantiza

$$(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{:,s_k} \quad (9)$$

Luego, por definición de Λ_j , $\forall j \in \mathbb{N}$, el elemento de la columna $(\Lambda_j)_{:,u}$ en la coordenada i es el elemento de la columna $(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u}$ en la coordenada r_i , $\forall i \in \mathbb{N}_n$. Entonces, de (7) y (9) tenemos

$$\sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k}$$

y como también $(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k}$, $\forall i, k \in \mathbb{N}_n$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)}(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)}) (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \end{aligned}$$

Pero como esto se cumple para toda $i \in \mathbb{N}_n$, entonces

$$\sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)}) (\Lambda_\alpha)_{:,s_k} = \bar{0}$$

y como W es independiente, $c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_n$, es decir, $c_{(u,s_k)} = d_{(u,s_k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}_n$, y por las igualdades (8) y (9), y que por definición de Λ_j^* , $\forall j \in \mathbb{N}$, el elemento de la columna $(\Lambda_j^*)_{:,u}$ en la coordenada i es el elemento de la columna $(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u}$ en la coordenada $r_i + p$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, se sigue que

$$\begin{aligned} A^* A^{-1} \Lambda_j &= \left((\Lambda_j^*)_{:,s_1} \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_n} \right) A^{-1} \Lambda_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(j_q,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_k,s_k)} \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,1} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_m} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_m} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,j_q} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,j_q} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left((\Lambda_j^*)_{:,1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_n} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,j_q} \right) \\ &= \Lambda_j^* \end{aligned}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$, demostrando la igualdad (4) de la proposición. Además,

$$\begin{aligned}
A_1 A^{-1} \Lambda_j &= \left((\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_1} \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_n} \right) A^{-1} \Lambda_j \\
&= \left(\sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \right) \\
&= \left((\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,1} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_m} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,j_q} \right) \\
&= \left((\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,1} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_m} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,j_q} \right) \\
&= \mathcal{H}_{1,j}
\end{aligned}$$

para toda $j \in \mathbb{N}$, demostrando la igualdad (5) de la proposición.

Por ultimo, como $A_2 = (\Lambda_\alpha)_{:,1:q}$, y $(\Lambda_\alpha)_{i,1:q} = (\mathcal{H}_{\beta,\alpha})_{r_i,1:q} = (\mathcal{H}_{\beta,j+1})_{r_i,1:q} = (\Lambda_{j+1})_{i,:}$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$, entonces

$$A_2 = (\Lambda_{j+1})_{:,1:q} \quad (10)$$

Luego, por las definiciones A.5 y la de Λ_j^* , y debido al Lema A.1, para cualquier $(a,b) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_{j,q}$

$$(\Lambda_j^*)_{a,b} = (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_a+p,b} = (\mathcal{H}_{\beta+1,j+1})_{r_a+p,b} = (L_{a',b'})_{w_{r_a+p},w_b} = (L(a' + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b}$$

Pero como $\beta + 1 \geq a' = \lceil \frac{r_a+p}{p} \rceil = 1 + \lceil \frac{r_a}{p} \rceil \geq 2$ y $b' = \lceil \frac{b}{q} \rceil \leq \lceil \frac{j_q}{q} \rceil = \lceil j \rceil = j < j + 1$, entonces la entrada matricial $L_{a'-1,b'+1}$ de $\mathcal{H}_{\beta,j+1}$ está bien definida, por lo que

$$\begin{aligned}
(L(a' + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} &= (L(a' + 0 + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L(a' + (-1 + 1) + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L((a' - 1) + (b' + 1) - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L_{a'-1,b'+1})_{w_{r_a},w_{b+q}}^8 \\
&= (\mathcal{H}_{\beta+1,j+1})_{r_a,b+q} \\
&= (\Lambda_{j+1})_{a,b+q}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\Lambda_j^* = (\Lambda_{j+1})_{:,q+1:(j+1)q} \quad (11)$$

\therefore De las igualdades en (10) y (11), se demuestra la igualdad (6) de la proposición. ■

IV. Sean las matrices $\mathbf{F} = A^* A^{-1}$, $\mathbf{G} = A_2$ y $\mathbf{H} = A_1 A^{-1}$. Entonces, por las igualdades (4), (5) y (6),

$$A_1 A^{-1} \Lambda_s = \begin{cases} (HG \mid HF \Lambda_{s-1}), & \text{si } 1 < s \\ HG (= HA_2), & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

⁸Tenemos que $w_{r_a+p} = r_a + p - (a' - 1)p = r_a + p - [(a' - 1) - 1]p - p = r_a - [(a' - 1) - 1]p = w_{r_a}$ y que $w_b = b - (b' - 1)q = b - [(b' + 1) - 1]q + q = b + q - [(b' + 1) - 1]q = w_{b+q}$.

además de que $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1,j} &= (HG|HF\Lambda_{j-1}) = (HG|HFG|HF\Lambda_{j-2}^*) = (HG|HFG|HF^2\Lambda_{j-2}) = \dots \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{k-1}\Lambda_{j-k}^*) = (HG|HFG|\dots|HF^k\Lambda_{j-k}) = \dots \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{j-2}\Lambda_1^*) = (HG|HFG|\dots|HF^{j-1}\Lambda_1) \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{j-1}G)\end{aligned}$$

Y ya que por la Definición A.5, $\mathcal{H}_{1,j} = (L_{1,1} \dots L_{1,j}) = (L(1) \dots L(j))$, $\forall j \in \mathbb{N}$, por consiguiente

$$L(j) = HF^{j-1}G$$

para cualquier $j \in \mathbb{N}$.

■

Proposición A.2. *Sea $a_0 = 1$, $a_1 = -3$ y $a_2 = 3$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{i=0}^2 a_i \frac{(n+i)(n+i+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+4)}{2} \quad (1)$$

Demostración. Para 1 tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 a_i \frac{(1+i)(1+i+1)}{2} &= \frac{(1)(1+1)}{2} - 3 \frac{(1+1)(1+1+1)}{2} + 3 \frac{(1+2)(1+2+1)}{2} \\ &= \frac{2-18+36}{2} \\ &= \frac{2-18+36}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= \frac{(4)(5)}{2} \\ &= \frac{(1+3)(1+4)}{2}\end{aligned}$$

Sea k cualquier natural que cumple con la igualdad (1), entonces $k+1$, como se ve debajo, también la respeta. Por tanto, todo $n \in \mathbb{N}$ sustenta la igualdad anterior.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+1)+i)((k+1)+i+1)}{2} &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+i)+1)((k+i+1)+1)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1)+(k+i+1)+(k+i)+1}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1)}{2} + \sum_{i=0}^2 a_i \frac{2(k+i+1)}{2}\end{aligned}$$

y, a causa de la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+3)(k+4)}{2} + \frac{2(k+1) - 6(k+2) + 6(k+3)}{2} \\
&= \frac{(k+3)(k+4) + 2(k+4)}{2} \\
&= \frac{(k+4)((k+3)+2)}{2} \\
&= \frac{((k+1)+3)((k+1)+4)}{2}
\end{aligned}$$

■

Definición A.6 (Factorización). Sea la sucesión $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$, con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Se dice que **Factorizar** la matriz $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{G}_{\mathbb{N}})$ es generar las matrices $P_{n,n} \in \text{It}_{n\mu}$, cuya diagonal principal está compuesta de unos, y $Q_{n,m} \in \mathcal{M}_{n\mu \times m\eta}$:

$$P_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ p_{n\mu,1} & \cdots & p_{n\mu,n\mu-1} & 1 \end{pmatrix}; \quad y \quad Q_{n,m} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,m\eta} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,m\eta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n\mu,1} & q_{n\mu,2} & \cdots & q_{n\mu,m\eta} \end{pmatrix}$$

tales que $\mathcal{H}_{n,m} = P_{n,n}Q_{n,m}$. Por **Algoritmo de Factorización (AF)** se entenderá la sucesión de pasos para **factorizar** la matriz $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{G}_{\mathbb{N}})$, los cuales se definen a continuación:

1. Definir $(Q_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:}$;

2. Determinar la condición:

2.1. Si $\mathcal{H}_{n,m}$ tiene solo una fila, se define $P_{n,n} = [1]$, y $Q_{n,m} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:}$

2.1.1 Fin.

2.2. Si $\mathcal{H}_{n,m}$ tiene más de una fila, definimos $i = 1$;

3. Si $(Q_{n,m})_{i,:} \neq \bar{0}$, hallar la primer columna j_i de $(Q_{n,m})_{i,:}$ tal que $q_{i,j_i} \neq 0$ y definir $q_{s,j_i} = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}_{i+1:n\mu}$;

4. Determinar $p_{u+i,i}$ como⁹

$$p_{u+i,i} = \frac{(\mathcal{H}_{n,m})_{u+i,j_i} - \left(\sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i} \right)}{q_{i,j_i}}$$

para toda $u \in \mathbb{N}_{n\mu-i}$;

5. Determinar $q_{i+1,j}$ como¹⁰

$$q_{i+1,j} = (\mathcal{H}_{n,m})_{i+1,j} - \sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_{m\eta}/\{j_r : \forall r \in \mathbb{N}_i\}$,¹¹

⁹ Esta expresión es equivalente a $(\mathcal{H}_{n,m})_{u+i,j_i} = (P_{n,m})_{u+i,:}(Q_{n,m})_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i}$. Para ello considere el paso 3, que implica $\sum_{s=i+1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$. Además, está bien definida, por el inciso 3, $q_{i,j_i} \neq 0$.

¹⁰ Esta expresión es equivalente a $(\mathcal{H}_{n,m})_{i+1,j} = (P_{n,m})_{i+1,:}(Q_{n,m})_{:,j} = \sum_{s \in \mathbb{N}_{m\eta}} p_{i+1,s} q_{s,j}$. Para ello considere que $P_{n,n} \in \text{It}_{n\mu}$, con unos en su diagonal principal. Lo que implica que $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j_i} = 0$ y $p_{i+1,i+1} = 1$.

¹¹ Es decir, todo j en $\mathbb{N}_{m\eta}$ que no corresponda a la columna del primer elemento no nulo de la fila $1, \dots, i$ de $Q_{n,m}$.

6. Determinar la condición:

- 6.1. Si $(Q_{n,m})_{i+1,:} = \bar{0}$, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF, y haciendo $(Q_{n,m})_{i+1+k,:} = \bar{0}$, $\forall r \in \mathbb{N}_{n\mu-(i+1)}$, conformamos las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y terminamos.
- 6.2. Si $\mathcal{H}_{n,m}$ tiene sólo $i + 1$ filas, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF conformamos las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y terminamos.
- 6.3. Si $\mathcal{H}_{n,m}$ tiene más de $i + 1$ filas y $(Q_{n,m})_{i+1,:} \neq \bar{0}$, entonces definimos $i = i + 1$, es decir, tomamos una nueva i igual a la i inmediatamente anterior, más 1, y repetimos el AF desde el inciso 3.

Definición A.7. Sea $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$, y sean $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$ las matrices que resultan al factorizar $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$ según la Definición A.6, y sea $k \in \mathbb{N}_{(n-1)\mu}$. Se definen $P'_{k,k} \in \mathcal{M}_{k \times k}$, $P^*_{k,k} \in \mathcal{M}_{k \times k}$, $G_k \in \mathcal{M}_{k \times \eta}$ y $H_k \in \mathcal{M}_{\mu \times k}$,

$$P'_{k,k} = (P_{n,n})_{1:k,1:k}; \quad P^*_{k,k} = (P_{n,n})_{\mu+1:\mu+k,1:k};$$

$$G_k = (Q_{n,m})_{1:k,1:\eta}; \quad H_k = (P_{n,n})_{1:\mu,1:k}; \quad F_k = (P'_{k,k})^{-1}P^*_{k,k}$$

Lema A.2. Sea $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Si se cumple que $\text{rango } \mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = k$, entonces la matriz $Q_{n,m}$ generada por el AF de la Definición A.6 tiene sus últimas $n\mu - k$ filas nulas.

Demuestra. Como la matriz $P_{n,n}$ es triangular inferior, entonces su determinante es igual a la multiplicación de los elementos en su diagonal principal, que es 1, por lo cual tiene inversa. Por consiguiente, $k = \text{rango } \mathcal{H}_{n,m} = \text{rango } P_{n,n}Q_{n,m} = \text{rango } Q_{n,m}$. Luego, las primeras k filas de $Q_{n,m}$ deben ser no nulas, en caso contrario, existe $s \in \mathbb{N}_k$ tal que $(Q_{n,m})_{s,:} = \bar{0}$, pero por el paso d6 de la Definición A.6, $(Q_{n,m})_{s+k,:} = \bar{0}$, $\forall k \in \mathbb{N}_{n\mu-k}$, por consiguiente sólo existen $k - 1$ filas no nulas en $Q_{n,m}$, lo que contradice que su rango sea k .

Ahora, si probamos que la fila $(Q_{n,m})_{k+1,:} = \bar{0}$, por el paso d6 de la Definición A.6, entonces $(Q_{n,m})_{k+1+t,:} = \bar{0}$, $\forall t \in \mathbb{N}_{n\mu-(k+1)}$, terminando la demostración.

Si suponemos que la fila $k + 1$ es no nula, entonces tenemos $k + 1$ filas no nulas y, por la Definición A.6, la fila $r \in \mathbb{N}_{k+1}$ tiene la columna j_r no nula, y $j_r \neq j_s$, $\forall r, s \in \mathbb{N}_{k+1}$ con $r \neq s$. Por consiguiente, si $\sum_{r=1}^{k+1} \lambda_r (Q_{n,m})_{r,:} = 0$, $\lambda_r \in \mathbb{R}$, entonces para cada $s \in \mathbb{N}_{k+1}$,

$$\sum_{r=1}^k \lambda_r q_{r,j_s} = \lambda_s q_{s,j_s} = 0$$

siempre y cuando $\lambda_s = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}_{k+1}$, o lo que es lo mismo, que las primeras $k + 1$ filas son independientes, lo que contradice que $\text{rango } Q_{n,m} = k$. Por tanto, la fila $k + 1$ debe ser nula. ■

Lema A.3. Sea $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$, y sean $n', m', n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n' \geq n$ y $m' \geq m$. Al aplicar el AF en la definición A.6 a $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$ y $\mathcal{H}_{n',m'}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$, las matrices obtenidas $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y $P_{n',n'}$ y $Q_{n',m'}$, respectivamente, son tales que

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu} \\ Q_{n,m} &= (Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta} \end{aligned}$$

Demostración. Por la Definición A.6 y el Lema A.1 se sigue que

$$P_{n,n}Q_{n,m} = \mathcal{H}_{n,m} = (\mathcal{H}_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu}(Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta}$$

por consiguiente, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_{n\mu} \times \mathbb{N}_{m\eta}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,j} \quad (2)$$

Además, tenemos que

$$(Q_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n',m'})_{1,1:m\eta} = (Q_{n',m'})_{1,1:m\eta} \quad (3)$$

Se probará por inducción que para toda $u \in \mathbb{N}_{n\mu-1}$,

$$(Q_{n,m})_{u+1,:} = (Q_{n',m'})_{u+1,1:m\eta}; \quad y \quad (P_{n,n})_{:,u} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u} \quad (4)$$

Sea $u = 1$, y debido a (3), los primeros elementos no nulos de $(Q_{n,m})_{1,:}$ y $(Q_{n',m'})_{1,1:m\eta}$ están en la misma columna, k_1 , y son tales que $q_{1,k_1} = q'_{1,k_1}$, además, por el **AF**, $q_{s,k_1} = q'_{s,k_1} = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}_{2:n\mu}$, entonces $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_1} = p_{i,1} q_{1,k_1}$ y $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_1} = p'_{i,1} q'_{1,k_1} \forall i \in \mathbb{N}_{n\mu}$, y por (2) se sigue

$$(P_{n,n})_{:,1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1} \quad (5)$$

Asimismo, tenemos que $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{2,r} q_{r,j} = p_{2,1} q_{1,j} + q_{2,j}$ y $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{2,r} q'_{r,j} = p'_{2,1} q'_{1,j} + q'_{2,j}$, $\forall j \in \mathbb{N}_{m\eta}$, y debido a (3) y (5), $p_{2,1} q_{1,j} = p'_{2,1} q'_{1,j}$, por lo cual

$$(Q_{n,m})_{2,:} = (Q_{n',m'})_{2,1:m\eta} \quad (6)$$

Suponiendo que (4) se cumple para los primeros u enteros, con $u \in \mathbb{N}_{n\mu-2}$, se probará que se cumple para $u+1$. Por hipótesis de inducción, en particular, (4) se cumple para u , por lo cual $(Q_{n,m})_{u+1,:}$ y $(Q_{n',m'})_{u+1,1:m\eta}$ son iguales, así los primeros elementos no nulos de ambas están en la misma columna, k_{u+1} , además, por el **AF**, $q_{s,k_{u+1}} = q'_{s,k_{u+1}} = 0$, $\forall s \in \mathbb{N}_{u+2:n\mu}$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}_{n\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} + p_{i,u+1} q_{u+1,k_{u+1}} \\ \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} + p'_{i,u+1} q'_{u+1,k_{u+1}} \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción y por (3) se sigue que $\sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} = \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}}$ y $q_{u+1,k_{u+1}} = q'_{u+1,k_{u+1}}$, así, debido a (2)

$$(P_{n,n})_{:,u+1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u+1} \quad (7)$$

Por otro lado, para todo $j \in \mathbb{N}_{m\eta}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} + q_{u+2,j}; \quad y \quad \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{u+2,r} q'_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j} + q'_{u+2,j}$$

Debido a la hipótesis de inducción y a (7), $\sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j}$, y a causa de (2),

$$(Q_{n,m})_{u+2,:} = (Q_{n',m'})_{u+2,1:m\eta} \quad (8)$$



Lema A.4. Sea la sucesión $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$, sea $\mathcal{H}_{\beta+1,\beta+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$, y sean $n, n_1 \in \mathbb{N}_{\mu\beta}$ tales que $n_1 \leq n$. Si F_n y F_{n_1} son como en la Definición A.7, con respecto a la matriz $P_{\beta+1,\beta+1}$. Entonces

$$F_{n_1} = (F_n)_{1:n_1, 1:n_1} \quad (9)$$

Demostración. Por la Definición A.7, para cada $i, j \in \mathbb{N}_{n_1}$ se sigue que

$$\begin{aligned} ((F_n)_{1:n_1, 1:n_1})_{i,j} &= (F_n)_{i,j} = ((P'_{n,n})^{-1} P_{n,n}^*)_{i,j} \\ &= \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \end{aligned}$$

ya que $P'_{n,n} \in \text{It}_n(\mathbb{R})$, entonces $(P'_{n,n})^{-1} \in \text{It}_n(\mathbb{R})$, por consiguiente, $((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} = 0$, si $i < r$, y ya que $i \in \mathbb{N}_{n_1}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \end{aligned}$$

y por el Teorema B.6 y la Definición A.7

$$\sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n_1,n_1})^{-1})_{i,r} (P_{n_1,n_1}^*)_{r,j} = (F_{n_1})_{i,j}$$

■

Lema A.5. Sea $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Si se cumple que el rango de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$ es n y que $n \leq \beta\mu$. Entonces $\forall i \in \mathbb{N}_{(\alpha-1)\eta}$ y $j \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$

$$F_n(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i} = (Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i+\eta} \quad (10)$$

donde $F_{\beta\mu}$ es como en la Definición A.7, con respecto a $Q_{\beta+1,\alpha}$ y $P_{\beta+1,\beta+1}$, que son como en la Definición A.6.

Demostración. Sea cualquier $i \in \mathbb{N}_{(\alpha-1)\eta}$ y $j \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$. Por la relación entre $P'_{n\mu,n\mu}$ y $P_{n\mu,n\mu}^*$ en

la Definición A.7, las propiedades de la MH, el Teorema B.6 y los Lemas A.2 y A.3

$$\begin{aligned}
(F_n)_{w,:}(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i} &= \sum_{s=1}^n (F_n)_{w,s} q_{s,i} = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P'_{n,n})_{w,r}^{-1} (P_{n,n}^*)_{r,s} \right) q_{s,i} \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta+1,\beta+1})_{w,r}^{-1} p_{r+\mu,s} \right) q_{s,i} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left(\sum_{s=1}^n p_{r+\mu,s} q_{s,i} \right) \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (\mathcal{H}_{n+1,\alpha}(\mathcal{J}_N))_{r+\mu,i} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (\mathcal{H}_{n+1,\alpha}(\mathcal{J}_N))_{r,i+\eta} \\
&= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left(\sum_{s=1}^n p_{r,s} q_{s,i+\eta} \right) \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} p_{r,s} \right) q_{s,i+\eta} \\
&= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (P_{\beta,\beta})_{r,s} \right) q_{s,i+\eta} \\
&= (Q_{n+1,\alpha})_{w,i+\eta}
\end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad (10). ■

Teorema A.2. Sea \mathcal{J}_N con elementos en $\subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Si

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_N) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_N) = n$$

para algún $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha+1:\infty}$. Entonces,

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\psi-1}(\mathcal{J}_N) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}(\mathcal{J}_N) = n$$

Demostración. (i) Supongamos que $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$ tiene rango $n_1 < n$. Como $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ tiene rango n , la base de su espacio de columnas se compone por n de sus columnas en las posiciones v_1, \dots, v_n . Luego, tomando las columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$ en las posiciones v_1, \dots, v_n , tenemos que deben ser linealmente dependientes, es decir $\forall j \in \mathbb{N}_{(\beta+1)\mu}$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1})_{j,v_i} = 0$$

donde $\gamma_i \in \mathbb{R}$ y existe algún $i \in \mathbb{N}_n$ tal que $\gamma_i \neq 0$, en particular esto garantiza que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\mathcal{H}_{\beta,\alpha})_{k,v_i} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$, donde $\gamma_i \in \mathbb{R}$ y existe algún $i \in \mathbb{N}_n$ tal que $\gamma_i \neq 0$, pero esto contradice que las columnas v_1, \dots, v_n de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ sean una base del espacio de columnas.

(ii) Supongamos que $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$ tiene rango $n_1 > n$. Entonces tiene n_1 columnas linealmente independiente, sin embargo, cada una de ellas también son columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi}$, pero como su rango es $n < n_1$, estas deberían ser linealmente dependientes.

(iii) Supongamos que $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$ tiene rango $n_1 < n$. Entonces cualquier conjunto de más de n_1 columnas son linealmente dependientes, sin embargo, como cada columna de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ es columna de $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$, entonces la base del espacio de columnas de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$, que contiene $n > n_1$ columnas, sería linealmente dependiente.

(iv) Supongamos que $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$ tiene rango $n_1 > n$. Por el inciso (i) y (ii) sabemos que $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$ tiene rango n . Como toda fila de $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$ es fila de $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$, entonces cada una de las n_1 filas de la base del espacio de filas de la primera matriz también es fila de la segunda, pero como la segunda tiene rango $n < n_1$, la base tendría que se linealmente dependiente.

■

Teorema A.3. *Sea la sucesión \mathcal{J}_N , con $\langle \mathcal{J}_N \rangle \subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$. Si $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$ y la sucesión parcial \mathcal{J}_{N_k} satisfacen que*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$$

Entonces, existe $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ tal que al expandir \mathcal{J}_{N_k} a $\mathcal{J}'_{N_{k+1}}$, agregándole $J(k+1)$, se garantiza que

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}) = n$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ el rango de la matriz $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$. Por hipótesis y la Definición A.5, $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$ y $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$ tienen el mismo rango y los mismos primeros α bloques columna, por tanto, comparten el mismo espacio de columnas y tienen una base, \mathcal{H} , en los primeros α bloques columna, formada por n columnas en las posiciones v_1, v_2, \dots, v_n . Incluso, la matriz $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$ tiene como base de su espacio de columnas, aquellas columnas que se hallan en las posiciones v_1, v_2, \dots, v_n .¹²

Definamos $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ como la matriz cuya columna $j \in \mathbb{N}_\eta$ es combinación lineal de las columnas en las posiciones v_1, \dots, v_n del bloque de fila $\beta+1$ de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$: $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})(\beta+1, :) = (J(\beta+1) \ \dots \ J(\beta+\alpha))$, empleando el vector coordenado $[(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}}$, y sea $\mathcal{J}'_{N_{k+1}}$ la sucesión expandida de \mathcal{J}_{N_k} al agregar $J(k+1)$. Entonces, el rango de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}})$ es n , en efecto, para comprobarlo sólo hay que probar que las columnas en su bloque columna $\alpha+1$, $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}})(:, \alpha+1)$, pertenecen al espacio de columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$.

Sea la matriz $V_e = (e_{v_1} \cdots e_{v_n})$, donde $e_{v_i} \in \mathbb{R}^{\alpha\eta}$ es el vector con 1 en la coordenada v_i y 0 en las restantes. Dado que $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$ y por la definición de $J(k+1)$, se sigue que

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} &= \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\ J(k+1)_{:,j} &= \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})(\beta+1, :) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

¹²Suponiendo que fuesen linealmente independientes, tenemos que $\exists \lambda_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_n$, tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,v_i} = \vec{0}$, que implica $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{1:\beta\mu, v_i} = \vec{0}$, es decir, $\exists \lambda_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_n$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,v_i} = \vec{0}$, lo que contradice que \mathcal{H} sea una base.

por lo cuál tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} &= \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} \\ J(k+1)_{:,j} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\ \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})(\beta+1,:) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \\ \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})(\beta+1,:) \end{pmatrix} V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\
 &= \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}}
 \end{aligned}$$

Así, las columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:,\alpha+1)$, pertenecen al espacio de columnas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$. Por lo tanto, se concluye que $rango \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}) = n$.

■

Teorema A.4. *Sea la sucesión $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$, con $\langle \mathcal{J}_{\mathbb{N}} \rangle \subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ y sean $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$ y $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ dados. Si la sucesión parcial $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$, $k = \psi + \beta$, satisface que*

$$rango \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = rango \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = rango \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = n$$

Entonces, existen $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ tales que al expandir $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ a $\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$, agregando ordenadamente estos β elementos, se garantiza que

$$rango \mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}) = n$$

Demostración. (i) Tomemos $\psi = \alpha$. Como $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ y $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ tienen rango n , y por hipótesis también $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$, por el Teorema A.3 existe un $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ tal que $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ tiene rango n , donde $\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_k}$ es la expansión de $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ al agregarle $J(k+1)$.

Sean v_1, \dots, v_n las posiciones de las filas de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ que conforman la base de su espacio de filas, \mathcal{H} . Como $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ y $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ tienen rango n , entonces cada fila de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:,\alpha+1)$ pertenece a \mathcal{H} , en particular, cada fila de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, \alpha+1)$ es combinación lineal de las filas en las posiciones v_1, \dots, v_n de $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, :)$.

Luego, como $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, \alpha+1) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:,\alpha+2)$ y $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, :) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:,\alpha+1)$, entonces cada fila de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:,\alpha+2)$ es combinación lineal de las filas en las posiciones $v_1 + \mu, \dots, v_n + \mu$ de $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$, por tanto $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ tiene rango n .

Así tenemos que $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$, $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ y $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ tienen rango n , por el Teorema A.3, tenemos que existe un $J(k+2) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ que expande $\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}$ a $\mathcal{J}''_{\mathbb{N}_{k+2}}$ al agregarle $J(k+2)$, tal que $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+2}(\mathcal{J}''_{\mathbb{N}_{k+2}})$ tiene rango n . Repitiendo el proceso anterior un número β de veces, expandimos $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ a $\mathcal{J}^{(\beta)}_{\mathbb{N}_{k+\beta}} = \mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$ y obtenemos que $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}})$ tiene rango n .

(ii) Tomando $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha+1:\infty}$. Por el Teorema A.2 y repitiendo un número β de veces el proceso del caso anterior, podemos expandir $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ a $\mathcal{J}^{(\beta)}_{\mathbb{N}_{k+\beta}} = \mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$ y obtenemos que $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}})$ tiene rango n .

■

Teorema A.5 (Realización Parcial Mínima). *Sea la sucesión $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$, con elementos en $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ y sean $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$ y $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ dados. Si α, β son los menores valores tales que*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = n \quad (11)$$

Entonces, la sucesión parcial $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$, de los $k = \beta + \psi$ primeros elementos de $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$, es mínimamente realizada por

$$(F_n \ G_n \ H_n)$$

donde F_n , G_n y H_n son como en la Definición A.7.

Demostración. Por el Teorema A.4, existen $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$, tales que expanden $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ a $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$, donde esta extensión permite que $\text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_{k+\beta}}) = n$. Al factorizar $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_{k+\beta}})$ y $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$, por el Lema A.3, se comprueba que ambas tienen la misma matriz $P_{\beta+1,\beta+1}$, y sus matrices $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$ y $Q_{\beta+1,\psi}$, respectivamente, satisfacen que (i) por el Lema A.2 las filas mayores a n son nulas, y (ii), $(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:,1:\psi\eta} = Q_{\beta+1,\psi}$. Por consiguiente, si F_n , G_n y H_n están definidas bajo A.7, con respecto a $P_{\beta+1,\beta+1}$ y $Q_{\beta+1,\psi}$, y F'_n , G'_n y H'_n con respecto a $P_{\beta+1,\beta+1}$ y $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$, entonces $F_n = F'_n$, $G_n = G'_n$ y $H_n = H'_n$.

Por lo tanto, si $t \in \mathbb{N}_{\psi+\beta}$, y empleando los Lemas A.2, A.3, A.4 y A.5, se sigue que

$$\begin{aligned} H_n(F_n)^{t-1}G_n &= H'_n(F'_n)^{t-1}G'_n \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,1:n}(F_n)^{t-1}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,1:\eta} \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,1:n}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,(t-1)\eta+1:t\eta} \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,:}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:(t-1)\eta+1:t\eta} \\ &= J_{1+t} = J(1+t-1) = J(t) \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que $(F_n \ G_n \ H_n)$ realiza $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$.

Por último pruebo que la realización $(F_n \ G_n \ H_n)$ de $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ es mínima. Suponiendo que no lo es, entonces existe una realización de dimensión $v < n$. Como α, β son los menores enteros para los cuales se garantiza (11), entonces $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ son los índices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente.¹³ Por consiguiente, $\mathcal{O}_{\beta} * \mathcal{C}_{\alpha}$ tiene rango v , y ya que $\mathcal{O}_{\beta} * \mathcal{C}_{\alpha} = \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$, entonces $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ tiene rango v . Pero, por hipótesis, $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ tiene rango n , así $v < n = v$. Por tanto, $(F_n \ G_n \ H_n)$ es una realización parcial mínima.

■

Teorema A.6. *Sea $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$ la sucesión parcial sobre $\mathbb{F}^{\alpha \times \beta}$ y sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p+q+1 \leq z$. Si $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathbb{F}^{pa \times qb}$ es la matriz de hankel formada por $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_n}$ tal que*

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{p,q}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{p,q+1}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{p+1,z-(p+1)}) \quad (12)$$

y si cualquier $\mathcal{H}_{r,s}$ con $r < p$ y $s \leq q$ o $r = p$ y $s < q$ no satisface (12), entonces, toda $\mathcal{H}_{u,v}$ con $u < p$, $v > q$ o $u > p$ y $v < q$, y $u+v+1 \leq z$, no garantiza (12).

Demostración.

Sea w el rango de $\mathcal{H}_{p,q}$, sean r_j , $j = 1, \dots, w$ las posiciones de las columnas de $\mathcal{H}_{p,q}$ que forman la base de su espacio de columnas, y sea $\mathcal{H}_{u,v}$ con $u < p$ y $v > q$, y $u+v+1 \leq z$. Entonces,

¹³Véase la Definición A.3 (Matriz de Controlabilidad) y Definición A.4 (Matriz de Observabilidad)

si suponemos que $\mathcal{H}_{u,v}$ satisface (12), se demostrará que $\mathcal{H}_{u,q}$ satisface (12), pero por hipótesis, $\mathcal{H}_{u,q}$ no puede satisfacer (12). Por lo tanto, no existe $\mathcal{H}_{u,v}$, con $u < p$, $v > q$ y $u + v + 1 \leq z$, que satisface (12).

Considerar únicamente la demostración del caso anterior no produce pérdida de generalidad. Para el segundo caso, si suponemos que existe una matriz $\mathcal{H}_{c,d}$ con $c > p$, $d < q$ y $c + d + 1 \leq z$ que satisface (12) y dado que $\mathcal{H}_{p,q}$ con $p < c$, $q > d$ y $p + q + 1 \leq z$ satisface (12) por hipótesis, entonces $\mathcal{H}_{c,d}$ y $\mathcal{H}_{p,q}$ ocupan el lugar de $\mathcal{H}_{p,q}$ y $\mathcal{H}_{u,v}$ del caso anterior, respectivamente. Esto nos lleva a que $\mathcal{H}_{p,d}$ satisface (12), pero como $\mathcal{H}_{p,d}$ tiene que $p = p$ y $d < q$, entonces no puede satisfacer (12) por hipótesis. Por lo tanto, como esta contradicción surgió del supuesto inicial de este caso, no puede existir $\mathcal{H}_{c,d}$, $c > p$, $d < q$ y $c + d + 1 \leq z$, que satisface (12).

Iniciamos la demostración con unas observaciones que se usarán en la demostración:

- i) Las columnas de $\mathcal{H}_{p,q}$ son también columnas de $\mathcal{H}_{p,q+1}$, por definición de Matriz de Hankel (MH).
- ii) Las columnas r_j de $\mathcal{H}_{p,q}$ también son una base del espacio de columnas de $\mathcal{H}_{p,q+1}$, por la condición (12).
- iii) $\mathcal{H}_{u,q+1}$ y $\mathcal{H}_{p,q+1}$ tienen el mismo número de columnas y la columna k de $\mathcal{H}_{u,q+1}$ está compuesta por los elementos en las primeras αu coordenadas de la columna k de $\mathcal{H}_{p,q+1}$, por definición de MH.
- iv) Las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q+1}$ generan todas las columnas de $\mathcal{H}_{u,q+1}$, por el inciso (iii).
- v) Las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,q+1}$, debido a que cada $r_j \leq bq$ y las primeras bq columnas de $\mathcal{H}_{u,q+1}$ forman $\mathcal{H}_{u,q}$, por definición de MH.
- vi) Hay al menos tantos bloques fila en $\mathcal{H}_{u+1:p,q+1}$ como bloques columna en $\mathcal{H}_{u,q+1:v}$. Esto a causa de las restricciones

$$\begin{aligned} v + u + 1 &\leq z \\ p + q + 1 &\leq z \end{aligned}$$

que implican lo que se afirma

$$v - q \leq z - (u + 1) - (z - (p + 1)) = p - u \quad (13)$$

lo cuál se puede ver en las siguientes representaciones matriciales

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q+1} &= \left(\begin{array}{c} \mathcal{H}_{u,q+1} \\ \mathcal{H}_{u+1:p,q+1} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} J_1 & \dots & J_{q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+q} \\ J_{u+1} & \dots & J_{u+q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_p & \dots & J_{p+q} \end{array} \right) \Big\}^{p-u} \\ \mathcal{H}_{u,v} &= \left(\begin{array}{cc} \mathcal{H}_{u,q} & \mathcal{H}_{u,q+1:v} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} J_1 & \dots & J_q & \overbrace{J_{q+1} & \dots & J_v}^{v-q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+q-1} & J_{u+q} & \dots & J_{u+v-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

vii) Para $i = 1, \dots, v - (q + 1)$ se sostiene la siguiente igualdad

$$\mathcal{H}_{1+i:u+i,q+1} = \mathcal{H}_{u,1+i:q+1+i}$$

Igualdad que es valida ya que de (13) tenemos $u + v - q \leq p$, y por la estructura de la MH. La igualdad se puede ver en la siguiente representación matricial

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q+1} &= \left(\begin{array}{ccc} J_1 & \dots & J_{q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_i & \dots & J_{q+i} \\ \left(\begin{array}{ccc} J_{1+i} & \dots & J_{q+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{u+i} & \dots & J_{q+u+i} \end{array} \right) \\ J_{u+i+1} & \dots & J_{q+u+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_p & \dots & J_{p+q} \end{array} \right) \mathcal{H}_{1+i:u+i,q+1} \\ \mathcal{H}_{u,v} &= \left(\begin{array}{ccccc} J_1 & \dots & J_i & \overbrace{\left(\begin{array}{ccc} J_{1+i} & \dots & J_{q+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{u+i} & \dots & J_{q+u+i} \end{array} \right)} & J_{q+2+i} & \dots & J_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+i-1} & & J_{q+u+i+1} & \dots & J_{u+v-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Prosiguiendo con la demostración, si tomamos $i = 1$, entonces $\mathcal{H}_{u,2:q+2} = \mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$, y como $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$ y $\mathcal{H}_{p,q+1}$ tienen el mismo número de columnas, y la columna k de $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$ es igual a los elementos en las coordenadas $\alpha + 1$ hasta $(u + 1)\alpha$ de la columna k de $\mathcal{H}_{p,q+1}$, entonces para $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$, sus columnas r_j generan su espacio de columnas. Por lo cual, las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$ generan cualquiera de las columnas de $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$. Pero como la columna k de $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$ es la columna $k + \beta$ de $\mathcal{H}_{u,q+2}$, entonces las columnas $r_j + \beta$ de $\mathcal{H}_{u,q+2}$ generan cualquier columna de $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$. Más aún, como $r_j + \beta \leq \beta q + \beta = \beta(q + 1)$ y las primeras $\beta(q + 1)$ columnas de $\mathcal{H}_{u,q+2}$ forman a $\mathcal{H}_{u,q+1}$, entonces las columnas $r_j + \beta$ son columnas de $\mathcal{H}_{u,q+1}$.

En virtud de que las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,q+1}$, entonces las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas $r_j + \beta$ de $\mathcal{H}_{u,q+1}$. Y como cualquier columna de $\mathcal{H}_{u,q+2}$ es columna de $\mathcal{H}_{u,q+1}$ o $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$, entonces las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan cualquier columna de $\mathcal{H}_{u,q+2}$.

Ahora, si para $n < v - (q + 1)$, las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,1+n:q+n+2}$. Entonces, como $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2} = \mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$, y ya que cada columna k de $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$ está formada por los elementos entre las coordenadas $\alpha(n+1)+1$ y $\alpha(u+n+1)$ de la columna k de $\mathcal{H}_{p,q+1}$, entonces las columnas r_j de $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$ generan cualquier columna de $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$. Así, las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$ generan cada columna de $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+1}$. Pero como cada columna k de $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$ es la columna $k + \beta(n + 1)$ de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$, entonces las columnas $r_j + \beta(n + 1)$ de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ generan cualquier columna de $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$. Incluso, como $r_j + \beta(n + 1) \leq \beta q + \beta(n + 1) = \beta(q + n + 1)$ y las primeras $\beta(q + n + 1)$ columnas de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ forman a $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$, entonces las columnas $r_j + \beta(n + 1)$ de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ son columnas de $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$.

Luego, ya que por hipótesis cada columna de $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$ es generada por las r_j columnas de $\mathcal{H}_{u,q}$, entonces las columnas $r_j + \beta(n + 1)$ de $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$ son generadas por las r_j columnas de $\mathcal{H}_{u,q}$. A partir de esto, tenemos que las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$. Pero

como toda columna de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ es columna de $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$ o $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$, entonces las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$.

Por consiguiente, hemos demostrado que las columnas de r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,v}$. Así mismo, como el rango de $\mathcal{H}_{u,v}$ es w , entonces las columnas r_j de $\mathcal{H}_{u,q}$ son una base del espacio de columnas de $\mathcal{H}_{u,v}$. En efecto, ellas generan las columnas de $\mathcal{H}_{u,v}$, y si no son linealmente independientes, un subconjunto de ellas con menos de w elementos sería una base de $\mathcal{H}_{u,v}$, sin embargo, esto contradice que el rango de $\mathcal{H}_{u,v}$ es w .

Luego, debido a que $\mathcal{H}_{u,q}$ tiene w elementos linealmente independientes que generan cualquiera de sus columnas, entonces su rango es de w . Pero como los rangos de $\mathcal{H}_{u,q+1}$ y $\mathcal{H}_{u+1,v}$ también son w , tenemos que $\mathcal{H}_{u,q}$ satisface (12), lo cual es una contradicción.

\therefore Toda $\mathcal{H}_{u,v}$ con $u < p$, $v > q$ y $u+v+1 \leq n$ no puede garantizar (12), como se quería demostrar. ■

Definición A.8. *Sea la sucesión $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$, con elementos en $\mathbb{F}^{\alpha \times \beta}$ y sean $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p+q+1 \leq z$. Se dice que la matriz de hankel $\mathcal{H}_{p,q}$ formada por $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$ es mínima siempre que p, q son los mínimos enteros para los cuales*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{p,q} = \text{rango } \mathcal{H}_{p,q+1} = \text{rango } \mathcal{H}_{p+1,z-(p+1)}$$

Apéndice B

Álgebra Lineal

Definición B.1 (Espacio Vectorial). *Sea \mathbb{F} un cuerpo. Un conjunto $V \neq \emptyset$ con las operaciones $+ : V \times V \rightarrow V$ y $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$, llamadas adición y multiplicación escalar, respectivamente, se dice que es un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathbb{F} si*

- (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;
- (b) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{g}$;
- (c) $\exists! \mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V$;
- (d) $\forall \mathbf{a} \in V, \exists! -\mathbf{a} \in V$ tal que $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
- (e) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V$;
- (f) $(c_1 c_2)\mathbf{a} = c_1(c_2\mathbf{a})$;
- (g) $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$;
- (h) $(c_1 + c_2)\mathbf{a} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{a}$.

A los elementos de V les llamaremos vectores y a los de \mathbb{F} escalares. El vector $\mathbf{0} \in V$ que satisface el inciso (c) lo llamamos **vector nulo** o **vector cero**, y al vector $-\mathbf{a} \in V$ que satisface (d) se le denomina **vector inverso aditivo** de $\mathbf{a} \in V$.

Definición B.2 (Combinación Lineal). *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} . Un vector $\mathbf{b} \in V$ se dice que es una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ siempre que existan $c_1, \dots, c_n \in F$ tales que*

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i$$

Definición B.3 (Subespacio Generado). *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} , sea $S \subseteq V$ y sea A_s el conjunto de subespacios de V que contienen a S . Se dice que el **subespacio generado** por S es el conjunto W_s definido como*

$$W_s = \bigcap_{N \in A_s} N$$

Teorema B.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} , sea $S \subseteq V$ no vacío. Si L es el conjunto de combinaciones lineales de S , entonces, el espacio generado por S es L .*

Demostración. Sea W_s el espacio generado por S . Tomando $\mathbf{a} \in L$ arbitrario, entonces $\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b}$, con $c_b \in \mathbb{F}$. Como cada $\mathbf{b} \in S \subseteq W_s$ y W_s es un espacio vectorial, entonces cada $c_b \mathbf{b}$ pertenece a W_s , es más, la suma de todos ellos pertenece a W_s . Por consiguiente $\mathbf{a} \in W_s$, y así tenemos que $L \subseteq W$.

Por otro lado, sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in L$ y $c_{a_1} \in \mathbb{F}$ arbitrarios. Entonces $\mathbf{a}_1 = \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b}$ y $\mathbf{a}_2 = \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b}$, y por consiguiente

$$\begin{aligned} c_{a_1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 &= c_{a_1} \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b} + \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b} \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} c_{a_1} c_b \mathbf{b} + \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b} \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} (c_{a_1} c_b \mathbf{b} + d_b \mathbf{b}) \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} (c_{a_1} c_b + d_b) \mathbf{b} \end{aligned}$$

Por lo que $c_{a_1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in L$. Por tanto L es subespacio vectorial y como contiene a S , entonces $W \subseteq L$.

$\therefore W = L$. ■

Definición B.4 (Dependencia Lineal). *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{F} y sea $S \subseteq V$. Se dice que S es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in S$ tal que*

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \bar{0}.$$

donde algún escalar $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ no sea nulo. Si un conjunto no es linealmente dependiente diremos que es **linealmente independiente**. Decir que un conjunto es linealmente dependiente o independiente será lo mismo que decir que sus vectores son linealmente dependientes o independientes.

Definición B.5 (Base de un espacio vectorial). *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{F} y sea $S \subseteq V$. Se dice que S es una **base** de V si es linealmente independiente y genera a V . Definimos la **dimensión** de V como la cardinalidad de S y la representamos como $\dim(V)$. Si la cardinalidad de S es finita, decimos que V es finito.*

Teorema B.2. *Sea V un espacio sobre el cuerpo \mathbb{F} que es generado por un conjunto finito de vectores $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$. Entonces cualquier conjunto independiente de vectores en V es finito y contiene no más de m vectores.*

Demostración. Véase Hoffman y Kunze (1971, p.44). ■

Corolario B.2.1. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} y sea $n = \dim V$. Entonces*

- (a) *cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores es linealmente dependiente;*
- (b) *ningún subconjunto de V que contenga menos de n vectores puede generar V .*

Demostración. Véase Hoffman y Kunze (1971, p.44-45). ■

Definición B.6. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$. Se dice que el **rango fila** de A es la dimensión del espacio generado por las filas de A . El **rango columna** de A se define como la **dimensión** del espacio generado por las columnas de A .

Teorema B.3. Si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$, entonces $\text{rango fila}(A) = \text{rango columna}(A)$.

Demostración. Véase Hoffman y Kunze (1971, p.72). ■

Definición B.7. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$. Se dice que el **rango** de A es la dimensión del espacio generado por las filas o las columnas de A .

Teorema B.4. Sea K un anillo conmutativo con unidad y sea n un entero positivo. Existe exactamente una función determinante sobre el conjunto de las matrices $n \times n$ sobre \mathbb{F} , y es la función \det definida por $\det(A) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n)$.¹

Demostración. Véase Hoffman y Kunze (1971, p.150-152). ■

Teorema B.5. Sea $A \in \text{It}_n(\mathbb{F})$ con $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_n$. Entonces existe su inversa, A^{-1} .

Demostración. Solamente hay que probar que las columnas de la A son linealmente independientes. En efecto, si lo son, generan el espacio \mathbb{F}^n , en particular, los vectores canónicos de este espacio. Así, existen coeficientes asociados a cada combinación lineal. Todos ellos forman la matriz inversa que buscamos.

Si existen coeficientes no nulos $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k}$ tales que la combinación lineal de las columnas de A es igual al vector nulo, entonces tomando el menor de ellos

$$\sum_{i=1}^k b_{j_i} A_{j_r j_i} = b_{j_i} A_{j_i j_i} = 0$$

Sin embargo, como $A_{j_i j_i} \neq 0$, llegamos a una contradicción.

∴ Las columnas de A son linealmente independientes. ■

Teorema B.6. Sea $A \in \text{It}_n(\mathbb{F})$ tal que su diagonal principal es unitaria, y sea $n_1 \in \mathbb{N}_{n-1}$. Si $A_1 = A_{1:n_1, 1:n_1}$ es la submatriz de las primeras n_1 filas y columnas de A . Entonces,

$$A_1^{-1} = A_2$$

donde $A_2 = (A^{-1})_{1:n_1, 1:n_1}$ es la submatriz de las primeras n_1 filas y columnas de A^{-1}

¹La función $\text{sgn } \sigma$ es 1 si σ es par y -1 si σ es impar. Aquí σ es una permutación de

Demostración. Por el Teorema B.5, entonces existen A_1^{-1} y A^{-1} , y por ende existe A_2 . Luego, para cada $i, j \in \mathbb{N}_{n_1}$

$$(A_1 A_2)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A_1)_{i,r} (A_2)_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j}$$

Como $(A)_{i,r} = 0$, si $i < r$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + 0 \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \delta(i-j) \end{aligned}$$

Es decir, $A_1 A_2 = I_{n_1}$, lo cuál implica que

$$A_2 = I_{n_1} A_2 = (A_1^{-1} A_1) A_2 = A_1^{-1} (A_1 A_2) = A_1^{-1} I_{n_1} = A_1^{-1}$$

$$\therefore A_2 = A^{-1}. \quad \blacksquare$$

Definición B.8. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Decimos que $a - bi \in \mathbb{C}$ es el **conjugado** de z , y lo denotaremos como \bar{z} .

Proposición B.1. Sean $w, z \in \mathbb{C}$. Entonces, $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$ y $\overline{wz} = (\overline{w})(\overline{z})$.

Demostración. Sea $w = a + bi$ y $z = c + di$, entonces por las propiedades de cuerpo

$$\begin{aligned} \overline{(a+bi)+(c+di)} &= \overline{a+c+(b+d)i} \\ &= a+c-(b+d)i \\ &= (a-bi)+(c-di) \\ &= (\overline{a+bi})+(\overline{c+di}) \end{aligned}$$

Y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(a+bi)(c+di)} &= \overline{ac+adi+bic+bid} \\ &= \overline{ac+adi+bci-bd} \\ &= ac-bd-(ad+cb)i \\ &= ac+bdii-adi-cbi \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= (\overline{a+bi})(\overline{c+di}) \end{aligned}$$



Definición B.9. Sean $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. Entonces si $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ decimos que

1. $A' \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ es la **matriz transpuesta** de A siempre y cuando $(A')_{i,j} = A_{j,i}$.
2. $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ es la **matriz conjugada** de A siempre y cuando $(\bar{A})_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$.
3. $A^* \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ es la **matriz adjunta** de A siempre y cuando $A^* = \bar{A}'$.

Proposición B.2. Sea $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces

1. $(A')' = A$;
2. $(AC)' = C'A'$;
3. $(A + B)' = A' + B'$; y
4. $(zA)' = zA'$

Demostración. Por la Definición B.9 (1) tenemos que

1. $(A')_{i,j}' = A'_{j,i} = A_{i,j}$. Por lo tanto, $(A')' = A$.
2. $(AC)_{i,j}' = (AC)_{j,i} = \sum_{r=1}^m A_{j,r} C_{r,i} = \sum_{r=1}^m C'_{i,r} A'_{r,j} = (C'A')_{i,j}$, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$. Por lo tanto, $(AC)' = C'A'$.
3. $(A + B)_{i,j}' = (A + B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = A'_{i,j} + B'_{i,j}$. Por lo tanto, $(A + B)' = A' + B'$.
4. $(zA)_{i,j}' = (zA)_{j,i} = zA_{j,i} = zA'_{i,j}$. Por lo tanto, $(zA)' = zA'$.

■

Proposición B.3. Sea $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces, $(A+B)^* = A^* + B^*$ y $(zA)^* = \bar{z}A^*$.

Demostración. Por la Proposición B.2 tenemos que $(A + B)' = A' + B'$. Además, por la Proposición B.1

$$\begin{aligned} \overline{(A+B)_{i,j}'} &= \overline{A'_{i,j} + B'_{i,j}} \\ &= \overline{A'_{i,j}} + \overline{B'_{i,j}} \end{aligned}$$

Por otra parte, por la Proposición B.1 y la Definición B.9, $(zA)_{i,j}^* = \overline{(zA)_{i,j}'} = \overline{(zA)_{j,i}} = \overline{zA_{j,i}} = \bar{z}\overline{A_{j,i}} = \bar{z}A'_{i,j} = \bar{z}A_{i,j}^*$.

■

Definición B.10 (Producto interno). Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Decimos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ es el **producto interior** de V siempre que $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $c \in \mathbb{C}$ se cumple que

1. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$;
2. $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$;
3. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$; y

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en V , entonces diremos que $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ es un **espacio producto interno**.

Lema B.1. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno sobre \mathbb{C} . Entonces $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$ para todo $\mathbf{v} \in V$.

Demostración. De la propiedad 1 de la Definición B.10 tenemos

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$$

siempre y cuando, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$



Proposición B.4. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Demostración. Por el Lema B.1 sabemos que $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ está bien definida. Ahora, si suponemos que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ entonces por la propiedad 4 de la Definición B.10 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$, contradiciendo la hipótesis.



Teorema B.7. Sea V es un espacio producto interno sobre \mathbb{C} . Si $M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como $M(\mathbf{a}) = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$, entonces para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ y $c \in \mathbb{C}$,

1. $M(c\mathbf{a}) = |c|M(\mathbf{a})$;
2. $M(\mathbf{a}) > 0$ cuando $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$;
3. $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq M(\mathbf{a})M(\mathbf{b})$
4. $M(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq M(\mathbf{a}) + M(\mathbf{b})$

Demostración. Véase Hoffman y Kunze (1971, pp.273 y 277)



Definición B.11 (Norma). Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Decimos que la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** en V siempre que

1. $\|\mathbf{v}\| > 0$, $\forall \mathbf{v} \in V \setminus \{0\}$;
2. $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$;
3. $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$, $\forall \mathbf{v} \in V$ y $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;
4. $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.

Si $\|\cdot\|$ es una norma en V , entonces diremos que $(\|\cdot\|, V)$ es un **espacio normado**.

Teorema B.8. Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Entonces $M(\mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ es una norma sobre V .

Demostración. Las condiciones 1, 3 y 4 de la Definición B.11 se siguen del Teorema B.7, mientras que la condición 2 de la misma definición del Lema B.1 y la Proposición B.4.



Definición B.12 (Norma inducida por producto interno). *Sea $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$ un espacio producto interno. Decimos que la **norma inducida por el producto interno** en V es la función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$.*

Definición B.13 (Distancia). *Sea $(\|\cdot\|, V)$ un espacio normado. Decimos que la **distancia inducida por una norma** en V es la función $d(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.*

Definición B.14. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se dice que la función $tr(\cdot) : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$ es la **traza** de A .*

Proposición B.5. *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n \times m}$, $D \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades $tr(zA + B) = ztr(A) + tr(B)$ y $tr(CD) = tr(DC)$*

Demostración.

$$\begin{aligned} tr(zA + B) &= \sum_{i=1}^n (zA + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n [(zA)_{i,i} + B_{i,i}] = \sum_{i=1}^n (zA)_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n zA_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} = z \sum_{i=1}^n A_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\ &= ztr(A) + tr(B) \\ tr(CD) &= \sum_{i=1}^n (CD)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m C_{i,r} D_{r,i} = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n D_{r,i} C_{i,r} = \sum_{r=1}^m (DC)_{r,r} \\ &= tr(DC) \end{aligned}$$



Teorema B.9. *Sea $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$. Entonces $\langle A, B \rangle = tr(AB^*)$ es un producto interno en $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$.*

Demostración.

1. Sea $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces por la Proposición B.5

$$\begin{aligned} \langle z(A + B), C \rangle &= tr((z(A + B))C^*) \\ &= tr((zA)C^* + (zB)C^*) \\ &= ztr(AC^*) + ztr(BC^*) \\ &= z\langle A, C \rangle + z\langle B, C \rangle \end{aligned}$$

Como se cumple para un $z \in \mathbb{C}$ arbitrario, tomando $z = 1 + 0i = 1$ se cumple la condición 1 de la Definición B.10. Inclusive, como B es arbitrario, tomando $B = \mathbf{0}$ se cumple la condición 2 de la misma definición.

2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$, entonces por la Proposición B.1 y la Definición B.9

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= \text{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^n (AB^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{B_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r}} (A_{r,i}^*) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r} A_{r,i}^*} = \sum_{i=1}^n \overline{(BA^*)_{i,i}} = \overline{\sum_{i=1}^n (BA^*)_{i,i}} \\ &= \overline{\langle B, A \rangle}\end{aligned}$$

Lo que comprueba la condición 3 de la Definición B.10.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$ no nula. Entonces $A_{p,q} \neq 0$ para algún $(p, q) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, que implica

$$\begin{aligned}\langle A, A \rangle &= \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n (AA^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{A_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \text{Re}(A_{i,r})^2 + \text{Im}(A_{i,r})^2 \\ &\geq \text{Re}(A_{p,q})^2 + \text{Im}(A_{p,q})^2 > 0\end{aligned}$$

■

Definición B.15 (Norma de Frobenius). *Decimos que la función $\|\cdot\|_F : \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} = ^2\sqrt{\text{tr}(A^*A)}$$

es la **norma de Frobenius** en $\mathcal{M}_{n \times m}$.

Definición B.16. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces decimos que A es

1. **Simétrica** si $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, y $A = A'$.
2. **Hermitiana** si $A = A^*$.
3. **Ortogonal** si $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, y $AA' = A'A = I_n$.
4. **Normal** si $A^*A = AA^*$.
5. **Unitaria** si $A^*A = AA^* = I_n$.
6. **Regular** si $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $AB = BA = I_n$, donde a B se le denomina **inversa** de A .
7. **Semidefinida positiva** si $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Definición B.17 (Valor propio). *Sea V un espacio vectorial sobre el campo \mathbb{C} . Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un **valor propio** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si $\exists \bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, tal que $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. En este caso, el vector \bar{v} asociado a λ se conoce como **vector propio**.*

Además, definimos a $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ como el **polinomio característico** de A . Así mismo, decimos que la **multiplicidad algebraica** de λ , denotada como $m_a(\lambda)$, es la multiplicidad de λ como raíz de $p(\lambda)$.

²Esta igual es dada por la Proposición B.5

Teorema B.10 (Shur). *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A ordenados de forma arbitraria y considerando su multiplicidad algebraica, entonces existen $U \in \mathcal{M}_n$ unitaria y $\Sigma \in \mathcal{M}_n$ triangular superior tales que $A = U\Sigma U^*$ y $\Sigma_{i,i} = \lambda_i, \forall i \in \mathbb{N}_n$.*

Demostración. Véase Antezana y Stojanoff (2009, p.15)

Corolario B.10.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en un orden arbitrario y considerando su multiplicidad algebraica. Entonces*

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Demostración. Por el Teorema B.10, existen $U \in \mathcal{M}_n$ unitaria y $\Sigma \in \mathcal{M}_n$ triangular superior tales que $A = U\Sigma U^*$ y $\Sigma_{i,i} = \lambda_i, \forall i \in \mathbb{N}_n$. Luego, por la Proposición B.5 y la Definición B.16 en su inciso 5 sobre la matriz unitaria,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(U\Sigma U^*) = \text{tr}(\Sigma U^* U) = \text{tr}(\Sigma I_n) = \text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \Sigma_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

■

Lema B.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \mathbb{N}_n$, entonces $A^* = A'$.*

Demostración. Debido a que $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, entonces $A_{i,j} = \text{Re}(A_{i,j}) = \text{Re}(A_{i,j}) + 0 * \text{Im}(A_{i,j})$. Por consiguiente, $\overline{A_{i,j}} = \text{Re}(A_{i,j}) - 0 * \text{Im}(A_{i,j}) = \text{Re}(A_{i,j}) = A_{i,j}$. De lo cual se sigue que $A_{i,j}^* = \overline{A_{i,j}'} = \overline{A_{j,i}} = A_{j,i}, \forall i, j \in \mathbb{N}_n$.

.: Como lo anterior se cumple para todo $i, j \in \mathbb{N}_n$, $A^* = A'$.

■

Lema B.3. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $A_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \mathbb{N}_n$ y $A'A = AA'$, entonces A es normal.*

Demostración. Como $A_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, por el Lema B.2, $A^* = A'$. Luego, como $A'A = AA'$, entonces $A^*A = AA^*$.

.: Por la Definición B.16 (4), A es una matriz normal.

■

Teorema B.11. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ no nula. Si $A_{i,j} \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, entonces $A'A$ es una matriz simétrica, hermitiana, normal y semidefinida positiva.*

Demostración. A causa de la Proposición B.2, $(A'A)' = A'(A')' = A'A$, por lo cual $A'A$ es simétrica. Además, como $(A'A)_{i,j} = \sum_{r=1}^n A'_{i,r} A_{r,j} = \sum_{r=1}^n A_{r,i} A_{r,j} \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ y del Lema B.2, entonces $(A'A)^* = (A'A)',$ por consiguiente $A'A$ es hermitiana.

Incluso, por el Lema B.2 y la Proposición B.2

$$\begin{aligned} (A'A)'(A'A) &= (A'(A')')(A'A) \\ &= (A'A)(A'A) \\ &= (A'A)(A'(A')') \\ &= (A'A)(A'A)' \end{aligned}$$

y debido al Lema B.3, $A'A$ es una matriz normal. Luego, por la Propiedad B.3, que A es no nula con $A_{u,v} = \operatorname{Re}(A_{u,v}) + 0i$, y que para $z \in \mathbb{C}$ no nulo, $\bar{z}z > 0$ ³, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(A'A)\mathbf{x} &= (A\bar{\mathbf{x}})'A\mathbf{x} \\ &= (\bar{A}\mathbf{x})'A\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} \bar{x}_j \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} x_j \right) \left(\sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

∴ $A'A$ es semipositiva definida. ■

Teorema B.12. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A es hermitiana y semidefinida positiva, entonces sus valores propios son todos reales no negativos.*

Demostración. Véase Antezana y Stojanoff (2009, pp.29 y 39). ■

Definición B.18 (Valor singular). *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Decimos que los **valores singulares** de A son las raíces cuadradas de los valores propios de $A'A$ y los designamos mediante $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, donde el orden es tal que $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$.*

Teorema B.13. *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ son los valores singulares de A , entonces*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$$

Demostración. La función $\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$ está bien definida por los teoremas B.11 y B.12, y la Definición B.18. El resto de la demostración es inmediata a partir del Corolario B.10.1 y la Definición B.15. ■

Definición B.19 (Distancia de Frobenius). *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Decimos que la función $d_F(\cdot, \cdot) : \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_F(A, B) = \|A - B\|_F$ es la **distancia** en el espacio $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$.*

Teorema B.14 (Descomposición en Valores Singulares). *Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ arbitraria con rango r y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sus valores singulares ordenados de mayor a menor. Entonces existen las matrices ortogonales $U \in \mathcal{M}_n$ y $V \in \mathcal{M}_m$, y una matriz diagonal Σ tales que*

³Sea $z \in \mathbb{C}$ no nulo. Entonces $\bar{z}z = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 > 0$

- i. $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$, si $i \leq r$ y 0 si $i > r$;
- ii. $A = U\Sigma V$

Demostración. Véase Lay *et al.* (2016, pp.419-420).



Corolario B.14.1 (Equivalencia distancia de Frobenius). *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Entonces*

$$d_F(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2}$$

Demostración. Por el Lema B.2 $(A - B)^* = (A - B)'$, luego

$$\begin{aligned} d_F(A, B) &= \|A - B\|_F \\ &= \sqrt{\text{tr}((A - B)'(A - B))} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)'_{j,i} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)_{i,j} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})(A_{i,j} - B_{i,j})} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \end{aligned}$$



Apéndice C

Algoritmos

Código C.1: Módulo de funciones para el proceso de realización

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armando
5
6 Módulo con funciones desarrolladas para los códigos empleados en la tesis de
7 Doctorado
8 """
9 import numpy as np
10 import itertools as it
11 #import matplotlib.pyplot as plt
12 import scipy.linalg
13 #from scipy.linalg import hankel
14 from mpmath import mp, matrix
15 import sympy as sp
16 # =====
17 def lista_matriz_c1(n):
18     sm=[]
19     for i in range(1,n+1):
20         a1=((i)*(i+1))/2
21         n_el=np.round(np.matrix([[a1]]))
22         sm.append(n_el)
23     return(sm)
24 # =====
25 def lista_matriz(n):
26     sm=[np.matrix([[1,1],[1,1]]),np.matrix([[3,1],[1,3]])]
27     for i in range(n-2):
28         n_el=np.matrix([[sm[i+1][0,0]+(i+3),sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1]],
29                         [sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1],sm[i+1][0,0]+(i+3)]])
30         sm.append(n_el)
31     return(sm)
32 # =====
33 def valores_rank_MH(L):
34     i=1
35     j=i
36     val_MH=[]
37     while i+j<=len(L):
38         H_1=matriz_hankel(L,i,j)
39         H_2=matriz_hankel(L,i+1,j)
40         if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_2):
41             H_3=matriz_hankel(L,i,j+1)
42             if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_3):
43                 H_psi=matriz_hankel(L,i+1,len(L)-i)
44                 if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_psi):
45                     val_MH.append(["Los valores de la MH son b=%i, a=%i, psi=%i y n=%i."
46 % (H_1.shape[0]/L[0].shape[0],H_1.shape[1]/L[0].shape[1],len(L)-H_1.shape[1]/L[0].
47 shape[1],np.linalg.matrix_rank(H_1))])
```

```

46             break
47         else:
48             i=i+1
49         else:
50             j=j+1
51     else:
52         i=i+1
53     return(np.round(H_psi),val_MH[0])
54 # =====
55 def matriz_hankel(L,r,s):
56     f=L[0].shape[0]
57     c=L[0].shape[1]
58     H=np.matrix(np.zeros([f*r,c*s]),dtype=np.float64)
59     for i, j in it.product(range(r),range(s)):
60         H[f*i:f*(i+1),c*j:c*(j+1)]=L[i+j]
61     return(H)
62 # =====
63 def MH(L_M):
64     f_sm=L_M[0].shape[0]
65     c_sm=L_M[1].shape[1]
66     n=len(L_M)
67     l_rank=[]
68     for i, j in it.product(range(n+1),range(n+1)):
69         if i+j==n:
70             l_rank.append((i,j))
71     if (i+j==n and np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n))==n):
72         np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n)))
73         print(2)
74     return(2)
75 # =====
76 def matrizPQ(H):
77     mp.dps = 80
78     n=H.shape[0]
79     m=H.shape[1]
80     P=matrix(np.eye(n),prec=mp.dps)
81     Q=matrix(np.zeros([n,m]),prec=mp.dps)
82     fila=0
83     indice=[]
84     #Encontrar columna j de H no nulo para una fila dada
85     for r in range(m):

```

Código C.2: Ajuste sistemas input-output en \mathbb{C}

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Wed May  5 14:30:05 2021
5
6 @author: armando
7 """
8
9 import numpy as np
10 import pandas as pd
11
12 bio=pd.read_excel(io="io.xlsx")
13
14 Cve=bio[bio.columns[1]]+bio[bio.columns[2]]+bio[bio.columns[4]]
15 Mc=(bio[bio.columns[5]]+bio[bio.columns[6]])*bio[bio.columns[9]]
16 X=bio[bio.columns[8]]*bio[bio.columns[9]]
17 Yf=Cve+X+bio[bio.columns[3]]
18 M=Mc+(bio[bio.columns[7]]*bio[bio.columns[9]])
19 vX=pd.DataFrame({'X1':bio["Kf"],'X2':bio["Mk"]}).drop(range(100,104,1),axis=0)
20 vY=pd.DataFrame({'Y1':Yf,'Y2':M}).drop(range(100,104,1),axis=0)
21
22 ict=[]
23 cx=[]
24 cy=[]
25 cx_s=[]

```

```

26 for i in range(cot.shape[0]):
27     cx.append(np.array([1,np.complex(vX.iloc[i][0],vX.iloc[i][1]))])
28     cy.append(np.array([np.complex(vY.iloc[i][0],vY.iloc[i][1]))])
29     cx_s.append(np.array([np.complex(vX.iloc[i][0],vX.iloc[i][1]))])
30
31 ls=[np.matrix(cx),np.matrix(cy),np.matrix(cx_s)]
32
33 alfa=np.linalg.solve(ls[0].H*ls[0],ls[0].H*ls[1])
34 alfa_s=np.linalg.solve(ls[2].H*ls[2],ls[2].H*ls[1])

```

Código C.3: Realizaciones bajo la propuesta de preservación de la estructura de Hankel del Capítulo 3, aplicadas a descripciones externas simuladas

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Fri Jun 30 22:21:30 2023
5
6 @author: armandorg
7 """
8 import numpy as np
9 import scipy.linalg
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 import realpar as rp
12 import pandas as pd
13 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
14 import pickle
15
16 seq = np.linspace(1,100,100); n=51; m=50
17 np.random.seed(123)
18 min_dist=[]
19 for i in range(10000):
20     muestra = np.sin(seq**2)+np.random.normal(0, 3, size=len(seq))+seq**(1/2)
21     dist_prom=[]
22     for j in range(1,25):
23         K=50-2*j
24         muestra_e=rp.obs_estreal(n, m, muestra, K, p=1, q=1)
25         dist_prom.append(np.mean(muestra_e[0]-muestra))
26     min_dist.append(np.min(np.abs(dist_prom)))
27     print(np.min(np.abs(dist_prom)))
28 archivo = 'dis_min_Golub.pkl'
29 # Guardar la lista de matrices en archivo
30 with open(archivo, 'wb') as f:
31     pickle.dump(min_dist, f)
32 # Cargar la lista de matrices en archivo
33 with open(archivo, 'rb') as f:
34     mejor_est_gol = pickle.load(f)
35 dts_gol=np.nan_to_num(mejor_est_gol, nan=1e1000)
36 num_div=1
37 menor=len(dts_gol[dts_gol<num_div])/len(mejor_est_gol)*100
38 medio=len(dts_gol[(dts_gol<100)&(dts_gol>1)])/len(mejor_est_gol)*100
39 mayor=len(dts_gol[dts_gol>100])/len(mejor_est_gol)*100
40 categorias = ['Menor a 1', 'Entre 1 y 100', 'Mayor a 100']
41 conteos = [menor, medio, mayor]
42 # Crea el gráfico de barras
43 plt.bar(categorias, conteos, width=0.6)
44 plt.ylabel('Porcentaje')
45 plt.yticks(range(0, 101, 10))
46 def porcentaje_formatter(x, pos):
47     return f'{x:.0f}%'
48 # Aplica la función de formato a las etiquetas del eje Y
49 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(porcentaje_formatter))
50 for i, v in enumerate(conteos):
51     plt.text(i, v + 1, str(v)+"%", ha='center', va='bottom')

```

Código C.4: Realización simbólica de la sucesión a, b, c, d, e y f

```
1 #!/usr/bin/env python3
```

```

2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 Este código permite efectuar una realización simbólica de la
6 sucesión a, b, c, d, e y f
7 """
8 import realpar as rp
9 import sympy as sp
10
11 x = sp.symbols('a b c d e f')
12 n = 4 # Número de filas
13 m = 3 # Número de columnas
14 Hankel = sp.zeros(n, m)
15 for i in range(n): #Crea la matriz de Hankel
16     for j in range(m):
17         Hankel[i, j] = x[i+j]
18 A=rp.matrizPQs(Hankel)
19 p=q=1 # p filas y q columnas de los elementos en la sucesión
20 rango=Hankel.rank()
21 G_n=A[1][:rango,:q]
22 H_n=A[0][:p,:rango]
23 P_nmin=A[0][:rango,:rango]
24 P_nmin_inv=P_nmin.inv()
25 P_ast=A[0][p:rango+p,:rango]
26 F_n=P_nmin_inv@P_ast
27 print("Matriz P:")
28 display(A[0])
29 print("Matriz Q:")
30 display(A[1])
31 print("Matriz F:")
32 display(F_n)

```

Código C.5: Realizaciones truncadas del modelo de incidencias de los componentes de la inflación bajo el AF y el FSF

```

1#!/usr/bin/env python3
2# -*- coding: utf-8 -*-
3"""
4@author: armandorg
5"""
6import numpy as np
7import scipy.linalg as spl
8import realpar as rp
9import matplotlib.pyplot as plt
10import matplotlib.pylab as pl
11import matplotlib.dates as mdates
12import pandas as pd
13import itertools as it
14from scipy.stats import rankdata
15from datetime import datetime, timedelta
16import csv
17
18# =====
19# DESCRIPCIÓN EXTERNA , GRAFICARLA Y OBTENER H
20# =====
21# Carga de datos
22direct="ca56_2018_quinc.xlsx"
23b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja2')
24b=b.iloc[:,[0,2,10,3,11,8,9,16]]
25
26# Ajustar el tiempo de la serie
27q2=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-07-01', freq='M')
28q1=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-06-30', freq='MS')+timedelta(days=14)
29b["Periodo"]=q1.union(q2)
30
31# Determinantes para la inversa
32det1=(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
33det2=(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No"]

```

```

    subyacente"])
34 det=det1-det2
35
36 # Series de tiempo de las entradas de la DE
37 b["a11"]=(1/det)*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
38 b["a12"]=(1/det)*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No subyacente"])
39 b["a21"]=(1/det)*(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])
40 b["a22"]=(1/det)*(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])
41
42 # Creación de la DE
43 DE=[]
44 for i in range(len(b)):
45     DE.append(np.matrix([[b["a11"][i],b["a12"][i]],
46                          [b["a21"][i],b["a22"][i]]], dtype=np.float128))
47
48 # Crear la gráfica de las series de tiempo de las coordenadas de la DE
49 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
50
51 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"], label='(1,1)')
52 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
53 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
54 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"], label='(1,2)')
55 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
56 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
57 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"], label='(2,1)')
58 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
59 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
60 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"], label='(2,2)')
61 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
62 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
63 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
64
65 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
66 mhs=rp.matriz_hankel(DE,151,150)
67
68 # =====
69 # DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE HANKEL Y GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES
70 # =====
71
72 def desc_esp_mh(MHank):
73     usv=np.linalg.svd(MHank)
74     s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
75     U=usv[0]
76     V=usv[2]
77     S=np.matrix(s)
78     vs_n=usv[1]/sum(usv[1])
79     return(usv,V,S,U,usv[1],vs_n)
80
81 dvs=desc_esp_mh(mhs)
82
83 svss=0
84 for i in range(len(dvs[5])):
85     if svss<.8: svss=dvs[5][i]+svss
86     else: break
87 pos=i
88 N=len(DE)
89
90 # Función para cambiar a porcentaje las etiquetas en el eje Y en una gráficas
91 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
92 def percentage_formatter(x, pos):
93     return f'{x*100:.1f}%' 
94
95 qui_vs=0
96 plt.figure(figsize=(20, 10), dpi=200)
97 plt.plot(np.arange(len(DE)-qui_vs)+qui_vs+ 1,dvs[5][qui_vs:N], "o", color="c", markersize=15)
98 plt.plot(pos,dvs[5][pos], "o", color="r", markersize=18)
99 formatter = FuncFormatter(percentage_formatter)

```

```

100 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(formatter)
101 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR", fontsize=25)
102 plt.ylabel("PORCENTAJE", fontsize=25)
103 plt.grid()
104 plt.xticks(fontsize=25)
105 plt.yticks(fontsize=25)
106
107 # =====
108 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, REALIZACIÓN Y MATRICES ESTIMADAS
109 # =====
110
111 def mh_red_est(V,S,U,des_ext):
112     mt_est=[]
113     MH_red=[]
114     rp_red=[]
115     dim=np.shape(des_ext[0])
116     for i in range(1,int(V.shape[0]/dim[0])):
117         print(i)
118         V_i=V[0:dim[0]*i,0:]
119         S_i=S[0:dim[0]*i,0:dim[0]*i]
120         U_i=U[0:,0:dim[0]*i]
121         H_red=U_i*S_i*V_i
122         MH_red.append(H_red)
123         F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red,dim[0],dim[1]) #Realización MH reducida
124         real_red=[F_r,G_r,H_r]
125         rp_red.append(real_red)
126         for j in range(len(des_ext)):
127             print(j)
128             mt_est.append(H_r@(F_r**j)@G_r)
129     return(MH_red,mt_est,rp_red)
130
131 MH_red=mh_red_est(dvs[1],dvs[2],dvs[3],DE)
132
133 # =====
134 # DETERMINACIÓN DE LA MEJOR APROXIMACIÓN DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS
135 # =====
136
137 def prox_de_di(mat_red,des_ext):
138     distancias=[]
139     distancia=[]
140     for j in range(int(len(mat_red)/len(des_ext))):
141         prom_F=0
142         for i in range(len(des_ext)):
143             prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mat_red[i+len(des_ext)*j]-des_ext[i])
144             distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),j+1])
145             distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
146     p_min=distancia.index(min(distancia))
147     MEJOR_EST=mat_red[p_min*len(des_ext):(p_min+1)*len(des_ext)]
148     return(distancias,p_min+1,MEJOR_EST,distancia)
149
150 distancias=prox_de_di(MH_red[1],DE)
151
152 # =====
153 # GRÁFICA DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL Y LAS ESTIMADAS
154 # =====
155
156 # Extrae las posiciones y los valores de A en listas separadas
157 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias[0]]
158 valores = [elemento[0] for elemento in distancias[0]]
159
160 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
161 col_r=230
162 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)), width=.95)
163 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
164     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
165     bar.set_alpha(.9)
166 plt.xlabel('PARES DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES', fontsize=22)
167 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA', fontsize=19)

```

```

168 pl.xticks(np.arange(0,len(posiciones)+1,2))
169 pl.xlim(0.3,len(posiciones)+1)
170 plt.xticks(fontsize=18,rotation=90)
171 plt.yticks(fontsize=15)
172
173 valores_sin_nan = [x for x in valores if not np.isnan(x)]
174 min(valores_sin_nan)
175 max(valores_sin_nan)
176 np.mean(valores_sin_nan)
177 np.nanmedian(valores_sin_nan)
178 np.std(valores_sin_nan)
179
180 # =====
181 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
182 # =====
183
184 F_c,G_c,H_c=MH_red[2][26]
185 a11=[]
186 a12=[]
187 a21=[]
188 a22=[]
189 prom_F=0
190 for i in range(len(DE)):
191     aprox=H_c@F_c**i@G_c
192     prom_F=prom_F+np.linalg.norm(aprox-DE[i])
193     a11.append(aprox[0,0])
194     a12.append(aprox[0,1])
195     a21.append(aprox[1,0])
196     a22.append(aprox[1,1])
197 print(round(prom_F*(1/len(DE)),2))
198
199 # Crear la gráfica de cercanía promedio
200 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
201
202 ax[0].plot(list(range(1, 301)),a11, label='(1,1)', linewidth=3,color="blue")
203 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"]-4, label='(1,1)', linewidth=3,color="orange")
204 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
205 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
206 ax[0].yaxis.major.formatter._useMathText = True
207 ax[0].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(20)
208
209 ax[1].plot(list(range(1, 301)),a12, label='(1,2)', linewidth=3,color="blue")
210 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"]-4, label='(1,2)', linewidth=3,color="orange")
211 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
212 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
213 ax[1].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
214
215 ax[2].plot(list(range(1, 301)),a21, label='(2,1)', linewidth=3,color="blue")
216 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"]-6, label='(2,1)', linewidth=3,color="orange")
217 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
218 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
219 ax[2].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
220
221 ax[3].plot(list(range(1, 301)),a22, label='(2,2)', linewidth=3,color="blue")
222 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"]-3, label='(2,2)', linewidth=3,color="orange")
223 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
224 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
225 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
226 ax[3].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
227
228 # =====
229 # REALIZACIONES COMPACTAS BAJO EL FSF
230 # =====
231
232 def de_est_fsf(MsH,des_ext):
233     distancias=[]
234     distancia=[]
235     rp_red=[]

```

```

236   for i in range(len(MsH)):
237     print(i)
238     F_r,G_r,H_r=rp.real_parfsf(MsH[i],2,2) #Realización MH reducida fsf
239     rp_red.append([F_r,G_r,H_r])
240     prom_F=0
241     for j in range(len(des_ext)):
242       prom_F=prom_F+np.linalg.norm(H_r@(F_r**j)@G_r-des_ext[i])
243     distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),i+1])
244     distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
245     print(distancia[i])
246   return(rp_red,distancia,distancias)
247
248 realiz,dist,distancias=de_est_fsf(MH_red,DE) # MH_red [0]
249
250 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias]
251 valores = [elemento[0] for elemento in distancias]
252
253 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
254 col_r=230
255 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)),width=.95)
256 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
257   bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
258   bar.set_alpha(.9)
259 plt.xlabel('PARES DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES', fontsize=22)
260 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA', fontsize=19)
261 pl.xticks(np.arange(0,len(posiciones)+1,2))
262 pl.xlim(0.3,len(posiciones)+1)
263 plt.xticks(fontsize=18, rotation=90)
264 plt.yticks(fontsize=15)

```

Código C.6: Realización lineal del modelo de incidencias de los componentes de la inflación, sin compresión de información y empleando el AF

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import matplotlib.dates as mdates
12 import pandas as pd
13 from datetime import datetime, timedelta
14
15 # =====
16 # CARGAR DATOS, CONSTRUIR LA DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
17 # =====
18 direct="/home/armandorg/Documentos/Doctorado/Código Python/ca56_2018_quinc.xlsx"
19 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja2')
20 b=b.iloc[:,[0,2,10,3,11,8,9,16]]
21
22 q2=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-07-01', freq='M')
23 q1=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-06-30', freq='MS')+timedelta(days=14)
24 b["Período"]=q1.union(q2)
25
26 det1=(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
27 det2=(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No
    subyacente"])
28 det=det1-det2
29
30 b["a11"]=(1/det)*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
31 b["a12"]=(1/det)*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No subyacente"])
32 b["a21"]=(1/det)*(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])
33 b["a22"]=(1/det)*(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])
34

```

```

35 # Descripción Externa
36 DE=[]
37 for i in range(len(b)):
38     DE.append(np.matrix([[b["a11"][i],b["a12"][i]],
39                         [b["a21"][i],b["a22"][i]]], dtype=np.float128))
40 # Matriz de Hankel
41 mhs=rp.matriz_hankel(DE,151,150)
42
43 # =====
44 # REALIZACIÓN CON LA MH ORIGINAL
45 # =====
46
47 # Realización
48 F,G,H=rp.real_par(mhs,2,2)
49
50 # Distancia promedio y series de las coordenadas de la estimación
51 disp=0; a_11=[]; a_12=[]; a_21=[]; a_22=[]
52 for i in range(len(DE)):
53     disp=disp+np.linalg.norm(H@F**i@G-DE[i])
54     if i==len(DE)-1:
55         disp=disp/len(DE)
56     aprox=H@F**i@G
57     a_11.append(aprox[0,0])
58     a_12.append(aprox[0,1])
59     a_21.append(aprox[1,0])
60     a_22.append(aprox[1,1])
61
62 # Crear la figura y los ejes
63 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
64 # Graficar las cuatro series de tiempo
65 ax[0].plot(list(range(1, 301)),a_11, label='(1,1)', linewidth=3,color="blue")
66 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"]-4, label='(1,1)', linewidth=3,color="orange")
67 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
68 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
69
70 ax[1].plot(list(range(1, 301)),a_12, label='(1,2)', linewidth=3,color="blue")
71 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"]-4, label='(1,2)', linewidth=3,color="orange")
72 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
73 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
74
75 ax[2].plot(list(range(1, 301)),a_21, label='(2,1)', linewidth=3,color="blue")
76 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"]-6, label='(2,1)', linewidth=3,color="orange")
77 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
78 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
79
80 ax[3].plot(list(range(1, 301)),a_22, label='(2,2)', linewidth=3,color="blue")
81 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"]-3, label='(2,2)', linewidth=3,color="orange")
82 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
83 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
84 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
85
86 # =====
87 # ESTABILIDAD DEL SISTEMA
88 # =====
89
90 # Estabilidad de Lyapunov o de entrada 0
91
92 # Descomposición en valores y vectores propios de F
93 val_p=np.linalg.svd(F)[1]
94 porc_val_neg=sum(val_p<0)/len(val_p)
95
96 # Porcentaje de valores propios con parte real negativa
97 print(porc_val_neg)
98
99 # Estabilidad BIBO
100
101 # Matriz de transferencia
102

```

```

103 # =====
104 # OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA
105 # =====
106 # =====
107
108 # Dimensión del sistema
109 n = F.shape[0]
110 m = G.shape[1]
111 p = H.shape[0]
112
113 # Matriz de controlabilidad
114 C = np.zeros((n, n * m))
115
116 for i in range(n):
117     C[:, i * m:(i + 1) * m] = np.linalg.matrix_power(F, i) @ G
118
119 # Matriz de observabilidad
120 O = np.zeros((p * n, n))
121
122 for i in range(n):
123     O[i * p:(i + 1) * p, :] = H @ np.linalg.matrix_power(F, i)
124
125 # Rangos de las matrices O y C
126 rank_C=np.linalg.matrix_rank(C)
127 rank_O=np.linalg.matrix_rank(O)
128 print(rank_C,rank_O)

```

Código C.7: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, comprimiendo información y empleando el AF

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import pandas as pd
12 import itertools as it
13
14 # =====
15 # DESCRIPCIÓN EXTERNA , GRAFICARLA Y OBTENER H
16 # =====
17 # Carga de datos
18 direct="mod2_cap4.xlsx"
19 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
20
21 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE
22 b["BC"] = b["X"] - b["M"]
23 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
24
25 ent_de={}
26 ind=[(0,2),(1,0),(2,1)]
27 pos_de=[]
28 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
29     if (i,j) in ind:
30         peso=1/2
31     else:
32         peso=1/4
33     var=f'a{i+1}{j+1}'
34     ent_de[f'a{i+1}{j+1}']=peso*bn.iloc[:,i]/bn.iloc[:,j].shift(1)
35     pos_de.append((i,j,f'a{i+1}{j+1}'))
36
37 DE=[]
38 for count in range(len(b)-1):

```

```

39     M=np.empty((3,3),dtype=np.float128)
40     for ter in pos_de:
41         M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
42     DE.append(M)
43
44 pos_graf=[]
45 k=0
46 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
47     if (i,j) !=(4,1):
48         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
49     k=k+1
50
51 # Crear la gráfica de las series de tiempo de las coordenadas de la DE
52 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
53 # Eliminar el último subplot (espacio en blanco)
54 fig.delaxes(ax[4, 1])
55 for ent in pos_graf:
56     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:], label='(1,1)')
57     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
58     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
59 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
60 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
61 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
62 mhs=rp.matriz_hankel(DE,70,69)
63
64 # =====
65 # DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE HANKEL Y GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES
66 # =====
67
68 def desc_esp_mh(MHank):
69     usv=np.linalg.svd(MHank)
70     s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
71     U=usv[0]
72     V=usv[2]
73     S=np.matrix(s)
74     vs_n=usv[1]/sum(usv[1])
75     return(usv,V,S,U,usv[1],vs_n)
76
77 dvs=desc_esp_mh(mhs)
78
79 svss=0
80 for i in range(len(dvs[5])):
81     if svss<.8: svss=dvs[5][i]+svss
82     else: break
83 pos=i
84 N=len(DE)
85
86 # Función para cambiar a porcentaje las etiquetas en el eje Y en una gráficas
87 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
88 def percentage_formatter(x, pos):
89     return f'{x*100:.1f}%'
90
91 qui_vs=0
92 plt.figure(figsize=(20, 10), dpi=200)
93 plt.plot(np.arange(len(dvs[5])-qui_vs)+qui_vs+ 1,dvs[5], "o", color="c", markersize=15)
94 plt.plot(pos,dvs[5][pos], "o", color="r", markersize=18)
95 formatter = FuncFormatter(percentage_formatter)
96 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(formatter)
97 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR",fontsize=25)
98 plt.ylabel("PORCENTAJE",fontsize=25)
99 plt.grid()
100 plt.xticks(fontsize=25)
101 plt.yticks(fontsize=25)
102
103 # =====
104 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, REALIZACIÓN Y MATRICES ESTIMADAS
105 # =====
106

```

```

107 def mh_red_est(V,S,U,des_ext):
108     mt_est=[]
109     MH_red=[]
110     rp_red=[]
111     dim=np.shape(des_ext[0])
112     for i in range(1,int(V.shape[0]/dim[0])):
113         print(i)
114         V_i=V[0:dim[0]*i,0:]
115         S_i=S[0:dim[0]*i,0:dim[0]*i]
116         U_i=U[0:,0:dim[0]*i]
117         H_red=U_i*S_i*V_i
118         MH_red.append(H_red)
119         F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red,dim[0],dim[1]) #Realización MH reducida
120         real_red=[F_r,G_r,H_r]
121         rp_red.append(real_red)
122         for j in range(len(des_ext)):
123             print(j)
124             mt_est.append(H_r@(F_r**j)@G_r)
125     return(MH_red,mt_est,rp_red)
126
127 MH_red=mh_red_est(dvs[1],dvs[2],dvs[3],DE)
128
129 # =====
130 # DETERMINACIÓN DE LA MEJOR APROXIMACIÓN DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS
131 # =====
132
133 def prox_de_di(mat_red,des_ext):
134     distancias=[]
135     distancia=[]
136     for j in range(int(len(mat_red)/len(des_ext))):
137         prom_F=0
138         for i in range(len(des_ext)):
139             prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mat_red[i+len(des_ext)*j]-des_ext[i])
140         distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),j+1])
141         distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
142     p_min=distancia.index(min(distancia))
143     MEJOR_EST=mat_red[p_min*len(des_ext):(p_min+1)*len(des_ext)]
144     return(distancias,p_min+1,MEJOR_EST,distancia)
145
146 distancias=prox_de_di(MH_red[1],DE)
147
148 # =====
149 # GRÁFICA DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL Y LAS ESTIMADAS
150 # =====
151
152 # Extrae las posiciones y los valores de A en listas separadas
153 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias[0]]
154 valores = [elemento[0] for elemento in distancias[0]]
155
156 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
157 col_r=230
158 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)),width=.95)
159 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
160     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
161     bar.set_alpha(.9)
162 plt.xlabel('TERNAS DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES',fontsize=22)
163 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA',fontsize=19)
164 pl.xticks(np.arange(0,len(posiciones)+1,2))
165 pl.xlim(0.3,len(posiciones)+1)
166 plt.xticks(fontsize=18,rotation=90)
167 plt.yticks(fontsize=15)
168
169 valores_sin_nan = [x for x in valores if not np.isnan(x)]
170 minimos=np.array(posiciones)[np.array(valores)<=10**10]-1
171 min_pos=valores.index(min(valores))
172 min_(valores_sin_nan)
173 max_(valores_sin_nan)
174 np.mean(valores_sin_nan)

```

```

175 np.nanmedian(valores_sin_nan)
176 np.std(valores_sin_nan)
177
178 # =====
179 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
180 # =====
181
182 F_c,G_c,H_c=MH_red[2][min_pos]
183 ent_es={}
184 prom_F=0
185 for k in range(len(DE)):
186     aprox=H_c@F_c**k@G_c
187     prom_F=prom_F+np.linalg.norm(aprox-DE[k])
188     if k==0:
189         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
190             ent_es[f'a{i+1}{j+1}']=[aprox[i,j]]
191     else:
192         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
193             ent_es[f'a{i+1}{j+1}'].append(aprox[i,j])
194 print(round(prom_F*(1/len(DE)),2))
195
196 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
197 fig.delaxes(ax[4, 1])
198 for ent in pos_graf:
199     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]],linewidth=3,label='(1,1)',color="blue")
200     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]-4,linewidth=3,label='(1,1)',color="orange")
201     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
202     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
203     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
204     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
205 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
206 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
207 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)

```

Código C.8: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, comprimiendo información, empleando el AF y con mayor precisión

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import pandas as pd
12 import itertools as it
13 from mpmath import mp, matrix
14
15 # =====
16 # DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
17 # =====
18 # Carga de datos
19 direct="mod2_cap4.xlsx"
20 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
21 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE
22 b["BC"] = b["X"] - b["M"]
23 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
24
25 ent_de={}
26 ind=[(0,2),(1,0),(2,1)]
27 pos_de=[]
28 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
29     if (i,j) in ind:

```

```

30         peso=1/2
31     else:
32         peso=1/4
33     var=f"a{i+1}{j+1}"
34     ent_de[f"a{i+1}{j+1}"] = peso*bn.iloc[:,i]/bn.iloc[:,j].shift(1)
35     pos_de.append((i,j,f"a{i+1}{j+1}"))
36
37 DE=[]
38 for count in range(len(b)-1):
39     M=np.empty((3,3),dtype=np.float128)
40     for ter in pos_de:
41         M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
42     DE.append(M)
43 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
44 mhs=rp.matriiz_hankel(DE,70,69)
45
46 # =====
47 # MH REDUCIDAS, REALIZACIONES Y MATRICES ESTIMADAS CON MAYOR PRECISIÓN
48 # =====
49
50 real_estim=[]
51 for i in range(1,68):
52     dim=np.shape(DE[0])[0]*i
53     mp.dps = 30 # Precisión de 30 decimales
54     # Obtención de la descomposición SVD de alta precisión
55     U, S, V = mp.svd(matrix(mhs))
56     St = mp.diag(S)
57     mhs_t=U[0:,0:dim]@St[0:dim,0:dim]@V[0:dim,0:]
58     # Realización de alta precisión
59     F,G,H=rp.real_parap(mhs_t,np.shape(DE[0])[0],np.shape(DE[0])[0])
60     real_estim.append([F,G,H])
61     print(i)
62
63 estimaciones_trunc=[]
64 i=1
65 for sublist in real_estim:
66     Fp=mp.eye(sublist[0].cols)
67     for k in range(len(DE)):
68         estimaciones_trunc.append(sublist[2]@Fp@sublist[1])
69     Fp=Fp@sublist[0]
70     print(i)
71     i=i+1
72 de_estimada_ap_trunc=[mat.tolist() for mat in estimaciones_trunc]
73
74 num_trunc=int(len(estimaciones_trunc)/len(DE))
75 mean_dist_trunc=[]
76 for i in range(num_trunc):
77     dist_trunc=0
78     for j in range(len(DE)):
79         dist_trunc=dist_trunc+np.linalg.norm(de_estimada_ap_trunc[i*len(DE)+j]-DE[i])
80     mean_dist_trunc.append(np.sum(dist_trunc)/len(DE))
81
82 # =====
83 # GRÁFICA DE DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DE Y LAS ESTIMACIONES CON MAYOR PRECISIÓN
84 # =====
85
86 valores = [float(elemento) for elemento in mean_dist_trunc]
87 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
88 col_r=230
89 bars=pl.bar(range(1,len(valores)+1),np.log(valores),width=.95)
90 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)),bars):
91     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
92     bar.set_alpha(.9)
93 plt.xlabel('TERNAS DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES',fontsize=22)
94 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA',fontsize=19)
95 plt.xticks(np.arange(0,len(valores)+1,2))
96 plt.xlim(0.3,len(valores)+1)
97 plt.xticks(fontsize=18,rotation=90)

```

```

98 plt.yticks(fontsize=15)
99
100 min_pos=valores.index(min(valores))
101 min(valores)
102 max(valores)
103 np.mean(valores)
104 np.nanmedian(valores)
105 np.std(valores)
106
107 # =====
108 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
109 # =====
110
111 ent_es={}
112 for k in range(len(DE)):
113     aprox=de_estimada_ap_trunc[min_pos*len(DE)+k]
114     if k==0:
115         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
116             ent_es[f'a{i+1}{j+1}']=[aprox[i][j]]
117     else:
118         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
119             ent_es[f'a{i+1}{j+1}'].append(aprox[i][j])
120 pos_graf=[]
121 k=0
122 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
123     if (i,j) != (4,1):
124         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
125     k=k+1
126
127 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
128 fig.delaxes(ax[4, 1])
129 for ent in pos_graf:
130     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]], linewidth=3, label='(1,1)', color="blue")
131     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]-4, linewidth=3, label='(1,1)', color="orange")
132     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
133     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
134     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
135     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
136 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
137 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
138 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)

```

Código C.9: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, sin compresión de información, empleando el AF y con mayor precisión

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import pandas as pd
11 import itertools as it
12 from mpmath import mp, matrix
13
14 # =====
15 # CARGAR DATOS, CONSTRUIR LA DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
16 # =====
17 # Carga de datos
18 direct="mod2_cap4.xlsx"
19 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
20
21 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE

```

```

22 b["BC"] = b["X"] - b["M"]
23 #bn=(b.iloc[:,[5,4,1]]-b.iloc[:,[5,4,1]].mean())/b.iloc[:,[5,4,1]].std()
24 #bn=(b.iloc[:,[5,4,1]]-b.iloc[:,[5,4,1]].min())/(b.iloc[:,[5,4,1]].max()-b.iloc
25 [:,[5,4,1]].min())
26 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
27
28 ent_de={}
29 pos_de=[]
30 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
31     if (i,j) in ind:
32         peso=1/2
33     else:
34         peso=1/4
35     var=f'a{i+1}{j+1}'
36     ent_de[f'a{i+1}{j+1}']=np.float128(peso*bn.iloc[:,i]/bn.iloc[:,j].shift(1))
37     pos_de.append((i,j,f'a{i+1}{j+1}'))
38
39 def gen_DE(ent_de,pos_de,N,i):
40     DE=[]
41     for count in range(N-1):
42         M=np.empty((3,3),dtype=np.float128)
43         for ter in pos_de:
44             if i==0:
45                 M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count]
46             else:
47                 M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
48         DE.append(M)
49     return(DE)
50
51 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
52 DE=gen_DE(ent_de,pos_de,len(b),1)
53 mhs=rp.matriiz_hankel(DE,70,69)
54
55 # =====
56 # REALIZACIÓN CON LA MH ORIGINAL Y GRÁFICA DE SU RESULTADO CON RESPECTO A LA DE
57 # =====
58 # Realización
59 F,G,H,presicion=rp.real_parap(mhs,3,3)
60
61 # DE estimada bajo F, G, H
62 ent_es={}
63 Fp=mp.eye(F.cols)
64 for k in range(len(DE)):
65     aprox=H@Fp@G
66     if k==0:
67         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
68             ent_es[f'a{i+1}{j+1}']=[aprox[i,j]]
69     else:
70         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
71             ent_es[f'a{i+1}{j+1}'].append(aprox[i,j])
72     Fp=Fp@F
73     print(k,sum(aprox-matrix(DE[k])))
74
75 DEe=gen_DE(ent_es,pos_de,len(b),0)
76 dist=0
77 for s in range(len(DE)):
78     dist=dist+np.linalg.norm(DEe[s]-DE[s])
79 print(dist/len(DE))
80
81
82 # Gráfica que compara la DE y la DE estimada bajo F, G, H
83 pos_graf=[]
84 k=0
85 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
86     if (i,j) !=(4,1):
87         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
88     k=k+1

```

```

89 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
90 fig.delaxes(ax[4, 1])
91 for ent in pos_graf:
92     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]],linewidth=3,label='(1,1)
93     ',color="blue")
94     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]+(max(ent_es[ent[2]])
95     -min(ent_es[ent[2]]))*(1.3*10**(-2)),linewidth=3,label='(1,1)',color="orange")
96     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
97     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
98     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
99     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
100 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
101 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
102 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
103 # =====
104 # ESTIMACIÓN
105 # =====
106 # Muestras bootstrap deseadas
107 num_muestras_bootstrap = 100
108 DE_estim_bootstrap=[]
109 # Realiza el remuestreo con reemplazo
110 for i in range(num_muestras_bootstrap):
111     DE_bootstrap=random.choices(DE, k=len(DE))
112     mhs1=rp.matrix_hankel(DE_bootstrap ,151,150)
113     Fb,Gb,Hb=rp.real_par(mhs1 ,2,2)
114     DE_estim=[]
115     for j in range(300,306):
116         DE_estim.append(Hb@Fb**j@Gb)
117     DE_estim_bootstrap.append(DE_estim)
118
119 DE_estim_bootstrap[i]
120 # =====
121 # ESTABILIDAD DEL SISTEMA
122 # =====
123 # =====
124 # Estabilidad de Lyapunov o de entrada 0
125 # Descomposicion en valores y vectores propios de F
126 val_p=np.linalg.svd(F)[1]
127 porc_val_neg=sum(val_p<0)/len(val_p)
128
129 # Porcentaje de valores propios con parte real negativa
130 print(porc_val_neg)
131
132 # =====
133 # OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA
134 # =====
135 # =====
136 # =====
137 # Dimensión del sistema
138 n = F.shape[0]
139 m = G.shape[1]
140 p = H.shape[0]
141
142 # Matriz de controlabilidad
143 C = np.zeros((n, n * m))
144
145 for i in range(n):
146     C[:, i * m:(i + 1) * m] = np.linalg.matrix_power(F, i) @ G
147
148 # Matriz de observabilidad
149 O = np.zeros((p * n, n))
150
151 for i in range(n):
152     O[i * p:(i + 1) * p, :] = H @ np.linalg.matrix_power(F, i)
153
154

```

```

155 # Rangos de las matrices O y C
156 rank_C=np.linalg.matrix_rank(C)
157 rank_O=np.linalg.matrix_rank(O)
158 print(rank_C,rank_O)

```

Código C.10: Determinación del cambio estructural en el modelo de series entrelazadas

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Sun Dec 3 21:19:33 2023
5
6 @author: armandorg
7 """
8 import numpy as np
9 import realpar as rp
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 import pandas as pd
12 import itertools as it
13 from mpmath import mp, matrix
14 from scipy.optimize import minimize
15 from scipy.signal import lsim
16
17 # =====
18 # GRÁFICAR DATOS, SELECCIÓN DE SUBSERIES Y CREACIÓN DE MATRICES DE HANKEL
19 # =====
20
21 # Carga de datos
22 direct="mod2_cap4.xlsx"
23 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
24
25 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE
26 b["BC"] = b["X"] - b["M"]
27 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
28
29 # Gráfica de datos originales
30 graf=list(zip([0,1,2],list(bn)))
31 fig, ax = plt.subplots(3,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
32 for ent in graf:
33     ax[ent[0]].plot(list(range(1, len(bn)+1)),bn[ent[1]], linewidth=3, label='(1,1)', color="blue")
34     ax[ent[0]].set_ylabel(f'{ent[1]}', fontsize=30)
35     ax[ent[0]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
36     ax[ent[0]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
37     ax[ent[0]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
38 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
39 ax[2].set_xlabel('Mes', fontsize=30)
40
41 # Subsucesión
42 sub_bn=bn.iloc[68:130,:]
43
44 # Subsucresiones periodos contiguos
45 bn1=sub_bn.iloc[0:31,:].reset_index(drop=True)
46 bn2=sub_bn.iloc[31:,:].reset_index(drop=True)
47
48 # Creación de los valores en las entradas de la DE en cada periodo
49 ent_de1={}
50 ent_de2={}
51 ind=[(0,0),(1,1),(2,2)]
52 pos_de=[]
53 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
54     if (i,j) in ind:
55         ent_de1[f'a{i+1}{j+1}']=np.float128(bn1.iloc[:,i]/bn1.iloc[:,j].shift(1))
56         ent_de2[f'a{i+1}{j+1}']=np.float128(bn2.iloc[:,i]/bn2.iloc[:,j].shift(1))
57     else:
58         ent_de1[f'a{i+1}{j+1}']=bn1.iloc[:,i]*0
59         ent_de2[f'a{i+1}{j+1}']=bn2.iloc[:,i]*0
60     pos_de.append((i,j,f'a{i+1}{j+1}'))

```

```

61
62 # Creación de las descripciones externas de cada periodo
63 DE1=rp.gen_DE(ent_de1,pos_de,len(bn1),1)
64 DE2=rp.gen_DE(ent_de2,pos_de,len(bn2),1)
65
66 # Creación de las matrices de Hankel de cada periodo
67 N=16
68 M=15
69 mhs1=rp.matriz_hankel(DE1,N,M)
70 mhs2=rp.matriz_hankel(DE2,N,M)
71
72 # =====
73 # EFECTUAR REALIZACIONES SIN COMPRESIÓN POR PERÍODO
74 # =====
75
76 import time
77 import multiprocessing as mpr
78 if __name__ == '__main__':
79     start_time = time.time()
80     # Obtener el número de núcleos de la CPU
81     num_processes = mpr.cpu_count()
82     # Datos de entrada
83     data1 = [(mhs1, 3,3,M*3,50)]
84     data2 = [(mhs2, 3,3,M*3,50)]
85     # Crear un grupo de procesos
86     pool = mpr.Pool(num_processes)
87     # Realizar el cálculo en paralelo para cada par de datos
88     with mpr.Pool() as pool:
89         results1 = pool.starmap(rp.real_parap,data1)
90         results2 = pool.starmap(rp.real_parap,data2)
91     # results = pool.starmap(rp.matrizPQap,mhs)
92     # results=pool.map(mat_ap,[300])
93     end_time = time.time()
94     elapsed_time = (end_time - start_time)/60
95     print(num_processes,elapsed_time)
96     # Cerrar el grupo de procesos
97     pool.close()
98     pool.join()
99
100 F1,G1,H1=results1[0][0],results1[0][1],results1[0][2]
101 F2,G2,H2=results2[0][0],results2[0][1],results2[0][2]
102
103 # =====
104 # DETERMINACIÓN DEL CAMBIO ESTRUCTURAL
105 # =====
106
107 ## DISTANCIA ENTRE REALIZACIONES
108 dF,dG,dH=mp.norm(matrix(F1)-matrix(F2)),mp.norm(matrix(G1)-matrix(G2)),mp.norm(matrix(H1)
    -matrix(H2))
109
110 ## DETERMINACIÓN DEL GRADO DE EQUIVALENCIA
111 def objetivo(T_flat, F1, G1, H1, F2, G2, H2):
112     n = int(np.sqrt(len(T_flat)))
113     T = T_flat.reshape((n, n))
114     F2_estimado = np.dot(np.dot(T, F2), np.linalg.inv(T))
115     G2_estimado = np.dot(T, G2)
116     H2_estimado = np.dot(H2, np.linalg.inv(T))
117     distancia_F = np.linalg.norm(F1-F2_estimado)
118     distancia_G = np.linalg.norm(G1-G2_estimado)
119     distancia_H = np.linalg.norm(H1-H2_estimado)
120     return distancia_F+distancia_G+distancia_H
121
122 # Inicialización aleatoria de la matriz T
123 np.random.seed(123)
124 T_ini = np.random.rand(len(F1),len(F1))
125
126
127 # Optimización para encontrar T que minimiza la distancia

```

```

128 optim = minimize(objetivo, T_ini.flatten(), args=(np.array(F1,dtype=np.float64),np.array(
129     G1,dtype=np.float64),np.array(H1,dtype=np.float64),
130     np.array(F2,dtype=np.float64),np.array(G2,dtype=np.float64),np.array(H2,
131     dtype=np.float64)),
132     method='Powell')
133 # Matriz T resultante
134 T_opt = optim.x.reshape(len(F1),len(F1))
135
136 dif_realizaciones=objetivo(T_opt,np.array(F1,dtype=np.float64),np.array(G1,dtype=np.
137     float64),np.array(H1,dtype=np.float64),
138     np.array(F2,dtype=np.float64),np.array(G2,dtype=np.float64),np.array(H2,
139     dtype=np.float64))
140
141 ## CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD
142 n = matrix(results1[0][0]).rows # F
143 m = matrix(results1[0][1]).cols # G
144 p = matrix(results1[0][2]).rows # H
145
146 def control_obs(n,m,p,F1,G1,H1,F2,G2,H2):
147     C1,C2 = mp.zeros(n, n * m), mp.zeros(n, n * m)
148     O1,O2 = mp.zeros(p * n, n), mp.zeros(p * n, n)
149     F1p,F2p=F1,F2
150     for i in range(n):
151         C1[:, i * m:(i + 1) * m] = F1p @ G1 # Matriz de controlabilidad
152         O1[i * p:(i + 1) * p, :] = H1 @ F1p # Matriz de observabilidad
153         C2[:, i * m:(i + 1) * m] = F2p @ G2 # Matriz de controlabilidad
154         O2[i * p:(i + 1) * p, :] = H2 @ F2p # Matriz de observabilidad
155         F1p,F2p=F1p@F1,F2p@F2
156         print(i)
157     return(C1,C2,O1,O2)
158
159 cont_obs=control_obs(n,m,p,matrix(F1),matrix(G1),matrix(H1),matrix(F2),matrix(G2),
160     matrix(H2))
161
162 # Eigenvalores de las matrices O y C
163 eig1_C,eig2_C= mp.eig(cont_obs[0],left=False, right=False), mp.eig(cont_obs[1],left=False
164     , right=False)
165 eig1_0,eig2_0= mp.eig(cont_obs[2].transpose(),left=False, right=False), mp.eig(cont_obs
166     [2].transpose(),left=False, right=False)
167 # Selección de autovalores significativos
168 eig1_C_sig,eig2_C_sig = [autovalor for autovalor in eig1_C if abs(autovalor) > 1e-10], [
169     autovalor for autovalor in eig2_C if abs(autovalor) > 1e-10]
170 eig1_0_sig,eig2_0_sig = [autovalor for autovalor in eig1_0 if abs(autovalor) > 1e-10], [
171     autovalor for autovalor in eig2_0 if abs(autovalor) > 1e-10]
172
173 # Calcular el rango
174 drangoC, drangoO = len(eig1_C_sig)-len(eig2_C_sig), len(eig1_0_sig)-len(eig2_0_sig)
175 print(drangoC,drangoO)
176
177 ## MATRICES DE TRANSFERENCIA
178 import control as ctrl
179
180 system_ss1 = ctrl.StateSpace(np.array(F1,dtype=np.float64),np.array(G1,dtype=np.float64),
181     np.array(H1,dtype=np.float64),np.zeros((3,3)),dt=True)
182 system_ss2 = ctrl.StateSpace(np.array(F2,dtype=np.float64),np.array(G2,dtype=np.float64),
183     np.array(H2,dtype=np.float64),np.zeros((3,3)),dt=True)
184
185 mat_transfer1, mat_transfer2 = ctrl.ss2tf(system_ss1,dt=1), ctrl.ss2tf(system_ss2,dt=True
186     ) # Matrices de transferencia
187
188 numerator1, denominator1 = ctrl.tfdata(system_ss1)
189 numerator2, denominator2 = ctrl.tfdata(system_ss2)
190
191 grados_num1 = [np.prod(array.shape) for lista in numerator1 for array in lista]
192 grados_num2 = [np.prod(array.shape) for lista in numerator2 for array in lista]
193
194 # GRAFICAR RESPUESTAS A SEÑALES
195 periodo=20

```

```

184 grid=[]
185 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
186     grid.append([i,j])
187
188 # SEÑAL ESCALÓN UNITARIO
189 time1, response1 = ctrl.step_response(mat_transfer1,T=periodo) # (3,3,20)
190 time2, response2 = ctrl.step_response(mat_transfer2,T=periodo) # (3,3,20)
191 # Calcular el error cuadrático medio
192 mse = np.mean((response1 - response2)**2)
193 # Calcular la norma de Frobenius
194 dist_frob = np.linalg.norm(response1 - response2)
195
196 # Graficar la respuesta a la señal escalón unitario
197 fig, ax = plt.subplots(3,3,figsize=(20, 15), dpi=40)
198 for i,j in grid:
199     ax[i,j].plot(time1, response1[i][j],label='Realización 1',color="orange", linewidth=5.0)
200     ax[i,j].plot(time2, response2[i][j],label='Realización 2',color="blue", linewidth=5.0)
201     ax[i,j].tick_params(axis='both', labelsize=16)
202     ax[i,j].yaxis.major.formatter._useMathText = True
203     ax[i,j].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
204     ax[i,j].set_xticks(np.arange(0, periodo+1, 2.0))
205     ax[0,j].set_title(f"Entrada {j+1}", fontsize=25)
206     ax[i,0].set_ylabel(f"Salida {i+1}", fontsize=25)
207     ax[2,j].set_xlabel('Tiempo', fontsize=25)
208 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
209 plt.tight_layout() # ajustar margen a la imagen
210 plt.savefig('/home/armandorg/Documentos/Doctorado/TDF/respuesta_escuni.png')
211 plt.savefig('/home/armandorg/Documentos/Doctorado/Código Python/respuesta_escuni.png')
212
213 # SEÑAL IMPULSO
214 time1i, response1i = ctrl.impulse_response(mat_transfer1,T=periodo)
215 time2i, response2i = ctrl.impulse_response(mat_transfer2,T=periodo)
216 # Calcular el error cuadrático medio
217 mse1 = np.mean((response1i - response2i)**2)
218 # Calcular la norma de Frobenius
219 dist_frobi = np.linalg.norm(response1i - response2i)
220
221 # Graficar la respuesta a la señal impulso
222 fig, ax = plt.subplots(3,3,figsize=(20, 15), dpi=40)
223 for i,j in grid:
224     ax[i,j].plot(time1i, response1i[i][j],label='Realización 1',color="orange", linewidth=5.0)
225     ax[i,j].plot(time2i, response2i[i][j],label='Realización 2',color="blue", linewidth=5.0)
226     ax[i,j].tick_params(axis='both', labelsize=16)
227     ax[i,j].yaxis.major.formatter._useMathText = True
228     ax[i,j].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
229     ax[i,j].set_xticks(np.arange(0, periodo+1, 2.0))
230     ax[0,j].set_title(f"Entrada {j+1}", fontsize=25)
231     ax[i,0].set_ylabel(f"Salida {i+1}", fontsize=25)
232     ax[2,j].set_xlabel('Tiempo', fontsize=25)
233 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
234
235 # Generar la señal senoidal de entrada
236 omega = 0.5 # Frecuencia angular
237 A = 1.0 # Amplitud
238 time = np.arange(0, periodo, 1.0)
239 u = A * np.sin(omega * time)
240 resp_sinus=[]
241 for i in range(3):
242     U= np.zeros((3, len(time)))
243     U[i, :] = u # 0: entrada 1, 1: entrada 2, 2: entrada 2
244     # SEÑAL SENOIDAL
245     resp_sinus.append([ctrl.forced_response(mat_transfer1, T=time, U=U),
246                         ctrl.forced_response(mat_transfer2, T=time, U=U)])
247
248 # Graficar la respuesta a la señal sinusoidal

```

```

249 fig, ax = plt.subplots(3,3,figsize=(20, 15), dpi=40)
250 for i,j in grid:
251     ax[i,j].plot(resp_sINU[j][0][0], resp_sINU[j][0][1][i],label='Realización 1',color="orange", linewidth=5.0)
252     ax[i,j].plot(resp_sINU[j][1][0], resp_sINU[j][1][1][i],label='Realización 2',color="blue", linewidth=5.0)
253     ax[i,j].tick_params(axis='both', labelsize=16)
254     ax[i,j].yaxis.major.formatter._useMathText = True
255     ax[i,j].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
256     ax[i,j].set_xticks(np.arange(0, periodo+1, 2.0))
257     ax[0,j].set_title(f"Entrada {j+1}", fontsize=25)
258     ax[i,0].set_ylabel(f"Salida {i+1}", fontsize=25)
259     ax[2,j].set_xlabel('Tiempo', fontsize=25)
260 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
261
262 # Generar la señal rampa
263 time = np.arange(0, periodo, 1.0)
264 u = time
265 resp_ram=[]
266 for i in range(3):
267     U= np.zeros((3, len(time)))
268     U[i, :] = u # 0: entrada 1, 1: entrada 2, 2: entrada 2
269     # SEÑAL RAMPA
270     resp_ram.append([ctrl.forced_response(mat_transfer1, T=time, U=U),
271                      ctrl.forced_response(mat_transfer2, T=time, U=U)])
272
273 # Graficar la respuesta a la señal rampa
274 fig, ax = plt.subplots(3,3,figsize=(20, 15), dpi=40)
275 for i,j in grid:
276     ax[i,j].plot(resp_ram[j][0][0], resp_ram[j][0][1][i],label='Realización 1',color="orange", linewidth=5.0)
277     ax[i,j].plot(resp_ram[j][1][0], resp_ram[j][1][1][i],label='Realización 2',color="blue", linewidth=5.0)
278     ax[i,j].tick_params(axis='both', labelsize=16)
279     ax[i,j].yaxis.major.formatter._useMathText = True
280     ax[i,j].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
281     ax[i,j].set_xticks(np.arange(0, periodo+1, 2.0))
282     ax[0,j].set_title(f"Entrada {j+1}", fontsize=25)
283     ax[i,0].set_ylabel(f"Salida {i+1}", fontsize=25)
284     ax[2,j].set_xlabel('Tiempo', fontsize=25)
285 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
286
287 # Generar la señal de pulsos
288 time = np.arange(0, periodo, 1.0)
289 # Generar la secuencia de pulsos de entrada
290 pulsos_ent = np.zeros_like(time)
291 pulsos_ent[::4] = 1 # Poner 1 cada 3 posiciones
292 resp_ram=[]
293 for i in range(3):
294     U= np.zeros((3, len(time)))
295     U[i, :] = pulsos_ent
296     # SEÑAL RAMPA
297     resp_ram.append([ctrl.forced_response(mat_transfer1, T=time, U=U),
298                      ctrl.forced_response(mat_transfer2, T=time, U=U)])
299
300 # Graficar la respuesta a la señal de pulsos
301 fig, ax = plt.subplots(3,3,figsize=(20, 15), dpi=40)
302 for i,j in grid:
303     ax[i,j].plot(resp_ram[j][0][0], resp_ram[j][0][1][i],label='Realización 1',color="orange", linewidth=5.0)
304     ax[i,j].plot(resp_ram[j][1][0], resp_ram[j][1][1][i],label='Realización 2',color="blue", linewidth=5.0)
305     ax[i,j].tick_params(axis='both', labelsize=16)
306     ax[i,j].yaxis.major.formatter._useMathText = True
307     ax[i,j].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
308     ax[i,j].set_xticks(np.arange(0, periodo+1, 2.0))
309     ax[0,j].set_title(f"Entrada {j+1}", fontsize=25)
310     ax[i,0].set_ylabel(f"Salida {i+1}", fontsize=25)

```

```
311     ax[2,j].set_xlabel('Tiempo', fontsize=25)
312 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
```

Apéndice D

Datos empleados

Tabla D.1: Datos trimestrales de México, 1993-2018

Año / Trimestre	Consumo del Gobierno ¹	Consumo Privado ¹	Formación Bruta de Capital Fijo ¹	Variación de Existencias ¹	Importación de Bienes Finales ²	Importación de Bienes Intermedios ²	Importación de Bienes de Capital ²	Exportaciones Totales ²	Tipo de Cambio ³
1993/01	134 056.53	1 017 774.94	324 289.55	46 372.24	1 798.68	10 914.75	2 671.22	11 769.29	3.11
1993/02	139 849.02	1 073 692.04	305 642.01	56 521.89	1 879.30	11 660.23	2 779.95	13 046.54	3.11
1993/03	140 634.87	1 079 579.95	323 636.66	19 135.45	1 938.79	11 726.94	2 660.52	12 818.20	3.12
1993/04	154 256.09	1 158 893.15	347 513.68	13 458.38	2 225.58	12 266.20	2 844.38	14 251.93	3.12
1994/01	161 709.76	1 125 906.78	375 637.40	80 398.47	2 067.48	12 964.39	3 041.23	13 775.92	3.17
1994/02	171 024.52	1 215 635.70	373 191.35	85 285.54	2 350.27	13 984.22	3 283.55	15 067.75	3.34
1994/03	167 436.24	1 234 138.85	394 947.53	36 990.27	2 284.03	14 258.33	3 316.14	15 064.15	3.39
1994/04	174 406.13	1 314 877.72	400 588.12	28 922.13	2 808.67	15 306.79	3 680.80	16 974.39	3.64
1995/01	179 617.51	1 284 669.88	343 814.98	116 175.01	1 469.61	14 348.91	2 371.48	18 786.74	6.03
1995/02	195 254.98	1 482 540.91	336 908.71	97 399.75	1 196.54	13 773.30	2 062.77	19 631.46	6.14
1995/03	199 586.21	1 590 023.26	383 658.05	87 100.20	1 216.29	14 598.61	2 057.71	20 087.17	6.21
1995/04	216 167.34	1 765 919.99	447 685.64	125 727.33	1 452.30	15 700.25	2 205.30	21 036.19	7.35
1996/01	232 694.56	1 854 077.06	506 711.90	131 221.40	1 455.89	16 140.09	2 340.07	21 870.38	7.52
1996/02	247 727.30	2 000 318.79	519 842.01	99 680.28	1 455.41	17 351.89	2 602.25	23 606.88	7.48
1996/03	254 501.28	2 123 101.37	600 914.71	85 555.16	1 623.86	18 531.84	2 679.46	24 247.08	7.56
1996/04	279 446.10	2 376 683.97	672 909.58	78 099.34	2 121.61	19 865.80	3 300.59	26 275.40	7.83
1997/01	302 287.82	2 355 533.98	678 673.66	159 187.94	1 518.04	18 982.09	3 028.92	25 098.39	7.86
1997/02	322 560.04	2 606 061.50	743 730.15	113 758.33	2 184.79	20 795.99	3 818.93	27 440.43	7.92
1997/03	327 167.82	2 675 387.74	836 181.30	79 086.66	2 289.54	22 426.69	3 768.92	28 176.38	7.81
1997/04	357 456.29	2 934 217.61	887 128.24	83 889.55	3 097.95	23 434.40	4 461.93	29 716.30	8.07
1998/01	377 536.83	2 921 015.89	948 018.82	176 814.83	2 703.31	23 008.60	4 162.25	28 106.17	8.43
1998/02	401 250.40	3 136 284.55	940 477.42	122 107.63	2 584.99	24 040.18	4 397.53	29 871.52	8.68
1998/03	412 399.89	3 261 141.12	1 066 315.32	92 249.82	2 631.74	24 085.12	4 308.48	28 586.59	9.47
1998/04	452 553.02	3 509 423.24	1 102 694.55	110 003.02	3 188.43	25 801.32	4 461.10	30 975.02	10.01
1999/01	489 642.36	3 568 342.77	1 172 569.27	95 967.24	2 442.60	24 127.63	4 576.71	29 940.37	9.94
1999/02	521 168.14	3 801 665.72	1 139 024.65	103 109.73	2 811.78	26 825.43	4 980.46	33 641.11	9.45
1999/03	527 649.66	3 918 757.54	1 254 411.26	55 313.55	2 965.28	28 023.25	5 266.45	35 293.00	9.37
1999/04	568 363.18	4 153 842.28	1 281 098.98	81 205.04	3 955.37	30 293.31	5 706.51	37 487.33	9.46
2000/01	609 975.23	4 201 895.45	1 383 192.04	151 180.28	3 509.77	30 384.61	5 324.60	38 017.74	9.40
2000/02	632 286.66	4 485 433.73	1 381 838.39	131 570.21	3 919.12	32 910.56	5 648.34	41 027.14	9.59
2000/03	633 682.02	4 628 401.55	1 513 123.85	62 565.82	3 968.57	34 693.97	6 214.86	42 783.21	9.35
2000/04	671 730.58	4 874 553.68	1 475 438.34	48 082.59	5 293.10	35 648.22	6 942.14	44 292.64	9.50
2001/01	672 251.58	4 672 918.23	1 440 146.53	117 260.17	4 531.15	31 608.69	5 722.72	39 730.26	9.69
2001/02	696 356.20	4 849 357.45	1 332 612.46	96 879.00	4 763.94	32 154.39	5 603.99	40 748.10	9.18
2001/03	692 564.80	4 872 250.16	1 458 592.05	16 082.60	4 686.95	30 837.15	5 274.52	39 129.15	9.23
2001/04	732 963.74	5 088 672.66	1 405 402.93	24 646.87	5 769.94	31 548.52	5 894.45	39 172.23	9.25
2002/01	738 161.65	4 840 452.83	1 331 951.29	165 075.80	4 366.13	28 833.71	4 921.68	36 677.19	9.11
2002/02	770 824.80	5 225 346.00	1 403 586.43	132 171.91	5 305.65	32 172.87	5 499.09	41 480.50	9.47
2002/03	768 787.57	5 250 586.43	1 503 069.06	87 302.12	5 128.10	32 890.76	4 906.22	41 367.21	9.89
2002/04	817 051.64	5 458 095.01	1 507 889.36	43 796.49	6 378.47	32 610.73	5 665.47	41 521.08	10.17
2003/01	841 323.34	5 256 478.10	1 542 091.85	181 294.93	4 973.26	29 565.99	4 650.16	39 051.49	10.81
2003/02	884 628.06	5 483 515.38	1 512 123.49	119 541.29	4 885.33	32 012.83	4 992.97	40 244.55	10.45
2003/03	850 843.71	5 534 132.37	1 575 135.20	28 611.87	5 214.95	32 788.72	4 968.45	41 543.04	10.71
2003/04	896 116.70	5 830 030.95	1 595 791.25	85 386.77	6 435.49	34 463.93	5 593.77	43 927.35	11.19
2004/01	907 627.02	5 640 640.91	1 695 674.47	141 839.43	5 200.68	33 589.94	4 926.28	43 193.01	10.98
2004/02	937 287.55	5 955 078.92	1 791 045.52	207 229.46	5 948.15	37 162.67	5 396.54	47 387.84	11.39
2004/03	899 533.26	6 086 046.68	1 832 711.24	122 580.01	6 314.29	37 807.83	5 699.75	47 874.26	11.45
2004/04	958 978.08	6 445 208.85	1 911 517.13	107 879.99	7 945.86	40 243.28	6 574.39	49 543.44	11.32
2005/01	961 231.13	6 176 929.94	1 905 165.73	134 812.55	6 554.21	36 420.54	5 797.28	46 894.76	11.18
2005/02	1 008 967.19	6 576 518.89	1 950 469.28	96 646.41	7 289.19	41 090.79	6 274.72	53 977.04	10.97
2005/03	992 525.04	6 639 203.69	1 967 492.53	36 298.27	7 686.72	41 578.05	6 606.59	54 183.35	10.71
2005/04	1 061 891.78	6 857 958.41	2 096 163.11	91 921.02	9 982.76	45 001.75	7 536.93	59 177.82	10.71
2006/01	1 078 524.49	6 750 621.59	2 112 334.84	146 743.88	8 237.27	42 953.44	6 928.61	58 852.39	10.60
2006/02	1 115 793.57	7 141 213.96	2 257 080.75	214 897.17	8 758.23	47 767.36	7 406.03	63 779.72	11.18
2006/03	1 071 233.04	7 212 024.43	2 361 997.90	104 521.39	9 534.88	48 568.90	7 658.94	63 139.91	10.95
2006/04	1 133 286.48	7 499 115.15	2 429 623.41	77 962.61	10 370.63	49 342.77	8 531.29	64 153.13	10.89
2007/01	1 140 500.96	7 345 042.77	2 364 026.75	157 876.20	9 142.87	46 051.96	7 527.92	60 269.04	11.02
2007/02	1 200 639.30	7 691 347.19	2 426 664.08	190 080.50	10 501.81	51 128.67	8 333.24	67 655.77	10.87

2007/03	1 180 499.31	7 784 629.30	2 551 401.94	75 329.63	10 924.89	53 358.50	8 380.44	70 269.40	10.96
2007/04	1 266 532.04	8 080 075.64	2 754 760.52	118 281.80	12 484.95	54 756.36	9 357.44	73 681.10	10.85
2008/01	1 244 310.11	7 930 371.20	2 628 697.80	93 548.08	11 259.63	52 234.59	8 237.74	70 084.13	10.81
2008/02	1 337 952.13	8 410 688.29	2 853 134.32	182 129.32	11 922.49	58 312.63	10 032.78	79 402.87	10.43
2008/03	1 309 872.13	8 324 469.21	2 878 769.51	56 736.99	13 266.88	61 159.24	10 468.06	78 466.80	10.32
2008/04	1 409 898.27	8 409 489.45	3 086 170.57	133 302.18	11 491.71	49 858.98	10 358.53	63 388.80	13.04
2009/01	1 393 431.91	7 728 821.76	2 625 853.32	81 439.88	7 020.70	37 574.52	7 361.65	49 664.85	14.38
2009/02	1 458 094.81	7 793 042.76	2 623 124.61	77 935.08	7 167.65	39 378.43	7 016.14	54 012.20	13.31
2009/03	1 432 551.80	8 043 991.92	2 690 814.40	60 035.39	8 854.48	44 809.55	7 643.03	58 520.88	13.27
2009/04	1 513 649.68	8 460 424.93	2 824 969.94	151 525.92	9 785.24	49 149.16	8 624.42	67 505.62	13.06
2010/01	1 496 786.96	8 191 015.02	2 766 614.53	207 833.29	9 104.78	50 315.82	6 804.15	66 596.62	12.76
2010/02	1 585 008.07	8 618 735.08	2 843 282.67	188 815.36	10 055.33	57 678.35	6 991.17	74 641.43	12.57
2010/03	1 560 216.70	8 831 326.55	2 859 818.49	75 139.68	10 269.77	59 874.74	7 696.45	75 589.82	12.80
2010/04	1 651 607.55	9 298 298.71	3 069 584.96	175 355.21	11 992.85	61 943.50	8 754.91	81 645.28	12.39
2011/01	1 644 255.49	8 970 318.17	2 909 996.66	219 464.37	11 583.08	60 603.55	7 706.05	81 801.20	12.06
2011/02	1 708 514.14	9 331 501.54	3 105 666.53	188 470.71	12 688.58	66 678.26	8 676.67	89 282.61	11.73
2011/03	1 718 061.39	9 636 372.31	3 305 363.61	55 615.19	13 851.03	69 022.69	9 094.40	88 087.09	12.31
2011/04	1 837 877.49	10 078 909.43	3 745 365.21	127 351.55	13 667.54	67 715.75	9 555.28	90 262.49	13.63
2012/01	1 839 767.80	9 897 927.02	3 450 147.09	229 466.37	12 819.15	66 131.69	8 954.86	89 608.97	13.00
2012/02	1 896 162.86	10 045 719.25	3 590 282.16	228 428.69	13 310.40	70 296.76	9 334.06	94 308.60	13.57
2012/03	1 859 125.80	10 294 103.45	3 663 796.28	43 563.98	13 223.02	69 661.27	9 531.30	91 234.18	13.17
2012/04	1 963 763.78	10 714 140.29	3 747 151.66	160 430.47	14 919.85	71 821.36	10 747.84	95 618.14	12.94
2013/01	1 912 523.20	10 317 196.06	3 364 545.79	257 660.45	13 647.34	66 619.77	9 079.70	88 228.08	12.65
2013/02	1 963 197.70	10 713 017.10	3 430 953.70	284 393.13	14 338.17	73 432.50	9 790.60	96 662.69	12.48
2013/03	1 968 384.17	10 878 295.83	3 415 749.49	113 480.67	14 500.31	73 171.22	9 608.29	96 307.24	12.91
2013/04	2 093 554.60	11 368 494.77	3 625 965.12	152 411.99	14 843.56	71 599.91	10 578.80	98 817.04	13.03
2014/01	2 062 083.99	10 975 818.90	3 408 460.76	280 428.76	13 264.96	69 590.03	9 209.38	90 759.10	13.23
2014/02	2 090 793.81	11 375 851.46	3 549 971.69	148 505.39	14 269.77	77 017.62	9 576.16	101 870.05	13.00
2014/03	2 127 278.63	11 571 434.25	3 675 050.93	106 510.63	14 898.86	77 879.31	10 061.94	101 120.72	13.12
2014/04	2 248 661.26	12 111 339.17	4 055 135.21	84 699.44	15 865.54	77 544.29	10 799.37	103 161.81	13.87
2015/01	2 257 960.33	11 581 174.09	3 810 144.69	320 411.69	12 673.56	70 307.65	9 623.47	90 460.71	14.95
2015/02	2 275 898.42	11 840 307.89	4 046 947.68	143 067.52	13 454.21	76 258.93	10 272.31	97 976.27	15.33
2015/03	2 248 161.07	12 297 858.67	4 369 901.87	27 864.08	15 162.78	76 782.40	10 617.32	95 890.31	16.43
2015/04	2 368 232.59	12 932 143.56	4 485 293.64	69 076.02	14 988.81	74 364.13	10 726.81	96 222.30	16.76
2016/01	2 349 138.77	12 452 013.88	4 283 785.14	336 504.33	11 721.62	68 521.82	8 889.94	85 146.83	18.06
2016/02	2 412 627.70	12 824 465.62	4 504 366.90	201 353.93	12 505.99	74 438.41	9 869.21	93 746.17	18.11
2016/03	2 393 451.28	13 331 775.33	4 665 180.02	55 162.05	13 727.96	75 965.00	10 462.04	94 918.85	18.75
2016/04	2 515 113.99	14 153 946.45	4 994 738.35	84 542.71	13 994.72	76 470.16	10 497.64	100 134.85	19.84
2017/01	2 526 625.83	13 718 762.94	4 805 083.64	356 311.36	13 055.59	75 171.01	9 253.03	94 708.75	20.33
2017/02	2 568 426.06	14 063 805.48	4 730 941.67	200 520.93	13 286.14	79 759.47	9 913.64	102 657.44	18.54
2017/03	2 522 967.79	14 348 343.37	4 810 109.96	71 669.85	14 722.61	82 519.46	10 658.47	101 851.48	17.82
2017/04	2 673 080.31	15 097 438.55	5 052 831.91	102 755.55	16 268.70	84 571.80	11 189.22	110 183.41	18.96
2018/01	2 687 714.89	14 534 067.75	4 949 016.43	383 926.90	14 523.59	82 060.11	10 434.86	105 242.02	18.74
2018/02	2 766 519.21	15 104 267.30	5 231 051.83	192 891.26	15 354.45	89 927.28	11 332.91	113 841.81	19.43
2018/03	2 667 651.25	15 291 482.50	5 274 734.95	99 234.55	16 462.57	91 157.19	12 116.38	114 062.56	18.96
2018/04	2 805 468.19	15 909 520.09	5 365 900.29	168 798.80	16 770.73	92 135.59	12 000.95	117 425.77	19.82

¹ Millones de pesos a precios corrientes. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>

² Millones de dólares. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>

³ Promedio trimestral pesos por dolar. Elaboración propia con datos de la Serie histórica diaria del tipo de cambio peso-dólar - (CF373) de Banco de México: <http://www.anterior.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF373§or=6&locale=es>

Tabla D.2: Datos mensuales de México sobre la contribución porcentual del INPC y sus componentes sobre la inflación general, 2013-2022

INCIDENCIA* EN LA INFLACIÓN GENERAL DE:

Quincena - Mes - Año	Subyacente	No Subyacente	Mercancías	Agropecuarios	Vivienda	Otros Servicios	Energéticos
1Q Ene 2011	0.159972	0.014489	0.153151	-0.099651	0.022057	-0.025972	0.066371
2Q Ene 2011	0.179828	-0.072530	0.038888	-0.097147	0.021060	0.110060	0.016663
1Q Feb 2011	0.171181	0.034593	0.126617	-0.006807	0.018788	0.023911	0.032966
2Q Feb 2011	0.095813	0.134736	0.076910	0.108045	0.016734	0.001448	0.026132
1Q Mar 2011	0.183149	-0.134402	0.092097	-0.178981	0.016749	0.073367	0.047127
2Q Mar 2011	-0.003720	0.058288	0.073592	0.043640	0.029492	-0.108324	0.025996
1Q Abr 2011	0.039330	-0.129717	0.064895	0.202193	0.014476	-0.042240	-0.335690
2Q Abr 2011	0.041085	0.070964	0.037684	0.051091	0.016265	-0.014259	0.018943
1Q May 2011	0.054682	-0.804186	0.044310	-0.227100	0.016174	-0.005952	-0.593109
2Q May 2011	0.124514	-0.213193	0.070776	-0.248027	0.026804	0.025411	0.031216
1Q Jun 2011	0.031345	-0.086060	0.006557	-0.114732	0.016935	0.006155	0.022106
2Q Jun 2011	0.113561	0.075097	0.066469	0.050267	0.009484	0.034999	0.022802
1Q Jul 2011	0.111160	0.204046	0.009812	0.161080	0.007656	0.092572	0.032613
2Q Jul 2011	0.013752	0.126946	-0.032981	0.103291	0.016612	0.026983	0.018359
1Q Ago 2011	0.068224	0.017358	0.015241	-0.009665	0.005126	-0.012038	0.021625
2Q Ago 2011	0.035763	-0.032336	0.065129	-0.059319	0.012920	-0.056875	0.025318
1Q Sep 2011	0.168596	0.043308	0.070190	0.007601	0.015696	-0.011620	0.034573
2Q Sep 2011	0.039850	0.022977	0.016761	0.002837	0.011646	0.006297	0.020109
1Q Oct 2011	0.158136	0.454703	0.099339	0.023172	0.016301	0.042496	0.430523
2Q Oct 2011	0.046000	0.015582	0.033648	-0.001393	0.010600	0.001519	0.016404
1Q Nov 2011	0.192699	0.773953	0.077818	0.080824	0.014154	0.100729	0.690169
2Q Nov 2011	0.066847	0.099047	0.047213	0.073528	0.014620	0.005292	0.025517
1Q Dic 2011	0.265852	0.240113	0.134067	0.186788	0.011133	0.120629	0.051282

2Q Dic 2011	0.176665	0.285564	0.148041	0.244180	0.014452	0.013933	0.031847
1Q Ene 2012	0.150235	0.168047	0.173992	0.114179	0.018586	-0.054859	0.027846
2Q Ene 2012	0.206953	0.107438	0.093271	0.067443	0.014464	0.080035	0.033655
1Q Feb 2012	0.198584	-0.129103	0.155239	-0.143712	0.021291	0.019414	0.028541
2Q Feb 2012	0.044351	-0.091049	0.040771	-0.089172	0.012609	-0.009145	0.025785
1Q Mar 2012	0.125000	-0.077286	0.049932	-0.079242	0.017609	0.057320	0.019402
2Q Mar 2012	0.079424	-0.013280	0.035570	-0.022851	0.017552	0.026282	0.023207
1Q Abr 2012	0.021430	-0.438710	0.061030	-0.075101	0.018158	-0.057758	-0.364904
2Q Abr 2012	0.108926	0.032388	0.067744	-0.003140	0.003839	0.035519	0.033639
1Q May 2012	0.110222	-0.587416	0.045814	0.022937	0.018280	0.040375	-0.610658
2Q May 2012	0.079728	0.104604	0.053678	0.065425	0.021335	-0.005296	0.028552
1Q Jun 2012	0.079195	0.162012	0.092694	0.115896	0.015101	-0.030687	0.044874
2Q Jun 2012	0.095747	0.157763	0.017874	0.135672	0.012157	0.063093	0.020683
1Q Jul 2012	0.158125	0.231811	0.081740	0.191712	0.017427	0.057351	0.039606
2Q Jul 2012	0.068413	0.020670	0.043276	-0.013983	0.015315	0.006990	0.033882
1Q Ago 2012	0.120222	0.015854	0.097456	-0.030466	0.013154	-0.033418	0.042277
2Q Ago 2012	0.036690	0.201555	0.039595	0.177017	0.012674	-0.025052	0.026358
1Q Sep 2012	0.091134	0.158138	0.068103	0.137145	0.016292	-0.107014	0.016685
2Q Sep 2012	0.053230	0.090580	0.055800	0.164229	0.020968	-0.023538	-0.084391
1Q Oct 2012	0.128798	0.321146	0.061362	-0.035034	0.012067	0.055369	0.354317
2Q Oct 2012	0.038556	-0.071215	0.024403	-0.105671	0.013051	0.001102	0.031967
1Q Nov 2012	0.136545	0.652007	0.122695	-0.028990	0.016488	-0.002638	0.666914
2Q Nov 2012	-0.230640	0.046677	0.001492	0.020451	0.016242	-0.248374	0.023796
1Q Dic 2012	0.196677	0.077525	0.122107	0.023100	0.015111	0.058928	0.053667
2Q Dic 2012	0.021779	0.074504	0.074500	0.063266	0.013903	-0.066623	0.007828
1Q Ene 2013	0.134515	0.019599	0.058248	-0.049297	0.016054	0.042207	0.052888
2Q Ene 2013	0.353495	0.045866	-0.020589	-0.007453	0.025148	0.333086	0.005978
1Q Feb 2013	0.184914	0.052894	0.058240	-0.002395	0.017072	0.105036	0.026279
2Q Feb 2013	0.050161	0.060357	0.006770	0.016211	0.015183	0.027872	0.036490
1Q Mar 2013	0.194068	0.326886	0.070353	0.254557	0.019416	0.104076	0.061974
2Q Mar 2013	0.018901	0.293346	-0.000983	0.279844	0.013841	0.005795	0.003179
1Q Abr 2013	0.038726	-0.132307	0.050244	0.019432	0.013122	-0.025386	-0.269656
2Q Abr 2013	0.025621	-0.018042	0.000365	-0.047618	0.021219	0.003112	0.004068
1Q May 2013	0.108940	-0.454698	0.049509	-0.040267	0.014436	0.043165	-0.415982
2Q May 2013	0.058285	-0.039551	0.020103	-0.059161	0.024320	0.012196	0.010664
1Q Jun 2013	0.054362	-0.101193	0.014624	-0.192459	0.024478	0.011364	0.067278
2Q Jun 2013	0.030132	-0.077154	-0.039166	-0.106796	0.018949	0.048705	0.009906
1Q Jul 2013	0.027065	-0.026961	-0.021865	-0.068975	0.016039	0.030660	0.040904
2Q Jul 2013	-0.032012	0.012193	-0.030416	-0.024781	0.013622	-0.024500	0.021517
1Q Ago 2013	0.080608	0.180194	0.087571	0.118381	0.023597	-0.080785	0.054330
2Q Ago 2013	0.009923	0.058189	0.037523	0.055343	0.012533	-0.044232	-0.009806
1Q Sep 2013	0.231693	0.105803	0.126828	0.048432	0.011687	-0.018349	0.055354
2Q Sep 2013	0.024217	-0.014587	-0.003373	-0.021534	0.013582	0.014879	0.004882
1Q Oct 2013	0.104491	0.297699	0.047227	-0.084402	0.016037	0.041225	0.380371
2Q Oct 2013	0.061583	0.074398	-0.017427	0.061980	0.009008	0.070002	0.004332
1Q Nov 2013	0.085377	0.766023	0.010460	0.206723	0.018467	0.055868	0.555773
2Q Nov 2013	-0.025077	0.049244	-0.020472	0.046738	0.019648	-0.024253	0.001249
1Q Dic 2013	0.231482	0.171353	0.097902	0.071836	0.015215	0.118365	0.072899
2Q Dic 2013	0.059798	0.257314	0.070611	0.136755	0.011127	-0.021940	0.006581
1Q Ene 2014	0.523126	0.152471	0.391775	-0.085999	0.020938	0.094039	0.177343
2Q Ene 2014	0.182929	-0.067273	0.015442	-0.086244	0.027001	0.130922	0.005045
1Q Feb 2014	0.089830	0.029904	0.033478	-0.053693	0.018991	0.027265	0.078290
2Q Feb 2014	0.064060	0.087436	0.004657	0.067018	0.023576	0.034483	0.011854
1Q Mar 2014	0.081460	0.091590	0.043665	0.051995	0.016313	0.021482	0.045322
2Q Mar 2014	0.098213	-0.048421	0.034182	-0.044441	0.011562	0.051449	0.009237
1Q Abr 2014	0.198962	-0.384491	0.051612	-0.057369	0.016460	0.130420	-0.331400
2Q Abr 2014	-0.055501	0.004891	0.023450	-0.040588	0.014948	-0.094526	0.021718
1Q May 2014	0.042364	-0.410795	0.045748	0.072610	0.017382	-0.023860	-0.492019
2Q May 2014	0.114044	0.034242	0.076520	0.035323	0.014138	0.020814	-0.002249
1Q Jun 2014	0.088443	-0.007253	0.032377	-0.042842	0.020032	0.030691	0.034509
2Q Jun 2014	0.033730	0.001460	-0.021599	-0.021187	0.012615	0.041216	0.019435
1Q Jul 2014	0.107150	0.090694	-0.007422	0.042242	0.012762	0.099993	0.044529
2Q Jul 2014	0.039181	0.079395	0.007615	0.074629	0.012167	0.016643	0.003789
1Q Ago 2014	0.112217	0.077439	0.139633	0.057635	0.016011	-0.085034	0.015556
2Q Ago 2014	0.060430	0.158956	0.022501	0.157657	0.014718	0.014309	-0.006258
1Q Sep 2014	0.182207	0.142368	0.082317	0.109488	0.015973	-0.030081	0.032615
2Q Sep 2014	0.021598	-0.006189	0.035683	-0.011255	0.022943	-0.037164	0.004076
1Q Oct 2014	0.088160	0.409029	0.026291	-0.016131	0.010917	0.050952	0.419974
2Q Oct 2014	0.055441	0.039614	0.028400	0.053363	0.011519	0.015523	-0.017440
1Q Nov 2014	0.095139	0.641366	0.044020	0.085093	0.016402	0.034717	0.553194
2Q Nov 2014	-0.000963	0.045439	-0.032437	0.072081	0.016057	0.015414	-0.031409
1Q Dic 2014	0.157718	0.256710	0.068605	0.226557	0.017827	0.071286	0.029063
2Q Dic 2014	0.035224	0.071275	0.022348	0.087145	0.013670	-0.000794	-0.020388
1Q Ene 2015	-0.068953	-0.118066	0.072036	-0.147481	0.019481	-0.171857	0.002990
2Q Ene 2015	0.053286	0.032376	-0.017674	0.060809	0.020435	0.029537	-0.042362
1Q Feb 2015	0.210080	-0.105150	0.124571	-0.092203	0.017718	0.060795	-0.016033
2Q Feb 2015	0.037819	0.045797	-0.006534	-0.041262	0.017637	0.023695	0.067527
1Q Mar 2015	0.110987	0.068501	0.045239	-0.013070	0.013815	0.050607	0.081164
2Q Mar 2015	0.134929	0.235853	0.015856	0.204447	0.018505	0.100568	0.029498
1Q Abr 2015	0.019353	-0.470836	0.080882	-0.050825	0.019346	-0.081691	-0.420793
2Q Abr 2015	0.060952	-0.042716	0.013036	-0.053438	0.014906	0.032176	0.006502
1Q May 2015	0.025625	-0.555657	0.008156	-0.081332	0.010918	0.005650	-0.474650
2Q May 2015	0.063029	-0.020875	0.025828	-0.041820	0.015751	0.018665	0.019975
1Q Jun 2015	0.095492	0.036951	0.061490	0.023024	0.015357	0.016994	0.011232
2Q Jun 2015	0.063486	-0.035818	-0.004125	-0.049564	0.015117	0.050353	0.009870
1Q Jul 2015	0.075201	0.019032	-0.018007	0.021953	0.011932	0.077157	-0.000332
2Q Jul 2015	0.048469	0.029959	0.001746	0.023168	0.014479	0.028249	0.003442
1Q Ago 2015	0.092491	0.022623	0.095029	-0.012762	0.012989	-0.065013	0.015016
2Q Ago 2015	0.071801	0.040051	0.044042	0.045144	0.014798	0.007235	-0.010624
1Q Sep 2015	0.206340	0.114126	0.117054	0.091139	0.013346	-0.030694	0.005201
2Q Sep 2015	0.079102	-0.082773	0.066452	-0.061944	0.012907	-0.001348	-0.021580
1Q Oct 2015	0.118656	0.343672	0.069767	0.000305	0.006706	0.042184	0.331823

2Q Oct 2015	0.065700	0.042796	0.037034	0.069253	0.014670	0.013988	-0.029372
1Q Nov 2015	0.001559	0.519223	0.041098	0.026494	0.017540	-0.057079	0.488779
2Q Nov 2015	-0.015349	-0.042652	0.008903	-0.041457	0.016563	-0.040815	-0.002333
1Q Dic 2015	0.205077	0.052195	0.055067	0.096672	0.018280	0.131534	-0.046615
2Q Dic 2015	0.066922	0.289256	0.027738	0.279631	0.013642	0.025542	0.010417
1Q Ene 2016	0.058829	-0.032190	0.066272	0.022091	0.023726	-0.048357	-0.100897
2Q Ene 2016	0.106062	0.247752	0.016937	0.183850	0.028940	0.046268	0.037018
1Q Feb 2016	0.169919	0.115587	0.133253	0.136319	0.018717	0.013913	-0.026420
2Q Feb 2016	0.092775	-0.142289	0.049817	-0.113781	0.020321	0.021504	-0.031167
1Q Mar 2016	0.226156	-0.129696	0.077697	-0.099345	0.022966	0.125480	-0.030564
2Q Mar 2016	-0.006378	0.157137	0.030650	0.116281	0.020041	-0.057069	0.037079
1Q Abr 2016	0.110742	-0.455466	0.084251	-0.116626	0.018216	0.007716	-0.303568
2Q Abr 2016	0.117340	-0.210349	0.087868	-0.152273	0.016420	0.012352	0.003104
1Q May 2016	0.062748	-0.546174	0.025605	-0.026702	0.019414	0.017239	-0.520755
2Q May 2016	0.081412	0.085876	0.039121	0.059244	0.016159	0.022614	0.025072
1Q Jun 2016	0.123962	-0.100915	0.071764	-0.144203	0.021299	0.028993	0.041125
2Q Jun 2016	0.058364	-0.050265	0.007602	-0.041522	0.014755	0.032555	-0.012167
1Q Jul 2016	0.087476	0.190192	-0.002436	-0.020544	0.024087	0.059800	0.107658
2Q Jul 2016	0.027320	-0.068675	0.021507	-0.062281	0.012661	-0.009451	-0.006901
1Q Ago 2016	0.100024	0.213917	0.094441	0.006809	0.013778	-0.051979	0.203697
2Q Ago 2016	0.061601	-0.084917	0.061299	0.113620	0.014866	-0.023187	-0.198740
1Q Sep 2016	0.275901	0.262297	0.147355	0.222479	0.009482	0.001077	0.038718
2Q Sep 2016	0.112116	0.055400	0.101163	0.018190	0.021172	-0.010527	0.028604
1Q Oct 2016	0.126066	0.367203	0.071566	-0.013635	0.016921	0.037579	0.376388
2Q Oct 2016	0.060928	-0.003023	0.039181	0.000430	0.011204	0.010543	-0.004460
1Q Nov 2016	0.176174	0.595962	0.073532	0.063661	0.015761	0.086880	0.530536
2Q Nov 2016	-0.072228	0.034149	-0.097674	0.010409	0.021279	0.004167	0.016665
1Q Dic 2016	0.352605	0.063088	0.126505	0.043811	0.020143	0.205956	0.011913
2Q Dic 2016	0.040170	0.088125	0.085086	0.084885	0.015783	-0.060699	0.001492
1Q Ene 2017	0.276431	1.236763	0.200979	-0.097628	0.026426	0.031850	1.239525
2Q Ene 2017	0.275662	-0.036402	0.154587	-0.056737	0.035874	0.067469	0.000985
1Q Feb 2017	0.345511	-0.011306	0.237372	-0.079213	0.027568	0.072273	0.040793
2Q Feb 2017	0.172394	0.074579	0.131235	0.040750	0.024666	0.016419	0.022318
1Q Mar 2017	0.233413	0.117696	0.151578	0.128588	0.023532	0.057702	-0.024362
2Q Mar 2017	0.215546	0.060213	0.102818	0.102862	0.016623	0.096104	-0.046783
1Q Abr 2017	0.197455	-0.348376	0.116043	0.049052	0.015126	0.066261	-0.415104
2Q Abr 2017	0.061420	0.211444	0.084376	0.146978	0.020417	-0.044324	0.031779
1Q May 2017	0.113423	-0.450782	0.089497	0.022269	0.013638	0.008711	-0.554355
2Q May 2017	0.124390	0.040344	0.070908	0.036652	0.025758	0.026156	0.003475
1Q Jun 2017	0.128673	0.022970	0.062421	0.002992	0.015604	0.049197	0.018154
2Q Jun 2017	0.076092	-0.041831	0.026013	0.038371	0.018233	0.029274	-0.085836
1Q Jul 2017	0.139456	0.095460	0.013226	0.116974	0.017142	0.105459	-0.028125
2Q Jul 2017	0.048228	0.203700	0.029803	0.204353	0.016545	-0.001198	-0.009335
1Q Ago 2017	0.149371	0.159317	0.141959	0.085524	0.017427	-0.064409	0.059648
2Q Ago 2017	0.034457	0.082785	0.016837	0.028149	0.022551	-0.021049	0.044123
1Q Sep 2017	0.208108	0.132753	0.086909	0.027107	0.011513	-0.007798	0.103589
2Q Sep 2017	-0.027266	-0.145390	0.039785	-0.094410	0.013369	-0.080420	0.082981
1Q Oct 2017	0.155821	0.462984	0.046258	-0.149694	0.017456	0.091804	0.435687
2Q Oct 2017	0.094178	0.099535	0.018527	0.020693	0.019941	0.055709	0.078677
1Q Nov 2017	0.208748	0.706523	0.113382	0.104332	0.015957	0.079410	0.593859
2Q Nov 2017	0.002564	0.033070	-0.011369	-0.005110	0.020932	-0.006999	0.037331
1Q Dic 2017	0.315429	0.119626	0.093593	0.056369	0.012657	0.209179	0.047820
2Q Dic 2017	-0.011546	0.287509	0.047639	0.242028	0.016864	-0.076049	0.033090
1Q Ene 2018	0.125024	0.112798	0.143678	-0.099909	0.023565	-0.052306	0.181914
2Q Ene 2018	0.180944	0.128436	0.049822	-0.035730	0.027243	0.077167	0.128873
1Q Feb 2018	0.219600	-0.015025	0.130811	-0.121720	0.022502	0.057392	0.094954
2Q Feb 2018	0.100063	-0.056743	0.058806	-0.089495	0.018662	0.022312	0.027705
1Q Mar 2018	0.174267	0.120448	0.051100	0.052978	0.021447	0.101720	0.061406
2Q Mar 2018	0.039344	-0.026552	0.014403	0.055522	0.021055	0.003885	-0.085248
1Q Abr 2018	0.052221	-0.397789	0.094676	-0.043547	0.017026	-0.059767	-0.360654
2Q Abr 2018	0.074362	-0.071448	0.025751	-0.062862	0.019567	0.028543	-0.016037
1Q May 2018	0.094746	-0.385796	0.021596	-0.065256	0.016119	0.056223	-0.322979
2Q May 2018	0.118609	0.136942	0.077567	-0.010267	0.021066	0.017959	0.148363
1Q Jun 2018	0.059389	0.075331	-0.001655	-0.066112	0.016776	0.043116	0.140123
2Q Jun 2018	0.107999	0.138371	0.015775	0.081562	0.029947	0.060794	0.053620
1Q Jul 2018	0.140531	0.180990	0.065054	0.103817	0.013426	0.057874	0.074291
2Q Jul 2018	0.038282	0.143151	0.010314	0.067628	0.016338	0.010430	0.075944
1Q Ago 2018	0.132386	0.210792	0.117267	0.091231	0.007339	-0.040810	0.112932
2Q Ago 2018	0.067639	0.228700	0.056175	0.131340	0.019953	-0.014305	0.088889
1Q Sep 2018	0.142233	0.080428	0.083792	-0.037710	0.017245	-0.030122	0.117994
2Q Sep 2018	0.134915	-0.031024	0.074022	-0.099248	0.014932	0.045551	0.065137
1Q Oct 2018	0.127629	0.270580	0.054165	-0.050287	0.011316	0.062148	0.316762
2Q Oct 2018	0.076344	0.059414	0.004808	0.055557	0.012239	0.059298	0.000668
1Q Nov 2018	0.144116	0.469603	0.092704	0.142460	0.019002	0.032410	0.324980
2Q Nov 2018	0.013312	0.320450	0.015691	0.361793	0.017264	-0.019643	-0.042441
1Q Dic 2018	0.314416	0.247222	0.108554	0.270418	0.014425	0.191437	-0.025905
2Q Dic 2018	0.053666	-0.108711	0.029143	-0.064530	0.013083	0.011439	-0.053052
1Q Ene 2019	0.060889	0.048812	0.083816	0.136938	0.019286	-0.049900	-0.124503
2Q Ene 2019	0.121236	-0.114563	0.040069	-0.133543	0.020981	0.044026	-0.010041
1Q Feb 2019	0.190914	-0.290795	0.130764	-0.297586	0.019331	0.027492	-0.001356
2Q Feb 2019	0.140986	-0.004245	0.081017	-0.192906	0.024932	0.033853	0.185586
1Q Mar 2019	0.134100	0.123449	0.073514	0.006997	0.020264	0.040295	0.114070
2Q Mar 2019	0.106346	0.011108	0.038302	0.040345	0.025219	0.042825	-0.039658
1Q Abr 2019	0.296876	-0.331617	0.108532	-0.019550	0.025476	0.162578	-0.316221
2Q Abr 2019	-0.018198	0.076920	0.027496	0.106333	0.017928	-0.063945	-0.034500
1Q May 2019	0.068943	-0.369534	0.049190	0.022008	0.022385	-0.004086	-0.397336
2Q May 2019	0.127222	-0.160702	0.098551	-0.115914	0.018002	0.009709	-0.046778
1Q Jun 2019	0.124671	-0.115821	0.040308	-0.044841	0.019071	0.064570	-0.074919
2Q Jun 2019	0.082079	0.061572	0.002421	0.168666	0.021281	0.056805	-0.109089
1Q Jul 2019	0.126937	0.144950	0.028996	0.119340	0.012499	0.081993	0.019417
2Q Jul 2019	0.057000	0.006686	0.057736	0.003409	0.021760	-0.025041	-0.014138
1Q Ago 2019	0.085940	-0.161562	0.059158	-0.149698	0.016320	-0.024872	-0.022332

2Q Ago 2019	0.078590	-0.025075	0.062616	-0.015786	0.012086	-0.010470	-0.013137
1Q Sep 2019	0.141725	0.031429	0.084703	0.001837	0.016946	-0.030706	0.026870
2Q Sep 2019	0.089477	0.036278	0.070975	0.007036	0.017161	0.001078	0.022037
1Q Oct 2019	0.097420	0.299059	0.048603	-0.007120	0.013652	0.035165	0.297086
2Q Oct 2019	0.088416	0.071572	0.033943	0.029379	0.016127	0.038346	0.017992
1Q Nov 2019	0.119317	0.561699	0.043255	0.151080	0.009976	0.066086	0.404736
2Q Nov 2019	0.007700	0.081783	-0.026279	0.044614	0.015436	0.018544	0.038506
1Q Dic 2019	0.273835	0.076540	0.098407	0.031042	0.023044	0.152384	0.041627
2Q Dic 2019	0.061133	0.262194	0.034885	0.258923	0.008570	0.017677	-0.002388
1Q Ene 2020	0.152441	0.114569	0.201329	0.068968	0.022380	-0.078689	-0.003819
2Q Ene 2020	0.122770	-0.011761	0.076723	-0.014431	0.024505	0.006692	-0.007858
1Q Feb 2020	0.162028	-0.039921	0.094402	0.014582	0.022606	0.036917	-0.061508
2Q Feb 2020	0.098473	0.375144	0.042574	0.353639	0.018085	0.034409	0.014648
1Q Mar 2020	0.116422	-0.011173	0.075121	-0.009191	0.023696	0.017606	-0.008205
2Q Mar 2020	0.107691	-0.882944	0.082442	-0.055533	0.020265	0.004984	-0.836792
1Q Abr 2020	0.151449	-0.872249	0.157493	-0.085096	0.022790	-0.028834	-0.787672
2Q Abr 2020	0.131167	0.057321	0.101399	0.053820	0.007345	0.022422	0.003326
1Q May 2020	0.184756	0.110273	0.141731	0.265137	0.005657	0.037368	-0.174238
2Q May 2020	-0.045687	0.037639	-0.014985	-0.290865	0.006271	-0.036973	0.362063
1Q Jun 2020	0.224477	0.092453	0.170728	-0.099995	0.003017	0.050732	0.189957
2Q Jun 2020	0.156368	0.309268	0.154377	0.032217	0.009379	-0.007514	0.275857
1Q Jul 2020	0.187659	0.167492	0.145435	-0.028241	0.009484	0.032470	0.190202
2Q Jul 2020	0.069151	0.067485	0.061952	0.017308	0.006345	0.000245	0.043933
1Q Ago 2020	0.136687	0.105157	0.104395	0.079686	0.010659	0.022689	-0.000484
2Q Ago 2020	0.137170	0.029091	0.100203	0.010587	0.009501	0.023253	0.013655
1Q Sep 2020	0.125055	0.037382	0.064295	0.017889	0.007966	0.012062	0.006734
2Q Sep 2020	0.090483	-0.122687	0.105431	-0.038106	0.011186	-0.026133	-0.088695
1Q Oct 2020	0.109738	0.435464	0.049812	0.095558	0.006672	0.054905	0.340879
2Q Oct 2020	0.052790	0.109252	0.028930	0.155796	0.012112	0.011747	-0.045389
1Q Nov 2020	-0.080598	0.124078	-0.117580	-0.101621	0.008913	0.028069	0.224314
2Q Nov 2020	-0.018671	-0.080938	-0.037580	-0.037593	0.013138	0.005771	-0.041070
1Q Dic 2020	0.393404	-0.056657	0.307419	-0.115567	0.010678	0.075307	0.059332
2Q Dic 2020	0.057886	0.131259	0.034435	-0.009754	0.008832	0.014619	0.138292
1Q Ene 2021	0.177806	0.335886	0.155753	0.032714	0.015926	0.005902	0.283440
2Q Ene 2021	0.127790	0.370759	0.092445	0.057269	0.017385	0.026381	0.304720
1Q Feb 2021	0.164049	0.063814	0.118456	-0.072362	0.013732	0.026539	0.130663
2Q Feb 2021	0.135290	0.174674	0.082085	0.042091	0.014777	0.037912	0.134327
1Q Mar 2021	0.259155	0.270758	0.160436	0.079382	0.019199	0.079505	0.185859
2Q Mar 2021	0.152809	0.127973	0.071211	0.063449	0.014433	0.067165	0.064193
1Q Abr 2021	0.134960	-0.071668	0.112905	0.167147	0.012664	0.009376	-0.245224
2Q Abr 2021	0.126764	0.119474	0.054554	0.146421	0.013378	0.058833	-0.028476
1Q May 2021	0.246002	-0.252343	0.166591	0.128712	0.017339	0.061876	-0.383114
2Q May 2021	0.166224	0.008623	0.102964	0.004533	0.013810	0.049728	0.001031
1Q Jun 2021	0.265866	0.077021	0.166870	0.014098	0.010939	0.087317	0.058380
2Q Jun 2021	0.157154	0.045986	0.080592	-0.022488	0.019173	0.056519	0.068819
1Q Jul 2021	0.230035	0.136658	0.146154	0.035115	0.015118	0.068117	0.101355
2Q Jul 2021	0.095921	0.142187	0.085004	0.111430	0.014890	-0.008660	0.025071
1Q Ago 2021	0.209466	-0.230366	0.187166	0.128609	0.014181	-0.009783	-0.361379
2Q Ago 2021	0.124761	0.059255	0.098558	0.060545	0.015248	0.001137	-0.004194
1Q Sep 2021	0.231786	0.188473	0.172881	0.101246	0.017179	0.000999	0.077880
2Q Sep 2021	0.099057	0.108742	0.097051	0.040773	0.012679	-0.010768	0.066471
1Q Oct 2021	0.246407	0.294202	0.148379	-0.073201	0.017721	0.080306	0.366742
2Q Oct 2021	0.148547	0.233639	0.083151	0.144784	0.017336	0.048060	0.089255
1Q Nov 2021	0.114946	0.578093	0.027826	0.240397	0.017358	0.069762	0.334870
2Q Nov 2021	0.170531	0.344417	0.110641	0.359548	0.016567	0.043323	-0.016516
1Q Dic 2021	0.435250	-0.335236	0.237566	-0.131718	0.017786	0.179898	-0.213225
2Q Dic 2021	0.148149	-0.137219	0.137345	-0.111380	0.010636	0.000168	-0.031197
1Q Ene 2022	0.254982	0.133459	0.248352	0.061667	0.019677	-0.024753	0.039405
2Q Ene 2022	0.258028	0.135948	0.153803	0.019336	0.026158	0.065135	0.103553
1Q Feb 2022	0.316940	0.104959	0.225607	-0.010809	0.022416	0.058666	0.097125
2Q Feb 2022	0.237724	0.180288	0.165569	0.118023	0.015909	0.056241	0.052925
1Q Mar 2022	0.264134	0.218891	0.194542	0.026653	0.016868	0.052706	0.184599
2Q Mar 2022	0.297257	0.294270	0.185924	0.106053	0.015243	0.096091	0.186753
1Q Abr 2022	0.328557	-0.171230	0.218655	0.074054	0.013765	0.096137	-0.249109
2Q Abr 2022	0.198589	-0.022430	0.198387	-0.018039	0.018106	-0.017905	-0.003158
1Q May 2022	0.229041	-0.293399	0.142725	0.053182	0.019947	0.066186	-0.350770
2Q May 2022	0.218340	0.086418	0.166899	0.087695	0.024807	0.022869	-0.003415
1Q Jun 2022	0.370126	0.123063	0.257488	0.097361	0.022732	0.088974	0.017234
2Q Jun 2022	0.191031	0.204004	0.128249	0.118075	0.018069	0.044499	0.038543
1Q Jul 2022	0.255485	0.172910	0.152489	0.141217	0.017037	0.085320	0.026932
2Q Jul 2022	0.225740	0.001098	0.151651	-0.022395	0.022819	0.048124	0.010508
1Q Ago 2022	0.363930	0.055210	0.290454	0.051708	0.019884	0.020904	-0.000346
2Q Ago 2022	0.236701	0.085439	0.189460	0.144813	0.018466	0.022398	-0.070015
1Q Sep 2022	0.326624	0.081290	0.204818	0.100825	0.013196	0.041809	-0.023586
2Q Sep 2022	0.111902	-0.009138	0.162237	0.005822	0.022652	-0.072986	-0.021661
1Q Oct 2022	0.317533	0.120689	0.215887	-0.054516	0.011553	0.090092	0.173299
2Q Oct 2022	0.190766	-0.039546	0.120216	-0.018918	0.014717	0.055833	-0.026743
1Q Nov 2022	0.257776	0.299182	0.142611	-0.043210	0.011577	0.103588	0.335816
2Q Nov 2022	-0.029933	-0.083942	-0.051705	0.008246	0.018402	0.003370	-0.093928
1Q Dic 2022	0.426259	-0.035832	0.254725	0.038906	0.020470	0.151064	-0.078866
2Q Dic 2022	0.142703	-0.046636	0.148563	0.029344	0.017464	-0.023325	-0.082134
1Q Ene 2023	0.329570	0.127012	0.227188	0.040467	0.041288	0.049477	0.051900
2Q Ene 2023	0.267302	0.078639	0.141062	0.007306	0.029450	0.085463	0.049244
1Q Feb 2023	0.264100	0.038239	0.163942	-0.027655	0.020767	0.059133	0.049338
2Q Feb 2023	0.118926	0.044508	0.065722	0.031921	0.024936	0.025079	-0.008617
1Q Mar 2023	0.225520	-0.077497	0.105808	-0.053415	0.020681	0.099032	-0.040011
2Q Mar 2023	0.215080	-0.139649	0.089980	-0.077150	0.024305	0.100795	-0.066764
1Q Abr 2023	0.138658	-0.301204	0.128842	-0.007682	0.024236	-0.014420	-0.307631
2Q Abr 2023	0.088903	0.121159	0.061649	0.092505	0.020635	0.006619	0.020443
1Q May 2023	0.136383	-0.454047	0.071935	-0.059461	0.021819	0.041480	-0.402840
2Q May 2023	0.126840	-0.135777	0.083996	-0.050553	0.018794	0.022074	-0.085971
1Q Jun 2023	0.086421	-0.062396	0.034075	-0.027566	0.022457	0.029722	-0.039505

2Q Jun 2023	0.156256	0.007825	0.081254	0.051859	0.019425	0.054202	-0.045364
-------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------

* Las medidas de incidencia están en puntos porcentuales. Datos tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56_2018&idrt=137&opc=t

Tabla D.3: Datos mensuales de México sobre la contribución porcentual del INPC y sus componentes sobre la inflación general, 2013-2022

Año/Mes	INPC*	Importaciones (FOB)**	Exportaciones (FOB)**	Tasa de Desempleo***
2012/01	78.343049	27548.995	27281.577	4.652456
2012/02	78.502314	29517.163	30015.345	5.331331
2012/03	78.547389	30839.530	32312.046	5.100135
2012/04	78.300980	30481.741	30900.421	4.877914
2012/05	78.053819	32801.858	33135.477	4.872353
2012/06	78.413667	29657.623	30272.703	4.850871
2012/07	78.853897	30704.050	30294.406	4.753963
2012/08	79.090540	32641.949	31660.136	4.953229
2012/09	79.439119	29069.597	29279.642	4.699963
2012/10	79.841036	35564.836	33939.839	4.896369
2012/11	80.383437	32716.357	31468.922	5.216650
2012/12	80.568243	29207.860	30209.376	4.934098
2013/01	80.892782	30152.955	27298.537	5.144275
2013/02	81.290943	29066.034	29091.473	4.872142
2013/03	81.887433	30127.821	31838.072	5.044325
2013/04	81.941523	34087.541	32729.138	5.109917
2013/05	81.668820	33305.574	32845.282	4.966475
2013/06	81.619238	30168.158	31088.267	5.081550
2013/07	81.592193	33651.211	32252.174	4.918812
2013/08	81.824328	32902.205	32677.304	4.837648
2013/09	82.132340	30726.402	31377.763	5.004361
2013/10	82.522988	35217.067	35082.425	4.918111
2013/11	83.292265	31363.977	31673.409	4.622533
2013/12	83.770058	30441.223	32061.207	4.739155
2014/01	84.519052	30233.531	27052.385	4.895053
2014/02	84.733157	29543.472	30461.527	4.768073
2014/03	84.965292	32287.360	33245.192	5.288706
2014/04	84.806779	33561.872	34059.950	4.910947
2014/05	84.535579	34251.128	34373.788	4.959952
2014/06	84.682072	33050.550	33436.311	4.835280
2014/07	84.914959	34690.783	33687.101	5.229521
2014/08	85.219965	34483.635	33286.822	4.850225
2014/09	85.596340	33667.444	34147.311	4.795492
2014/10	86.069626	36945.105	36879.601	4.657314
2014/11	86.763778	33407.006	32192.734	4.665628
2014/12	87.188984	33862.450	34090.910	4.142405
2015/01	87.110103	29817.479	26553.377	4.378388
2015/02	87.275377	29125.930	29731.307	4.440329
2015/03	87.630717	33666.222	34177.473	4.256160
2015/04	87.403840	33041.330	32971.490	4.337561
2015/05	86.967366	32359.172	31244.705	4.425659
2015/06	87.113108	34590.363	33761.831	4.416656
2015/07	87.240820	35073.020	32694.944	4.494111
2015/08	87.424875	33831.912	31009.789	4.388654
2015/09	87.752419	33663.061	32187.182	4.195074
2015/10	88.203919	35600.923	34100.594	4.436704
2015/11	88.685468	32595.256	30981.322	4.067927
2015/12	89.046818	31889.184	31142.075	4.294966
2016/01	89.386381	27979.044	24687.865	4.160010
2016/02	89.777781	29751.151	28967.000	4.268925
2016/03	89.910001	31408.485	31493.610	4.135232
2016/04	89.625278	32497.219	30387.276	3.810670
2016/05	89.225615	31854.210	31410.821	3.992825
2016/06	89.324028	32467.942	31949.905	3.920338
2016/07	89.556914	31599.262	29773.010	3.809894
2016/08	89.809333	34332.060	32446.304	3.761704
2016/09	90.357744	34229.627	32701.172	3.842967
2016/10	90.906154	33495.421	32596.379	3.580676
2016/11	91.616834	34267.067	34344.613	3.594539
2016/12	92.039035	33206.048	33195.659	3.624965
2017/01	93.603882	30788.434	27316.175	3.530855
2017/02	94.144780	30586.757	31345.973	3.453581
2017/03	94.722489	36110.316	36048.426	3.540559
2017/04	94.838933	30869.680	31768.954	3.467456
2017/05	94.725494	36546.951	35342.342	3.543744
2017/06	94.963640	35548.917	35547.887	3.281095
2017/07	95.322736	33687.183	32155.156	3.255231
2017/08	95.793768	38513.130	35926.907	3.331458
2017/09	96.093515	35706.801	33771.318	3.339581
2017/10	96.698269	38969.493	36715.630	3.442944
2017/11	97.695174	37082.913	37507.573	3.503509
2017/12	98.272883	35984.012	35986.234	3.352211
2018/01	98.795000	35140.478	30718.527	3.287718
2018/02	99.171374	34149.860	35093.793	3.286959

2018/03	99.492157	37734.615	39484.266	3.273589
2018/04	99.154847	37471.965	37181.694	3.381560
2018/05	98.994080	40766.241	39213.912	3.240954
2018/06	99.376465	38383.337	37483.508	3.366752
2018/07	99.909099	39612.118	36742.212	3.295254
2018/08	100.492000	42129.496	39545.208	3.269958
2018/09	100.917000	38001.683	37700.602	3.332216
2018/10	101.440000	44290.891	41356.070	3.203595
2018/11	102.303000	40928.716	38595.389	3.347126
2018/12	103.020000	35692.967	37597.547	3.568626
2019/01	103.108000	37262.788	32637.220	3.465048
2019/02	103.079000	35073.897	36437.807	3.409518
2019/03	103.476000	37530.886	39018.828	3.629953
2019/04	103.531000	38076.401	39586.470	3.488390
2019/05	103.233000	40792.860	41749.996	3.549229
2019/06	103.299000	35382.744	37924.986	3.553120
2019/07	103.687000	40406.335	39115.793	3.526147
2019/08	103.670000	39648.433	40051.141	3.482862
2019/09	103.942000	37332.184	37180.583	3.519028
2019/10	104.503000	41449.532	40762.123	3.617987
2019/11	105.346000	36697.660	37484.491	3.539373
2019/12	105.934000	35587.869	38654.441	3.087803
2020/01	106.447000	36062.000	33580.843	3.661282
2020/02	106.889000	33715.379	36433.717	3.652479
2020/03	106.838000	34995.932	38310.269	3.310319
2020/04	105.755000	26457.052	23222.658	4.680252
2020/05	106.162000	21578.337	18116.042	4.261330
2020/06	106.743000	27512.168	33047.725	5.487693
2020/07	107.444000	29844.448	35499.490	5.000949
2020/08	107.867000	30845.723	37001.121	4.904372
2020/09	108.114000	34142.602	38539.740	4.790607
2020/10	108.774000	35694.810	41950.815	4.583938
2020/11	108.856000	35257.525	38313.680	4.531450
2020/12	109.271000	36879.948	43154.635	4.045227
2021/01	110.210000	33910.702	32716.018	4.549097
2021/02	110.907000	33486.199	36213.207	4.534263
2021/03	111.824000	45974.454	43029.980	4.461093
2021/04	112.190000	39259.650	40944.531	4.667942
2021/05	112.419000	40458.684	40845.600	4.051187
2021/06	113.018000	41909.429	42619.373	4.028143
2021/07	113.682000	44950.628	40952.956	4.060451
2021/08	113.899000	44215.640	40471.381	4.006320
2021/09	114.601000	44078.456	41754.363	3.914113
2021/10	115.561000	44658.126	41858.778	3.828215
2021/11	116.884000	45698.670	45676.662	3.837585
2021/12	117.308000	47102.458	47866.480	3.767730
2022/01	118.002000	40185.365	33923.041	3.585565
2022/02	118.981000	44953.077	46288.481	3.852951
2022/03	120.159000	51801.683	51948.842	3.447514
2022/04	120.809000	49363.532	47580.499	3.054394
2022/05	121.022000	52220.452	49964.769	3.301356
2022/06	122.044000	55191.302	51220.139	3.369811
2022/07	122.948000	52463.962	46216.526	3.159747
2022/08	123.803000	56168.196	50464.229	3.257713
2022/09	124.571000	53233.431	52323.438	3.123571
2022/10	125.276000	51287.150	49199.060	3.184354
2022/11	125.997000	49407.417	49284.376	2.984986
2022/12	126.478000	48339.024	49321.996	2.975359
2023/01	127.336000	46715.744	42609.734	2.908615
2023/02	128.046000	46778.476	44889.815	2.798632
2023/03	128.389000	52388.861	53584.091	2.791485
2023/04	128.363000	47732.749	46224.226	2.848430
2023/05	128.084000	52934.500	52860.415	2.948670
2023/06	128.214000	51762.018	51800.210	2.670944
2023/07	128.832000	48431.638	47550.443	2.872213

* Datos tomados del Instituto Nacional de Estadística y Geografía:
https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56_2018&idrt=137&opc=t

** Millones de dólares.

Bibliografía

- ANTEZANA, J. Y STOJANOFF, D. (2009). *Cursos y Seminarios de Matemática. Análisis Matricial*. Buenos Aires, Argentina: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, fascículo 3, serie b ed. URL <http://cms.dm.uba.ar/depto/public/fasc3.pdf>.
- BISHOP, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.
- BLANCHET, G. Y CHARBIT, M. (2006). *Signal Processing for Computer Vision*. ISTE Ltd. and John Wiley and Sons, Inc.
- CASTI, J. (1987). *Linear Dynamical Systems*. Orlando, United States: Academic Press, Inc.
- ECKART, C. Y YOUNG, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika* **1**(3), 211–218.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. Y EMAMI-NAEINI, A. (2020). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson.
- FRIEDLAND, B. (1986). *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods*. New York, NY: McGraw-Hill.
- GOLUB, G. H., HOFFMAN, A. Y STEWART, G. W. (1987). A Generalization of the Eckart-Young-Mirsky Matrix Approximation Theorem. *Q'ESTIIÓ* **88–89**(C), 317–327.
- GONZÁLEZ, C. J. Y VALDERRAMA, B. M. (1998). Un procedimiento para obtener clusters utilizando la D.V.S de una matriz. Comparaciones con el Biplot y con el modelo Q-Factorial. *Q'ESTIIÓ* **22**(1), 39–68.
- HOFFMAN, K. Y KUNZE, R. (1971). *Linear Algebra*. United States of America: Prentice-Hall, 2da ed.
- KERANEN, H. M. (2018). *Dynamic Time Warping: Theory and Practice*. IOP Publishing.
- LAY, D. C., LAY, S. R. Y McDONALD, J. J. (2016). *Linear Algebra and its Applications*. Pearson, 5 ed.
- MIRSKY, L. (1960). Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *The Quarterly Journal of Mathematics* **11**(1), 50–59.
- NOCEDAL, J. Y WRIGHT, S. J. (2006). *Numerical Optimization*. Springer.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. Y FLANNERY, B. P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

RANGEL G., A. (2019). *La teoría de la realización como método de proyección de los coeficientes técnicos de la matriz insumo-producto: desarrollo teórico y un ejemplo de implementación para el caso de México, 1993-2017*. Tesis de Maestría, Posgrado de la Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México.

ROSEN BROCK, H. H. (1970). *State-Space and Multivariable Theory*. London: Thomas Nelson and Sons, 1st ed.

SHUMWAY, R. H. Y STOFFER, D. S. (2011). *Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples*. Springer.