



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE POSGRADO EN ECONOMÍA  
FACULTAD DE ECONOMÍA • DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**La teoría de la realización como herramienta de determinación y control del cambio estructural**

**TESIS**  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**DOCTOR EN ECONOMÍA**  
PRESENTA  
**A R M A N D O   R A N G E L   G A L Á N**

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. MARTÍN CARLOS PUCHET ANYUL  
FACULTAD DE ECONOMÍA, UNAM

COMITÉ TUTOR:  
DR. HÉCTOR BENÍTEZ PERÉZ  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS, UNAM

DR. JOSÉ MANUEL MÁRQUEZ ESTRADA  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS, UNAM

DR. GUSTAVO CARREÓN VÁZQUEZ  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ECONÓMICAS, UNAM



# Índice general

<b>Índice</b>	<b>iv</b>
<b>Símbolos Matemáticos</b>	<b>v</b>
<b>1. Kalman y la Teoría de Realización</b>	<b>2</b>
1.1. La visión de Kalman: contraste entre TR y Econometría Clásica . . . . .	2
1.2. Desemejanzas entre TR y Econometría Clásica: exposición bajo una implementación . . . . .	3
<b>2. Realización de sistemas lineales, invariantes y finitos</b>	<b>4</b>
2.1. Sistema macroeconómico de determinación del ingreso y la teoría de la realización . . . . .	5
2.2. Construcción de la realización . . . . .	10
2.3. SVD en la TR: dimensionalidad y aleatoriedad . . . . .	14
2.4. Acercamiento a los conceptos de estructura, cambio estructural y agrupamiento en la TR . . . . .	16
2.5. Comentarios finales sobre el sistema económico de base contable . . . . .	17
<b>3. Profundizando en la TR: construcción, dinámica y cambio estructural</b>	<b>21</b>
3.1. Caminata del sistema en la realización . . . . .	22
3.2. Sistema, DE y realización . . . . .	26
3.3. Conservación estructural de la Matriz de Hankel en la realización . . . . .	29
3.4. Algoritmo de Factorización . . . . .	34
3.5. Realización tiempo variante por acortamiento de series . . . . .	43
3.6. Análisis de la estructura del sistema subyacente . . . . .	46
3.7. Determinación del cambio y control estructural . . . . .	48
<b>4. Implementación de la TR a sistemas económicos de entrada-salida</b>	<b>50</b>
4.1. Modelo entrada-salida sobre las incidencias de las componentes de la inflación de México . . . . .	51
4.1.1. Realizaciones bajo el AF . . . . .	53
4.1.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema de las incidencias de inflación . . . . .	56
4.1.3. Modelo de incidencias de la inflación: algunas consideraciones sobre el proceso de factorización . . . . .	57
4.2. Series de tiempo entrelazadas: balanza comercial, índice nacional de precios al consumidor y tasa de desocupación . . . . .	59
4.2.1. Realizaciones bajo el AF . . . . .	62
4.2.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema entre <i>BC</i> , <i>INPC</i> y <i>TD</i> con respecto a sus rezagos . . . . .	66

4.3. Identificación del cambio estructural y su control: modelos de incidencia y de BP, INPC y TD con respecto a sus rezagos . . . . .	67
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>A. Teoría de la Realización</b>	<b>70</b>
<b>B. Álgebra Lineal</b>	<b>88</b>
<b>C. Algoritmos</b>	<b>99</b>
<b>D. Datos empleados</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>124</b>

# Símbolos Matemáticos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente
$\mathbb{Z}^+, \mathbb{R}^+$	enteros positivos y reales positivos
$\mathbb{N}_n, \mathbb{Z}_n^+$	primeros $n$ naturales y primeros $n$ enteros positivos
$\mathbb{Z}^{+0}$	enteros no negativos
$\mathbb{N}_{r:s}$	números naturales entre $r$ y $s$ , si $s = \infty$ son los naturales mayores a $r$ .
$\in, \forall, \exists, \exists!$	pertenece a, para todo, existe algún, existe un único
$\subseteq, \supseteq, \subsetneq, \supsetneq$	subconjunto de, superconjunto de, subconjunto propio de y superconjunto propio de
$A/B, A-B$	diferencia de conjuntos
$A \times B$	producto cartesiano de conjuntos
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espacios vectoriales de $n$ -adas de números reales y complejos, respectivamente
$\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$ con entradas reales
$\mathcal{M}_{\mu \times \eta}(\mathbb{F})$	espacio vectorial de las matrices $\mu \times \eta$ sobre $\mathbb{F}$
$\text{It}_n$	espacio de las matrices triangulares inferiores en $\mathbb{R}$
$\dim(V)$	dimensión del espacio vectorial $V$
$\text{rango}(A)$	rango de la matriz $A$
$\underline{u}$	vector (letra minúscula en negrita)
$A$	matriz (letra mayúscula en itálica)
$\mathbf{u}', A'$	transpuesta de un vector o matriz, respectivamente (apóstrofe superior derecho)
$\bar{a}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{A}$	conjugación compleja de un número, vector o matriz, respectivamente (barra superior)
$\mathbf{u}^*, A^*$	vector o matriz conjugada: $\mathbf{u}^* = \bar{\mathbf{u}'}, A^* = \bar{A}'$
$\mathbf{0}, \mathbf{0}_{m,n}$	vector nulo y matriz nula del espacio $\mathcal{M}_{m \times n}$
$A^{-1}, A^t, A^{-t}$	inversa, potencia $t$ -ésima e inversa de la potencia $t$ -ésima de la matriz $A$ , respectivamente.
$I_n$	matriz identidad en el espacio $\mathcal{M}_{n \times n}$
$\det(A)$	determinante de la matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$
$\mathbf{u}(k), A(k)$	vector y matriz parametrizados con parámetro $k$
$A_{i,j}, A_{:,j}, A_{i,:}$	elemento $i, j$ , columna $j$ -ésima, fila $i$ -ésima de la matriz $A$
$[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}}$	el vector coordenado del vector $\mathbf{u}$ en base $\mathcal{B}$
$A_{r_1:r_2, s_1:s_2}$	columna $i$ -ésima de la matriz $A$
$A_{:,s_1:s_2}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , tomando $A_{i,j}$ , $i \in \mathbb{N}_{r_1:r_2}$ y $j \in \mathbb{N}_{s_1:s_2}$
$A_{r_1:r_2,:}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , tomando $A_{i,j}$ , $i \in \mathbb{N}_m$ y $j \in \mathbb{N}_{s_1:s_2}$
$\{l(k)\}_{k \in \mathbb{N}}, \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$	submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , tomando $A_{i,j}$ , $i \in \mathbb{N}_{r_1:r_2}$ y $j \in \mathbb{N}_n$
$\{l(k)\}_{k \in \mathbb{N}_n}, \mathcal{L}_{\mathbb{N}_n}$	sucesión infinita de matrices
$\{\mathcal{L}_{\mathbb{N}}\}, \{\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}\}$	sucesión parcial con $n$ matrices
$\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})$	conjunto de elementos de $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}$ , respectivamente
$\mathcal{H}_{m,n}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k})$	matriz de Hankel de $m$ por $n$ submatrices de la sucesión $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$
$\delta(k)$	matriz de Hankel de $m$ por $n$ submatrices de la sucesión parcial $\mathcal{L}_{\mathbb{N}_k}$
	delta de Kronecker

$\mathcal{H}_{r,s}$	MH de los elementos $1, \dots, s + r - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r,s_1:s_2}$	MH de los elementos $s_1, \dots, r + s_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r_1:r_2,s}$	MH de los elementos $r_1, \dots, s + r_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathcal{H}_{r_1:r_2,s_1:s_2}$	MH de los elementos $r_1 + s_1 - 1, \dots, r_2 + s_2 - 1$ de una sucesión dada.
$\mathbb{F}^{a \times b}$	espacio de matrices de $a \times b$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ .

# Introducción

El libro tiene como objetivo principal abordar el tema de la determinación y control del cambio estructural en sistemas económicos, utilizando la herramienta de la realización de espacio de estado. A lo largo de sus cuatro capítulos, se busca que el lector pueda sumergirse en un análisis teórico y práctico, explorando las diferencias entre la realización y la modelación econométrica tradicional, y proporcionando una base matemática y ejemplos concretos de su aplicación.

En su primer capítulo, el autor establece las bases conceptuales y teóricas al comparar las ideas del renombrado estadístico y matemático Kalman con las perspectivas de los economistas clásicos. Esta comparación revela las ventajas y desafíos inherentes a la realización como enfoque para entender los sistemas económicos. En particular, se explora en detalle las diferencias teóricas y prácticas que subyacen entre el método de la realización y la econometría clásica. A través de una cuidadosa modelación, expondremos las raíces de estas dos perspectivas y cómo influyen en la manera en que abordamos los problemas económicos y financieros.

El segundo capítulo se adentra en la exposición de conceptos clave de la realización, brindando la base matemática requerida para ilustrar su aplicación. Además, se presenta un ejemplo empleado en una investigación precedente, lo que permite a los lectores comprender de manera más concreta cómo se aplica esta técnica en la práctica. A través de sus resultados se desvelara la riqueza de esta teoría y cómo puede ser utilizada para analizar fenómenos económicos en la práctica.

El tercer capítulo profundiza en aspectos más avanzados de la realización que influyen en la estructura y dinámica de los sistemas económicos. Estos elementos incluyen la estructura de Hankel, el algoritmo de factorización y la incorporación de la varianza temporal. Además, se presentaran propuestas para mejorarlo, pero aunque no se abordan en detalle debido a su complejidad y el tiempo que demandan, si abren sendas de investigación para aquellos que deseen explorar más a fondo estos conceptos y su impacto en la economía. propone caminos de investigación para mejorar estos aspectos, lo que sugiere una dirección prometedora para futuros estudios.

Finalmente, el cuarto capítulo lleva a cabo la aplicación práctica de la realización a dos modelos económicos nuevos. Además de analizar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad de estos, se destaca la aplicación de la propuesta para determinar y controlar el cambio estructural en sistemas económicos. Este capítulo es crucial, ya que pone en práctica todo el conocimiento adquirido en los capítulos anteriores y muestra cómo la realización puede ser una herramienta poderosa en la toma de decisiones económicas y la gestión de políticas.

A través de este libro, se espera proporcionar a los lectores una comprensión lo suficientemente profunda de la diferencia entre la realización y la econometría, y como la primera puede ayudar a entender el comportamiento de los complejos fenómenos económicos.

# Capítulo 1

## Kalman y la Teoría de Realización

### 1.1. La visión de Kalman: contraste entre TR y Econometría Clásica

Rudolf Emil Kalman fue un matemático y estadístico húngaro-americano, reconocido por sus importantes contribuciones en la teoría de sistemas dinámicos y en el desarrollo de los filtros de Kalman, una técnica ampliamente utilizada en el procesamiento de señales y en la navegación.

En su artículo “A Critique of the Mathematical Models in Economic Theory”, publicado en 1960, Kalman realizó una crítica a la econometría, una disciplina que aplica técnicas estadísticas y matemáticas para analizar datos económicos y para construir modelos econométricos. Argumentó que ella se basaba en modelos matemáticos que eran demasiado simplificados y que no podían representar adecuadamente la complejidad del mundo real. Según Kalman, los modelos econométricos eran demasiado teóricos y no tenían en cuenta las variables ocultas, las interacciones complejas entre variables, la incertidumbre y las fluctuaciones aleatorias de los datos.

Kalman también criticó la falta de rigor matemático en la econometría, y señaló que los modelos econométricos a menudo se construían sin un análisis cuidadoso de la validez empírica y sin una verificación empírica adecuada. En su crítica, Kalman propuso un enfoque diferente para el análisis de los datos económicos, basado en la teoría de sistemas dinámicos y en los filtros de Kalman. Según Kalman, este enfoque permitiría modelar de manera más adecuada la complejidad del mundo real, y tendría en cuenta las variables ocultas, las interacciones complejas entre variables, la incertidumbre y las fluctuaciones aleatorias de los datos.

La crítica de Kalman a la econometría se centró en la falta de consideración de la estructura subyacente de los sistemas económicos y en la excesiva dependencia de las técnicas econométricas en modelos matemáticos complejos y datos históricos. Para ilustrar esto, podemos considerar un ejemplo de ecuaciones estructurales. Supongamos que estamos interesados en modelar el efecto del gasto público en el crecimiento económico. Podríamos escribir un modelo estructural como:

$$G = f(I, G^*, \pi, E)$$

$$C = g(G, G^*, \pi, E)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones;  $G$  es gasto público;  $I$  impuestos;  $G^*$  gasto privado;  $\pi$  productividad;  $E$  choques exógenos; y  $C$  crecimiento económico.

En este modelo, estamos explícitamente indicando la relación entre el gasto público y el crecimiento económico como una función de otras variables estructurales como los impuestos, el gasto privado y la productividad, y también consideramos la presencia de choques exógenos que afectan ambos. Pero este actuar fue lo que Kalman no aceptaba. Mencionó que en la econometría clásica no se prestaba suficiente atención a esta estructura subyacente de los sistemas económicos y, en su lugar, se dependía demasiado de la técnica econométrica. Es decir, simplemente se intentaba ajustar los datos históricos a modelos matemáticos complejos. En su opinión, esto puede conducir a modelos sobredeterminados e inestables que no reflejan la verdadera complejidad del mundo real.

Por lo tanto, Kalman abogó por una mayor atención a la modelización de la estructura subyacente de los sistemas económicos y por el uso de técnicas más avanzadas como el análisis de sistemas dinámicos para capturar mejor la complejidad de las relaciones económicas, cómo lo sería la Teoría de la Realización que se trata en este documento.

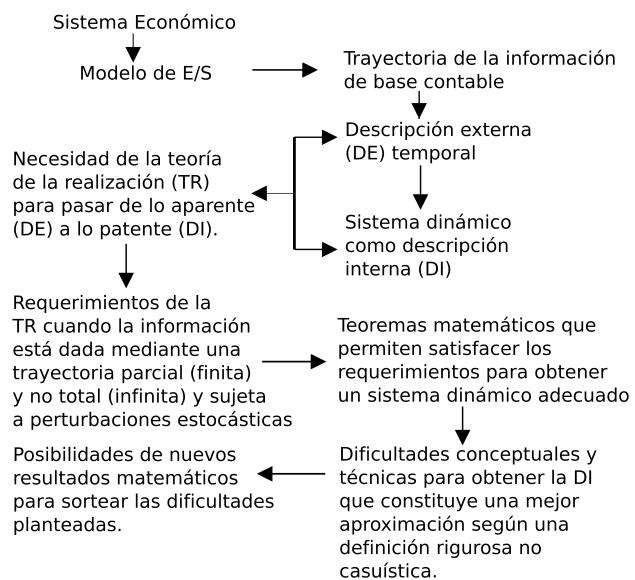
## **1.2. Desemejanzas entre TR y Econometría Clásica: exposición bajo una implementación**

## Capítulo 2

# Realización de sistemas lineales, invariantes y finitos

En el presente capítulo se realiza una primera inmersión en la aplicación de la Teoría de la Realización TR en la economía. Para esto aprovecharemos la exposición hecha en Rangel G. (2019), que se puede esquematizar en la Figura 2.1. Con ello se espera dar algunas características del tipo de modelo económico a emplear y los pasos para construir su realización. Se muestra cómo las trayectorias de ciertas matrices de base contable se consideran la manifestación exterior, dinámica y condensada de la operación de un sistema económico subyacente; el cual será concebido lineal y de dimensión finita (completamente representado con una cantidad finita de variables). Además, se hace patente la forma en que podemos reconstruir dicho sistema y su dinámica usando las matrices de base contable de por medio, ya sea que posean aleatoriedad o no. Así mismo, se revisa una propuesta de cambio estructural desde la TR, empleando la reconstrucción del sistema subyacente que se realizó, y se dan algunas observaciones sobre sus alcances.

Figura 2.1: Flujo temático en Rangel G. (2019)



## 2.1. Sistema macroeconómico de determinación del ingreso y la teoría de la realización

El modelo económico que se emplea en Rangel G. (2019) es de base contable y extremadamente simple, pero tiene algunas características relevantes desde el punto de vista conjunto que representan los adjetivos dinámico, estructural y complejo.

Las relaciones del modelo son aquellas que sostienen, agrupados en dos sectores, los agentes residentes **r** (o internos) y los agentes no residentes **nr** (o externos). Estas relaciones se manifiestan en flujos corrientes, medidos en precios por cantidades y durante cada trimestre. Las transacciones entre ambos sectores se compilan en el siguiente cuadro que satisface los criterios contables del fluir de fondos, del primer principio de Say y de la ley de Walras.

Figura 2.2: Criterios contables de flujo de fondos

	<b>r</b>	<b>nr</b>	Ac.	Total
<b>r</b>	$C_t$	$X_t$	$F_t$	$Y_t$
<b>nr</b>	$MC_t$	0	$MK_t$	$M_t$
Ah.	$Sr_t$	$Sn_t$	0	$S_t$
	$Y_t$	$M_t$	$I_t$	

donde  $C_t$  es el consumo de mercancías intermedias;  $X_t$  exportaciones;  $F_t$  formación bruta de capital;  $Y_t$  ingreso interno bruto;  $MC_t$  consumo intermedio y final de mercancías importadas;  $MK_t$  formación bruta de capital de mercancías importadas;  $M_t$  importaciones,  $Sr_t$  ahorro de los residentes;  $Sn_t$  ahorro de los no residentes;  $S_t$  ahorro; e  $I_t$  inversión; el subíndice  $t$  indica el tiempo en que fue hecha la medición respectiva.

Las dos primeras filas del cuadro identifican a las identidades contables:

$$\begin{aligned} Y_t &\equiv C_t + X_t + F_t \\ M_t &\equiv MC_t + MK_t \end{aligned}$$

que originan la identidad macroeconómica

$$S_t \equiv I_t$$

con la cuál es posible plantear la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \quad (1)$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & X_t \\ MC_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

Así, a partir de (1), se construye el siguiente modelo entrada-salida

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$$

Es más, podemos expresar esta igualdad como

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \quad (2)$$

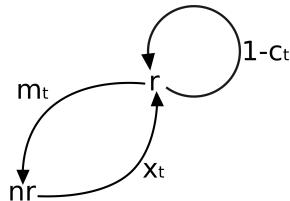
donde

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix} = 1 - c_t - m_t x_t$$

Este modelo cuenta con ciertas características sistémicas relevantes que se listan a continuación:

1. Interconecta en cada trimestre  $t$  a dos sectores **r** y **nr**, de forma tal que lo que se le vende a **nr** depende de lo que **nr** le compra a **r** y vice-versa;
2. La trayectoria de tres razones clave de las relaciones económicas internas y con el resto del mundo (o externas), son observables:  $c_t$ , la propensión marginal a consumir mercancías de consumo de producción interna;  $m_t$ , la propensión a importar mercancías para producir otras mercancías y para el consumo final; y  $x_t$  la razón del balance en cuenta corriente entre el ingreso por exportaciones y el gasto en importaciones;
3. Relaciona los flujos de entrada (o exógenos) de acumulación de capital  $\begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$  con los de salida (o endógenos) mediante una descripción observable externa basada en  $\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$ , de periodicidad trimestral;
4. Goza de una correspondencia entre el grafo del modelo,

Figura 2.3: Grafo de intercambios entre residentes (r) y no residentes (nr)



y la matriz

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

que hace pensar que la retroalimentación entre **r** y **nr** hace emerger una representación que está determinada por una dinámica lineal del sistema subyacente.

El modelo (2) al ser de base contable, enlaza las variables de entrada  $F_t$  y  $MK_t$  con las de salida  $Y_t$  y  $M_t$  en cada tiempo, sin hacer suposiciones sobre la relación entre ellas, ni sobre su forma o duración. La causa es que la conexión contable subyacente es estable. Lo que falta en un lugar se acumula en otros sitios bajo un prorratoe de configuración fija. Versado de otra manera: *el principio contable de partida doble y la estructura de conexiones entre las diversas componentes contables son fijas e independientes a la forma en que sean reconfiguradas matemáticamente las identidades contables originales.*

La partida doble y las conexiones contables también permiten que el modelo (2) cuente con toda la información disponible sobre las relaciones entre los elementos que intervienen en él. Así mismo, establecen la noción de sistema en él. La matriz del modelo refleja una finalidad: transformar entradas en salidas. Esto lo realiza bajo el principio de partida doble y las conexiones fijadas entre los componentes contables, lo que brinda la noción de elementos interactuando para conseguir la finalidad antedicha.

Las características de los modelos contables como el (2) son importantes para la TR. Como se discutirá meticulosamente en el capítulo 2, se encuentran conectadas con la búsqueda de la identificación de invariantes en sistemas. Así mismo, serán el punto de partida para mostrar la debilidad de la modelación econométrica. Por el momento únicamente se mostrarán para enfatizar su existencia, que el lector comience a pensar en términos de sistemas y que pueda comenzar a realizar un análisis crítico de la modelación econométrica, deslindando sus bordes de actuación y los riesgos de no identificarlos.

Una vez el modelo económico de base contable es visto como un sistema, podemos identificar que se encuentra implícito a la sucesión de grafos, o de otra manera, a la sucesión de sus matrices, pero antes de ello vamos a formalizar algunas ideas. En lo siguiente haremos uso de los planteamientos hechos en Casti (1987).

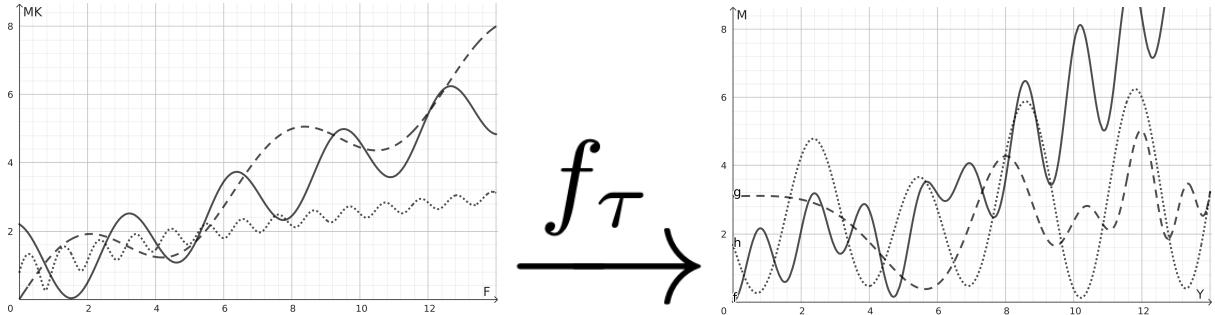
El sistema económico de base contable inicialmente lo podemos representar de forma resumida como algunos de los elementos de la familia de funciones  $\{f_\alpha : T \times \Omega \rightarrow \Gamma | \alpha \in A\}$  con  $A$  un conjunto índice. A los  $f_\alpha$  que representen al sistema los identifico como su **Descripción Externa** (DE) del sistema, y a cada uno en individual se le nombra como **función de entrada-salida** Casti (1987).

Además, en la definición de  $f_\alpha$  existe una función  $\mu$  que toma el índice  $\alpha$  para generar un tiempo  $\tau$  tal que  $f_\alpha(\cdot, u)$  sólo estará definido para  $t \geq \tau = \mu/\alpha$ . Así mismo,  $\Omega$  representa el conjunto de funciones de entrada  $u : T \rightarrow \{(F \ MK)^T\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Por su parte,  $\Gamma$  es el conjunto de funciones de salida  $y : T \rightarrow (Y \ M)^T \subseteq \mathbb{R}^2$ . Por todo lo esclarecido, de forma inicial tenemos que el sistema puede verse como

$$y = f_\alpha(t, u)$$

es decir, la DE toma dos tiempos:  $\tau = \mu(\alpha)$  y  $t$ , y además una infinidad de entradas  $(F \ MK)^T$ , una por cada elemento de  $T$ , que son representadas por  $u$ , y arroja una infinidad de salidas  $(Y \ M)^T$ , una para cada tiempo en  $T$ , representadas por  $y$ , ver Figura (2.4).

Figura 2.4: Ilustración de  $f_\tau(t, \cdot)$  transformando funciones de entrada (izquierda) a funciones de salida (derecha). Ellas se corresponden según sean continuas, puntuales o segmentadas.



Otra propiedad que  $f_\tau$  debe cumplir es que si  $u_1(t') = u_2(t')$  en un intervalo  $\mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$ ,

es decir, si dos funciones de entrada coinciden en un intervalo, entonces

$$f_\alpha(t, u_1) = f_\alpha(t, u_2), \quad \mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$$

es decir, si dos funciones de entrada coinciden en un segmento, entonces  $f_\alpha(t, \cdot)$ ,  $t > \tau = \mu(\alpha)$ , debe ser indiferenciable para cualquiera de las dos funciones de entrada valuadas en el segmento  $\mu(\alpha) = \tau < t' \leq t$ . Una forma alternativa de ver esto es que si  $f_\alpha(t, u_1)$  genera respuestas diferentes a  $f_\alpha(t, u_2)$ , para el segmento en que coinciden las funciones de entrada, entonces la etiqueta  $\alpha$  debe ser diferente según sea utilice  $u_1$  o  $u_2$ , digamos  $\alpha = \alpha_1$  al tomar  $u_1$  y  $\alpha = \alpha_2$  si tomamos  $u_2$ . Esto implica que la función entrada-salida debe ser etiquetada de manera diferente en cada caso ya que corresponde a dos activaciones diferentes del sistema:  $f_{\tau_1}(t, u_1) = f_\tau(t, u_1) \neq f_\tau(t, u_2) = f_{\tau_2}(t, u_1)$ , con  $\tau_1 \neq \tau_2$ .

Ahora, el modelo (2) solo toma datos trimestrales por lo cual se considera discreto. Además, como tiene matrices mediando las entradas y salidas, al menos en un entorno de las respectivas demandas de cada trimestre,  $f_\alpha(t, \cdot)$  es establecido como lineal. En consecuencia, podemos encontrar matrices  $M_\alpha$  asociadas a  $f_\alpha$ , tales que

$$y = M_\alpha \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

donde  $t$  indica trimestres y no tiempo continuo. Por consiguiente, podemos decir que el sistema económico de base contable es **Lineal y Discreto**.<sup>1</sup> Así mismo, debido a que la transformación sustancial de las relaciones económicas demora en cristalizar, hablaríamos que  $f_\alpha$  no es influida por el tiempo  $t$ ,<sup>2</sup> por consiguiente

$$y = M_\alpha u \tag{3}$$

debido a que  $f_\alpha$  ya no depende de  $t$ , el sistema económico de base contable es **invariante temporal**.<sup>3</sup>

Existen más consideraciones teóricas que se podrían hacer para detallar aún más el nexo entre  $M_\alpha$ , la DE y lo que será la identificación del sistema. Sin embargo, más formalidad podría incapacitar el entendimiento del lector no familiarizado con la matemática de la TR, además de volver más pantanoso el asunto, lo que está fuera del espíritu del capítulo. Por consiguiente, continuaremos desde una perspectiva un tanto más intuitiva aunque con dosis específicas de formalidad.

Es así que concluyo estas líneas formales indicando que las matrices teóricas  $M_\alpha$ , que representan externamente al sistema económico, están asociadas con las 100 matrices empíricas a partir de las formas (2) y (3). Por ello es que, de manera intuitiva, podemos decir que estas 100 matrices empíricas son también concebidas como la DE del sistema.

En otro orden de ideas, pasamos a platicar sobre las descripción interna. Se comienza por decir que el sistema dado por (2), cuenta con muchas variables asociadas a los procesos internos que lleva a cabo para convertir funciones de entrada en funciones de salida. Dentro de estas existe un puñado que lo identifican, las cuales están asociadas a ciertos procesos clave. Ellas pueden resumir

---

<sup>1</sup>Se considera un sistema discreto si tanto entrada como salida se definen únicamente en puntos discretos en el tiempo, como en este caso que fueron en trimestres.

<sup>2</sup>Al menos en un entorno de tiempo que involucra al que se usa en modelo contable.

<sup>3</sup>Un sistema invariante temporal se puede entender como aquel que mantiene su comportamiento a lo largo del tiempo, es decir, si su salida ante una entrada dada es autónoma al momento en que se aplique dicha entrada.

a todas las demás variables involucradas en el resto de procesos del sistema. Conociéndolas es posible saber el valor de las restantes en un tiempo dado. Es más, el sistema puede ser concebido como sinónimo de ellas, a las cuales aludiremos bajo el término de **variables de estado** (VE), o simplemente estados, y al conjunto de todas ellas se le denominará **espacio de estado** del sistema.

No obstante, el sistema económico no abriga la posibilidad de ser identificado de manera directa. No es posible establecer teórica o empíricamente reglas sobre su dinámica interna o, equivalentemente, no es posible determinar las VE ni la dinámica de estas. Lo único con lo que se cuenta es con una **cantidad finita** de “fotografías exteriores”, como mencionamos al final de la parte formal, solo tenemos una DE que condensa dicha operación, que en nuestro son 100 matrices trimestrales definidas como

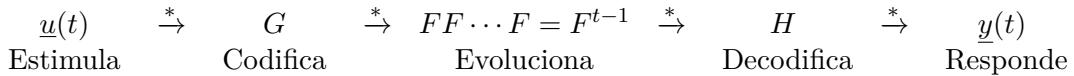
$$\mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

Aquí es donde la TR se vuelve tan relevante. Está concebida para *identificar a dicho sistema económico mediante la DE*. Por consiguiente, su uso es para la especificación del número de variables de estado y su evolución,<sup>4</sup> *no así como mecanismo de ajuste de datos como lo sería la econometría*. Busca simular de mejor manera la DE para hallar al agente generador, al sistema económico que subyace al modelo económico.

La TR identifica al sistema invariante, lineal y discreto que venimos explicado, al construir mediante la DE una terna de matrices ( $F, G, H$ ) independiente del tiempo, que puedan generar la DE, a esta construcción se le denominará **realización** y a la terna **Descripción Interna** (DI) del sistema. La matriz  $F$  es la matriz de espacio de estado e identifica el número y evolución de las VE. Por su parte,  $G$  es una matriz que codifica el estímulo, o entrada, en información legible para el sistema, mientras que  $H$  hace lo opuesto a  $G$ : decodifica el resultado de los procesos internos (y resumidos por  $F$ ), generando una respuesta o salida legibles para el usuario. Así, por un lado tenemos que

$$HF^{t-1}G \approx \mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} \quad t = 1, \dots, 100$$

donde el símbolo de aproximación ( $\approx$ ) se coloca ya que la DI no siempre simulará exactamente la DE.<sup>5</sup> Esto sustenta que la órbita<sup>6</sup> de la matriz de estado  $F$  pre y pos multiplicada por  $H$  y  $G$ , respectivamente, empate con la órbita observada del sistema, la DE. Además, mediante la construcción de la DI del sistema subyacente, en cada tiempo podemos analizar cualquier fase del siguiente esquema



donde  $\underline{u}(t) = (F_t \quad MK_t)^T$  e  $\underline{y}(t) = (Y_t \quad M_t)^T$ . Se está entonces ante la posibilidad de formular más interrogantes sobre el papel del modelo macroeconómico mediante las relaciones estáticas y dinámicas que existen entre  $\mathcal{W}_t$  y  $(F, G, H)$ , respecto a:

<sup>4</sup>La TR también se puede emplear en sistemas identificados, pero estos no son muy usuales en Economía, a diferencia de Física o Ingeniería.

<sup>5</sup>Como se explica adelante, esto es debido a pérdida de información al construirla; por la finitud y calidad de los datos de la DE; o debido a que el sistema no está bien especificado, por ejemplo, puede ser no lineal o variante temporal.

<sup>6</sup>La órbita se puede entender como la sucesión generada por una función  $f$ , un valor  $x_0$  en su dominio y la composición iterada:  $f(x_0) = f \circ^1 (x_0), f(f(x_0)) = f \circ^2 (x_0), \dots, f \circ^n (x_0), \dots$

- i) las conexiones registradas en  $\mathcal{W}_t$ ,
- ii) las estructuras reveladas por  $(F, G, H)$ , y
- iii) los cambios en esas conexiones y los correspondientes invariantes que muestran las matrices de parámetros.

En consecuencia, el cambio estructural está englobado en la construcción de la realización del sistema subyacente, así como la dinámica de ajuste que sigue la interacción interna del sistema ante los efectos instigados por cambios intensionales o shocks imprevistos. Esto se irá desvelando con más detenimiento en los siguientes apartados del trabajo.

## 2.2. Construcción de la realización

Para comprender como construir la DI a través de la DE, inicialmente se explicará como elaborarla cuando los datos son finitos y “bien comportados”, esto último se pormenoriza un poco más adelante.<sup>7</sup>

- Partimos al identificar el tipo de sistema subyacente a modelar. Por ejemplo, en el modelo macroeconómico que tratamos, se asumió un sistema discreto, lineal e invariante. Este debe ser expresado de la siguiente forma

$$\underline{y}_t = \mathcal{W}_t \underline{u}_t \quad t = 1, \dots, p + q - 1 \quad (4)$$

con  $\mathcal{W}_t \in \mathbb{R}^{\eta \times \mu}$  la matriz que condensa y “encubre” los procesos internos del sistema subyacente en el tiempo  $t$ ; transformando el input o multientrada  $\underline{u}_t$  en el output o multisalida  $\underline{y}_t$ ;

- A continuación, con las matrices  $\mathcal{W}_t$   $t = 1, \dots, p + q - 1$ , que forman la DE del sistema subyacente, construimos la **Matriz de Hankel (MH)**

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \dots & \mathcal{W}_q \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \dots & \mathcal{W}_{q+1} \\ \mathcal{W}_3 & \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \dots & \mathcal{W}_{q+2} \\ \boxed{\mathcal{W}_4} & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \mathcal{W}_7 & \dots & \mathcal{W}_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{W}_p & \mathcal{W}_{p+1} & \mathcal{W}_{p+2} & \mathcal{W}_{p+3} & \dots & \mathcal{W}_{p+q-1} \end{pmatrix}$$

Con ésta representación explícita de  $\mathcal{H}_{p,q}$  se puede ver que es de orden  $p\eta \times q\mu$ ;  $p$  y  $q$  son la cantidad de bloques fila y columna de matrices  $\mathcal{W}_s$ , respectivamente; y, además, que su construcción se realiza al colocar el elemento  $\mathcal{W}_s$  en cada posición  $(i, j)$  tal que  $(i + j) - 1 = s$ . Para ejemplificar lo último, observe que para las posiciones (1, 4), (2, 3), (3, 2) y (4, 1) se cumple que  $i + j - 1 = 4$ , es decir,  $(1 + 4) - 1 = (2 + 3) - 1 = (3 + 2) - 1 = (4 + 1) - 1 = 4$ . Así, decimos que el cuarto bloque antidiagonal (en rojo) es homogéneo y está formado por el cuarto elemento de la sucesión,  $\mathcal{W}_4$ . De esto se sigue que el  $k$ -ésimo bloque antidiagonal será homogéneo y estará dado por el  $k$ -ésimo elemento de la sucesión.

<sup>7</sup>Existe otra versión cuando los datos son infinitos y “bien comportados”. Sin embargo, en la aplicación económica los datos no satisfacen ninguna de estas dos condiciones, por ello se restringe el análisis a datos finitos y, eventualmente, a aquellos que no se “comportan bien”.

- c) En este paso se debe elegir una de todas las matrices de Hankel generadas en el paso anterior. Para ello se selecciona la matriz que cumpla con las condiciones del Teorema A.5 en el Anexo A. Con este fin en mente, dentro de las matrices de Hankel  $\mathcal{H}_{u+1,\psi}(\mathcal{W})$  con  $\psi = k - u$ , que satisfacen  $u + v < 100$  con  $v \in \mathbb{N}$ , y

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{u,v}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{u,v+1}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{u+1,\psi}) = n \quad (5)$$

seleccionamos aquella que haga a  $n$  mínimo, digamos  $\mathcal{H}_{p+1,\psi}$ . Cabe indicar que esta matriz no necesariamente es única, sin embargo, todas las matrices con este rango mínimo son equivalentes. Por otro lado, a  $n$  se le denomina la dimensión de la realización mínima.

- d) Por comodidad, renombramos a  $\mathcal{H}_{p+1,\psi}$  como  $\mathcal{H}$ <sup>8</sup> y con ella se construyen las matrices  $P \in \mathbb{R}^{\eta(p+1)}$  y  $Q \in \mathbb{R}^{\eta(p+1) \times \mu\psi}$ , bajo el siguiente **Algoritmo de Factorización**:<sup>9</sup>

1. Definir  $Q_{1,:} = \mathcal{H}_{1,:};$
2. Determinar la condición:
  - 2.1. Si  $\mathcal{H}$  tiene solo una fila, se define  $P = [1]$ , y  $Q = \mathcal{H}_{1,:}$
  - 2.1.1 Fin.
  - 2.2. Si  $\mathcal{H}$  tiene más de una fila, definimos  $i = 1$ ;
3. Si  $Q_{i,:} \neq \underline{0}$ , hallar la primer columna  $j_i$  de  $Q_{i,:}$  tal que  $q_{i,j_i} \neq 0$  y definir  $q_{s,j_i} = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}_{i+1:n\mu};$
4. Determinar  $p_{u+i,i}$  como<sup>10</sup>

$$p_{u+i,i} = \frac{\mathcal{H}_{u+i,j_i} - \left( \sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i} \right)}{q_{i,j_i}}$$

para toda  $u \in \mathbb{N}_{n\mu-i};$

5. Determinar  $q_{i+1,j}$  como<sup>11</sup>

$$q_{i+1,j} = \mathcal{H}_{i+1,j} - \sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}_{m\eta}/\{j_r : \forall r \in \mathbb{N}_i\}$ ,<sup>12</sup>

6. Determinar la condición:

- 6.1. Si  $Q_{i+1,:} = \underline{0}$ , entonces con los valores obtenidos en las  $i$  repeticiones precedentes del AF, y haciendo  $Q_{i+1+k,:} = \underline{0}$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}_{n\mu-(i+1)}$ , conformamos las matrices  $P$  y  $Q$ , y terminamos.

<sup>8</sup>En lo que sigue del documento se omitirán los subíndices sobre la cantidad de bloques fila y columna de la matriz de Hankel siempre que no se requieran, dejando de forma clara al lector sus valores al inicio de su uso. Esto permite una notación más simple y una lectura más ágil del documento.

<sup>9</sup>Este algoritmo fue expuesto en la **Definición B.1** de Rangel G. (2019), fundamentándose en lo expuesto en Casti (1987, pp.134-138)

<sup>10</sup>Esta expresión es equivalente a  $\mathcal{H}_{u+i,j_i} = P_{u+i,:} Q_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i}$ . Para ello considere el paso 3, que implica  $\sum_{s=i+1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$ . Además, está bien definida, por el inciso d3,  $q_{i,j_i} \neq 0$ .

<sup>11</sup>Esta expresión es equivalente a  $\mathcal{H}_{i+1,j} = P_{i+1,:} Q_{:,j} = \sum_{s \in \mathbb{N}_{m\eta}} p_{i+1,s} q_{s,j}$ . Para ello considere que  $P \in \text{It}_{n\mu}$ , con unos en su diagonal principal. Lo que implica que  $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j} = 0$  y  $p_{i+1,i+1} = 1$ .

<sup>12</sup>Es decir, todo  $j$  en  $\mathbb{N}_{m\eta}$  que no corresponda a la columna del primer elemento no nulo de la fila  $1, \dots, i$  de  $Q_{n,m}$ .

- 6.2. Si  $\mathcal{H}$  tiene sólo  $i + 1$  filas, entonces con los valores obtenidos en las  $i$  repeticiones precedentes del AF conformamos las matrices  $P$  y  $Q$ , y terminamos.
- 6.3. Si  $\mathcal{H}$  tiene más de  $i + 1$  filas y  $Q_{i+1,:} \neq \underline{0}$ , entonces definimos  $i = i + 1$ , es decir, tomamos una nueva  $i$  igual a la  $i$  inmediatamente anterior, más 1, y repetimos el AF desde el inciso 3.

La primera matriz es triangular inferior con diagonal unitaria y la segunda una matriz con sus filas mayores a  $n$  nulas.<sup>13</sup>

- e) Por último, se genera la realización mínima  $(F, G, H)$ . Construimos las matrices  $P_n \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$ ,  $P_n^* \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$ , definidas como

$$P_n = (P_{u+1})_{n,n} \quad P_n^* = (P_{u+1})_{n+1:n+r', 1:r'}$$

Luego, se define la realización mínima como se muestra a continuación,

$$(F, G, H) = (F_{r'}, G_{r'}, H_{r'})$$

donde  $F_{r'} = (P'_{r'})^{-1} P_n^*$ ,  $G_{r'} = (Q_{p+1,\psi})_{1:r', 1:m}$  y  $H_{r'} = (P_{p+1})_{1:n, 1:r'}$

Explicado lo anterior, podemos evocar aquello de datos “bien comportados” para dilucidarlo. Dicha expresión denota que la DE (datos) puede constituir al menos una MH que satisfaga la condición (5) en el paso (c). Una DE que corrobore dicha condición se corresponde con que una parte consecutiva de ella pueda explicarla a toda, o equivalentemente, todo elemento de la DE es una combinación lineal de una subsucesión consecutiva de la DE.

Existen sistemas que al ser no lineales o poseer una dimensión infinita (requieren una cantidad infinita de variables de estado para representar la información interna) no permitirán que una parte consecutiva de su DE pueda representar a toda ella. Los cambios no lineales en la DE o la dimensión infinita requieren en este sentido una cantidad infinita para representar a la DE. Así mismo, la DE puede no estar “bien comportada” por algo ajeno al sistema subyacente: choques aleatorios o errores al generar la DE; o debido al tamaño de la DE, ya que si es insuficiente hace independientes a los elementos. Estas situaciones ponen un obstáculo a la realización que hasta ahora se ha explicado.

No obstante, realizar una DE franqueando el hecho de que no satisface la condición (5) para ninguna MH, es decir, que no es “bien comportada”, es posible. Esto puede hacerse al rectificar el paso (c) mediante la siguiente secuencia de acciones:

1. Dentro de todas las matrices de Hankel  $\mathbf{H}_{p,q}$  generadas por medio de la DE de tamaño  $k$ , con  $2 \leq p \leq k - 1$ , se toma el conjunto de matrices que tenga el mayor rango y se factorizan mediante la Descomposición en Valores Singulares (SVD). Es decir, para cada matriz de rango máximo  $H_{p,q}$  se encuentran tres matrices:  $U_{pq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $V_{pq} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ortogonales; y  $\Sigma_{pq}$  diagonal con  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{r_{pq}} \geq 0$  valores singulares de  $H_{p,q}$  en su diagonal principal, tales que

$$\mathcal{H}_{p,q} = U_{pq} \Sigma_{pq} V'_{pq} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^T = \sum_{i=1}^n \sigma_i \begin{pmatrix} u_{i1} v_{i1} & \cdots & u_{i1} v_{i(\alpha\eta)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i(\beta\mu)} v_{i1} & \cdots & u_{i(\beta\mu)} v_{i(\alpha\eta)} \end{pmatrix}$$

---

<sup>13</sup>Esto se sigue del Lema B.1 en Rangel G. (2019)

2. Tomamos la matriz de rango máximo que acumule el mayor porcentaje de peso de los valores singulares en los primeros lugares. Ahora, esta matriz  $\mathcal{H}_{p,q}$  tiene rango igual al número de valores singulares, es decir,  $r_{pq}$ . Para ella creamos una versión compacta  $\mathcal{H}_s$  dada como

$$\mathcal{H}_{p,q} \approx \mathcal{H}_s = U_s \Sigma_s V'_s$$

donde  $s$  satisface  $n \leq s \leq n(p-1)$ , y expresa que en  $\Sigma$  solo se han dejado los primero  $s$  valores singulares, volviendo el resto 0. Así mismo, se crea el conjunto índice definido como  $S = \{s \in \mathbb{N} : s < r \wedge n|s\}$

Como al aumentar el rango de una matriz, entonces aumenta el número de valores singulares, la elección de la MH con el mayor rango tiene por justificación que al tener más valores singulares, se pueden generar más matrices reducidas y, por tanto, un conjunto mayor de aproximaciones para optimizar la elección de una realización mínima. Otra justificación a esto es que, al tener más valores singulares y estos acumular su mayor peso en los primeros sitios, los últimos participan poco y así la aproximación es más detallada con los primeros valores singulares, pudiendo retirar más de los últimos.

Empero, ésta justificación no es teórica ni empírica y, por lo tanto, no necesariamente imbatible por otra condición. En una sección del siguiente capítulo se hablará de ella con más rigurosidad.

3. Para cada  $s \in S$ , hay que construir la matriz reducida  $H_s$  dada por

$$\mathcal{H}_s = U_s \Sigma_s V'_s$$

donde  $\Sigma_s = (\Sigma)_{1:s, 1:s}$ ,  $U_s = (U)_{:, 1:s}$  y  $V_s = (V)_{:, 1:s}$ . Esta matriz, en general, pierde la estructura antidiagonal de Hankel, es decir, ya no cuenta con bloques antidiagonales homogéneos de  $\mathcal{W}$ .

4. Obtenemos la realización  $(F_s, G_s, H_s)$  de  $H_s$ , para cada  $s \in S$ . Esto se consigue al aplicar los pasos (d) y (e) a  $H_s$ .
5. Se construye la sucesión estimada

$$\widehat{\mathcal{W}}_s = \left\{ H_s(F_s)^{t-1} G_s |_{t \in \mathbb{N}_k} \right\}$$

para cada  $s \in S$ . El atributo “estimada” es debido a que posee un grado de proximidad a la representación externa  $\mathcal{W}$ .

Mediante la realización de la matriz reducida no se puede reconstruir los elementos que componen la matriz reducida, debido a que no cuenta con estructura de hankel. Así, dado lo que se dijo en (3), cada sucesión estimada  $\widehat{\mathcal{W}}_s$  acumula dos distanciamientos de  $\mathcal{W}$ : el generado al crear la matriz reducida y el derivado de la realización. El primero es necesario para retirar el ruido en los datos, el segundo, sin embargo, aun queda abierto a ser investigado.<sup>14</sup>

---

<sup>14</sup>Hay información en las antidiagonales de la matriz reducida que se pierden en el proceso de realización debido a que no son homogéneas. Esta información podría brindar un mejor ajuste a la matriz  $\mathcal{W}$ .

6. La proximidad de  $\widehat{\mathcal{W}}_s$  a  $\mathcal{W}$ , para cada  $s \in S$ , está definida como el promedio de la distancia entre el elemento  $i$  de  $\widehat{\mathcal{W}}_s$  y el elemento  $i$  de  $\mathcal{W}$ , para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Esta definición se logra expresar matemáticamente utilizando la distancia de Frobenius, es decir, la función  $d(\cdot, \cdot)_F : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  inducida por la norma de Frobenius,

$$d(A, B)_F = \|B - A\|_F$$

A partir de ella, la proximidad entre  $\widehat{\mathcal{W}}_s$  y  $\mathcal{W}$ , como fue definida, está dada por

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_s)} = \frac{\sum_{i=1}^k d(W_i, \widehat{\mathcal{W}}_s i)}{k}$$

Definimos el conjunto de proximidad  $M_p$  como

$$M_p = \left\{ \overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_s)} : s \in S \wedge i = 1, \dots, k \right\}$$

7. Por último, se elige la realización que induce el mejor ajuste  $\widehat{\mathcal{W}}_s$  a  $\mathcal{W}$ . Es decir, se toma  $(F_{s^*}, G_{s^*}, H_{s^*})$  tal que

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}}_{s^*})} = \min M_p$$

### 2.3. SVD en la TR: dimensionalidad y aleatoriedad

La descomposición en valores singulares, SVD por sus siglas en inglés, es una técnica para descomponer matrices. Es empleada en la TR sobre la MH como proceso previo para obtener una representación de estado mínima. Permite esencialmente tomar la matriz de Hankel  $\mathcal{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , con rango  $r$ , y encontrar tres matrices  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , y  $\Sigma$  tales que

$$\mathcal{H} = U\Sigma V'$$

donde  $U$  y  $V$  son ortogonales o unitarias, dependiendo de si  $n = m$  o no, y se denominan matrices de vectores singulares izquierdos y derechos, respectivamente; y donde  $\Sigma$  es una matriz diagonal donde los valores singulares de  $\mathcal{H}$ ,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$ , están ordenados de mayor a menor en ella. Por consiguiente, bajo lo dicho sobre las tres matrices que factorizan  $\mathcal{H}$ , tenemos una forma alternativa de expresar a  $\mathcal{H}$  es bajo una combinación lineal de matrices generadas por los vectores singulares izquierdos y derechos,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v'_i \tag{6}$$

donde  $u_i$  es el  $i$ -ésimo vector singular izquierdo o la columna  $i$ -ésima de  $U$ ; y  $v_i$  es el  $i$ -ésimo vector singular derecho o la  $i$ -ésima columna de  $V$ .

A partir de  $U$ ,  $\Sigma$  y  $V$  es posible definir las siguientes matrices:  $\Sigma_k = (\Sigma)_{1:k, 1:k}$ ,  $U_k = (U)_{:, 1:k}$  y  $V_k = (V)_{1:k, :}$ , con  $k \leq r$ , y con ellas, a su vez, establecer la siguiente matriz

$$\mathcal{H}_k = U_k \Sigma_k V'_k$$

a la cual denominamos la *matriz truncada* en  $k$  valores singulares de  $\mathcal{H}$ .<sup>15</sup> Su nombre se entiende si tomamos a  $E_k$  como

$$E_k = \mathcal{H} - \mathcal{H}_k$$

---

<sup>15</sup>En el caso particular donde  $k = r$ ,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r$  y la factorización  $U_r$ ,  $\Sigma_r$   $V_r$  de  $\mathcal{H}_r$  se pasaría a llamar la *matriz compacta* de  $\mathcal{H}$ .

y en términos de la expresión (6), se sigue que

$$E_k = \sum_{i=k+1}^r \sigma_i u_i v_i'$$

Aquí se hace más claro que  $\mathcal{H}_k$  es un truncamiento, debido a que es igual a  $\mathcal{H}$ , es decir, a la combinación lineal en (6), menos la suma de los últimos  $r - k$  valores singulares multiplicados por las matrices generadas con sus vectores singulares correspondientes. Esto nos permitirá dar una interpretación de la matriz de truncamiento  $\mathcal{H}_k$ .

Consideremos para esto el método de Componentes Principales, PCA por sus siglas en inglés. Este busca disminuir la cantidad de dimensiones (componentes) para una matriz de datos, con la menor pérdida de variabilidad. Lo hace al emplear nuevos componentes, que resultan ser combinaciones lineales de los originales, cuya varianza absorbida sea alta. Ahora, como el SVD está relacionado con el PCA, su interpretación puede ser heredada. En efecto, como los vectores propios izquierdos y los valores singulares del SVD son las nuevas componentes y varianzas asociadas a estas, respectivamente, se sigue que la matriz truncada  $\mathcal{H}_k$  es una suerte de representación de los datos de  $\mathcal{H}$  bajo las nuevas  $k$  dimensiones más correlacionadas, de varianza más alta. En este sentido, los valores de  $\mathcal{H}_k$  son una aproximación a los valores de  $\mathcal{H}$ , una versión simplificada de estos, una compresión de la información original.

La utilidad de la aproximación  $\mathcal{H}_k$  estriba en que la TR requiere que la MH cumpla con las condiciones de rango enunciadas en la ecuación (5). Sin embargo, los datos de forma habitual no permiten que estas se satisfagan. En el registro y construcción de los datos económicos pueden existir errores aleatorios; el sistema del cual se toman puede ser no lineal; la dimensión del sistema es infinito; los datos pueden tener problemas de precisión por redondeo; la representación externa puede ser reducida; etc. En estos casos, que podemos englobar en dos: aquellos surgidos por ruido y otros por el tipo de sistema, el SVD es una forma eficiente para poder utilizar la TR. Ya sea que  $\mathcal{H}_k$  retire el ruido de  $\mathcal{H}$  o que comprima su información, al cumplir con los criterios de rango es posible llevar a cabo la realización sobre ella. De esto podemos decir que dicha realización sobre  $\mathcal{H}_k$  se puede entender como una explicación del sistema subyacente sin ruido o como una aproximación a éste.

La idea de aproximación también se puede ver vista de la siguiente manera. La diferencia que induce  $E_k$  entre  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}_k$  es la mínima entre todas las matrices en  $\mathbb{R}^{n \times m}$  de rango menor o igual a  $k$ . En efecto, a partir de las demostraciones constructivas elaboradas por Eckart y Young (1936) y Mirsky (1960), podemos afirmar que dada  $\mathcal{H}$ , la minimización de  $d_F(\mathcal{H}, \widehat{\mathcal{H}})$ ,<sup>16</sup> dentro del conjunto de matrices  $X' \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sujetas a  $\text{rango}(X') \leq k$ , es tal que

$$d_F(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k) = \inf_{\text{rango}(X') \leq k} d_F(X', X) \quad (7)$$

Es decir,  $\mathcal{H}_k$  es la matriz más próxima a  $\mathcal{H}$  dentro de las matrices en  $n \times m$  con rango menor o igual a  $k$ . Además, es única cuando y sólo cuando  $\sigma_k \neq \sigma_{k+1}$ . Esto puede permitir asegurar que en el proceso de realización, las matrices de Hankel reducidas son las de mínima distancia y únicas, dentro de las matrices con igual o menor rango al de la matriz de Hankel original, son la mejor aproximación dentro de la condición de rango dada.

Para concluir esta subsección, se ha de mencionar que el proceso de minimización afirmado en la desigualdad (7) cuenta con la siguiente expresión  $\|X_p\|_F^2 / \|X\|^2$  para medir su bondad de ajuste

---

<sup>16</sup>La función  $d_F(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$  es la distancia de Frobenius, Definición B.19.

(González y Valderrama, 1998, p.2). Aunque, por causa del Teorema B.13, la norma de Frobenius al cuadrado  $\|\cdot\|_F^2$  es equivalente a la suma cuadrática de los valores singulares  $\sigma_i$ , o lo que es lo mismo, a la suma de los valores propios  $\lambda_i = \sigma_i^2$  de la matriz  $X'X$  (Definición B.18). Por lo que la bondad de ajuste puede ser vista como

$$\frac{\|X_p\|_F^2}{\|X\|_F^2} = \frac{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^r \lambda_i} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=p+1}^r \lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}}$$

## 2.4. Acercamiento a los conceptos de estructura, cambio estructural y agrupamiento en la TR

Al sistema económico de base contable, cuando le aplicaron los pasos de la subsección precedente para obtener la realización, obtuvieron la DI siguiente

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $F$  indica que el número de VE del sistema es 2, lo que confirma algo ya indicado líneas atrás: el modelo es relativamente simple. Debido a los valores en sus entradas, que son los de la identidad, nos revela que para el periodo de 100 trimestres, los 2 estados evolucionan de forma independiente, teniendo así un sistema no acoplado. También expresa que no existen cambios internos en los estados del sistema, por lo que tenemos un sistema sin dinámica interna, únicamente es afectado por el estado inicial y las entradas. A su vez, como sus valores propios son ambos iguales a 1, no proporcionan información para hablar sobre la estabilidad o inestabilidad del sistema.

Por su parte, las matrices  $G$  y  $H$  nos permiten hablar sobre la controlabilidad y observabilidad del sistema, respectivamente. Lo primero se refiere a la posibilidad de alcanzar un estado deseado (valores de las 2 VE) en un tiempo finito al aplicar una función de entradas finita. La segunda precisa que un estado del sistema pueda ser identificado a partir de las mediciones de las salidas. Lo enunciado sobre  $G$  y  $H$  sólo se dirige a entablar la exposición acerca de la estructura y cambio estructural, por lo que evito prodigar más detalles al respecto en esta sección.

Con lo dicho podemos erigir el significado de la palabra estructura y cambio estructural desde el horizonte de la TR. El primer concepto alude a las características relevantes del sistema, las cuales permiten diferenciarlo de otros al compaginar cualidades estáticas y dinámicas. El segundo alude a la diferenciación del sistema con respecto a él mismo en otro tiempo, bajo el primer concepto.

Si observamos bien, las precisiones anteriores sobre la estructura y cambio estructural, están asentadas en las relaciones entre los estados, entradas y salidas del sistema. Al transmitir las ideas sobre el número de VE, dinámica interna, estabilidad, controlabilidad, observabilidad, acoplamiento, etc. se estaba partiendo de algún tipo de objeto relacional. Pormenorizando, se partía de la DI, es decir, de las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Por tanto, la estructura de un sistema pasa a convertirse en el conjunto de características estáticas y dinámicas de los objetos relacionales  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Así mismo, el cambio estructural pasa a significar un alto grado de disimilitud entre las DI de un sistema en dos momentos temporales distintos. Esto implica a su vez la disparidad entre las cualidades estáticas y dinámicas del sistema en ambos momentos.

El análisis para establecer la existencia de cambio en la estructura de un sistema desde la TR es un proceso que involucra varios pasos. Inicialmente se debe estudiar el sistema original y determinar su matriz de estado  $F$ . El siguiente paso es identificar cualquier cambio en el sistema que pueda afectar a ésta matriz. Esto puede incluir la adición o eliminación de variables del sistema.

Posteriormente se debe realizar un análisis de la observabilidad y la controlabilidad del sistema, antes y después de un supuesto cambio. Si se percibe una diferencia significativa entre los estados que se pueden conseguir o que pueden ser determinados bajo las salidas, entonces hay evidencia de cambio estructural. Otra vía puede ser el análisis de las matrices  $F$  y  $F'$  de los dos tiempos del sistema que se comparan. Si éstas matrices tienen una relación de similaridad, es decir, si existe una matriz  $J$  tal que  $J^{-1}FJ = F'$ , entonces podremos concluir que las diferencias en ambos tiempos no presuponen una alteración estructural del sistema. Usar ambos métodos puede ser recomendable si quiere robustecer el análisis de cambio estructural.

Una forma de percarnos del cambio estructural antes de hacer análisis como los anteriores, es el uso del mecanismo que empleado para simular la DE. La matriz  $F$  posee una órbita:  $F^0, F^1, F^2, \dots, F^{100}$ , y al pre y pos multiplicar cada uno de sus elementos por  $H$  y  $G$ , respectivamente, se puede aproximar un elemento respectivo de la DE del sistema.

$$HF^{t-1}G \approx \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$$

No obstante, cuando existe cambio estructural en el sistema, éste deja de ser tiempo invariante. Ahora su dinámica interna antes y después del cambio estructural es distinta. Es decir,  $F_a$  anterior al cambio y  $F_p$  posterior a él serían distintas, y por tanto las órbitas respectivas.

En este sentido, un sistema lineal con cambio estructural se puede considerar tiempo-variante, y si se modela con la TR para sistemas tiempo-invariantes lineales, la órbita de  $F$  fallaría, podría identificar mejor la órbita de  $F_a$  y diluir la de  $F_p$ , o visceversa. Por consiguiente, la aproximación  $HF^{t-1}G$  podría representar mejor el primer bloque temporal de la DE (anterior al cambio estructural) o al segundo (del cambio estructural), pero con poca probabilidad a ambos. Es decir, la realización agrupa en uno de los dos bloques tiempo a los elementos simulados que mejor aproximan a la DE (en dicho bloque) y en el otro manifiesta una mayor pérdida de cercanía entre estos. Por tanto, este agrupamiento en la TR podría mostrar la existencia de cambio estructural en el sistema.

Por último, si se concluye que ha habido un cambio estructural en el sistema, se debe investigar las causas del cambio y evaluar su impacto en la dinámica del sistema. En algunos casos, el cambio puede ser beneficioso y mejorar el rendimiento del sistema, mientras que en otros casos puede ser perjudicial y reducir su eficiencia o estabilidad. Es más, en tal caso, aún se podría usar la realización para modelar este sistema, aunque empleando alguna variante, quizás la Teoría de la Realización Adaptativa, sin embargo, en el presente trabajo estas no se abordaran.

## 2.5. Comentarios finales sobre el sistema económico de base contable

Para concluir este capítulo retornamos a los resultados de la realización del sistema económico de base contable del que nos hemos venido apoyando. La simulación más cercana a la DE de éste

sistema bajo la DI, está dada de la siguiente manera

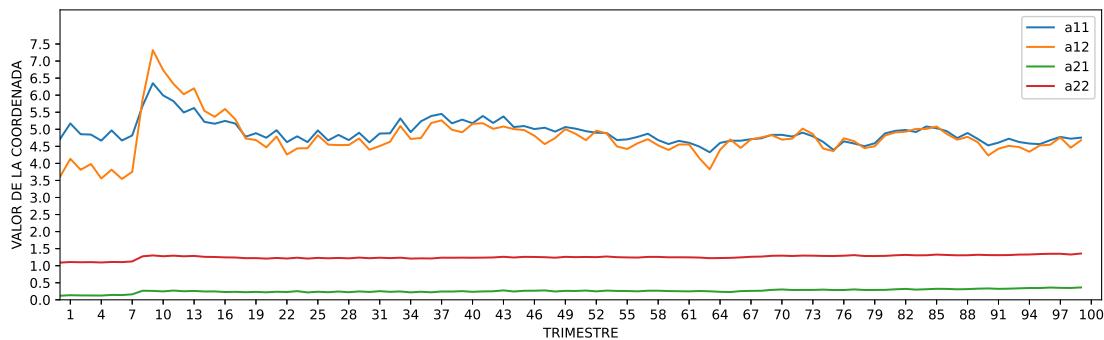
$$HF^{t-1}G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad t = 1, \dots, 100 \quad (8)$$

así se manifiesta que para el sistema subyacente, las 100 matrices de la DE son tan parecidas que se pueden representar mediante una única matriz:

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Observando a las matrices de la DE en la siguiente figura

Figura 2.5: Series de tiempo generadas con los valores en las mismas coordenadas de cada matriz en la DE del sistema económico de base contable



podemos decir que la matriz (8) estima relativamente bien a las matrices a partir del trimestre 17 en adelante y menos a los primeros 16 trimestres. Bajo lo mencionado en el apartado anterior, esto daría cierta evidencia de que existió un cambio estructural, donde el primer bloque temporal es del trimestre 1 al 16, y el segundo del 17 en adelante. Y de esto se puede intuir el por qué en Rangel G. (2019) se hablaba de la agrupación y la posibilidad de la identificación del cambio estructural mediante ello.

Ahora, con respecto a la interpretación económica de los resultado, a partir de (9) podemos obtener lo siguiente

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} F_t + MK_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} I_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix}$$

Esta relación indica que los trimestres entre 1993 y 2018 mantienen una relación de incremento de  $5 = \frac{1}{0.2}$  por 1 entre inversión  $I_t$  e  $I_t$ , respectivamente. Además, en este proceso multiplicador, cada unidad de incremento en la formación bruta de capital  $F_t$  pesa lo mismo que cada unidad de incremento en la formación bruta de capital de mercancías importadas  $MK_t$ . Así mismo, el monto de importaciones  $M_t$  es uno a uno con respecto a la formación bruta de mercancías importadas  $MK_t$ , lo que implica que el consumo intermedio y final de mercancías importadas  $MC_t$  no tiene impacto sobre las importaciones totales  $M_t$ .

El análisis económico tradicional tiene su propia especificación de la matriz del modelo contable para el periodo, la cual se ve debajo

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si la expresamos como un modelo de entrada-salida tendriamos la siguiente forma

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Observe que esta matriz y la obtenida mediante la TR,  $\frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$ , tienen una gran similitud.

El modelo contable, además, remite directamente al núcleo básico de una economía abierta y permite una extensión que en varios sentidos pone a prueba a la TR mediante

- i) adherir otros sectores institucionales como el gobierno y la autoridad monetaria;
- ii) especificar el correspondiente modelo determinado por la oferta de ahorro en lugar de la demanda de inversión:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & MC_t \\ X_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

y con lo cuál se obtiene

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

- iii) aumentar la frecuencia de la información disponible en virtud de su consistencia contable y alta confiabilidad.

Además, en este marco es interesante pensar el efecto dinámico de  $F$ ,  $G$  y  $H$  sobre elementos de la DE. Esto ya que, por ejemplo, pueden modificar el valor del multiplicador  $\frac{1}{|A_t|}$ . En efecto, si asumimos una matriz  $F$  con 2 valores propios distintos  $d_1$  y  $d_2$ , podemos descomponerla como

$$F = PDP^{-1}$$

donde  $P$  tiene por columnas los vectores propios de  $F$ ; y  $D$  es una matriz diagonal con  $d_1$  y  $d_2$  en su diagonal principal. De esta forma, se sigue que

$$\begin{aligned} |HF^tG| &= |H||F^t||G| = |H||P||F||P^{-1}||G| = |H||P||F^{t-1}| \frac{1}{|P|} |G| = |H||F^{t-1}||G| \\ &= |H| \left| \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}^{t-1} \right| |G| = |H| \left| \begin{pmatrix} d_1^{t-1} & 0 \\ 0 & d_2^{t-1} \end{pmatrix} \right| |G| = |H|d_1^{t-1}d_2^{t-1} |G| \end{aligned}$$

por consiguiente, como la TR garantiza

$$HF^{t-1}G \approx \frac{1}{|A_t|} \begin{pmatrix} a_{22t} & -a_{12t} \\ -a_{21t} & a_{11t} \end{pmatrix}$$

donde la expresión a la derecha es la matriz inversa de  $A_t$ , entonces se cumple que

$$\frac{1}{|A_t|} \approx |H||G|d_1^{t-1}d_2^{t-1}$$

así, encontramos una conexión entre los valores propios de la matriz de estados  $F$ , los cuales determinan su órbita, y los cambios en el multiplicador. Dependiendo como sean, mayores y/o menores a 1, podrán determinar la convergencia o no del sistema. Además, también el tiempo en que se dan los cambios en el multiplicador son determinados por ellos. Incluso, los determinantes de las matrices  $G$  y  $H$  modulan el tamaño de las variaciones. Por consiguiente, saber de qué dependen éstas matrices es relevante para entender al sistema. Otras relaciones de éste tipo se expondrán y profundizarán un poco más en siguientes capítulos.

## Capítulo 3

# Profundizando en la TR: construcción, dinámica y cambio estructural

En este capítulo se ahondará en la manera que la realización lineal, finita y constante construye la dinámica del sistema subyacente, lo que llamaremos caminata del sistema, y qué tanto influyen ciertos elementos clave en ella. Algunos de ellos serán la estructura de Hankel, el algoritmo de factorización, el truncamiento mediante el SVD y el sistema tiempo-variante. Al observar con mayor profundidad cómo operan, podrá verse con mayor nitidez dónde se podrían ubicar propuestas de mejora, en particular encaminadas a adecuar de mejor manera la TR a las necesidades de los sistemas económicos.

Por su parte, las propuestas realizadas en el sentido anterior serán maduradas en la medida en que su complejidad, el tiempo y la coherencia con los objetivos de la presente investigación lo permiten. Su intención será mostrar sendas fértiles de investigación, no necesariamente zanjadas aquí, con el fin de enriquecer el ajuste de la realización a la DE; la precisión y los períodos de la proyección; y la exactitud del ajuste de realizaciones compactas a la DE, disminuyendo la dimensión del sistema y facilitando su interpretación y la de su dinámica.

De igual forma, el capítulo aprovecha lo descubierto con antelación para aclarar los aspectos que rodean al concepto de estructura de un sistema bajo la TR, en particular, un sistema económico. Primeramente se hablará de lo que se entiende por estructura y luego se aclara cómo podemos analizar su dinámica al hablar de estabilidad de Lyapunov o de entrada 0. Así mismo, se especifica lo que se entiende por observabilidad y controlabilidad de un sistema, cómo identificar si en una realización el sistema subyacente las posee, y cuál sería la relevancia para sistemas económicos.

Además, se introducirá el método para determinar el cambio en la estructura del sistema y las medidas disponibles para controlarlo. Esto último se verá que puede hacerse mediante las entradas del sistema o, por otro lado, alterando la constitución del propio sistema económico, donde la observabilidad puede guiar tal proceso. De igual forma se puntualiza qué al hablar sobre el control del sistema este se abordará bajo las limitaciones que impone el objeto de estudio y los objetivos de esta investigación, así como la complejidad de los sistemas que resulta poseer la economía.

### 3.1. Caminata del sistema en la realización

Comencemos por asumir una sucesión infinita de matrices, generada por algún sistema, de la cual extraemos una DE finita que puede ser realizada directamente y reconstruir el sistema generador. En este caso, la realización obtenida con datos finitos puede producir cualquier elemento de la sucesión infinita. Como se vio en el capítulo anterior, para esto requerimos elaborar  $\mathcal{H}$  con los elementos de la DE y después descomponerla en las matrices  $P$  y  $Q$ . A partir de estas construimos las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ . La primera de ellas es la matriz de estado  $y$ , como veremos a continuación, permitirá “caminar” sobre los estados del sistema, los cuales se pueden identificar como los bloques columna de  $Q$ , Figura 3.1 (superior).

En efecto, multiplicando  $F$  por una columna arbitraria  $j$  de  $Q^1$ , asumiendo que la sucesión de matrices es de orden  $\mu \times \eta$ , el rango de  $\mathcal{H}$  de  $n$  y recordando del capítulo anterior que  $F = (P_n)^{-1} P_n^*$ <sup>2</sup> y la estructura de bloques antidiagonales de  $\mathcal{H}^3$ , entonces

$$\begin{aligned} FQ_{:,j} &= (P_n)^{-1} P_n^* Q_{:,j} = (P_n)^{-1} P_{\mu+1:\mu+n,:n} Q_{:,j} = (P_n)^{-1} \mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j} \\ &= (P_n)^{-1} \mathcal{H}_{n,j+\eta} = (P_n)^{-1} P_{:,n} Q_{:,j+\eta} = (P_n)^{-1} P_n Q_{:,j+\eta} = I_n Q_{:,j+\eta} \\ &= Q_{:,j+\eta} \end{aligned} \quad (1)$$

Es decir, la columna o estado  $j$  de  $Q$  “camina” al estado  $j + \eta$  del bloque siguiente. Luego, habiendo alcanzado un estado dado, mediante algún elemento de la órbita de  $F$ , es decir, mediante algún elemento  $F$ ,  $F^2$ ,  $F^3$ , ..., podemos generar el elemento respectivo de la sucesión infinita mediante la pre-multiplicación de tal estado por  $H$ , esto es, mediante la expresión  $HF^{t-1}G$ . En consecuencia, la caminata de  $F$  sobre los estados del sistema no es otra cosa que elegir algún elemento de la órbita de  $F$  y pos-multiplicarlo por  $G$ , mientras que caminar sobre la DE y su extensión, también hay que pre-multiplicar por  $H$ . Con esto en mente, podemos afirmar que la caminata de  $F$  sobre los estados del sistema también induce la circulación sobre la DE y su extensión infinita, al transitar sobre el primer bloque fila de  $\mathcal{H}$ , Figura 3.1 (inferior).

Figura 3.1: Representación de la “caminata” del sistema bajo  $F$ . Arriba, la caminata sobre  $Q$  original y extendida se da premultiplicando una potencia de  $F$  a  $G$ . Abajo, caminata sobre  $\mathcal{H}$  y su extensión, solo sucede en el primer bloque fila. Se da al premultiplicar  $H$  a la caminata sobre  $Q$  y su extensión.

$$Q^{A_p} = (Q \mid Q^{E_p}) = \left( \begin{array}{c|ccc|c|cc|c} G & FG & \cdots & F^{q-1}G & F^qG & \cdots & F^{p+q-1}G \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \blacksquare \\ Q_{1,1} & Q_{1,2} & \cdots & Q_{1,q} & Q_{1,q+1} & \cdots & Q_{1,p+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n,1} & Q_{n,2} & \cdots & Q_{n,q} & Q_{n,q+1} & \cdots & Q_{n,p+q} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

<sup>1</sup>Las filas de  $Q$  son más que las columnas de  $F$ , por ello, formalmente, no pueden multiplicarse. Sin embargo, como el rango de  $\mathcal{H}$  es  $n$ , por el AF,  $Q$  solo tiene sus primeras  $n$  filas no nulas, por lo cuál, dado que  $F$  es cuadrada de orden  $n$ , la multiplicación puede hacerse quitando las últimas filas de ceros de  $Q$ .

<sup>2</sup>Véase la definición de la realización en el inciso (e) del apartado 2.2 Construcción de la realización

<sup>3</sup>Esto permite saber qué si estamos en un elemento  $i, j$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $i$  es mayor a las filas del bloque fila 1, y  $j$  menor a las filas del último bloque columna, éste es igual al elemento  $i - \mu, j + \eta$ , véase el inciso (b) del apartado 2.2. Una implicación inmediata de lo mencionado es que  $\mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j} = \mathcal{H}_{n,j+\eta}$ , lo cual usaremos en la siguiente igualdad.

$$\mathcal{H}^{A_p} = (\mathcal{H} \quad | \quad \mathcal{H}^{E_p}) = \left( \begin{array}{cccc|cc|c} HG & HFG & \cdots & HF^{q-1}G & HF^qG & \cdots & HF^{p+q-1}G \\ \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \blacksquare \\ \hline W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & \cdots & W_{p+q} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & \ddots & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & \ddots & & \end{array} \right)$$

Un hecho más que se debe acentuar sobre  $F$  es que no solo permite recorrer las matrices  $Q$  y  $\mathcal{H}$ , también construye extensiones a dichas matrices:  $Q^{E_t}$  y  $\mathcal{H}^{E_t}$ , respectivamente, con el fin de proseguir su marcha. Cuando  $t = p$ ,  $F$  puede recorrer los últimos elementos de la DE, los cuales van de  $q + 1$  hasta  $p + q$ , Figura (3.1) (región azul). Por otro lado, si  $t > p$  tendríamos que  $F$  transita por matrices no consideradas en la DE, una suerte de **proyecciones del sistema**.

Captar cómo  $F$  construye dichas extensiones, inicia por explorar la hipótesis de la realización mínima y su efecto sobre la prolongación de  $\mathcal{H}$ . Sin pérdida de generalidad, la enunciamos diciendo que una DE es realizable mínimamente si existen  $p$  y  $q$  mínimos tales que

$$\text{rango } \mathcal{H}_{p,q} = \text{rango } \mathcal{H}_{p,q+1} = \text{rango } \mathcal{H}_{p+1,q} = n \quad (2)$$

Así, de (2) se puede aseverar lo que sigue:

1. Existen  $n$  columnas en  $\mathcal{H}_{p,q}$  que forman una base de su espacio de columnas, digamos que ellas son las primeras linealmente independientes, y que sus posiciones son  $v_1, \dots, v_n$ ;<sup>4</sup>
2. Las columnas de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$  en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$  son una base de su espacio de columnas;<sup>5</sup> y
3. Las columnas de  $\mathcal{H}_{p+1,q}$  en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$  también son una base de su espacio de columnas.<sup>6</sup>

Ahora, apoyándonos en la matriz ampliada en 1 tiempo de la Figura (3.2), observamos que el área verde es  $\mathcal{H}_{p,q}$ ; la verde y azul  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ ; y la verde y naranja es  $\mathcal{H}_{p+1,q}$ . En consecuencia, por los incisos 1 y 2, la base de columnas de la zona verde, en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , es la misma que la de la zona verde y azul. Por lo cual, la base de columnas de la zona verde, genera toda la zona azul. Ahora, tomando las columnas de la zona naranja en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , bajo los mismos coeficientes con que la zona azul generó la verde, se construye la matriz  $E_1$  (zona roja clara), la cual es la primer proyección de la DE. El bloque columna  $q + 1$ , zona azul y rojo clara, identifica a la matriz extendida  $\mathcal{H}^{E_1}$ . Además, como el inciso 3 implica que la base de columnas de la zona verde y naranja ( $\mathcal{H}_{p+1,q}$ ) son las columnas en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , entonces generan las columnas de  $\mathcal{H}^{E_1}$ , por la forma en que esta se construyó, manteniendo el rango de  $\mathcal{H}^{A_1}$  en  $n$ .

<sup>4</sup>Esto ya que el rango de  $\mathcal{H}_{p,q}$  es  $n$ .

<sup>5</sup>Esto ya que las columnas en los primeros  $q$  bloques columna de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$  son iguales a las de  $\mathcal{H}_{p,q}$ , y el rango de esta última también es  $n$ .

<sup>6</sup>Las columnas  $v_1, \dots, v_n$  en  $\mathcal{H}_{p+1,q}$  son linealmente independientes, de otro modo, como ellas contienen a las columnas  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{H}_{p,q}$ , estas no serían linealmente independientes, lo cual resulta en una contradicción.

Figura 3.2: Ilustración sobre la primer extensión  $E_1$  de la DE.

$$\mathcal{H}^{A_1} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida  $E_1$ , vamos a explorar el proceso con el que se construyen las siguientes extensiones de la DE:  $E_2, E_3, \dots$ . Como se expuso antes, las columnas de  $\mathcal{H}^{A_1}$  en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$  de la zona verde y amarilla, generan toda su zona azul y rojo claro, Figura (3.2). En particular, se cumple lo mismo tomando sus bloques fila mayores o iguales a 2, Figura (3.3) (superior izquierda). Pero debido a la estructura antidiagonal de Hankel, el área verde y naranja también se encuentra al desplazarnos un bloque fila hacia arriba y un bloque columna a la derecha, Figura (3.3) (superior derecha).

Es más, como antes al agregar un nuevo bloque columna  $q + 1$  al construir  $E_1$ , agregamos un nuevo bloque columna  $q + 2$ , Figura (3.3) (inferior izquierda). Él está compuesto por (i) el área azul y roja clara ( $E_1$ ), y (ii) la matriz  $E_2$ , quien es la segunda extensión de la DE. Además, como (i) es generada por las columnas del área verde y naranja en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , bajo coeficientes  $\alpha_{v_1j}, \dots, \alpha_{v_nj}$ , la matriz  $E_2$  será producida por las columnas del área cian en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , usando los coeficientes anteriores.

Basandonos en la Figura (3.3) (inferior izquierda) y lo dicho previamente, podemos decir que el nuevo bloque  $q + 2$  es generado por la zona verde, naranja y cian. No obstante, considerando que ésta zona es generada, a su vez, por los primeros  $q$  bloques columna,<sup>7</sup> entonces tenemos que los bloques  $q + 1$  y  $q + 2$  deben ser generados por la base de los  $q$  primeros bloques columna, que en la Figura (3.3) (inferior derecha) aparecen en la zona verde, naranja y cian, como una manera de acentuar que la misma zona de la izquierda se recorrió un bloque columna. Entonces,  $\mathcal{H}^{E_2}$  (bloques  $q + 1$  y  $q + 2$ ) es generada por la base de la zona verde y naranja. Y, por tanto, también es base de la matriz ampliada  $\mathcal{H}^{A_2}$ , con lo cual su rango sigue siendo  $n$ .

Figura 3.3: Fases del proceso de extensión de la DE en dos tiempos.

$$\left( \begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 \end{array} \right) \implies \left( \begin{array}{ccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 \end{array} \right)$$

<sup>7</sup>Esto es debido a la forma en que se construyó el bloque  $q + 1$ .

$$\left( \begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & E_1 \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & E_2 \end{array} \right) \implies \left( \begin{array}{cccccc} W_1 & W_2 & \cdots & W_q & W_{q+1} & W_{q+2} \\ W_2 & W_3 & \cdots & W_{q+1} & W_{q+2} & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & \cdots & W_{p+q-1} & W_{p+q} & E_1 \\ W_{p+1} & W_{p+2} & \cdots & W_{p+q} & E_1 & E_2 \end{array} \right)$$

Aplicando el proceso precedente iterativamente se expande la DE, generando matrices extendidas  $\mathcal{H}^{E_t}$ <sup>8</sup> para valores arbitrarios de tiempo  $t$ . Ellas complementan la matriz  $\mathcal{H}$  como vimos, ampliándola a matrices  $\mathcal{H}^{A_t}$ . Cabe indicar que estas últimas, para todo  $t \geq q$ , conservan el mismo rango  $n$ . Es decir, las  $n$  columnas base de  $\mathcal{H}$  generan el espacio de columnas de  $\mathcal{H}^A = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{A_t}$ , la matriz con la DE infinita generada por el sistema. A este  $n$  que no cambia se le denomina dimensión (mínima) del sistema, no obstante, el concepto de dimensión del sistema tendrá más sentido en la explicación que se hace un poco más adelante sobre la matriz  $F$ .

Con base en lo anterior, podemos ver cómo es que la matriz de estado  $F$  construye las expansiones de  $\mathcal{H}$  y  $Q$ . Aplicando el algoritmo de factorización  $\mathbf{AF}$  a  $\mathcal{H}$  y su ampliación  $\mathcal{H}^{A_t}$ , para cualquier  $t \geq q$ , obtenemos lo siguiente

$$\mathcal{H} = PQ \quad \text{y} \quad \left( \begin{array}{cc} \mathcal{H} & \mathcal{H}^{E_t} \end{array} \right) = \mathcal{H}^{A_t} = P^A Q^{A_t}$$

lo cual implica que

$$PQ = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{p+1,q}^{A_t} = P^A Q_{:,q}^{A_t}$$

y por el Lema A.3 tenemos  $P = P^A$  y  $Q = Q'_{:,q\eta}$ , entonces el primer bloque columna de  $Q$  y  $Q^{A_t}$  es el mismo, el primer bloque fila de  $P$  y  $P^A$  es idéntico, y las matrices  $P_n$  y  $P_n^*$  en  $P$  y  $P^A$  también coinciden. Por consiguiente, por la definición de  $F$ ,  $G$  y  $H$ , estas son iguales en  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^{A_t}$ .

Por lo anterior, la caminata de  $F$  empieza en el estado  $G$ , tanto en  $Q$  como  $Q^{A_t}$ , y es semejante en ambas hasta el bloque columna  $q$ -ésimo. Después de este, la caminata continua sobre estados proyectados por el sistema en la matriz  $Q^A = \lim_{t \rightarrow \infty} Q^{A_t}$ .<sup>9</sup> Además, por (1), la órbita de  $F$ <sup>10</sup> pre-multiplicada por  $G$ , es equivalente a una combinación lineal de las columnas de  $F$ . Esto hace que las columnas de  $F$  sean generadoras de cualquier bloque columna de  $Q^A$ . Además, como  $H$  es igual en  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}^{A_t}$ , no aporta a la dinámica del sistema para obtener la DE o su extensión. En consecuencia, la matriz de estado  $F$  es la mínima información requerida para generar la dinámica interna del sistema (cambio en sus estados) y también el recorrido sobre la DE y su extensión. Por esto es que también se dice que la dimensión del sistema es el número de columnas de  $F$ .

La caminata del sistema ha mostrado un engarce fuerte con la hipótesis (2), tanto para poder definir  $F$  como para la construcción de  $E_1, E_2, \dots$ , que es la extensión o proyección de la DE. Sin embargo, la importancia de otro elemento decisivo no fue del todo aclarada: la estructura de Hankel. Aunque su relevancia ya se hizo presente, fue sutil, incluso podría ser desapercibida. En el momento de pasar de  $\mathcal{H}_{\mu+1:\mu+n,j}$  a  $\mathcal{H}_{1:n,j}$  en la igualdad 4 de 1, se utilizó dicha propiedad. De

<sup>8</sup>La zona triangular inferior derecha de esta matriz en la Figura (3.1) se mostró vacía por simplicidad, no obstante, ahora vemos que realmente se acomodan las matrices de proyección  $E_1, \dots, E_p$  en el formato antidiagonal de Hankel.

<sup>9</sup>Esta matriz es la que contiene los estados infinitos del sistema, englobando a todas las ampliaciones de  $Q$ .

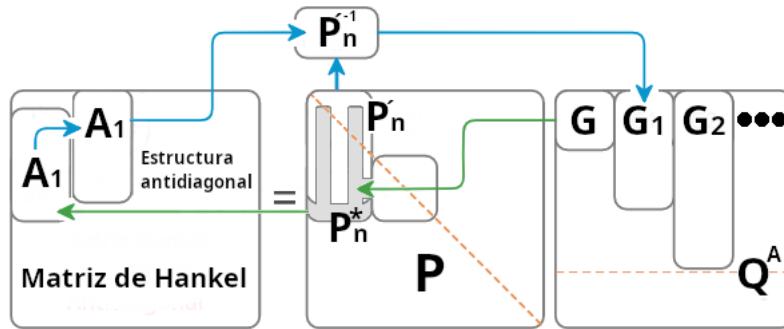
<sup>10</sup>O lo que es lo mismo  $F, F^2, F^3, \dots$

lo cual se desprende que  $F$  requiere de la estructura de Hankel para hacer caminar las filas de  $Q^A$  y, por tanto, recorrer la DE y su proyección al caminar sobre el primer bloque fila de  $\mathcal{H}^A$ .

La Figura 3.4 nos sirve para identificar lo que se ha mencionado. Dado que  $F = (P'_n)^{-1} P_n^*$ , donde  $P'_n$  y  $P_n^*$  son las sumamatrices de  $P$  en blanco y gris claro, respectivamente, que se encuentran desplazadas un bloque fila entre ellas<sup>11</sup>; y que  $G$  es el primer bloque columna de  $Q^A$ <sup>12</sup>, el efecto de premultiplicar  $F$  por  $G$  tiene dos partes. En la primera,  $G$  es premultiplicado por  $P_n^*$  para construir la submatriz  $A_1$  de la MH. La segunda permite emplear la inversa de  $P'_n$  para conectar la submatriz  $A_1$  con  $G_1$ , donde la submatriz se encuentra desplazada un bloque fila hacia arriba y otro bloque columna hacia la derecha, con respecto a  $A_1$  de la primera parte. De esto irradia la importancia de la estructura de Hankel: permite igualar  $A_1$  de la primera parte con  $A_1$  en la segunda, y con esto poder continuar con la caminata del sistema.

Esto mismo se puede repetir en otro ciclo, ahora tomando ya no  $G$  sino  $G_1$ ; desplazando ambas  $A_1$  un bloque columna a la derecha, que se mantienen iguales por la estructura de Hankel; y llegando así a  $G_2$ . Y se puede continuar iterando este proceso de manera indefinida, recorriendo todo bloque columna de  $Q^A$  (los estados del sistema) y la DE y su proyección (después de premultiplicar el estado por  $H$ ). Es así que  $F^{t-1}$  funciona y se convierte en el resumen de la dinámica del sistema.

Figura 3.4: Dinámica del sistema bajo las componentes  $P'_n$  y  $P_n^*$  de  $F$ .



### 3.2. Sistema, DE y realización

En el apartado anterior se asumió que la DE finita se podía realizar directamente, describiendo así la caminata del sistema que la reproduce y construye su expansión. No obstante, cómo se llegó a exponer con parquedad en el capítulo anterior, en general dicha asunción no es así, existen circunstancias que lo impiden, de las cuales hablaremos con algo más de detalle. Inicialmente, una situación que frena la realización lineal sucede cuando  $\mathcal{H}$  no cumple la condición (2). Esto puede surgir por varias causas, algunas relativas al sistema y otras ajenas a él, las cuales le ocurren a la DE, las cuales trataremos en este apartado. Así mismo, veremos como la realización lineal aún puede ser usada frente a estos escenarios.

Una primera causa que limita la aplicación de la realización lineal es cuando la DE cuenta con una *cantidad de elementos insuficiente* para alcanzar la dimensión mínima del sistema. Esto significa que, según lo visto en la sección anterior, el número de columnas de la matriz  $F$  es

<sup>11</sup> Ambas matrices se empalan en la zona de las bandas blancas y grises, y solo difieren por su primer bloque  $P'_n$  y último  $P_n^*$ , los cuales no se empalan por el desplazamiento en un bloque fila.

<sup>12</sup> Y por tanto, el primero de cualquier  $Q^A_t$ .

doblemente insuficiente: posee menos columnas de las necesarias y, además, las que tiene, habitan una proyección del espacio de estados del sistema. Una forma de lidiar con esto sería aumentar las matrices en la DE, hasta alcanzar la dimensión del sistema. No obstante, generar mas elementos de la DE no siempre es asequible, ya sea por imposibilidades técnicas o económicas.

Un caso límite en el sentido anterior sería la situación donde el sistema nunca alcanza la dimensión mínima ya que requiere una DE infinita para ello.<sup>13</sup> Versado de manera equivalente, el sistema necesita una cantidad infinita de información para ser realizado en el sentido en que aquí lo hacemos. Ya que esta información se encuentra almacenada en sus estados, entonces el sistema requiere una cantidad infinita de estos para construir cualesquiera otros. En tal caso, por lo hablado en la sección anterior, la matriz  $F$  sería infinita, y la realización finita impedida.

Además, cuando la DE contiene errores aleatorios, la realización lineal que la utiliza puede llegar a tener problemas. Debido al ruido, la determinación y evolución del sistema mediante la realización lineal podría estar sobredimensionada. Es decir, el sistema subyacente que se obtenga tendría muchos estados que no son esenciales para representar su estructura y comportamiento. Por lo mismo, se verían afectados tanto el tiempo en que se puede pasar de un estado a otro y en que una proyección es oportuna, así como la precisión en la reproducibilidad de la DE y la interpretabilidad de la estructura y dinámica del sistema.

Otra tesitura donde una realización lineal tiene problemas es cuando intenta hallar al sistema subyacente que resulta ser no lineal. En este caso, la realización ya no estaría tan bien ajustada por medio de las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  constantes, en su lugar deberían ser funciones no lineales. Este hecho surge debido a que la no linealidad del sistema introduce comportamientos complejos, como oscilaciones no armónicas, caos o bifurcaciones, no bien representadas por  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Además, el sistema ya no se comportaría de manera proporcional o aditiva, negando nuevamente a estas últimas matrices, incluso haciendo inadecuadas las técnicas lineales de control.

Una circunstancia más que degrada la efectividad de la realización lineal es cuando nos encontramos frente a un sistema tiempo variante. Este posee parámetros, propiedades o características que cambian con el tiempo. Esto significa que las relaciones entre las entradas y salidas del sistema también pueden variar. Los sistemas de este tipo pueden ser tanto lineales como no lineales. Un sistema lineal tiempo variante sería aquel en el cual las relaciones entre las entradas y salidas siguen siendo proporcionales, pero dichas proporciones pueden cambiar a lo largo del tiempo. Por otro lado, un sistema no lineal tiempo variante es aquel en el cual las relaciones entre las entradas y salidas no son proporcionales y además cambian con el tiempo.

Si el cambio temporal es alto en sistemas tiempo variante, los datos estarán muy dispersos y cambiarán significativamente en diferentes puntos de tiempo. Esto puede dificultar la construcción de una realización lineal con precisión y llevarla a una representación ineficiente. En efecto, podría suceder que se tenga una cantidad insuficiente o excesiva de ecuaciones para determinar  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Esto podría llevar a una realización sub o sobre determinada, lo que dificulta la obtención de una representación precisa del sistema. Otro problema podría ser que el sistema tiempo variante se volvería difícil de estabilizar mediante en una realización lineal, ya que su comportamiento cambia a lo largo del tiempo. Esto puede resultar en una realización lineal inestable o con malas propiedades dinámicas. Un inconveniente más sería que las predicciones a largo plazo pueden ser menos precisas, ya que el comportamiento del sistema puede cambiar drásticamente con el tiempo.

Ahora, aunque la realización que se trabaja en este documento asume que el sistema es lineal,

---

<sup>13</sup>Un sistema para ejemplificar esto podría ser aquel cuya dinámica tiene por DE a los números primos.

constante y de dimensión finita, en la práctica, aún existen ventajas de su uso en sistemas como los anteriores. Cuando tratamos con sistemas de dimensión grande (incluso infinita), no lineales y/o tiempo variantes, la realización lineal puede ser razonablemente precisa en un entorno de tiempo. Además, al simplificar el modelado y el análisis, puede brindar resultados más interpretables, fáciles de manipular. Incluso puede hacer factible la aplicación de técnicas de análisis y control lineal a este tipos de sistemas. No obstante, es importante subrayar que su precisión y predicción puede que se encuentren limitadas, especialmente cuando el sistema presenta no linealidades significativas o cambios bruscos en el tiempo. Por lo mismo, es razonable considerar la validez de la aproximación en función de la magnitud de las perturbaciones, la no linealidad del sistema o el monto de información que puede quedar fuera en un sistema de dimensión infinita.

Por otro lado, para los sistemas referidos, como en situaciones donde se tiene una DE con ruido, al implementar la realización se puede conseguir una aproximación al sistema subyacente pero cuya dimensión es excesiva. Esto se debe a que las variaciones aleatorias en los datos, la alta dimensión de los sistemas, los efectos no lineales y/o los cambios temporales, hacen que la MH no pueda cumplir la condición (A.5) para un número de bloques fila y columna pequeños. Así, la MH que se emplea poseería un rango holgado, incrementando por descontado la dimensión del sistema; menoscabando el análisis y control del sistema. Además, ya que las matrices de la realización serán grandes, también requerirán más recursos computacionales para su determinación, análisis, predicción y control.

Debido a las dificultades de un sistema con alta dimensión, se emplean técnicas de compresión. Una de ellas se exploró en el capítulo anterior, el truncamiento mediante el SVD. Recordando, ella consiste en retirar los valores singulares más pequeños de la MH y operar la realización sobre la matriz resultante. Un corolario de este tipo de procesos es la reducción de la complejidad del sistema, lo que facilita su manipulación y comprensión. Además, la menor dimensión permite cálculos más rápidos y eficientes, y ayuda a identificar estados realmente importantes, y otros que pueden ser eliminados, sin perder información crucial. La compresión también puede simplificar el análisis de estabilidad y la determinación de propiedades del sistema. Es más, en sistemas tiempo variantes, puede ayudar a detectar cambios en la dinámica del sistema con menos parámetros. No obstante, es importante resaltar que la compresión debe hacerse con cuidado para no perder información esencial del sistema y ocasionar distorsiones significativas en temas de predicción, ajuste, control y convergencia, por nombrar algunos de ellos.

Cuando se efectúa una realización lineal con información comprimida, debido a sistemas como los aludidos, por circunstancias donde los datos tienen ruido o simplemente por las ventajas de simplificar el sistema, no solo existirá una fase de pérdida de información, sino dos, las cuales son representadas por las siguientes aproximaciones:

$$\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_k \approx \mathcal{H}^*$$

La primera de ellas simboliza la pérdida de información en  $\mathcal{H}_k$  con respecto a  $\mathcal{H}$ , a causa de la compresión realizada. Específicamente, enfatiza el hecho de que los valores en las entradas de ambas matrices serán diferentes debido a retirar valores singulares.

Por su parte, para comprender la segunda aproximación volvemos un momento a la Figura 3.4. En esta notamos nuevamente cómo la dinámica del sistema equivale a caminar sobre la MH. Como se ve, esto se sustenta en poder pasar de  $A_1$  en la punta de la flecha verde, a la submatriz  $A_1$  en la punta de la flecha azul, es decir, en la estructura de Hankel. No obstante, si usamos  $\mathcal{H}_k$ , como no posee tal estructura, entonces  $A_1$  en la punta de la flecha verde no sería igual a  $A_1$  en la punta azul, pero como la realización deberá hacer su caminata sobre una matriz con estructura

de Hankel, forzaría la creación de  $\mathcal{H}^*$ . Es así como la realización usaría a  $\mathcal{H}_k$  para construir  $F$ ,  $G$  y  $H$ , pero su caminata la haría sobre  $\mathcal{H}^*$ , perdiendo en el proceso información y precisión.

Por consiguiente, cuando generamos una compresión de información y aplicamos la realización lineal, existen tres partes que se encuentran en el origen de la inexactitud en la identificación del sistema y en la desemejanza entre la serie estimada y la DE. La primera de ellas es la variación en los valores de las entradas de  $\mathcal{H}$ , la segunda es la pérdida de la homogenidad antidiagonal en  $\mathcal{H}_k$ , y la tercera es el efecto de la factorización de  $\mathcal{H}_k$  en la determinación de  $\mathcal{H}^*$ . En las siguientes secciones se hablará sobre ellas y se darán algunas propuestas con las que se intenta abrir sendas de investigación para disminuir su efecto adverso.

### 3.3. Conservación estructural de la Matriz de Hankel en la realización

La doble pérdida de información anterior debida a estar frente a un sistema de dimensión infinita, no lineal o tiempo variante; a que hay errores aleatorios en la DE; que se quiere compactar la información; o por no que la DE no tiene suficientes elementos, puede ser suavizada en cuanto a su efecto sobre la DI mediante el tratamiento a la pérdida de la estructura de Hankel. Pongamos que tenemos la DE dada por  $\{W_i\}_n$  y con ella construimos la matriz de Hankel  $\mathbf{MH}$  de  $p \times q$  bloques  $\mathcal{H}_{p,q}$ , con bloques antidiagonales homogéneos, de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & \dots & W_q \\ W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & \dots & W_{q+1} \\ W_3 & W_4 & W_5 & W_6 & \dots & W_{q+2} \\ W_4 & W_5 & W_6 & W_7 & \dots & W_{q+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_p & W_{p+1} & W_{p+2} & W_{p+3} & \dots & W_n \end{pmatrix}$$

Además, se vio que bajo la descomposición en valores singulares podemos re-expresar ésta matriz de la siguiente manera

$$\mathcal{H}_{p,q} = U\Sigma_s V^T$$

donde  $s$  es el número total de valores singulares en la diagonal principal de  $\Sigma$ . Ahora, debido a Eckart y Young (1936) y Mirsky (1960), la matriz truncada  $\mathcal{H}_r = U\Sigma_r V^T$ <sup>14</sup> donde  $\Sigma_r$  es la matriz se obtiene al retirar los últimos  $r < s$  valores singulares a  $\Sigma_s$ , satisface que

$$\|\mathcal{H}_r - \mathcal{H}_{p,q}\| = \inf_{\text{rank}(H) \leq s-r} \|H - \mathcal{H}_{p,q}\|$$

Es decir,  $\mathcal{H}_r$  es la matriz más próxima a  $\mathcal{H}_{p,q}$  dentro de las matrices de rango menor o igual a  $s - r$ . No obstante, la cercanía que se proclama en éste resultado induce un defecto. Como se aclaró en el apartado anterior, la estructura de bloques antidiagonales homogéneos que poseía  $\mathcal{H}_{p,q}$  se termina perdiendo  $\mathcal{H}_r$ , generando una primera fuente de imprecisión entre la estimación por la TR y DE.

La opción que propongo para preservar parte de la estructura de bloques antidiagonales de la MH original, estriba en lo desarrollado por Golub *et al.* (1987). Inicialmente tomamos  $\mathcal{H}_{p,q}$  como

<sup>14</sup>Bajo la norma de Frobenius, o por Mirsky (1960), para cualquier norma invariantemente unitariamente

una matriz compuesta por dos matrices,

$$\mathcal{H}_{p,q} = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix}$$

donde las columnas de  $H_1$  son  $k$ , y hacemos  $l = \text{rank}(H_1)$ ;  $P$  la proyección ortogonal sobre el espacio de columnas de  $H_1$ ;  $P^\perp$  la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de  $H_1$ ; y  $T_n(\cdot)$  un operador de truncamiento.<sup>15</sup> Entonces, si  $l \leq r$  tenemos que

$$\hat{H}_2 = PH_2 + T_{r-l}(P^\perp H_2) \quad (3)$$

permite satisfacer la siguientes desigualdad e igualdad,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} H_1 & \bar{H} \end{pmatrix} &\leq r \\ \left\| \begin{pmatrix} H_1 & \hat{H}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \right\| &= \inf_{\text{rank}[(H_1 \bar{H})] \leq r} \left\| \begin{pmatrix} H_1 & \bar{H} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (4)$$

así, la matriz  $\hat{\mathcal{H}}_r$  aproxima a  $\mathcal{H}_{p,q}$  preservando la parte  $H_1$  de ésta última. Para afianzar el significado de lo dicho, ilustraremos su uso mediante un ejemplo. Inicialmente tomemos una hipotética MH y  $k = 6$ , obteniendo  $H_1$  y  $H_2$ ,

$$\mathcal{H}_{10,8} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H_1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 9 \\ 9 & 2 \\ 2 & 8 \\ 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, como  $P = H_1(H_1^T H_1)^{-1}H_1^T$  y  $P^\perp = I - P$ , con  $I$  la matriz identidad del mismo tamaño que  $P$ , entonces

$$P = \begin{pmatrix} 0.580 & 0.055 & -0.198 & -0.168 & 0.091 & 0.041 & 0.106 & 0.271 & 0.226 & 0.166 \\ 0.055 & 0.738 & 0.126 & -0.044 & -0.096 & 0.208 & -0.012 & -0.235 & 0.248 & 0.054 \\ -0.198 & 0.126 & 0.657 & 0.085 & 0.018 & -0.036 & 0.256 & 0.031 & -0.125 & 0.282 \\ -0.168 & -0.044 & 0.085 & 0.741 & 0.107 & 0.195 & 0.070 & 0.169 & 0.165 & -0.211 \\ 0.091 & -0.096 & 0.018 & 0.107 & 0.901 & -0.024 & -0.073 & -0.170 & 0.060 & 0.146 \\ 0.041 & 0.208 & -0.036 & 0.195 & -0.024 & 0.568 & -0.321 & 0.171 & -0.105 & 0.132 \\ 0.106 & -0.012 & 0.256 & 0.070 & -0.073 & -0.321 & 0.451 & 0.112 & 0.213 & 0.007 \\ 0.271 & -0.235 & 0.031 & 0.169 & -0.170 & 0.171 & 0.112 & 0.524 & -0.033 & 0.141 \\ 0.226 & 0.248 & -0.125 & 0.165 & 0.060 & -0.105 & 0.213 & -0.033 & 0.432 & -0.170 \\ 0.166 & 0.054 & 0.282 & -0.211 & 0.146 & 0.132 & 0.007 & 0.141 & -0.170 & 0.408 \end{pmatrix}$$

<sup>15</sup>Toma una matriz  $A$  y la mapea en  $A_n$ , donde ésta última sólo preserva los primeros  $n$  valores singulares de  $A$ .

$$P^\perp = \begin{pmatrix} 0.580 & 0.055 & -0.198 & -0.168 & 0.091 & 0.041 & 0.106 & 0.271 & 0.226 & 0.166 \\ 0.055 & 0.738 & 0.126 & -0.044 & -0.096 & 0.208 & -0.012 & -0.235 & 0.248 & 0.054 \\ -0.198 & 0.126 & 0.657 & 0.085 & 0.018 & -0.036 & 0.256 & 0.031 & -0.125 & 0.282 \\ -0.168 & -0.044 & 0.085 & 0.741 & 0.107 & 0.195 & 0.070 & 0.169 & 0.165 & -0.211 \\ 0.091 & -0.096 & 0.018 & 0.107 & 0.901 & -0.024 & -0.073 & -0.170 & 0.060 & 0.146 \\ 0.041 & 0.208 & -0.036 & 0.195 & -0.024 & 0.568 & -0.321 & 0.171 & -0.105 & 0.132 \\ 0.106 & -0.012 & 0.256 & 0.070 & -0.073 & -0.321 & 0.451 & 0.112 & 0.213 & 0.007 \\ 0.271 & -0.235 & 0.031 & 0.169 & -0.170 & 0.171 & 0.112 & 0.524 & -0.033 & 0.141 \\ 0.226 & 0.248 & -0.125 & 0.165 & 0.060 & -0.105 & 0.213 & -0.033 & 0.432 & -0.170 \\ 0.166 & 0.054 & 0.282 & -0.211 & 0.146 & 0.132 & 0.007 & 0.141 & -0.170 & 0.408 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, como  $r \geq l = \text{rank}(H_1) = 6$ , entonces al tomar  $r = 7$ , y sustituyendo las expresiones anteriores en (3), obtenemos  $\hat{H}_2$  y, por tanto, la matriz  $\hat{H} = (H_1 \ \hat{H}_2)$  que satisface (4),

$$\hat{H} = (H_1 \ \hat{H}_2) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 2.542 & 5.358 \\ 3 & 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7.597 & 3.364 \\ 3 & 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 5.187 & 3.736 \\ 9 & 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5.256 & 3.727 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4.176 & 4.812 \\ 8 & 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 4.163 & 9.892 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 7.948 & 3.121 \\ 7 & 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2.276 & 7.706 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 6.698 & 1.387 \\ 5 & 4 & 5 & 9 & 2 & 8 & -1.802 & 2.919 \end{pmatrix}$$

Esto mismo se puede realizar tomando cualesquier columnas de  $\mathcal{H}_{p,q}$  para formar  $H_2$ , sin importar si son contiguas o no, y proyectando mediante la expresión de (3) sobre las restantes, que constituirían la matriz  $H_1$ . Las columnas de la matriz  $\hat{H}_2$ , creadas bajo este procedimiento, se deberán acomodar en  $\hat{\mathcal{H}}_{p,q}$  en las mismas posiciones que tenían las columnas de  $H_2$  en  $\mathcal{H}_{p,q}$ . Por otro lado, este procedimiento también puede ser aplicado a filas, con los respectivos ajustes. Es más, partiendo de los resultados obtenidos, se pueden indagar técnicas para optimizar la realización al adecuar la precisión de los valores antidiagonales de  $\hat{H}_2$  a los de  $H_2$ , variando la precisión en los de  $H_1$ . No obstante, investigar más profundamente estos temas queda fuera de los objetivos de la investigación.

Un comentario más al respecto de la propuesta es que no necesariamente busca representar con alta precisión a la DE. Esto es así ya que si esto ocurre podríamos estar frente a un sobreajuste, u *overfitting* en inglés. Cuando esto sucede, la realización puede mostrar un rendimiento excelente para representar la DE, pero no así en datos nuevos o de prueba. Esta inefficiencia se debe a que el modelo ha "memorizado" la DE dentro del sistema subyacente comprimido en lugar de grabar en él patrones y relaciones generales. Algunos signos comunes de sobreajuste que podría mostrar el sistema subyacente incluyen:

1. Rendimiento de entrenamiento muy alto, pero rendimiento de prueba bajo.
2. Diferencia significativa entre las métricas de rendimiento (por ejemplo, precisión, exactitud) en el conjunto de entrenamiento y en el conjunto de prueba.
3. La realización muestra una alta sensibilidad a pequeñas variaciones en los datos de entrenamiento.

Este tema no se explora más en la investigación por lo mismo que no profundizamos aún más en la propuesta de compresión. Sin embargo, se menciona que para evitar el sobreajuste hay que indagar en la posible aplicación de técnicas de regularización y validación cruzada durante la realización. Estas técnicas pueden incluir la reducción de la complejidad del modelo, el uso de conjuntos de validación para ajustar del modelo y la recopilación de más datos de entrenamiento, si es posible. El objetivo es encontrar un equilibrio entre la capacidad del modelo para capturar patrones relevantes en los datos con los cuales explicitar al sistema subyacente, y su capacidad para generalizar y realizar predicciones precisas en datos no vistos previamente.

Para concluir esta sección, se hará una exploración preliminar de la propuesta anterior al ser incorporada en la realización. El carácter de preliminar consistirá en tener una comprensión inicial de la efectividad de la propuesta al aplicarse a la realización de cierta clase de datos simulados. Esto es así ya que la búsqueda de una comprensión más profunda de la propuesta se desvía demasiado de los objetivos de la presente investigación, así mismo, puede vulnerar los tiempos establecidos para el desarrollo y conclusión de la misma. Proceder de en esta forma preliminar trae algunas ventajas más, de operar de esta manera es la posibilidad de identificar ciertos desafíos y oportunidades de la propuesta, los cuales podrán ayudar a ajustar el enfoque o realizar mejoras posteriormente, en una propuesta de investigación más completa.

Los datos simulados son originados a partir de un modelo estocástico aditivo, es decir, un modelo con una componente determinista a la cual se le agrega, de forma aditiva, una componente aleatoria. La base determinista de dicho modelo incorpora dos partes: una que adiciona estacionalidad y otra que anexiona tendencia. Estas se pueden ver en la siguiente expresión,

$$f(x) = \sin(x^2) + \sqrt{x}$$

donde la componente sinusoidal se asocia a la primera, y la raíz cuadrada a la segunda. Por su parte, el choque aleatorio  $\varepsilon_x \sim N(0, 3)$  se añade a la parte determinista para cada elección de  $x$  que tome. Así, la expresión completa con la cual se generarán los datos  $y$  será

$$y = f(x) + \varepsilon_x = \sin(x^2) + \sqrt{x} + \varepsilon_x \quad (5)$$

Con ella se construyen 10000 muestras de 100 datos<sup>16</sup>, es decir,  $\mathcal{L}_k = \{y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{100,k}\}$ , con  $k = 1, \dots, 10000$ . Cada una de estas se toma como la DE de un sistema, y pasa a usarse en la construcción de una MH,  $\mathcal{H}_{51,50}(\mathcal{L}_k)$ . Luego, esta última se compacta de 24 formas distintas con la propuesta mostrada en la primer parte de esta sección, una por cada número de pares de columnas que se elijan para construir la matriz  $H_2$ <sup>17</sup>. En cada una de ellas, el operador de truncamiento  $T_{r-l}(\cdot)$  se usa tomando  $l = \text{rank}(H_1) - 1$  y  $r$  como el número de filas de  $\mathcal{H}_{51,50}(\mathcal{L}_k)$ .<sup>18</sup> Después de efectuarse lo anterior, se continua de forma habitual con la realización.

El Código C.3 lleva a cabo las realizaciones enunciadas<sup>19</sup>, y también permite seleccionar en cada muestra la mejor de ellas. En la Figura 3.5 podemos ver a todas estas, dispuestas en un gráfico

<sup>16</sup>Los valores asumidos para  $x$  en la parte determinista serán  $x = 1, 2, \dots, 100$ , que se mantendrá en todas las muestras

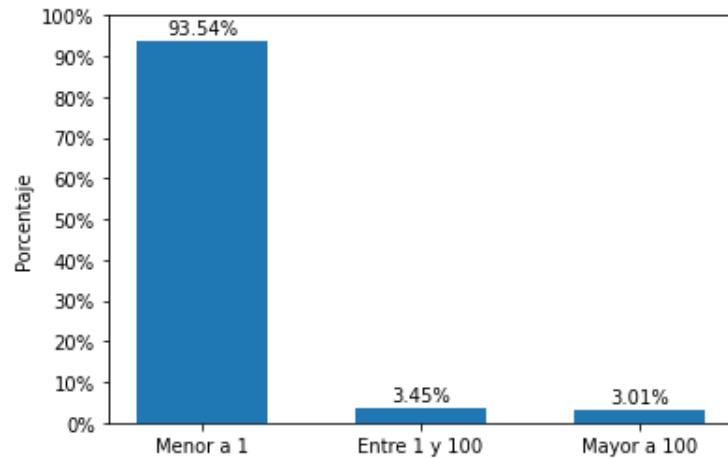
<sup>17</sup>Una cuando  $H_2$  se construye con las últimas 2 columnas de la MH, otra cuando se toman 4 columnas, y así hasta tomar las últimas 48 columnas. Elegir pares de columnas, y no tomar de una en una, se emplea para mantener una cantidad grande de pruebas para la propuesta, sin que esto genere un impacto considerable en el tiempo de procesamiento.

<sup>18</sup>La elección que se hace de  $l$  y  $r$  es para tener una perdida de información pequeña. Esto es así debido a que es una exploración preliminar, y al tiempo de procesamiento de 240000 realizaciones y la determinación de las mejores de ellas.

<sup>19</sup>Con el fin de que estas se puedan replicar, en el código se ha fijado una semilla que abarca a la construcción de los choques aleatorios  $\varepsilon_{1,k}, \varepsilon_{2,k}, \dots, \varepsilon_{100,k} \sim N(0, 3)$ , para  $k = 1, \dots, 10000$

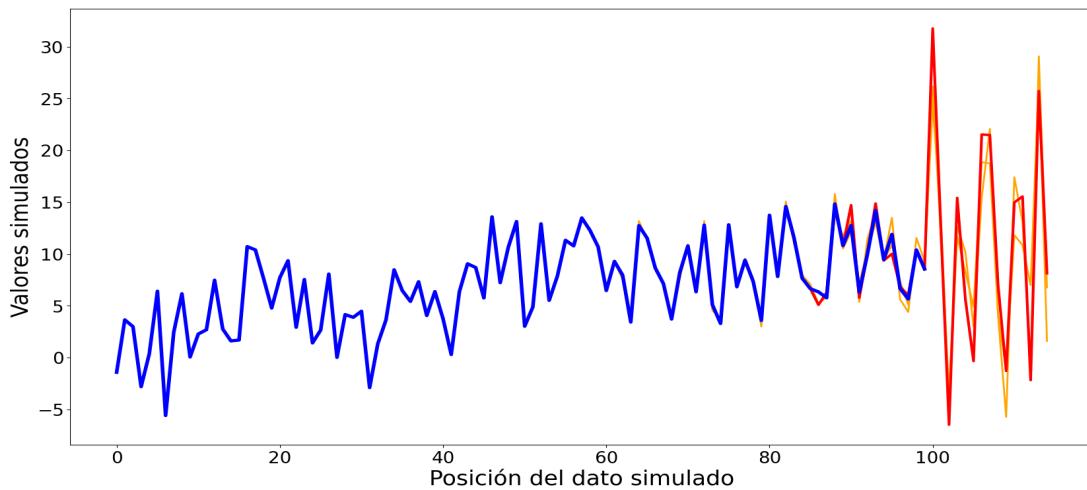
de barras. Se observa que un porcentaje grande de las 10000 mejores aproximaciones es muy cercano a la DE respectiva (su distancia menor a 1), al rededor de 93.5 % según el código. Por su parte, el resto de distanciamientos son pocos, incluso se puede ver que aquellos excesivamente grandes lo son aún menos.

Figura 3.5: Porcentaje de las mejores realizaciones con preservación estructural, clasificadas por la magnitud de proximidad a su respectiva DE simulada,  $n = 10000$



Ahora, del grupo del 93.54 % de las realizaciones, mediante el Código C.3, se obtuvo aquella cuya distancia promedio fuera la más cercana a la media del grupo, que fue la 2774. Después, empleando la DE simulada respectiva a esta realización, se pasó a determinar cuáles eran las realizaciones compactas cuya distancia promedio era menor a 0.003, las cuales fueron 4 y se pueden ver en la Figura 3.6. La linea azul representa la DE simulada, la roja la mejor estimación y las naranjas las 3 restantes realizaciones.<sup>20</sup> Además, las 4 realizaciones en la Figura 3.6 poseen una proyección de 15 posiciones más, del 101 al 115.

Figura 3.6: DE simulada 2744 (azul), estimación de la mejor realización (rojo) y estimaciones de otras 3 realizaciones con distancia a la simulación menor al 0.005 (naranjas)



<sup>20</sup>Se consideró el uso de un solo color para estas 3 estimaciones debido a su notable superposición.

En la Figura 3.6 también podemos observar que los datos generados por las 4 realizaciones están muy bien empalmados a la DE simulada (azul), con ligeras disparidades en la parte final de los 100 datos. Además, en la proyección a 15 periodos, las 4 realizaciones mantienen una tendencia que parece afín a la de los primeros 100 datos, que si recordamos la parte determinista de 5, corresponde a  $\sqrt{x}$ . Es más, la parte de la oscilación periódica,  $\sin x^2$ , también aparece en la proyección. Por consiguiente, hay evidencia de que la realización con la preservación estructural dada, puede identificar de forma aproximada el sistema generador subyacente, la parte determinista del modelo. Estos hechos sugieren que la realización incorporando la preservación tiene cierta robustez y capacidad para lidiar con una variedad de tipo de datos, como los simulados. Esto indica que puede ser una herramienta valiosa en aplicaciones prácticas.

Por último, para cerrar con esta revisión preliminar, se brindan algunas observaciones sobre el método de preservación estructural, que podrían ser punto de partida para una investigación más profunda. Inicialmente, el método también puede ser optimizado y adaptado al considerar tanto las debilidades en el ajuste del 6,46 % de las realizaciones, como las fortalezas en el 93.54 % restante. A partir de las primeras se puede identificar patrones o factores desencadenantes que pueden ser indicadores de sistemas específicos en los que, en general, el método podría fallar. Por su parte, con las segundas se pueden adaptar enfoques alternativos para sistemas como los mencionados y, a su vez, optimizar la propuesta en sistemas propicios, llevando a mejoras en el alcance y refinamientos.

Por otro lado, al ver la Figura 3.6 se puede notar la existencia de una variabilidad relativamente mayor en la proyección que en los primeros 100 datos. La realización capta al sistema subyacente determinista, tanto su tendencia como su estacionalidad, sin embargo, los choques aleatorios sobredimensionan esta última. Por lo cual, es importante identificar cómo influyen las distintas configuraciones de preservación estructural en la mitigación o acentuación de variabilidad de la proyección. Esto podría permitir modular la oscilación, haciéndola más acorde al sistema determinista subyacente. De otro modo, lo que se busca es limpiar la señal del ruido implicado por la compresión del proceso de conservación estructural. Incluso, se podría investigar la incorporación en el proceso de conservación estructural algunas técnicas del filtrado, como las transformadas de Fourier o Wavelet, entre otras.

### 3.4. Algoritmo de Factorización

El **AF** fue mostrado en el inciso d, al inicio del apartado 2.2 Construcción de la realización, como el proceso por el cual una matriz, en nuestro caso  $\mathcal{H}$ , se puede expresar como la multiplicación de  $P$  por  $Q$ , donde la primera es triangular inferior, y la restante cuenta con sus últimas filas nulas.<sup>21</sup> Una forma compacta de verlo se encuentra en la Tabla 3.1<sup>22</sup>.

Tabla 3.1: Forma compacta del Algoritmo de Factorización

	Columna $i$ de $P$	Fila $i$ de $Q$
$i = 1$	$P_{:,i} = \frac{\mathcal{H}_{i,:}}{Q_{i,i}}$	$Q_{i,:} = \mathcal{H}_{i,:}$
$i > 1$	$P_{:,i} = \frac{\mathcal{H}_{i,:} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{i,k} Q_{k,i}}{Q_{i,j_i}}$	$Q_{i,i} = \mathcal{H}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} P_{i,k} Q_{k,i}$

<sup>21</sup>Como se vio, si el rango de  $\mathcal{H}$  es  $n$ , y cuenta con  $N > n$  filas, entonces tiene sus últimas  $N - n$  filas nulas.

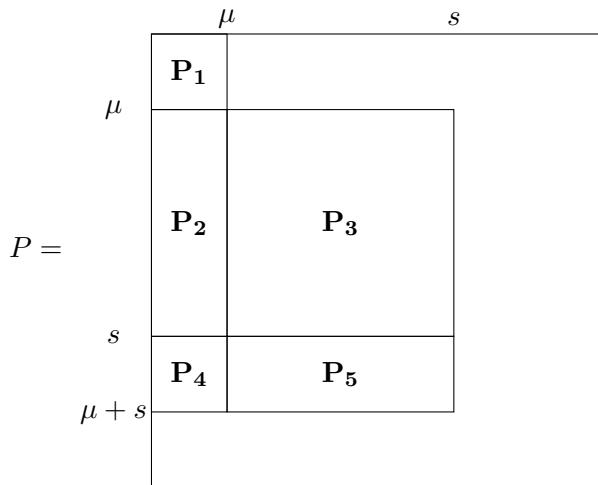
<sup>22</sup>Esta forma compacta está basada en el algoritmo de Casti (1987, pp.134-138)

Aunque la forma e intensidad en que el AF impacta sobre la determinación del sistema subyacente no se puede percibir y descifrar de forma llana y general, es altamente notable. Por ejemplo, si se piensa cómo los pesos en las entradas de la matriz de estado  $F$  influyen sobre su órbita, queda claro que la forma en que se coloquen estos en las distintas posiciones de  $F$  está dando más peso a un comportamiento dinámico que a otros. En este sentido, el AF incidiría en la negatividad o no de la parte real de los valores propios de  $F$ . Así, en caso de inclinar todas las partes reales a ser negativas, haría que la órbita del sistema fuera estable o, en su defecto, inestable. Es más, como también determina la magnitud de los valores propios, afecta de igual manera intensidad de oscilación de los valores estimados y, por tanto, la precisión entre ésta y la DE. En consecuencia, podemos decir que el AF contribuye a la definición del plazo en que las proyecciones de la DE pueden ser oportunas o no.

Para aterrizar lo que se ha mencionado, amén de mencionar otras características sobre las que el AF influye al momento de gestar el sistema subyacente, partamos de una DE de  $\mu \times \eta$  arbitraria. Al usar el AF sobre la  $\mathcal{H}$  respectiva a la DE, asumiendo que el rango de esta es  $s$  y que cumple con la hipótesis de la realización (2), en particular obtenemos la matriz  $P$ , a la cual podemos dividir en submatrices  $P_1, \dots, P_5$ , siguiendo lo que se muestra en la Figura 3.7. La matriz  $F$  en términos de estas submatrices sería dada de la siguiente manera

$$F = P_s^{-1} P_s^* = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

Figura 3.7: División de la matriz  $P$  en submatrices relevantes para la dinámica del sistema



Ahora, el segundo elemento de la órbita de la matriz de estado  $F$  bajo la expresión anterior, es

decir, en términos de las  $P_i$ , quedaría de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 F^2 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2P_1^{-1} - P_2P_1^{-1} & I_{s-\mu} \\ P_4P_1^{-1} - P_5P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{r-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y si ahora tomamos el tercer elemento de su órbita en función de las  $P_i$  tendríamos

$$\begin{aligned}
 F^3 &= FF^2 \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_2P_1^{-1} - P_2P_1^{-1} & I_{s-\mu} \\ P_4P_1^{-1} - P_5P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

de los tres primeros elementos de la órbita de la matriz de estado podemos entrever de manera relativamente fácil el siguiente resultado general para  $t > 1$ ,

$$F^{t-1} = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix}$$

Y acoplando la expresión general de  $F$ , en términos de las  $P_i$ , a las matrices  $G$  y  $H$ , obtenemos una fórmula que representa o estima la DE a partir del sistema subyacente que se determinó, la cual es

$$\begin{aligned}
 HF^{t-1}G &= H \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} P_2 & P_3 \\ P_4 & P_5 \end{pmatrix} G \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu} \\
 &= \begin{pmatrix} P_1 & \mathbf{0} \\ P_2 & P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & \mathbf{0} \\ -P_3^{-1}P_2P_1^{-1} & P_3^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5P_3^{-1}P_2]P_1^{-1} & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu} \\
 &= \begin{pmatrix} I_\mu & \mathbf{0} \\ P_4 - P_5P_3^{-1}P_2 & P_5P_3^{-1} \end{pmatrix}^{t-1} \mathcal{H}_{\mu:\mu+s,1:\mu}
 \end{aligned}$$

En esta última expresión la dinámica del sistema para cada  $s \leq m(\mu - 1)$  es determinada por la órbita de la matriz  $s \times s$

$$D_s = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_{s-\mu} \\ [P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} & P_5 P_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Es más, dependiendo de si  $s \geq 2\mu$  (es decir,  $s - \mu \geq \mu$ ) o  $s < 2\mu$  (o lo que es lo mismo,  $s - \mu < \mu$ ), la traza de  $D_s$  contendrá sólo elementos de la matriz  $P_5 P_3^{-1} \in \mathbb{R}^{\mu \times s-\mu}$ , o de ésta y la matriz  $[P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1}$ , respectivamente. Así, podemos definir la matriz  $P_6(s)$  como

$$P_6(s) = \begin{cases} (P_5 P_3^{-1})_{:,2\mu-s+1:s-\mu} & s \geq 2\mu \\ ([P_4 - P_5 P_3^{-1} P_2] P_1^{-1} \quad P_5 P_3^{-1})_{:,s+1:s} & s < 2\mu \end{cases}$$

y si tomamos a los  $\lambda_i$  como los valores propios de  $D_s$ , se cumple que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(D_s) = \text{tr}(P_6(s))$$

Luego, considerando que la estabilidad y la rapidez de convergencia del sistema son determinadas por los valores propios de  $D_s$ , y debido a la igualdad anterior, tenemos que la traza de  $P_6(s)$  puede proporcionar información en términos generales sobre el sistema, como la velocidad de convergencia. Si es grande (en valor absoluto), implica que las partes reales de los valores propios son grandes en valor absoluto, lo que generalmente puede indicar una convergencia más rápida. Por otro lado, si la traza es pequeña, las partes reales de los valores propios son pequeñas, lo que puede sugerir una convergencia más lenta.

Como vemos, la traza de  $P_6(s)$  permite tener una lectura cualitativa de ciertas características del sistema, sin embargo, no proporciona una medida precisa. Un análisis detallado debe basarse necesariamente en un examen directo de los valores propios de  $D_s$ , y sus ubicaciones en el plano complejo. No obstante, hablar de la traza de  $P_6(s)$  y su relación con los valores propios busca enfatizar la importancia del AF. Mostrar cómo ciertos elementos de combinaciones de las submatrices  $P_1, \dots, P_5$  de  $P$  intervienen en la confección de la órbita del sistema subyacente y su vaivén, marca la pauta sobre el tamaño de los elementos. La influencia diferenciada de los pesos en las matrices  $P_1, \dots, P_5$ , que componen a  $P_6(s)$ , y el valor  $s$ , que evoca el truncamiento elegido, sobre los valores propios de  $D_s$  es ahora más directa. Con ello podemos ver de cierta manera cómo influyen estos sobre su dinámica, la estimación de la DE y la proyección de la DE, así mismo, es posible establecer como el AF tiene efectos sobre la estructura, dimensión, estabilidad, convergencia, observabilidad y controlabilidad del sistema, vía las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ .

Cabe aclarar que el uso de la traza de  $P_6(s)$  para hacer notar lo anterior, estriba en lo complejo que resulta delinear e interpretar con mayor precisión las conexiones anteriores. La relación entre características y la dinámica del sistema, el valor de  $s$  y la forma de construir  $P$  y  $Q$  mediante el AF, no es fácil de expresar y glossar. En efecto, tomando al AF, este construye las entradas de

las matrices  $P$  y  $Q$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \boxed{Q_{1,:}} &= H_{1,:} \\
 \boxed{P_{:,1}} &= \frac{1}{Q_{1,1}} H_{:,1} \\
 \boxed{Q_{2,2:}} &= H_{2,2:} \\
 P_{2:,2} &= \frac{1}{Q_{2,2}} (H_{2:,2} - \boxed{P_{2:,1} Q_{1,2}}) \\
 Q_{3,3:} &= H_{3,3:} - \boxed{P_{3,1} Q_{1,3}:} \\
 P_{3:,3} &= \frac{1}{Q_{3,3}} (H_{3:,3} - \boxed{P_{3:,1} Q_{1,3}} - P_{3:,2} Q_{2,3}) \\
 &= \frac{1}{Q_{3,3}} \left( H_{3:,3} - \boxed{P_{3:,1} Q_{1,3}} - \frac{1}{Q_{2,2}} (H_{3:,2} - \boxed{P_{3:,1} Q_{1,2}}) \boxed{Q_{2,3}} \right) \\
 &= \frac{1}{Q_{3,3}} \left( H_{3:,3} - \boxed{P_{3:,1} Q_{1,3}} - \frac{\boxed{Q_{2,3}}}{Q_{2,2}} (H_{3:,2} - \boxed{P_{3:,1} Q_{1,2}}) \right) \\
 Q_{4,4:} &= H_{4,4:} - \boxed{P_{4,1} Q_{1,4:}} - P_{4,2} Q_{2,4:} \\
 &= H_{4,4:} - \boxed{P_{4,1} Q_{1,4:}} - \frac{Q_{2,4,:}}{Q_{2,2}} (H_{4,2} - \boxed{P_{4,1} Q_{1,2}})
 \end{aligned}$$

Es inmediato notar que dicho proceso es sinuoso y tiende a volcar a las entradas en una mezcla compleja de los elementos de  $\mathcal{H}$ . Para enfatizar este hecho, tomemos una sucesión de elementos:  $a, b, c, d, e$  y  $f$ , y construyamos con ellos la matriz de Hankel siguiente

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Luego, aplicamos sobre esta el Código C.4, que efectúa una descomposición simbólica de ella en  $P$  y  $Q$ , siguiendo el AF mostrado con anterioridad. Procediendo de esta manera, las matrices  $P$  y  $Q$  resultan ser,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c}{a} & \frac{d-\frac{bc}{a}}{c-\frac{b^2}{a}} & 1 & 0 \\ \frac{d}{a} & \frac{e-\frac{bd}{a}}{c-\frac{b^2}{a}} & \frac{f-\frac{(d-\frac{bc}{a})(e-\frac{bd}{a})}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{cd}{a}}{e-\frac{(d-\frac{bc}{a})^2}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{c^2}{a}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & c-\frac{b^2}{a} & d-\frac{bc}{a} \\ 0 & 0 & e-\frac{(d-\frac{bc}{a})^2}{c-\frac{b^2}{a}}-\frac{c^2}{a} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En las expresiones se muestra cómo los elementos de la sucesión se irán mezclando de forma cada vez más enrevesada para construirlos, es más, será más engorrosa en cuanto la sucesión crezca

o los elementos de ella sean matrices de mayor dimensión.<sup>23</sup> Así, a partir de cierto momento, determinar e interpretar cómo es la expresión que relaciona los elementos de  $\mathcal{H}$  y  $D_s$  será inviable. Es más, la matriz de estado padece los mismo, no es fácil conectarla con los datos de  $\mathcal{H}$ , y también es difícil interpretar sus entradas. Esto se puede ver en la siguiente matriz simbólica, que representa a la matriz de estado  $F$  del ejemplo anterior.

$$\begin{pmatrix} \frac{b}{a} & 1 & 0 \\ \frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2} & \frac{d - \frac{bc}{a}}{c - \frac{b^2}{a}} - \frac{b}{a} & 1 \\ \frac{b(bd - c^2)}{a(ac - b^2)} + \frac{c(-ad + bc)}{a(ac - b^2)} + \frac{d}{a} & \frac{bd - c^2}{ac - b^2} + \frac{(d - \frac{bc}{a})(-ad + bc)}{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)(ac - b^2)} + \frac{e - \frac{bd}{a}}{c - \frac{b^2}{a}} & \frac{f - \frac{(d - \frac{bc}{a})(e - \frac{bd}{a})}{c - \frac{b^2}{a}} - \frac{cd}{a}}{e - \frac{(d - \frac{bc}{a})^2}{c - \frac{b^2}{a}} - \frac{c^2}{a}} + \frac{ad + bc}{ac - b^2} \end{pmatrix}$$

La enmarañada forma de construcción de  $P$  y  $Q$  utilizando el AF, como se ve, hace más engorrosa la conexión e interpretación entre los datos de  $\mathcal{H}$ , o sus truncamientos, y los valores en la realización, la órbita de la matriz de estado y otras propiedades importantes del sistema subyacente.

En virtud de la influencia que tienen las matrices  $P$  y  $Q$  sobre la determinación del sistema subyacente, la aproximación a la DE y la proyección de esta, en el caso de operar sobre un truncamiento de la MH, investigar la manera de optimizar su construcción es relevante. En este sentido, la optimización buscaría distribuir los elementos de  $\mathcal{H}_s$  entre  $P$  y  $Q$ ,<sup>24</sup> tal que la órbita de la matriz  $F$  o, equivalentemente, la matriz  $D_s$ , permita que la distancia entre la DE y la sucesión estimada por la realización, bajo  $P$  y  $Q$ , sea la más armoniosa y mínima posible.<sup>25</sup>

El problema de optimización que aquí se plantea es interesante y desafiante. Consideremos que  $\mathcal{F}$  es el conjunto de funciones  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n}$  tales que  $f(\mathcal{H}_s) = (P, Q)$ , con  $P$  una matriz triangular inferior con unos en su diagonal principal,  $Q$  una matriz con sus últimas  $k$  filas nulas<sup>26</sup>, y  $\mathcal{H}_s = PQ$ . Entonces, la optimización busca encontrar a  $f_* \in \mathcal{F}$  tal que la realización  $(F_*, G_*, H_*)$ , bajo sus respectivas matrices  $P_*$  y  $Q_*$ , permite que

$$\left| DE - \{H_* F_*^{t-1} G_*\} \right| = \min \left\{ \left| DE - \{HF^{t-1}G\} \right| : (H, F, G) \text{ es generada por } f \in \mathcal{F} \right\} \quad (6)$$

Una variante de este proceso de optimización que podría ser interesante investigar, sería aquella en la cual se use directamente la matriz de Hankel  $\mathcal{H}$  y no su truncamiento  $\mathcal{H}_s$ . Este proceso, a diferencia del enunciado anteriormente, buscaría encontrar la función  $f_*$  que satisfaga 6, restringido a que

Los problemas de optimización planteados requieren una combinación de elementos de álgebra moderna, análisis matricial y, posiblemente, algunas otras técnicas analíticas, numéricas y heurísticas más. Así mismo, poseen limitaciones y suposiciones cruciales, por lo que explorar estrategias para enfrentarlas también cobra importancia. Por lo mismo, es bastante complejo dar respuesta al problema de la definición de las funciones anteriores y garantizar el cumplimiento

<sup>23</sup>En lector puede modificar el Código C.4, aumentando el tamaño de la sucesión  $a, b, c, d, e$  y  $f$ , o convirtiéndola en una sucesión simbólica de matrices, y comprobar así cómo de intrincada se ve la mezcla de los elementos de la sucesión sobre las entradas de  $P, Q$  y  $F$ .

<sup>24</sup>Dentro de este proceso, las matrices  $P$  y  $Q$  tienen la misma estructura que en el caso del AF, lo único que cambia es la forma de llenar las entradas no nulas en cada una, que será lo que deberá optimizarse.

<sup>25</sup>Cuando se habla de armoniosa y mínima se quiere enfatizar el hecho de que  $F$  tenga la menor dimensión posible, explicando lo mejor posible la DE.

<sup>26</sup>El valor de  $k$  es la cantidad de filas de  $\mathcal{H}_s$  menos su rango  $s$ .

de las condiciones mencionadas, las que pueden limitar las opciones de  $f_*$ . Así, en virtud de que podría ser una investigación por sí misma, que el tiempo que demanda tal investigación puede ser considerablemente amplio y con ello la presente investigación se desviaría demasiado de sus objetivos, por tanto, el proceso de optimización queda como tema para una investigación futura.

Sin embargo, a pesar de no emprender la búsqueda de alguno de los procesos de optimización planteados, en la presente investigación sí se hace una propuesta de apertura para mostrar la importancia y los beneficios de tal investigación, lo cual está conectado con los objetivos de la investigación. Además, dicha propuesta se aplicará al modelo del capítulo siguiente con el fin de observar algunas propiedades destacadas de ella, las cuales pueden redundar en beneficios de contraste para la presente investigación, además en la posterior atención de los procesos de optimización antedichos.

La propuesta de factorización que se hará, surgió al observar el peso que tenían las últimas filas de la matriz  $Q$ , construida al aplicar el AF directamente sobre  $\mathcal{H}$  del modelo en el Capítulo 2. En este caso, al no aplicar el AF sobre acotamientos de la MH, los últimos valores no eran nulos, y si me ocurrió que una descomposición que permita que estos pudieran ser pequeños al momento de aportar a la construcción de  $\mathcal{H}$ . Entonces, podrían ser suprimidos, ocasionando una compresión de información con poca pérdida de información y poco perjuicio sobre la estructura de Hankel.

Con lo anterior en mente, considerando una DE con matrices  $W_i$  de  $m \times n$  y una MH de  $\mu \times \eta$ , elaboré una descomposición que denominé factorización en suma finita **FSF**. Su construcción comienza con la construcción de las matrices  $P$  y  $Q_0$ . La primera tiene una estructura similar a la matriz  $P$  en el AF: triangular inferior con diagonal principal de unos, pero los valores por debajo de la diagonal principal ahora serán iguales a los de  $\mathcal{H}$  en las mismas posiciones, divididos entre el valor en la diagonal principal de  $\mathcal{H}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{w_{21}}{w_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_{m\mu,1}}{w_{11}} & \cdots & \frac{w_{m\mu,m\mu-1}}{w_{m\mu-1,m\mu-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

Por su parte,  $Q_0$  tiene ceros por debajo de su diagonal principal e iguala a  $\mathcal{H}$  entrada a entrada en el resto de posiciones.

$$Q_0 = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1,n\eta-1} & w_{1,n\eta} \\ 0 & w_{22} & \cdots & w_{2,n\eta-1} & w_{2,n\eta} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_{m\mu,n\eta-1} & w_{m\mu,n\eta} \end{pmatrix}$$

Luego, bajo la siguiente igualdad

$$\mathcal{H} = P * Q_0 - \sum_{i=1} Q_i$$

donde las matrices  $Q_i$ , que tienen las primeras  $i$  filas e  $i$  columnas nulas, se construyen de la

siguiente manera

$$Q_i = \frac{1}{w_{ii}} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & w_{i+1,i}w_{i+1,i} & \cdots & w_{i+1,i}w_{i+1,i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & w_{i+1,i}w_{i+1,i} & \cdots & w_{i+1,i}w_{i+1,i} \end{pmatrix}$$

y debido a que  $P$  en el FSF es invertible por como fue definida, entonces podemos construir la nueva matriz  $Q$  de la siguiente forma

$$Q = Q_0 - P^{-1} \sum_{i=1} Q_i$$

donde las matrices  $Q_i$  sumadas y pre-multiplicadas por  $P^{-1}$ , se restan para disminuir el peso de las últimas filas de la matriz  $Q$  en el proceso de construcción de  $\mathcal{H}$ . Esta forma de construir la matriz  $Q$  no es la única ni la más rápida. De hecho, de forma directa se puede generar  $Q$  al pre-multiplicar la inversa de  $P$  a  $\mathcal{H}$ ,

$$P^{-1}\mathcal{H} = Q$$

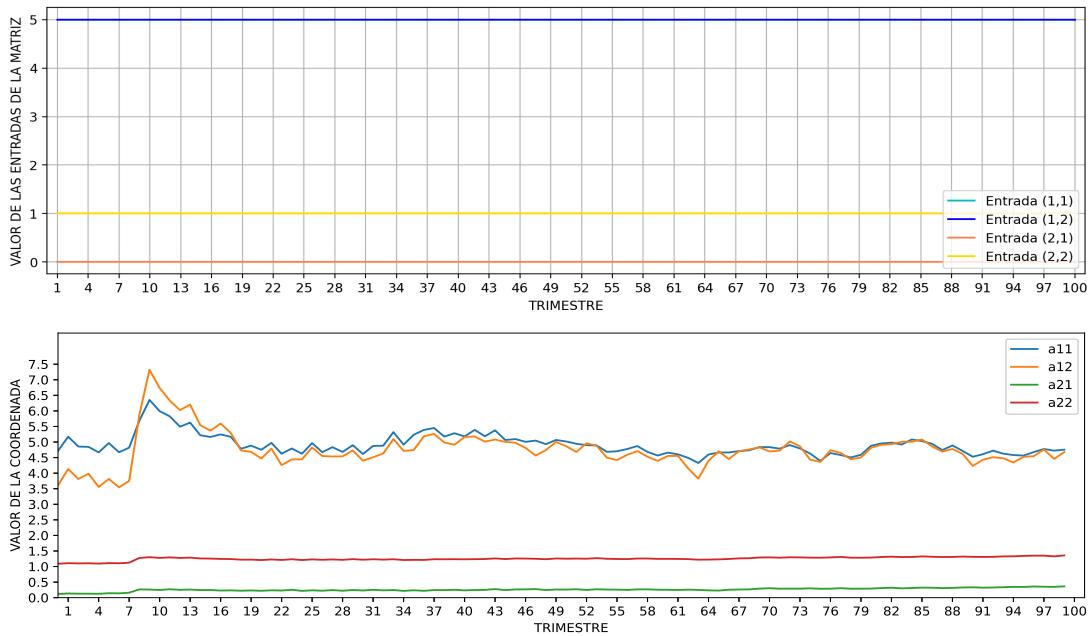
sin embargo, de haber aplicado este proceder, no habría sido posible ilustrar el efecto de las matrices  $Q_i$ , al ser pre-multiplicadas por la inversa de  $P$ , sobre la zona inferior de  $Q_0$ , elemento que puede ayudar a entender la importancia del proceso de optimización que quedó abierto.

Esta propuesta de factorización puede tener ventajas importantes en el proceso de realización para ciertos sistemas, afianzando las ideas expuestas sobre la necesidad de un proceso de optimización. Para poner esto en claro, se mostrará cómo es que construir  $P$  y  $Q$  mediante el FSF puede brindar mejores resultados que hacerlo con el AF. Con este fin, primero revisaremos la DE del modelo del Capítulo 2 y la mejor representación compacta de la DE bajo el AF. En la Figura 3.9 notamos como la mejor aproximación bajo el AF (arriba)<sup>27</sup> puede representar relativamente bien el periodo posterior al trimestre 22 de la DE (abajo), pero subestimando la variabilidad que se encuentra en los primeros trimestres de este.

---

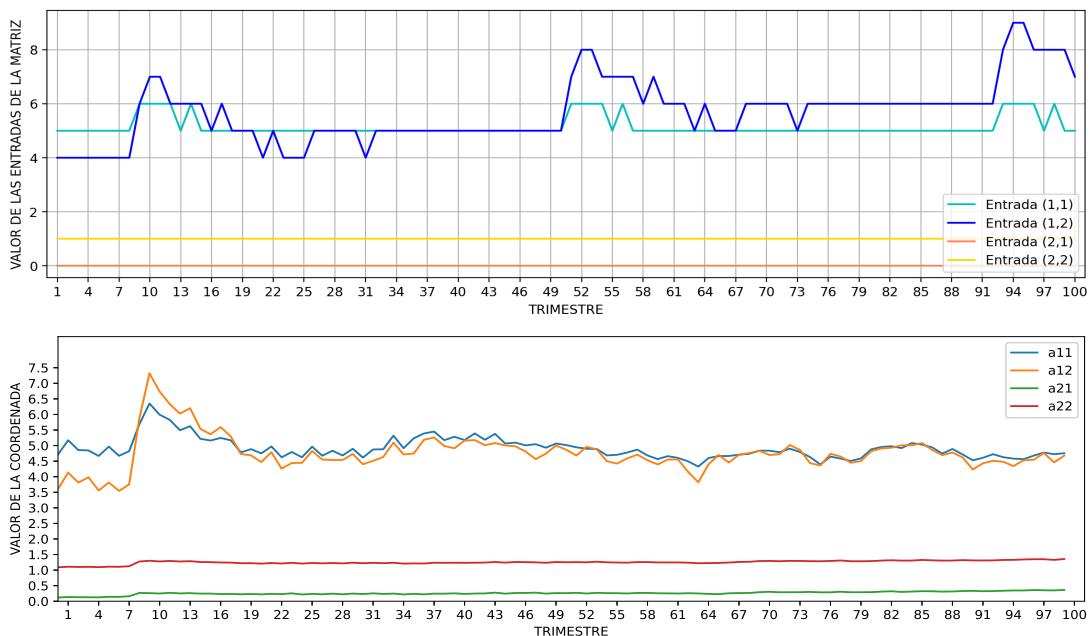
<sup>27</sup>La serie de tiempo de la entrada (1,1) en las matrices estimadas, que poseen el color cian, no aparecen debido a que se encuentran por debajo de la linea azul, que corresponde a la serie de tiempo de la entrada (1,2) de las matrices estimadas.

Figura 3.8: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de la mejor aproximación dada por la realización (arriba) tomando el AF



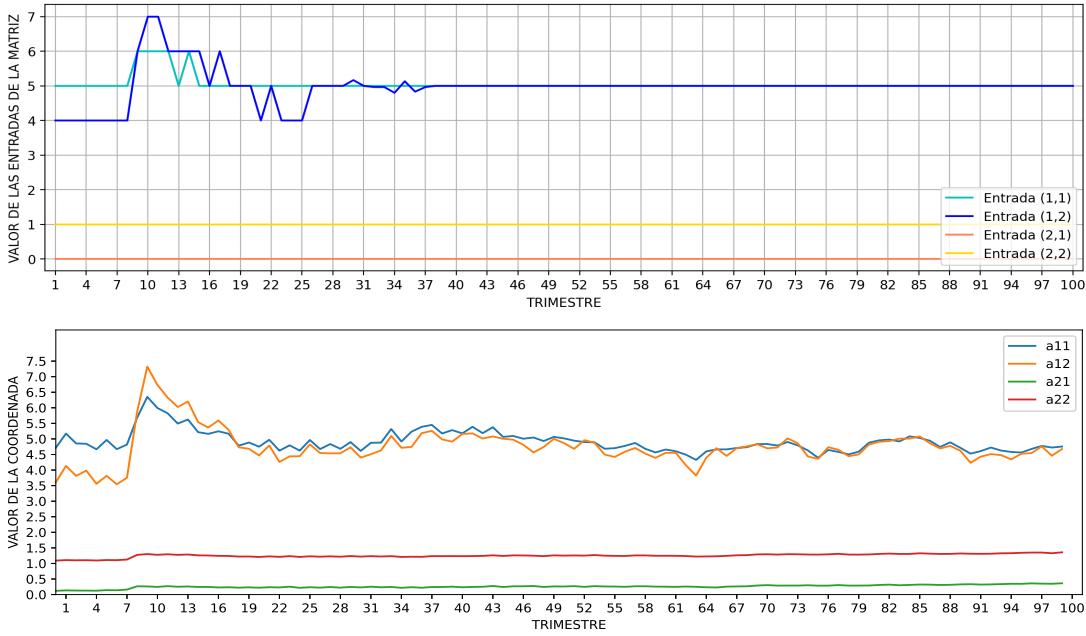
Podríamos considerar el uso de otras de las mejores aproximaciones bajo el AF, las cuales puedan representar la primer parte que posee mayor variabilidad. No obstante, éstas generan un tipo de patrón que aunque ahora sí representa mejor la primer parte de la DE, sobreestima a los valores de los períodos posteriores al 20, Figura 3.9 (arriba).

Figura 3.9: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de una de las primeras mejores aproximaciones dada por la realización (arriba) bajo el AF



Si ahora vemos la Figura 3.10, podemos observar las gráficas que representan la evolución temporal de las entradas en las matrices de la DE del modelo del Capítulo 2 (abajo), y compararlas con las respectivas entradas de la mejor aproximación conseguida bajo la realización con el FSF (arriba). Es inmediato observar cómo es que la mejor aproximación del FSF ahora sí puede representar de mucha mejor manera la zona de mayor variabilidad en los primeros 20 primeros períodos, y también la parte posterior que es menos veleidosa.

Figura 3.10: Series de tiempo de las entradas en las matrices de la DE (abajo) del modelo del Capítulo 2 y de la mejor aproximación dada por la realización (arriba) bajo el FSF



### 3.5. Realización tiempo variante por acortamiento de series

Los sistemas reales a menudo evolucionan al pasar el tiempo, en particular, aquellos en el ámbito económico. Estos lo consiguen en la medida en que las interacciones entre individuos se transforman y, macroscópicamente, causan modificaciones promedio sostenidas de las relaciones económicas, o por alguna otra fuerza de cambio. Sin embargo, como se indicó en una sección previa, la variabilidad del sistema no siempre es bien capturada por una realización invariante. En este sentido, al igual que la conservación estructural o el grado de optimización de la factorización, la calidad de la realización se ve influida por el grado de inclusión del cambio del sistema en ella.

Por otro lado, la inclusión del efecto temporal también desempeña un papel esencial en el control dinámico del cambio estructural. Para ilustrar el punto se puede pensar en lo habitual que es la aplicación de estrategias o políticas económicas a corto, mediano y largo plazo. Ellas inducen cambios en el sistema económico, los cuales pueden modificar su estructura. Debido a las complejidades del proceso, esta alteración estructural puede no resultar como se esperaba. Por ello, para direccionar la estructura a un estado deseado se debe prever el sentido del cambio, así como saber ajustar la dimensión y profundidad de la estrategia o política de forma continua. Es aquí donde la realización tiempo variante tiene una zona donde podría aprovecharse.

Por todo lo anterior es que se desarrolla la presente propuesta de implementación de un tipo de realización tiempo variante. Ella intenta ofrecer una mayor flexibilidad al permitir que las entradas en las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  varíen con el tiempo, es decir, que se vuelvan  $F(t)$ ,  $G(t)$  y  $H(t)$ . Esto facilita la adaptación de la realización a sistemas complejos, fuertemente cambiantes o que tienen ciclos marcados. Sin embargo, la propuesta que se hace aquí únicamente queda en el ámbito teórico. Esto es debido a que requiere solventar unas situaciones que se mencionan al final del apartado, alejándose de los fines y tiempos de la presente investigación. Además de que también precisa que se solventen los temas de la preservación estructural y la optimización del algoritmo de factorización para poder obtener mejores resultados.

Para comenzar con la construcción de la propuesta, asúmase una serie de datos  $\{L_t\}_{\mathbb{N}_n}$  que pueden ser números, vectores o matrices. Entonces, su dinámica se puede establecer como sigue

$$\begin{aligned} L_2 &= f_1(L_1) \\ L_3 &= f_2(L_2) \\ \vdots &= \vdots \\ L_n &= f_{n-1}(L_{n-1}) \end{aligned}$$

donde cada función  $f_t$  representa un sistema de forma externa, es decir, es una fotografía de él que resume toda su actividad entre el tiempo  $t - 1$  y el tiempo  $t$ , la cual permite pasar de  $L_{t-1}$  a  $L_t$ . Si este sistema es lineal o lo aproximamos linealmente, tendríamos que la dinámica se torna de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L_2 &= A_1 L_1 \\ L_3 &= A_2 L_2 \\ \vdots &= \vdots \\ L_n &= A_{n-1} L_{n-1} \end{aligned}$$

donde  $A_t$  es la matriz asociada a la función lineal  $f_t$  y, por consiguiente, ellas representan la DE del sistema. A esta le podemos aplicar la realización, pudiendo ser con o sin compresión de información, dependiendo cual es la que brinda el mejor ajuste, y así obtener la siguiente expresión para  $t = 1, 2, \dots, n$ ,

$$L_t \approx \hat{L}_t = H_1 F_1^{t-1} G_1 \quad (7)$$

Pero esta expresión también se puede obtener de la DE quitando el primer elemento,  $L_2, \dots, L_n$ ; los dos primeros elementos,  $L_3, \dots, L_n$ ;  $\dots$ ; y los  $n - 2$  primeros elementos,  $L_{n-1}, L_n$ . Así, este proceso crea las realizaciones  $(F_j, G_j, H_j)$  con  $i = 1, \dots, n - 2$ , ubicadas en la última fila de la Figura 3.11, las cuales permiten cumplir la expresión

$$L_{t,j} \approx \hat{L}_{t,j} = H_j F_j^{t-1} G_j$$

con  $j = 0, 1, \dots, n - 2$  indicando el número de elementos que se retiraron a la DE para efectuar la realización. Estas realizaciones junto con la DE original generan sucesiones longitudinales (verticales), que corresponden a las columnas de la Figura 3.11.<sup>28</sup>

---

<sup>28</sup>Sin considerar ni la fila inferior ni la columna extrema derecha.

Figura 3.11: Esquema del método RAS para un sistema tiempo-variante

$L_n$	$\hat{L}_{n,1}$	$\hat{L}_{n,2}$	$\cdots$	$\hat{L}_{n,n-2}$	$(F'_n, G'_n, H'_n)$
$L_{n-1}$	$\hat{L}_{n-1,1}$	$\hat{L}_{n-1,2}$	$\cdots$	$\hat{L}_{n-1,n-2}$	$(F'_{n-1}, G'_{n-1}, H'_{n-2})$
$L_{n-2}$	$\hat{L}_{n-2,1}$	$\hat{L}_{n-2,2}$	$\cdots$	■	$(F'_{n-2}, G'_{n-2}, H'_{n-2})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	■	$\vdots$
$L_2$	$\hat{L}_{2,1}$	$\hat{L}_{2,2}$	$\cdots$	■	$(F'_2, G'_2, H'_2)$
$L_1$	$\hat{L}_{1,1}$	■	$\cdots$	■	$(F'_1, G'_1, H'_1)$
<hr/>					
$(F_1, G_1, H_1) \quad (F_2, G_2, H_2) \quad \cdots \quad (F_{n-2}, G_{n-2}, H_{n-2}) \quad (F_r, G_r, H_r), \quad r = F', G', H'$					

Así mismo, para un mismo tiempo  $t$ , podemos encontrar un elemento de la DE y una o varias estimaciones de dicho elemento,  $\hat{L}_{t,j}$ , donde  $t = 1, \dots, n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-2$  y  $\hat{L}_{t,0} = L_t$ . En la Figura 3.11 estas se corresponden con las filas, exceptuando la que se encuentra en la parte de abajo, y también sin incluir en ellas los elementos en la columna de la extrema derecha. Los elementos en una fila de tiempo  $t$  poseen más información sobre el estado del sistema en dicho tiempo. Es más, esta se vuelve más específica en cuanto más a la derecha se encuentre.<sup>29</sup> Así, podemos incorporar un orden a los elementos de las filas, desde izquierda a derecha. A partir de esto se puede decir que los elementos en la fila reflejan al sistema subyacente en el tiempo  $t$  con cierta precisión asociada a su orden. Por tanto, son una representación externa del sistema en tal tiempo, y se puede pasar a efectuar una realización  $(F', G', H')$  sobre ella, columna extrema derecha en la Figura 3.11.

$$\hat{L}_{t,j} \approx H'_t (F'_t)^j G'_t \quad (8)$$

A partir de estas realizaciones de corte transversal, podemos generar a su vez tres sucesiones:  $F'_1, \dots, F'_n$ ;  $G'_1, \dots, G'_n$  y  $H'_1, \dots, H'_n$ , y como cada una de las sucesiones representa la misma parte del sistema subyacente en cada tiempo, podemos verlas como una representación externa de dicha característica. Por lo cual les podemos encontrar su realización, las cuales se pueden ver en la esquina inferior derecha de la Figura 3.11. La primer serie tiene por realización a  $(F_{F'}, G_{F'}, H_{F'})$ ; la segunda a  $(F_{G'}, G_{G'}, H_{G'})$ ; y la tercera a  $(F_{H'}, G_{H'}, H_{H'})$ .

A partir de las últimas realizaciones se tiene que

$$F'_t \approx H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \quad G'_t \approx H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \quad H'_t \approx H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'}$$

y sustituyendo en (8), tomando  $j = t - 1$ , se sigue que

$$L_t \approx \hat{L}_{t,t-1} \approx \left( H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'} \right) \left( H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \right)^{t-1} \left( H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \right) \quad (9)$$

Así, la terna de matrices  $(F(t), G(t), H(t))$  definidas como

$$\begin{aligned} F(t) &= H_{F'} F_{F'}^{t-1} G_{F'} \\ G(t) &= H_{G'} F_{G'}^{t-1} G_{G'} \\ H(t) &= H_{H'} F_{H'}^{t-1} G_{H'} \end{aligned}$$

serían la propuesta de realización tiempo variante que hago de la DE, a la cual denomino realización por acortamiento de series (RAS).

<sup>29</sup>Esto debido a que la realización tiende a aproximar de mejor manera a los primeros elementos de la DE.

Para cerrar este apartado he de mencionar brevemente algunos inconvenientes de esta propuesta que contribuyen a que se mantenga en un domino teórico. El primero de ellos es que las realizaciones de corte transversal  $F'_t$ ,  $G'_t$  y  $H'_t$ , tienden a cambiar sus dimensiones para cada  $t$ . Esto genera problemas para poder obtener las realizaciones  $(F_r, G_r, H_r)$  con  $r = F', G', H'$ . Esto en virtud a que no se tiene una realización para la cual la matriz de Hankel tenga bloques antidiagonales con matrices de distinto tamaño. Incluso si damos pie a la homogenidad al agregar más filas y columnas de ceros a las matrices con dimensión pequeña, habitualmente tal incremento de tamaño en las matrices exigirá un aumento en el costo computacional de procesamiento, lo que aumentará el tiempo para efectuar la realización.

Otro inconveniente es la estabilidad numérica del proceso presentado. Dado todas las realizaciones que demanda la propuesta, además de lo mencionado sobre la falta de homogenidad y el gran tamaño de las matrices  $F'_t$ ,  $G'_t$  y  $H'_t$ , las imprecisiones, aun siendo pequeñas, pueden llegar a acumularse y sobreponerse al umbral donde el algoritmo propuesto preserva su estabilidad numérica. Esto conlleva una pérdida de precisión y el correlato de una fuerte divergencia entre las estimaciones y la DE, así como una identificación del sistema subyacente altamente cuestionable. Una forma de lidiar con esto es aumentando la precisión de manera considerable en los pasos de la realización. No obstante, de nueva cuenta, el peso de tal acción implica una gran demanda de recursos computacionales, además de poder requerir un tiempo cuantioso para llevarla a cabo.

Los últimos problemas emanan del gran tamaño que pueden alcanzar las matrices  $F(t)$ ,  $G(t)$  y  $H(t)$ . Por un lado aumenta la dificultad de interpretar la realización. Por otro, debido a la amplitud de elementos, identificar como llevar a cambio el control del cambio estructural se vuelve sinuoso. Es más, el tamaño afecta la aplicación de métodos para la determinación de entornos de confianza, como el bootstrap, elevando el tiempo requerido para definirlos. Es por esto, así como por los puntos anteriores, que no se aborda más que teóricamente la propuesta de realización variante. Es más, aquí se hace evidente la importancia de investigar la optimización del algoritmo de factorización y la preservación estructural. Ellos podrían ayudar a disminuir la imprecisión y aplicar métodos de compresión de información para homogenizar los tamaños de las matrices, así como hacerlos interpretables.

### 3.6. Análisis de la estructura del sistema subyacente

La estabilidad en un sistema de espacio de estado que se analiza con frecuencia es la de Lyapunov. Se encuentra relacionada con la capacidad del sistema para mantenerse en un estado de equilibrio o regresar a él después de una perturbación. Es evaluada a través de los autovalores de la matriz de estado  $F$ . Si todas las partes reales de los autovalores son negativas ( $Re(\lambda) < 0$  para todos los  $\lambda$ ), el sistema se considera asintóticamente estable. Esto significa que, a medida que pasa el tiempo, las variables económicas convergen hacia un estado de equilibrio. Por otro lado, si al menos un autovalor tiene una parte real positiva ( $Re(\lambda) > 0$  para al menos un  $\lambda$ ), el sistema se considera inestable. Esto indica que el sistema no tiende a un equilibrio y puede experimentar oscilaciones no controladas o divergencia en sus variables económicas. Una última opción es que algunos autovalores tienen partes reales negativas y otros tienen partes reales positivas. En este caso, el sistema puede ser semiestable o marginalmente estable. De esto se sigue que algunas variables económicas pueden converger a un equilibrio mientras que otras pueden divergir o permanecer en oscilación.

Así mismo, la magnitud de la parte real de los autovalores también proporciona información sobre la velocidad a la que se producirán las transiciones económicas. Cuanto más negativa sea la parte

real de un autovalor, más rápido será el proceso de convergencia hacia un equilibrio. La estabilidad del sistema económico es fundamental para su salud y funcionamiento. Una interpretación práctica de un sistema económico estable es aquella que expresa que las políticas económicas actuales tienden a mantener la economía en un estado de equilibrio. Si el sistema es inestable, pueden ser necesarias intervenciones para estabilizar la economía y evitar crisis económicas.

La observabilidad es una propiedad del sistema que se refiere a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las observaciones de las salidas (o variables de estado medidas). Un sistema es completamente observable si es posible determinar su estado inicial a partir de las observaciones disponibles. Esto está relacionado con la matriz de observabilidad  $O$ , que se construye a partir de las matrices  $F$  y  $H$  del sistema de la siguiente forma

$$O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

donde  $n$  indica la dimensión del espacio de estado o, equivalentemente, la dimensión del espacio de columnas de  $F$ . Luego, si la matriz  $O$  tiene rango completo, es decir, igual a  $n$ , se sigue que el sistema es completamente controlable. Mientras que si este es menor a  $n$ , el sistema no es completamente controlable.

La observabilidad para un sistema económico permite estimar el estado actual del sistema económico a partir de variables económicas disponibles. Esto es valioso para comprender y analizar la dinámica interna del sistema, especialmente cuando algunas variables económicas internas no son directamente observables. Además, dado que permite conocer el estado actual, al aplicar modelos matemáticos adecuados, sería posible prever cómo evolucionarán las variables económicas. Es más, también puede funcionar como un indicador ya que si las estimaciones del estado actual no coinciden con las observaciones reales, podría indicar que algo inusual está ocurriendo en la economía.

Así mismo, la capacidad de observar y estimar el estado del sistema es fundamental para el diseño de políticas económicas efectivas. Los responsables de la toma de decisiones podrían utilizar esta información para implementar políticas que estabilicen el sistema económico en cuestión o que ayuden a alcanzar objetivos económicos específicos. Igualmente, la observabilidad también es importante en el análisis de sensibilidad, que implica evaluar cómo cambios en las observaciones afectan las estimaciones de los estados y, por lo tanto, la toma de decisiones económicas.

Por otro lado, la controlabilidad se refiere a la capacidad de llevar el sistema desde un estado inicial a un estado deseado, suministrando al sistema algunas entradas, a las cuales llamaremos entradas de control. Esta propiedad se puede comprobar mediante la matriz de controlabilidad  $C$ , que se construye a partir de las matrices  $F$  y  $G$  del sistema de la siguiente forma

$$C = [G \quad FG \quad F^2G \quad \dots \quad F^{n-1}G]$$

donde  $n$  indica la dimensión del espacio de estado o, equivalentemente, la dimensión del espacio de columnas de  $F$ . Si la matriz  $C$  tiene rango igual a  $n$  o completo, entonces se dice que el sistema es completamente controlable. No obstante, si el rango es menor que el valor  $n$ , el sistema no es completamente controlable. Así mismo, si un sistema es completamente controlable, teóricamente se pueden diseñar entradas de control para lograr la transición de un estado inicial a un estado

deseado en un tiempo finito. Sin embargo, el tiempo para lograrlo puede ser amplio y dependerá de las restricciones específicas del sistema y las entradas de control disponibles.

En un sistema económico determinado, el concepto de controlabilidad significa que se puede influir en el sistema para moverlo desde un estado económico inicial a un estado económico deseado, utilizando políticas o intervenciones adecuadas. Y en este caso, el tiempo de transición dependerá de varios factores, como las políticas efectuadas, las decisiones económicas tomadas y el monto de recursos para su implementación. También influirá la complejidad, inercias y la dinámica del sistema económico en cuestión. Es más, circunstancias exógenas como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos, que influyen en los objetivos específicos de intervención, pueden tener un impacto significativo en este, haciéndolo más gradual o, por el contrario, más rápido.

La relación entre estos conceptos radica en que la estabilidad es una propiedad fundamental para el diseño de sistemas de control. Un sistema debe ser estable para que el control sea efectivo. Además, la observabilidad y la controlabilidad son propiedades importantes que permiten el diseño de controladores eficaces y la estimación del estado del sistema. Sin embargo, no son idénticos y se analizan de manera independiente. Un sistema puede ser estable pero no completamente observable o controlable, lo que limitaría la capacidad de control y estimación.

### **3.7. Determinación del cambio y control estructural**

La detección del cambio estructural en sistemas económicos es fundamental para comprender las transformaciones en una economía a lo largo del tiempo. Una herramienta poderosa para llevar a cabo esta tarea es la representación en espacio de estado. Ella utiliza la realización, es decir, las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ , para describir la dinámica de un sistema subyacente, lineal e invariante en el tiempo o, como vimos, hacer una aproximación a otros tipos de sistemas. En este sentido, determinar el cambio estructural implica identificar cuando las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  han experimentado una modificación significativa en sus propiedades o relaciones. Este cambio puede surgir debido a alteraciones en el comportamiento del sistema, como cambios en la dinámica, entradas o salidas.

Una técnica útil para detectar cambios estructurales es evaluar la singularidad de las matrices. La singularidad se refiere a la inversibilidad de una matriz. Si la matriz  $F$  es singular, significa que el sistema puede tener modos no controlables o no observables. Cualquier cambio en la singularidad de  $F$  podría ser un indicio de un cambio en la estructura del sistema.

La estabilidad es un aspecto crítico de los sistemas dinámicos. Si las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  cambian de tal manera que el sistema ya no es estable, esto puede ser un indicativo claro de un cambio estructural. Un sistema estable puede volverse inestable debido a cambios en las matrices.

Observar la respuesta en el tiempo del sistema a entradas conocidas también puede revelar cambios estructurales. Si la respuesta ya no coincide con la referencia establecida, es probable que haya ocurrido un cambio en las matrices  $F$ ,  $G$  o  $H$ .

En algunos casos, los cambios estructurales pueden estar relacionados con cambios en los parámetros del sistema. Utilizando técnicas de identificación de parámetros, podemos estimar las nuevas matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  y compararlas con las matrices de referencia para detectar discrepancias.

Por otra parte, el control de sistemas de espacio de estado implica influir en el comportamiento del sistema para que cumpla con ciertos objetivos deseados. Los sistemas representados por las matrices  $F$ ,  $G$ , y  $H$  pueden ser continuos o discretos en el tiempo, pero el enfoque principal es

el mismo. El objetivo del control es ajustar las señales de entrada  $u(t)$  al sistema para obtener una respuesta deseada  $y(t)$  a lo largo del tiempo.

El primer paso en el proceso de control es definir los objetivos específicos que se desean lograr. Estos objetivos pueden incluir estabilizar el sistema en un estado deseado, rastrear una trayectoria específica, o mantener ciertas variables del sistema dentro de rangos predefinidos. La comprensión completa de los objetivos es esencial antes de continuar con el diseño del controlador.

El siguiente paso implica el diseño del controlador, que determinará cómo se deben cambiar las señales de entrada  $u(t)$  para lograr los objetivos establecidos. El diseño del controlador generalmente implica pasar por ciertas etapas. La primera indica que antes de diseñar un controlador, es crucial conocer bien el sistema que se va a controlar. Esto implica comprender las matrices  $F$ ,  $G$ , y  $H$  que describen la dinámica del sistema. También puede requerir la identificación de parámetros para modelos más precisos.

Una vez que se comprende el sistema, se selecciona una ley de control apropiada. Esto puede incluir controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo), controladores de retroalimentación de estado, o técnicas de control más avanzadas, como control óptimo o control adaptativo, según la complejidad del sistema y los objetivos de control.

El diseño del controlador implica ajustar los parámetros del controlador para lograr los objetivos deseados. Esto puede requerir técnicas de sintonización que optimicen el rendimiento del sistema.

Antes de implementar el controlador en el sistema real, es fundamental simular su desempeño para asegurarse de que cumple con los objetivos de control. Las simulaciones permiten ajustar el controlador y resolver problemas potenciales.

Una vez que el controlador se ha diseñado y probado en simulaciones, se procede a su implementación en el sistema real. Esto implica programar el controlador en hardware o software adecuado y conectarlo al sistema físico. Durante la implementación, es común realizar ajustes finos en el controlador para garantizar un rendimiento óptimo.

#### Monitoreo y Retroalimentación

Una vez que el controlador está en funcionamiento, es crucial monitorear continuamente el sistema para garantizar que se mantenga en línea con los objetivos de control. Esto puede requerir retroalimentación constante y ajustes en el controlador en respuesta a cambios en las condiciones del sistema o en los objetivos de control.

## Capítulo 4

# Implementación de la TR a sistemas económicos de entrada-salida

En el presente capítulo se aplica la realización a dos sistemas económicos específicos en los que no se ha aplicado: uno basado en la incidencia de la inflación y otro que estriba en las series de tiempo de la inflación, la tasa de desocupación y la balanza comercial. La novedad de tales sistemas y del uso de la realización sobre ellos no es lo único por lo cual se emplean. Una intención más es el poder ofrecer propuestas sobre cómo las variables comprendidas dentro de un sistema económico se pueden relacionar en un modelo entrada-salida, pero bajo las pautas de no adjudicar una forma funcional y no atribuir necesariamente un sentido causal. Es decir, se busca la comprensión profunda y práctica sobre como y cuales aplicar esta técnica fundamental de modelización de sistemas dinámicos. Tener instantáneas de la relación entre entradas y salidas, las cuales son un reflejo en un momento dado del sistema subyacente complejo, ya sea aproximado o equivalente.

De igual forma, se lleva a cabo un análisis básico sobre la estructura del sistema subyacente de ambos casos. Aprenderemos cómo esta matriz nos proporciona información esencial sobre la capacidad de controlar el sistema y cómo se relaciona con la estabilidad y la observabilidad. Veremos cómo este se basa en la representación matricial es fundamental para comprender y analizar la dinámica subyacente de los sistemas. Así mismo, se explora cómo la realización puede ser una herramienta valiosa en la determinación del cambio estructural y el control de tal cambio en los sistemas. Analizaremos cómo esta técnica puede ayudarnos a identificar y gestionar cambios significativos en la dinámica de un sistema, lo que es de vital importancia en aplicaciones prácticas y en la toma de decisiones en tiempo real.

A lo largo de este capítulo, también se enfocan con parquedad dos aspectos clave. El primero estriba en los resultados que arroja la realización bajo el FSF al aplicarlo al modelo de incidencia de la inflación, con respecto a aquellos obtenidos empleando la versión con el AF.

El segundo aspecto es la importancia que la precisión numérica posee al momento de la implementación del algoritmo de la realización. Esto quedará establecido dentro del contexto de la realización del sistema de series de tiempo. Ahí resaltaremos cómo la falta de una precisión adecuada puede comprometer la estabilidad numérica del algoritmo. Esto resulta en cálculos significativamente imprecisos, los cuales ponen en riesgo la confiabilidad de los resultados y, por tanto, las características estructurales, así como la determinación del cambio en ella y su control.

#### 4.1. Modelo entrada-salida sobre las incidencias de las componentes de la inflación de México

El INPC (Índice Nacional de Precios al Consumidor) es un indicador económico que mide la variación promedio de los precios de un conjunto de bienes y servicios que conforman la canasta de consumo de los hogares en un país. Se calcula mediante una canasta ponderada de bienes y servicios que representan el consumo típico de una población específica. Sus componentes son los diferentes grupos de bienes y servicios que se incluyen en la canasta de consumo y que se utilizan para calcular el índice. Estos se clasifican en dos grandes grupos: componentes **Subyacente** y **No Subyacente**. Así mismo, cada una engloba dos sub-componentes más: el primero a **mercancías y servicios**, y el segundo a **agropecuarios y energéticos y tarifas autorizadas por el gobierno**, respectivamente. Aunque la desagregación puede hacerse aún más detallada, para la presente sección, la clasificación dada es suficiente.

Por su parte, la incidencia de los componentes del INPC sobre la inflación general se refiere al impacto que cada grupo de bienes y servicios tiene en el cálculo del índice general de precios al consumidor. Cuando se calcula el INPC, cada componente o grupo de bienes y servicios se pondera en función de su participación en el gasto total de la población. Es decir, aquellos grupos de bienes y servicios que representan una mayor proporción del gasto total tienen un mayor peso en el cálculo del índice. Por lo tanto, los cambios en los precios de estos grupos tendrán un impacto más significativo en la inflación general medida por el INPC.

A guisa de ilustración, si el grupo de mercancías y servicios tiene un peso del 30 % en el INPC y los precios de los servicios aumentan significativamente, esto tendrá un impacto importante en la inflación general, ya que el grupo de alimentos y bebidas tiene un peso significativo en el cálculo del índice.

Las componentes del INPC cuentan con una medida llamada incidencia la cuál indica qué tanto participan en la inflación general. Esto depende de varios factores, incluyendo el peso que se le asigna a cada componente en el cálculo del índice y las variaciones de precios que ocurren en cada componente. Los cambios en los precios de diferentes grupos de bienes y servicios pueden tener efectos diferentes en la inflación general, y una de las tareas a realizar es estudiar estos patrones y tendencias para entender mejor los factores que influyen en la evolución de la inflación en una economía.

La Incidencia puede pensarse acumulativa (aunque hay variaciones estadísticas). Las Incidencias de las componentes Subyacente y No Subyacente son, respectivamente, la suma de las incidencias de sus subcomponentes. De esto se desprenden las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned} I_S &= I_m + I_s &= I_m + I_v + I_c + I_{os} \\ I_N &= I_a + I_{et} &= I_a + I_e + I_{tag} \end{aligned}$$

donde  $I$  es la incidencia y su subíndice indica el componente al cual está asociada:  $S$ , subyacente;  $N$ , no subyacente;  $m$ , mercancías;  $s$ , servicios;  $v$ , vivienda;  $c$ , educación (colegiatura);  $os$ , otros servicios;  $a$ , agropecuario;  $et$ , energéticos y tarifas autorizadas por el gobierno;  $e$ , energéticos; y  $tag$ , tarifas autorizadas por el gobierno. Las igualdades anteriores se pueden convertir en la siguiente igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m + I_c + I_{os} \\ I_a + I_{tag} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix}$$

y a partir de ésta se obtiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_m}{I_S} & \frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ \frac{I_a}{I_S} & \frac{I_{tag}}{I_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{I_m}{I_S} & -\frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ -\frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ahora, si llamamos  $A$  a la matriz que se debe invertir en la última igualdad, entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{I_m}{I_S} & -\frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ -\frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{I_m}{I_S}\right) \left(1 - \frac{I_{tag}}{I_N}\right) - \frac{I_a}{I_S} \frac{I_c + I_{os}}{I_N}$$

Por consiguiente, la última igualdad en (1), ahora tomando el modelo para el tiempo  $t$ , es equivalente a

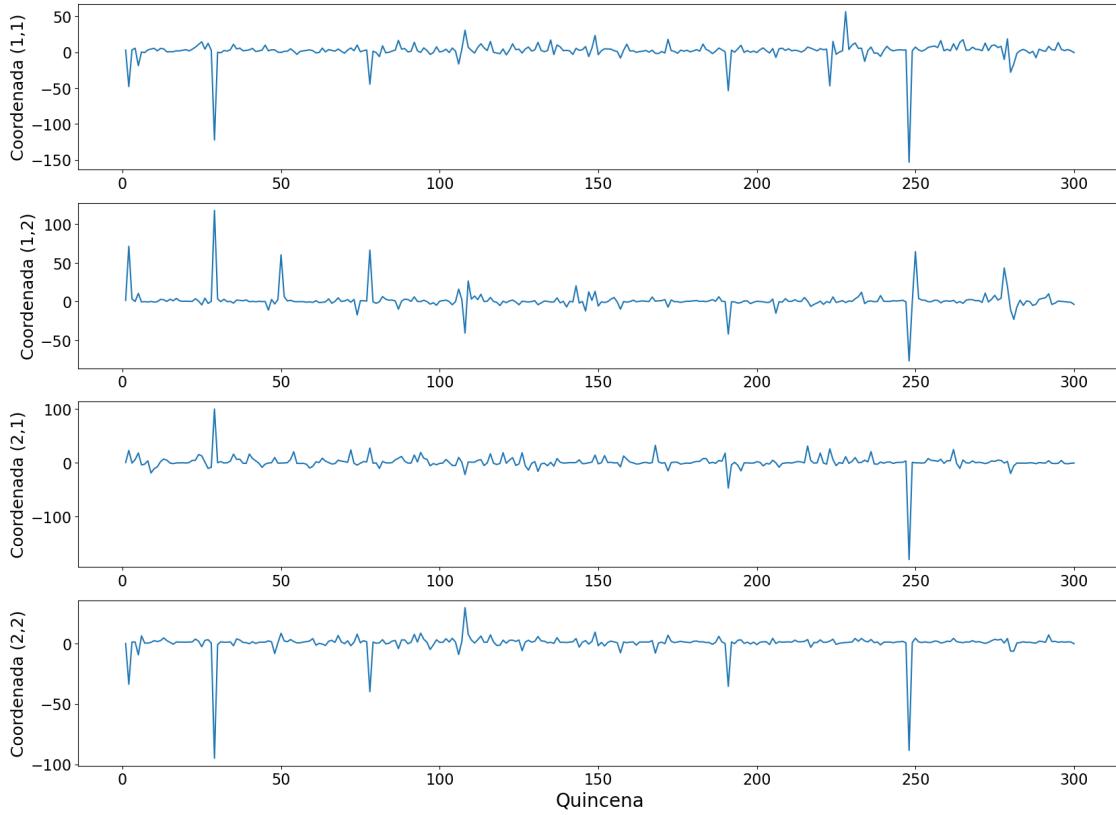
$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_N \end{pmatrix}_t = \frac{1}{\det(A_t)} \begin{pmatrix} 1 - \frac{I_{tag}}{I_N} & \frac{I_c + I_{os}}{I_N} \\ \frac{I_a}{I_S} & 1 - \frac{I_m}{I_S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_v \\ I_e \end{pmatrix}_t \quad (2)$$

El modelo (2) expresa cómo en el tiempo  $t$ , el cual tomaremos quincenal, el vector de incidencia subyacente y no subyacente es determinado por el vector de incidencia de la vivienda y los energéticos. Los datos empleados para construir la DE del modelo, es decir, la sucesión de matrices de (2), se pueden ver en la Tabla (D.2), Apéndice D. Ellos abarcan 300 períodos, desde la primer quincena de enero de 2011<sup>1</sup>, hasta la segunda quincena de junio de 2023, Además, la construcción de la DE puede replicarse con el código en el Apéndice D. Las series de tiempo elaboradas con cada una de las entradas de la DE pueden verse en la Figura 4.1.

---

<sup>1</sup>Esto ya que antes de esta quincena no se tienen todas las incidencias por componente requeridas para construir (2)

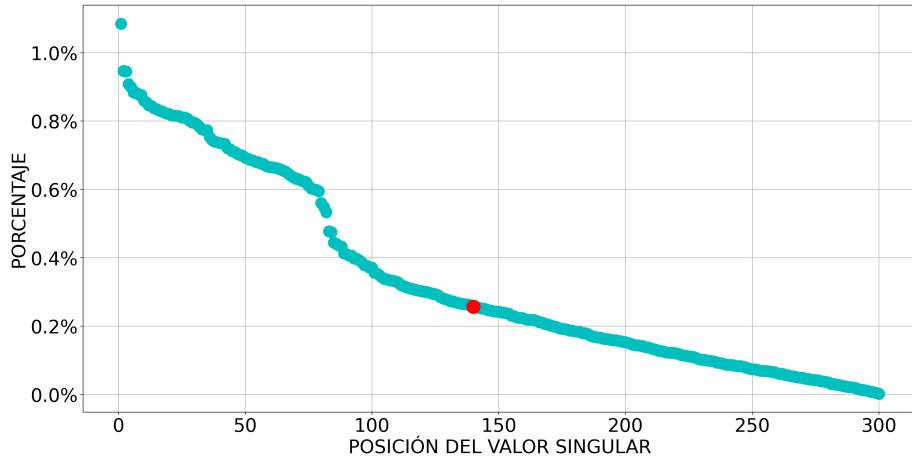
Figura 4.1: Series de tiempo de cada coordenada en la DE del modelo de incidencia



#### 4.1.1. Realizaciones bajo el AF

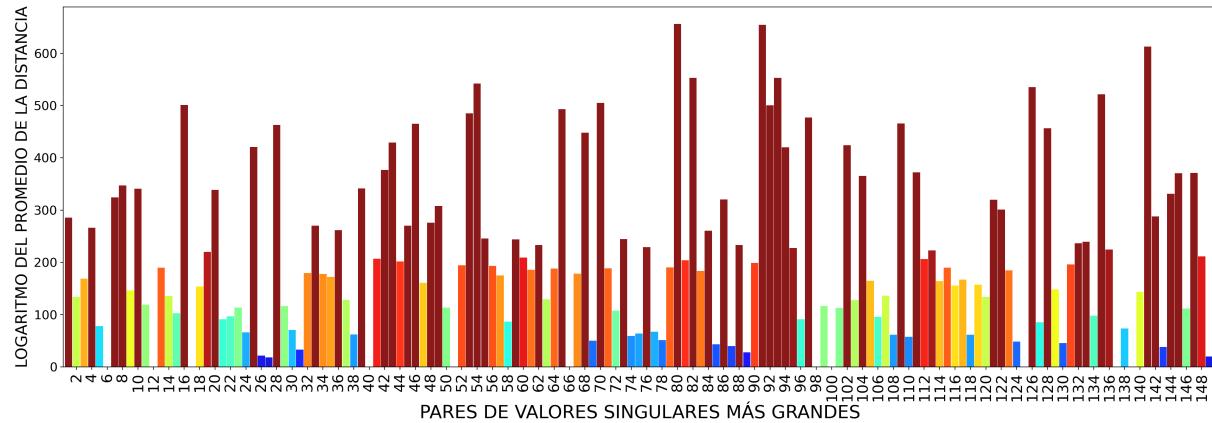
A partir de la DE generamos las realizaciones con datos compactados. Con este fin construimos la matriz con mayor dimensión posible, es decir,  $\mathcal{H}_{151,150}$ . Buscar este rango la matriz permite obtener un mayor número de opciones de realización, además de que los pesos de los valores singulares no dominantes pueden ser de menor tamaño, pudiendo afectar menos la compresión de información y a la estructura de Hankel. Los valores singulares de  $\mathcal{H}_{151,150}$  se pueden observar en la Figura 4.2. El valor singular en rojo que se muestra indica la posición y el tamaño del valor singular para el cual, si se acumulan todos los anteriores, se supera el 80% del total. En este caso, los valores singulares tienen una caída suave y no parecen poseer valores dominantes considerablemente grandes.

Figura 4.2: Valores singulares de la Matriz de Hankel



Ahora, mediante el Código C.5 efectuamos 149 realizaciones para varios truncamientos de  $\mathcal{H}_{151,150}$ . Cada uno de ellos asociado a mantener un cierto número de pares de valores singulares más grandes. Además, el código permitió calcular la estimación de cada realización y compararla con la DE, obteniendo así la cercanía promedio que hay entre ellas. Esto se muestra en la Figura 4.3, donde el uso del logaritmo de los promedios se entiende al considerar los órdenes de magnitud de las distancias, los cuales limitarían las comparaciones. Para ilustrar el punto<sup>2</sup>, el valor mínimo obtenido fue de  $9.3 \times 10^7$ , el máximo de aproximadamente  $7.81 \times 10^{284}$ , la media de  $6.82 \times 10^{282}$  y la desviación estándar de  $6.75 \times 10^{283}$ .

Figura 4.3: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento

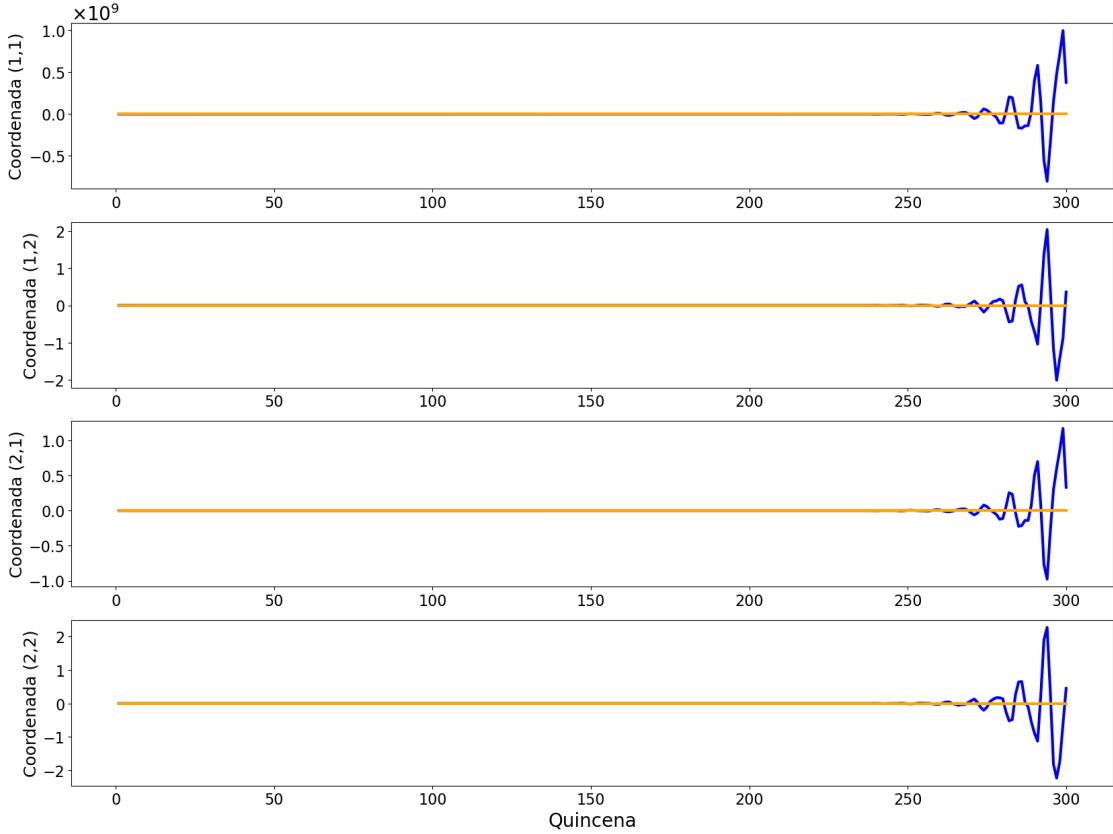


El valor mínimo mencionado, al aplicarle el logaritmo, arroja un 18.35, que corresponde a la mejor realización obtenida entre las 149 y, mediante la Figura 4.3, podemos notar que se ubica en los 27 pares de valores singulares más grandes. No obstante, aunque es la mínima distancia, sigue siendo una cantidad descomunal, la manifiesta la no estabilidad del sistema y la divergencia abrupta en la parte final de los 300 períodos, Figura 4.4. Debido a la paupérrima proximidad de la mejor estimación, se llega a la conclusión de que la compresión de información parece que

<sup>2</sup>Los siguientes valores se calculan en el Código C.5, y no consideran aquellos valores NaN generados por distancias excesivamente grandes, relativos a las barras ausentes en la Figura 4.3.

ha afectado la identificación del sistema subyacente. La causa de ello puede ser alguna de las situaciones que platicamos en una sección del capítulo anterior. El sistema subyacente posee varianza temporal, no linealidad, dimensión más grande, entre otras situaciones, como podría ser una DE con ruido. En cualquier caso, la identificación del sistema subyacente mediante una realización lineal compacta generada con el AF no resulta útil para hacer proyecciones o para entender cualidades del sistema subyacente, como la observabilidad y controlabilidad de los estados, y mucho menos para analizar la estructura y su cambio, o bien para el control de esta.

Figura 4.4: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)

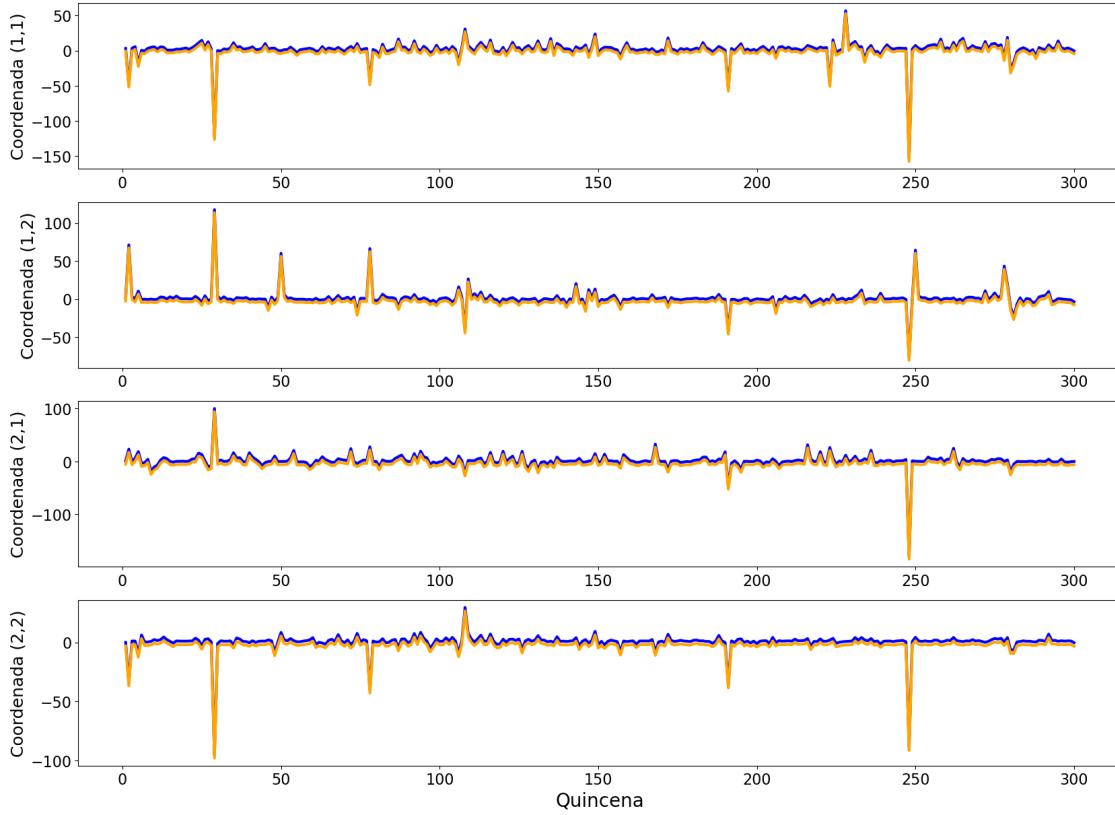


Debido a que las compresiones no son viables para poder analizar el sistema subyacente, pasamos a emplear toda la información en la DE, esto es, usaremos  $\mathcal{H}_{151,150}$  sin compactarla bajo truncamientos. Los inconvenientes de hacerlo así es que la dimensión de la matriz de estado  $F$  resulta ser grande en la medida en que la DE lo es; en nuestro caso la dimensión fue de  $300 \times 300$ . Esto no permite tener una interpretación sencilla de sus valores o su dimensión, a diferencia de una matriz de estado surgida de una compresión de información. Sin embargo, con ella si es viable revisar la observabilidad y controlabilidad del sistema, la estabilidad, además de permitir mayor certeza sobre la estructura subyacente, los cambios en esta e, incluso, cómo poder dirigirlos hacia un objetivo (control estructural).

En este sentido, el Código C.6 nos brinda la realización sin compresión de la MH. Además, nos ofrece la distancia promedio entre la estimación de la realización y la DE, la cual resulta ser notablemente pequeña, alrededor de  $1.73 \times 10^{-3}$ . Es por ello que en la Figura 4.5, las series de tiempo de las entradas en la estimación (azules) son tan cercanas a las respectivas de la DE

(naranjas) que prácticamente se encuentran superpuestas.

Figura 4.5: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en las aproximaciones de la realización sin compresión de información (azul)



#### 4.1.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema de las incidencias de inflación

La realización sin compresión que se realizó para el modelo de incidencia de la inflación permite efectuar un análisis sobre la estabilidad del sistema subyacente, así como de su observabilidad y controlabilidad. Para el primer caso, el Código C.6 nos permite obtener los valores propios de la matriz de estado  $F$  y determinar la proporción de ellos con parte real negativa, la cual resulta ser 0 %. Por consiguiente, ninguno tiene parte real negativa y así el sistema no cuenta con estabilidad de Lyapunov. Esto implica que el sistema es inestable bajo condiciones de entrada nula, es decir, cuando  $(I_v \ I_e) = (0 \ 0)$ . En consecuencia, bajo una perturbación inicial, el sistema no posee la capacidad de volver a un estado de equilibrio o mantenerse cerca de un estado a medida que evoluciona, divergiendo en el tiempo. Es decir, no es posible encontrar un control adecuado, esto es, una entrada acotada  $(I_v \ I_e)^T$ , para la cual el sistema pueda hacer volver a la salida  $(I_S \ I_N)^T$  a una posición de equilibrio; en su lugar esta tenderá a oscilar de manera veleidosa e incontrolable al pasar el tiempo. Es así que no es factible influir en la convergencia de  $I_S$  e  $I_N$  bajo el esfuerzo de intervenir los valores de las incidencias de entrada,  $I_v$  e  $I_e$ .

La falta de estabilidad de entrada cero indica que incluso pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o el ruido en el sistema pueden causar respuestas no deseadas y potencialmente caóticas en ausencia de entrada. Esto puede ser problemático en aplicaciones donde se necesita que el sistema se mantenga en un estado estable o cerca de un punto de operación deseado. La

inestabilidad del sistema puede limitar las aplicaciones en las que se puede utilizar de manera efectiva. Algunos sistemas inestables pueden requerir un diseño especializado o pueden no ser adecuados para ciertas aplicaciones críticas. Como el sistema es inestable, se requerirá algún tipo de control o retroalimentación para estabilizarlo y mantenerlo dentro de los límites deseables. Esto puede implicar la implementación de controladores adecuados para mantener el sistema bajo control.

Por otra parte, en cuanto a la observabilidad y controlabilidad del sistema recordamos que se refieren a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las salidas observadas y la capacidad de controlar el estado del sistema utilizando entradas apropiadas, respectivamente. Así, un sistema es completamente observable si, a partir de las salidas disponibles y las entradas conocidas, es posible determinar el estado inicial del sistema. La observabilidad se relaciona con la matriz de observación  $H$ . Por su parte, un sistema es completamente controlable si es posible llevarlo de cualquier estado inicial a cualquier estado deseado en un tiempo finito mediante una adecuada elección de las entradas de control. La controlabilidad se relaciona con las matrices de entrada  $F$  y  $G$  del sistema.

En nuestro caso, bajo lo visto en el capítulo anterior y debido a que la dimensión del espacio de estados es  $n = 300$ , las matrices de controlabilidad  $C$  y observabilidad  $O$  están dadas como

$$C = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{299}G \end{bmatrix}; \quad O = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ \vdots \\ HF^{299} \end{bmatrix}$$

Con ayuda del Código C.6 se pudieron construir tanto  $C$  como  $O$ , así como obtener su rango. El resultado obtenido fue que ambas tenían el mismo rango que la matriz  $F$ . Por consiguiente, dado que el rango de esta última matriz es igual a la dimensión del sistema, podemos decir que este es completamente controlable y observable.

La completa observabilidad en este sistema permite que a partir de las medidas observadas de  $(I_S \ I_N)_t^T$  podamos estimar con precisión el estado  $x(t)$  del sistema en cualquier momento. Por su parte, la completa controlabilidad facilita el diseño de entradas de control  $(I_v \ I_e)_t^T$ , de manera que se pueda llevar el sistema desde cualquier estado inicial  $x(0)$  a cualquier estado deseado  $x^*(t)$ . Sin embargo, aún siendo posible el control de dicha transición de estados, determinar cuánto tiempo requerirá más información. Deberá analizarse las limitaciones específicas del sistema de incidencias de las componentes de la inflación. Dentro de estas podrían encontrarse los objetivos, políticas y decisiones económicas; los factores externos, como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos; las complejidades del sistema; las entradas de control disponibles; entre otras. No obstante, este análisis escapa a los objetivos de la presente investigación, por lo que solo se menciona como un detalle a considerar cuando se tenga en mente un diseño de control de un sistema económico específico.

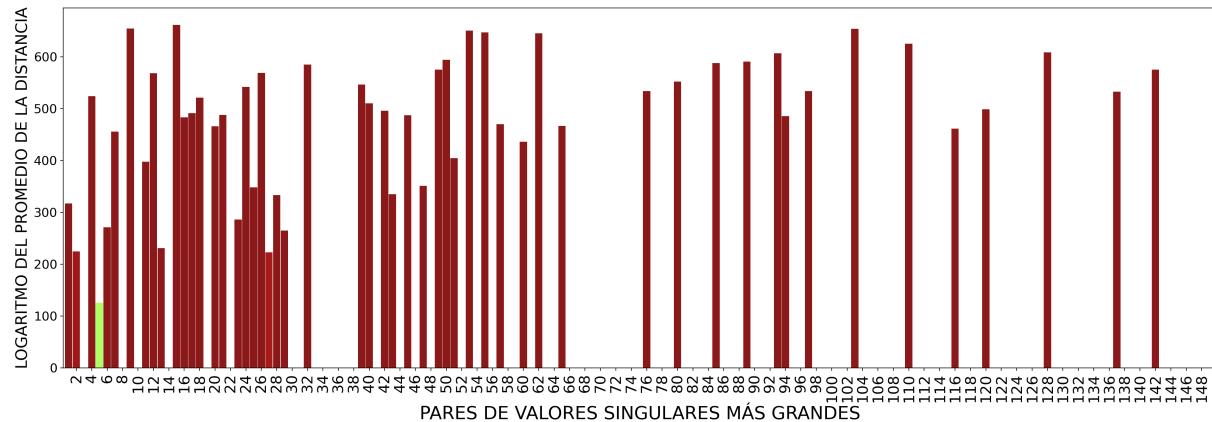
#### 4.1.3. Modelo de incidencias de la inflación: algunas consideraciones sobre el proceso de factorización

Como se mencionó en el capítulo anterior, haremos uso del FSF para efectuar realizaciones compactas en el modelo de incidencias de la inflación. Así mismo, se darán algunas observaciones

más sobre la factorización, surgidas de otra propuesta de algoritmo llamada algoritmo de Combinación Lineal Cercana (CLC), la cual no se desarrolla al detalle debido a sus infructuosos resultados y que sólo se busca transmitir resultados provechosos. La finalidad de realizar ambas cosas estriba en hacer notar la necesidad de encontrar una proceso de optimización general del proceso de factorización y, además, dar algunos rasgos útiles que se encontraron con el CLC.

Para empezar, se emplea de nuevo el Código C.6, ahora para hacer las realizaciones compactas bajo el FSF. El resultado de su uso se puede apreciar la Figura 4.6, que muestra el logaritmo de la distancia promedio entre las estimaciones hechas con el FSF y la DE. Se aprecia a simple vista que, en general, los valores son más grandes que los mostrados en Figura 4.3 con el AF. Además, los espacios en blanco han aumentado, significando una alta imprecisión de las realizaciones obtenidas con el FSF. Incluso, se puede notar que la estimación más cercana a la DE es asaz grande con respecto a la obtenida con el AF, alrededor de 47 órdenes de magnitud más grande. Esta realización se encuentra en la posición 5 (construida con 5 pares de valores singulares), con un valor promedio de  $4.324 \times 10^{54}$  o de 125.8 al tomar su logaritmo.

Figura 4.6: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el FSF para cada truncamiento



Tomando en cuenta los resultados del FSF, podemos avalar la idea que fue mencionada en el capítulo anterior: el FSF está especializado al modelo en aquel momento enunciado. Es decir, es poco general, no puede librarse de fallas en el proceso de construcción de una realización compacta, y con aproximación promedio mínima a la DE en otros sistemas. Debido a su imprecisión, sus resultados no son útiles para analizar temas de estabilidad, controlabilidad, estructura u otros del modelo de incidencias de la inflación.

Por otro lado, aunque el CLC tuvo resultados peores que en el caso del FSF, siendo precisos, sus distancias promedio resultaron excesivamente grandes, pudo brindar algo de información útil para el proceso de optimización que quedó abierto en el capítulo anterior. Se basó en la idea de hacer que las últimas  $k$  filas de  $Q$  poseyeran valores lo más pequeños posibles. Para realizarlo, se partió de una expresión que ya había tratado anteriormente en esta investigación,

$$P^{-1}\mathcal{H} = Q$$

donde recordemos que  $P^{-1}$ , al ser la inversa de una matriz  $P$  por determinar, pero con estructura

triangular inferior con diagonal de unos, mantiene la misma forma. Luego, se observó que

$$Q_i = P_i^{-1} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} p_{i1}^- & \dots & p_{ii-1}^- & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H} = \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}^- \mathcal{H}_{j,:} + \mathcal{H}_{i,:}$$

donde los  $p_{ij}^-$  se toman como no todos nulos. Así, advirtiendo que si  $Q_i \approx \underline{0}$ , se debería cumplir

$$\sum_{j=1}^{i-1} -p_{ij}^- \mathcal{H}_{j,:} \cong \mathcal{H}_{i,:}$$

lo cual significa que  $\mathcal{H}_{i,:}$  es combinación lineal de las filas de  $\mathcal{H}$  anteriores a  $i$ , o que la combinación lineal de estas es la más cercana posible a  $\mathcal{H}_{i,:}$ . Por consiguiente, encontrando los valores  $-p_{ij}^-$ , podríamos determinar los  $p_{ij}^-$ , y cumplir de ese modo con que  $Q_i \approx \underline{0}$ . Para tal efecto, se probó el método Sequential Least Squares Quadratic Programming, no obstante, por divergencias se terminó empleando el método de Least Squares (LS).

## 4.2. Series de tiempo entrelazadas: balanza comercial, índice nacional de precios al consumidor y tasa de desocupación

Cuando se trabaja con múltiples series de tiempo, es crucial encontrar una metodología que permita capturar de manera efectiva las interacciones y las relaciones entre ellas. En este apartado se explora una metodología para realizar un análisis conjunto de tres series de tiempo a través de la realización de espacio de estado. Este enfoque se utiliza con el propósito de identificar y modelar el sistema subyacente que genera estas series de tiempo y, posteriormente, buscar una representación en espacio de estado que capture de manera efectiva su dinámica. Esta técnica nos permitirá capturar las dependencias entre ellas en un marco unificado.

La construcción de un modelo de espacio de estado es un enfoque que nos permite representar las relaciones dinámicas entre variables observadas y variables no observadas, también conocidas como estados latentes. A través de esta metodología, podremos descomponer cada serie de tiempo en sus componentes fundamentales, modelar sus interacciones mutuas y, en última instancia, realizar análisis predictivos y estructurales.

El enfoque conjunto que presentaremos aquí es especialmente útil cuando se tienen múltiples series de tiempo que están interconectadas o influenciadas por un sistema subyacente común. Identificar y modelar este sistema subyacente es esencial para comprender la relación entre las series de tiempo y tomar decisiones informadas en una variedad de aplicaciones, como la predicción de datos futuros, el control de sistemas o la detección de anomalías.

A lo largo de esta sección, abordaremos los pasos clave de la metodología, que incluyen la identificación del sistema a partir de las series de tiempo observadas, la estimación de los parámetros del modelo de espacio de estado y la validación del modelo resultante. Además, destacaremos las herramientas y técnicas específicas que se pueden utilizar en este proceso, como la identificación de funciones de transferencia, la descomposición de series de tiempo y la estimación de parámetros mediante algoritmos de optimización.

Para comenzar, digamos que tenemos 3 series de tiempo  $\{x_t^{(i)}\}$   $i = 1, 2, 3$ . Ellas reflejan la dinámica de las variables que representan, las cuales están asociadas a un sistema subyacente, pero del cual no conocemos cómo es que las vincula. Debido a que el sistema puede conectar

alguna de ellas de modo causal con las demás, o simplemente . Construimos una variable nueva mediante ellas tres. La idea es que

$$\begin{aligned}
\frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}} &= x_t^{(i)} \frac{1}{4} \left( \frac{x_{t-1}^{(j)}}{x_t^{(j)}x_{t-1}^{(j)}} + \frac{1}{x_t^{(j)}} \right) \left( \frac{1}{x_t^{(k)}} + \frac{x_{t-1}^{(k)}}{x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} \right) \\
&= x_t^{(i)} \frac{1}{4} \left( \frac{x_{t-1}^{(j)}}{x_t^{(j)}x_{t-1}^{(k)}} \frac{1}{x_t^{(k)}} + \frac{x_{t-1}^{(j)}}{x_t^{(j)}x_{t-1}^{(j)}} \frac{x_{t-1}^{(k)}}{x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} + \frac{1}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}} + \frac{1}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} \right) \\
&= x_t^{(i)} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}} + \left[ \frac{1}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(j)}} \right] x_{t-1}^{(j)} + 2 \left[ \frac{1}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} \right] x_{t-1}^{(k)} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( \left[ \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(i)}} \right] x_{t-1}^{(i)} + \left[ \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(j)}} \right] x_{t-1}^{(j)} + 2 \left[ \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} \right] x_{t-1}^{(k)} \right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(i)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(j)}} & \frac{1}{2} \frac{x_t^{(i)}}{x_t^{(j)}x_t^{(k)}x_{t-1}^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1}^{(i)} \\ x_{t-1}^{(j)} \\ x_{t-1}^{(k)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

para  $i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, k, j \neq k$ . Esta igualdad representa una fotografía del sistema, además de enlazar y distribuir el efecto que tienen los rezagos de las variables sobre la nueva variable. Ahora, dado que tenemos el prorratoe del efecto de cada variable, podemos reescribir la expresión para ver el efecto de los rezagos en cada una de las variables por separado, ya no sobre la nueva variable, es así que para  $i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j, k, j \neq k$ , tenemos

$$x_t^{(i)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{x_t^{(i)}}{x_{t-1}^{(i)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(i)}}{x_{t-1}^{(j)}} & \frac{1}{2} \frac{x_t^{(i)}}{x_{t-1}^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1}^{(i)} \\ x_{t-1}^{(j)} \\ x_{t-1}^{(k)} \end{pmatrix}$$

de lo cual obtenemos la siguiente igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \\ x_t^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{x_t^{(1)}}{x_{t-1}^{(1)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(1)}}{x_{t-1}^{(2)}} & \frac{1}{2} \frac{x_t^{(1)}}{x_{t-1}^{(3)}} \\ \frac{1}{2} \frac{x_t^{(2)}}{x_{t-1}^{(1)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(2)}}{x_{t-1}^{(2)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(2)}}{x_{t-1}^{(3)}} \\ \frac{1}{4} \frac{x_t^{(3)}}{x_{t-1}^{(1)}} & \frac{1}{2} \frac{x_t^{(3)}}{x_{t-1}^{(2)}} & \frac{1}{4} \frac{x_t^{(3)}}{x_{t-1}^{(3)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1}^{(1)} \\ x_{t-1}^{(2)} \\ x_{t-1}^{(3)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

A partir de las matrices en el modelo (3) es que generaremos la realización. Cabe aclarar que la forma de abordar la construcción anterior puede tener limitaciones. Es decir, los rezagos, la dependencia individual de las variables a su periodo previo (1 rezago) y forma de cociente con la cual relacionó las variables, no necesariamente son elecciones óptimas y generales. Sin embargo, su uso es una ilustración de las peculiaridades que tiene la realización. Se desea enfatizar que en su aplicación no es necesaria la imposición de una forma funcional entre variables. Lo únicamente requerido es la obtención de instantáneas externas del sistema, es decir, la DE del sistema, a

partir de la cual se trata de reconstruirlo. Así mismo, aquellas matrices que enlazan entradas y salidas no imponen un tipo específico de función entre . Así mismo, los vínculos causales, aunque deseables, tampoco son indispensables. Las relaciones generadas entre las variables partieron de un apéndice al sistema, la nueva variable cociente. y que

Hechas las aclaraciones, se pasa a detallar las variables que se emplearán para construir el modelo (3). La primera variable que usaremos es la balanza comercial,  $BC$ , una medida de la diferencia entre el valor de las exportaciones y el valor de las importaciones de bienes y servicios de un país. La balanza comercial positiva (superávit) ocurre cuando un país exporta más de lo que importa, lo que puede ser un signo de fortaleza económica. Por otro lado, un déficit comercial (importaciones superiores a las exportaciones) puede indicar una dependencia de bienes extranjeros o una falta de competitividad en la producción nacional.

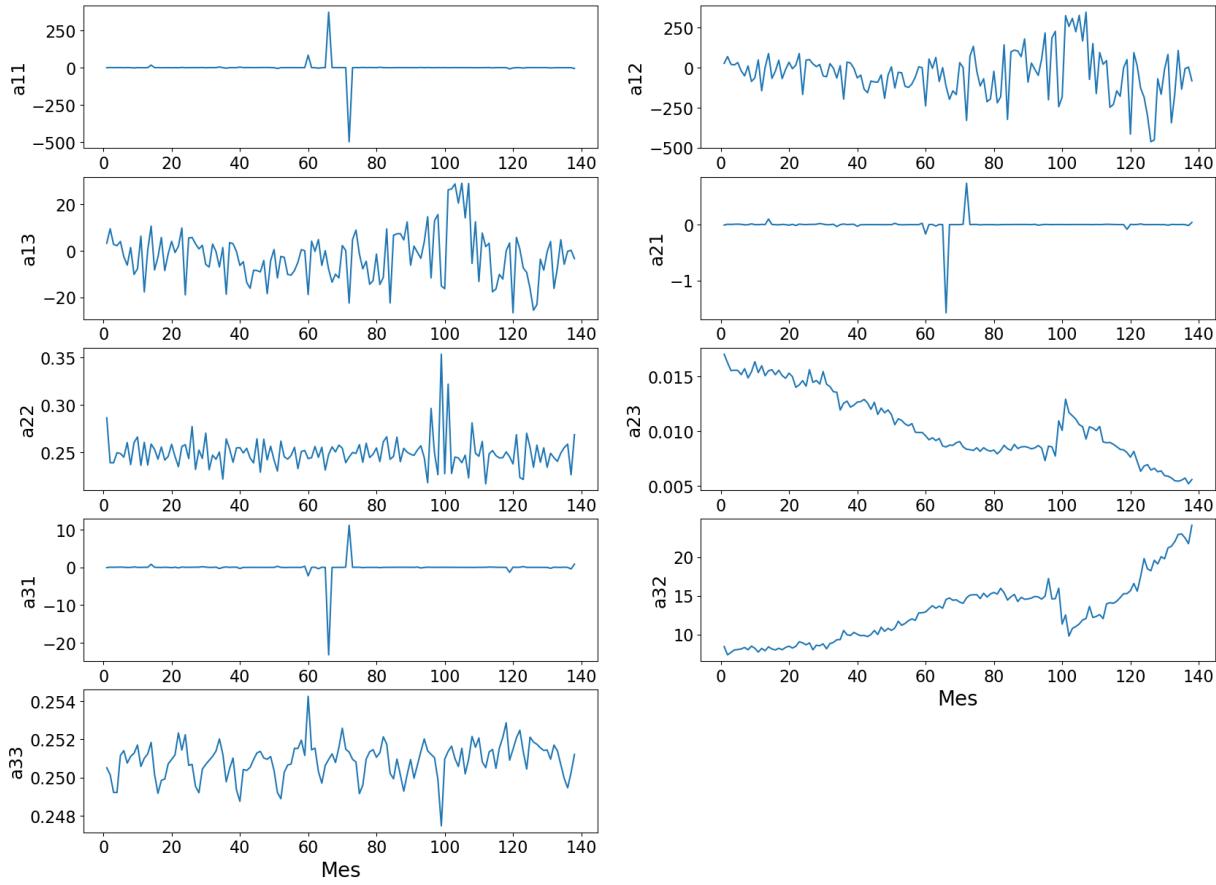
La segunda variable a emplear es la tasa de desocupación,  $TD$ , una medida que indica el porcentaje de personas en edad de trabajar que están desempleadas y buscando activamente empleo en relación con la fuerza laboral total. Es una variable crítica porque el desempleo puede indicar problemas económicos, como una falta de oportunidades laborales o una desaceleración económica. Un alto nivel de desempleo puede tener efectos adversos en el bienestar económico y social de una población. Por último, se emplea la inflación,  $\pi$ , variable que se refiere al aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios en una economía durante un período de tiempo. Si la inflación es muy alta o inestable, puede erosionar el poder adquisitivo de la moneda y crear incertidumbre económica. Mantener la inflación bajo control es esencial para un crecimiento económico estable y sostenible.

Por consiguiente, tomando  $x^{(1)} = BC$ ,  $x^{(2)} = TD$  y  $x^{(3)} = \pi$ , la expresión en (3) se vería como

$$\begin{pmatrix} BC_t \\ TD_t \\ \pi_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{BC_t}{BC_{t-1}} & \frac{1}{4} \frac{BC_t}{TD_{t-1}} & \frac{1}{2} \frac{BC_t}{\pi_{t-1}} \\ \frac{1}{2} \frac{TD_t}{BC_{t-1}} & \frac{1}{4} \frac{TD_t}{TD_{t-1}} & \frac{1}{4} \frac{TD_t}{\pi_{t-1}} \\ \frac{1}{4} \frac{\pi_t}{BC_{t-1}} & \frac{1}{2} \frac{\pi_t}{TD_{t-1}} & \frac{1}{4} \frac{\pi_t}{\pi_{t-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} BC_{t-1} \\ TD_{t-1} \\ \pi_{t-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde las matrices que enlazan a las variables con su rezago para cada tiempo  $t$  representarían la DE. Los datos para la construcción de la DE se pueden consultar en la Tabla D.3 en el Apéndice D. Su temporalidad será mensual y el periodo abarcado va desde enero de 2012 hasta julio de 2023. En la Figura 4.7 podemos ver las 9 series de tiempo correspondientes a las entradas de la DE.

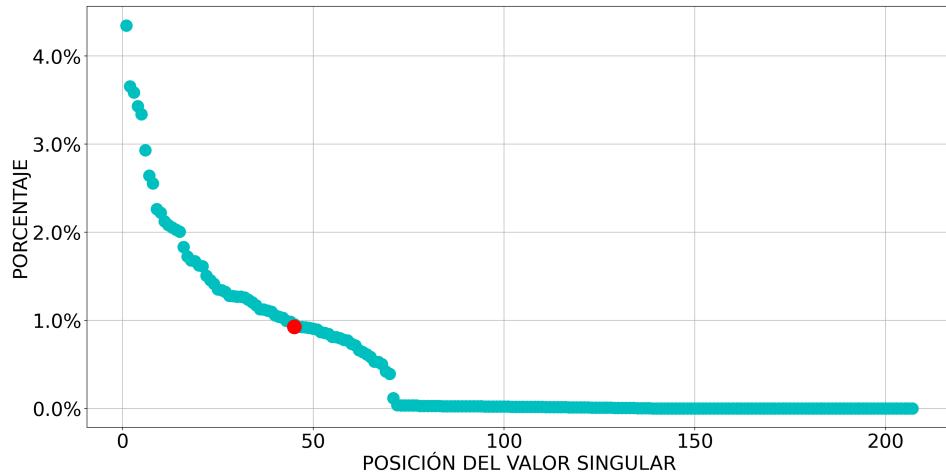
Figura 4.7: Series de tiempo de cada coordenada en la DE del modelo de entrada-salida  $BC$ ,  $TD$  y  $\pi$  con respecto a sus rezagos



#### 4.2.1. Realizaciones bajo el AF

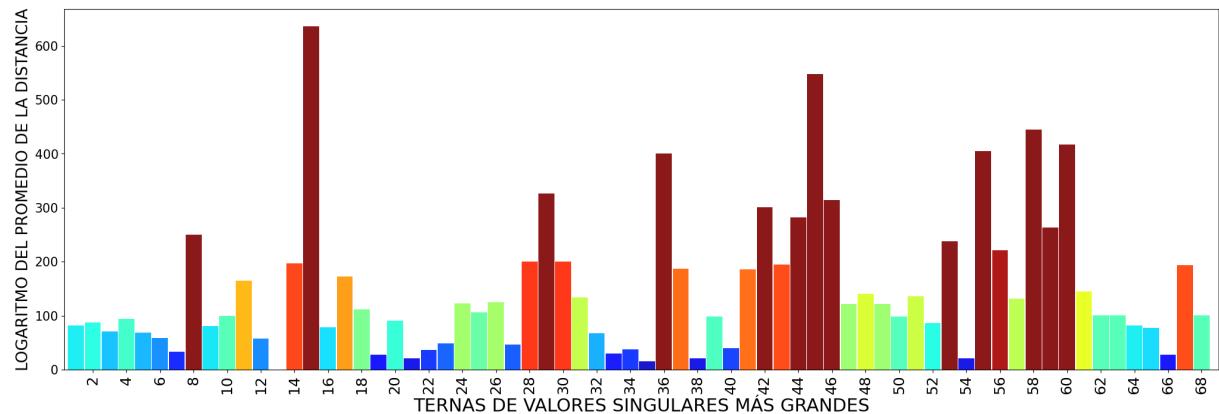
Los pasos siguientes serán efectuados con ayuda del Código C.7. Inicialmente, se construye  $\mathcal{H}_{70,69}$  con la DE y se pasa a verificar si la compresión podría tener cabida en la realización. Para ello se hace una revisión visual y numérica de sus valores singulares. En el primer caso, la Figura 4.8 permite apreciar que estos poseen una caída relativamente pronunciada. En el ámbito numérico tenemos que de los 207 valores singulares, el 22.2 % más grande (primeros 46, hasta el punto rojo), absorben un 80 % del total de la variabilidad de los datos. Ambas revisiones sugieren que una parte relativamente pequeña de las dimensiones asociadas a los datos de la MH son las que contienen la mayor parte de la información importante sobre ellos. Por consiguiente, la reducción de dimensiones parece buena idea, pudiendo generar un modelo más eficiente y con mejor comprensión de los patrones latentes, características más influyentes y factores más significativos de los datos.

Figura 4.8: Valores singulares de la Matriz de Hankel del modelo entrada-salida entre  $BP$ ,  $\pi$  y  $TD$  y su primer rezago



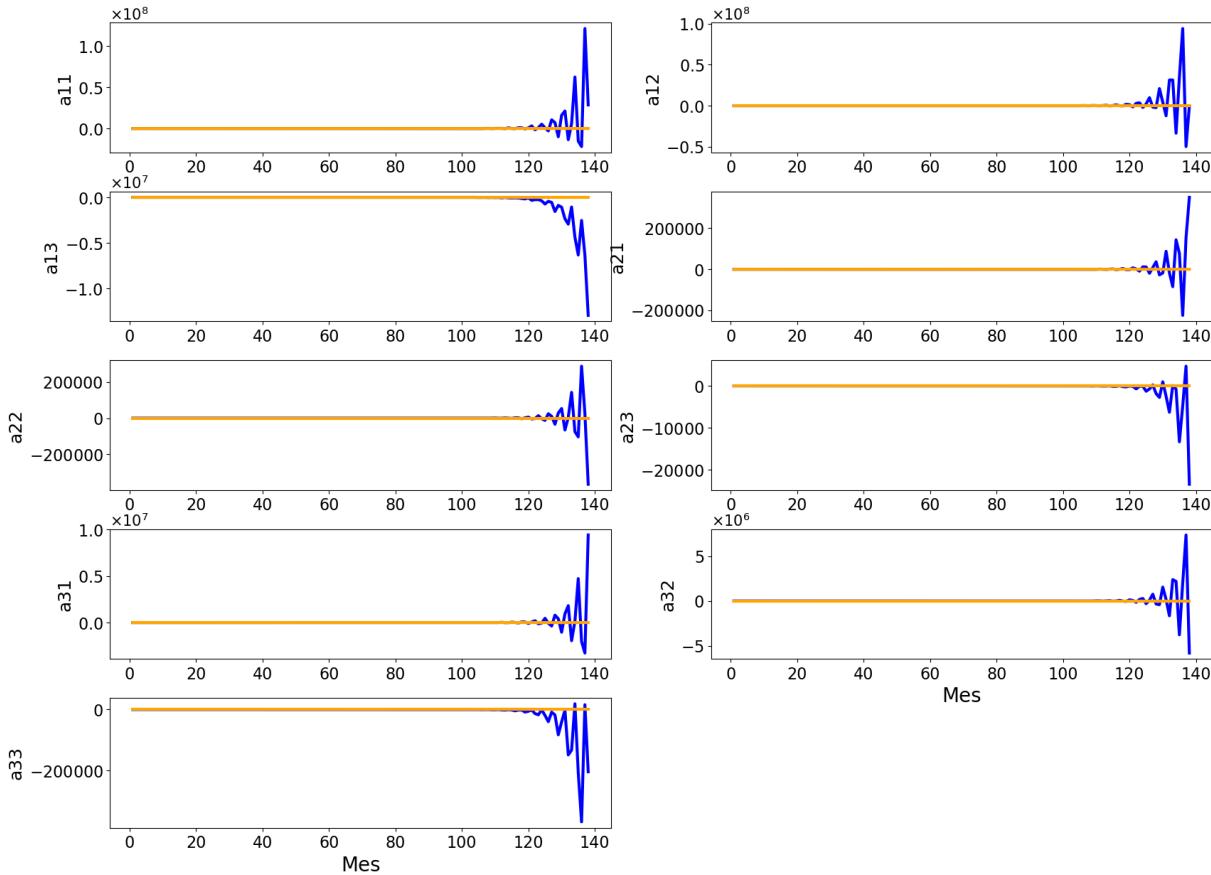
Para observar si la efectividad de la compresión es lo que se espera, se obtienen las distancias promedio entre la estimación en cada truncamiento y la DE. Estas se transforman bajo logaritmos y se muestran en la Figura 4.11. Entre todas, el valor mínimo obtenido fue de 15.21 ( $4049391.56$  antes del logaritmo), que se ubica en la posición 35<sup>3</sup> y el máximo fue de aproximadamente 636.51 ( $2.7 \times 10^{276}$  previo al logaritmo). Por su parte, la media, mediana y desviación estándar de las distancias promedio (sin aplicarles el logaritmo) fue de  $4.031 \times 10^{274}$ ,  $1.08 \times 10^{46}$  y  $3.275 \times 10^{275}$ , respectivamente. Todos estos valores indican una amplia desemejanza entre las estimaciones y los datos observados, lo que podría avalar que el resto de elementos que influyen en la identificación del sistema han afectado a la compresión.

Figura 4.9: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento



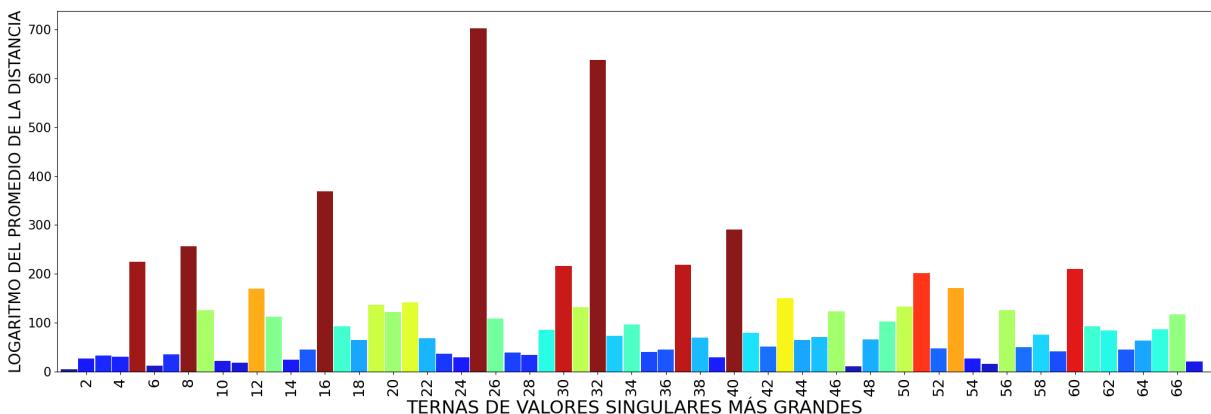
<sup>3</sup>Esto significa que se tomaron los primeros  $105 = 35 \times 3$ , es decir, las primeras 35 ternas de valores singulares

Figura 4.10: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)



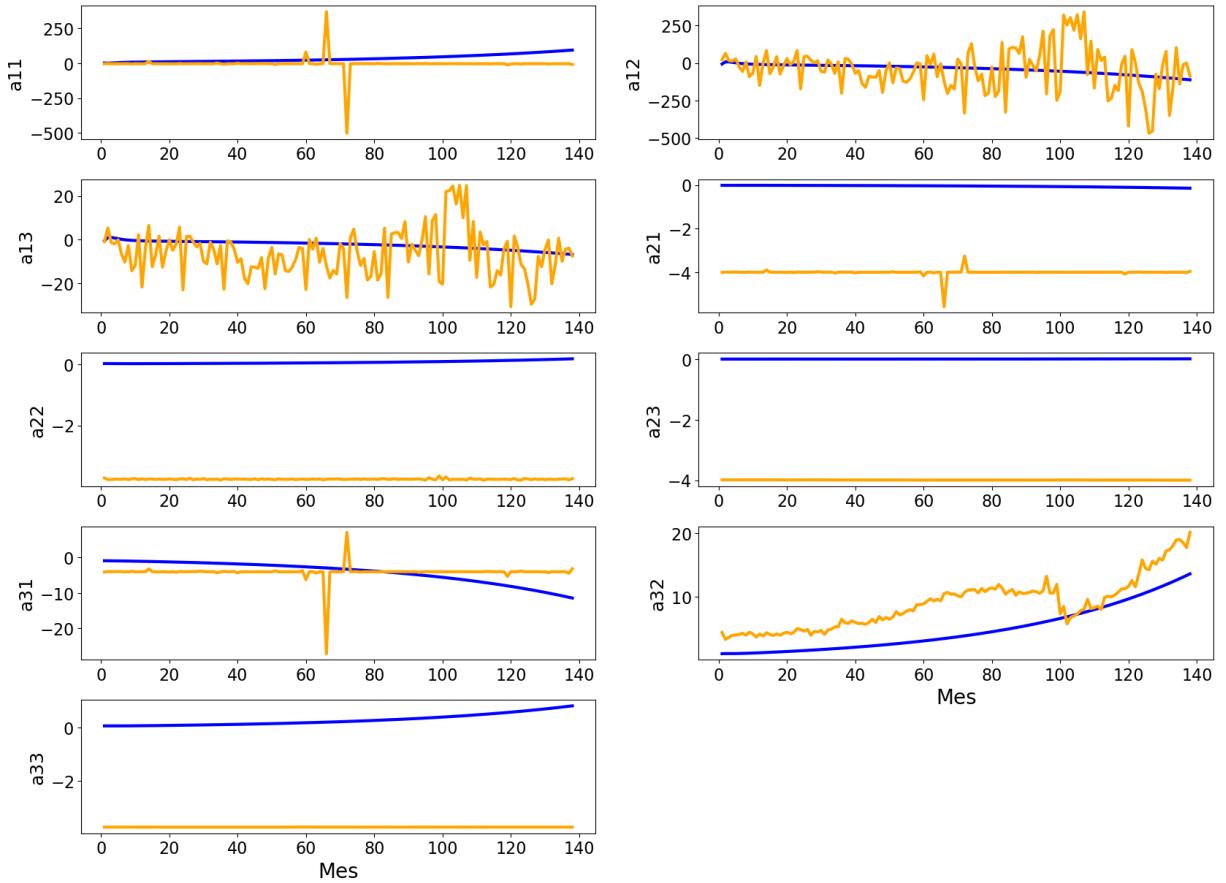
No obstante, debido a la implementación del caso sin compresión, que se verá más adelante, se notó que la estabilidad numérica del algoritmo de la realización para el modelo ?? fue afectada por la acumulación de errores. Por consiguiente, se construyó en Código C.8 donde se efectúa la realización con un grado más alto de precisión, tomando ahora 30 decimales.

Figura 4.11: Logaritmo de las distancias promedio entre la DE y las estimaciones generadas por las realizaciones bajo el AF para cada truncamiento con mayor precisión



recordar lo advertido en el Capítulo 3, es posible que la compresión pueda perder sus virtudes en la realización debido al detrimiento en la estructura de Hankel, la descomposición de la MH empleada y por ciertas características del sistema de que se trate. Para averiguar si realmente los beneficios de la compresión se sostienen, revisemos. Nos permite notar que la identificación del sistema subyacente mediante una realización lineal compacta generada con el AF no resulta útil para hacer proyecciones o para entender cualidades del sistema subyacente. Es evidente que al compactar la MH, la realización ha resultado ser inestable en el tiempo, divergiendo abruptamente y rápidamente al final del periodo de tiempo.

Figura 4.12: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en la mejor aproximación de las realizaciones con compresión de información (azul)

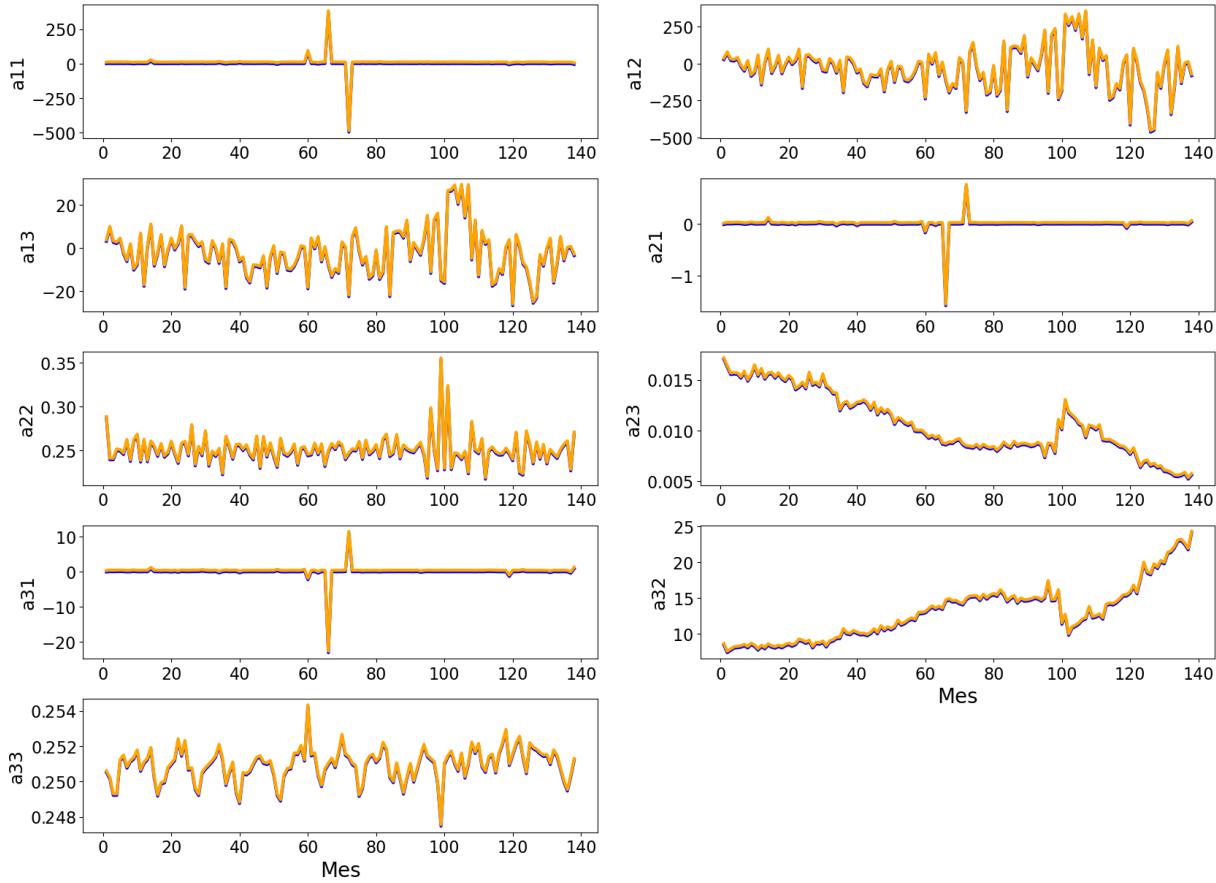


Mediante el Código C.9 obtenemos la realización sin compactar la MH y con una precisión mayor, de 30 decimales. En la Figura 4.12 podemos ver las entradas de su estimación, comparada con las de la DE. Debido a que las compresiones no son viables para poder analizar el sistema subyacente, se pasa a realizar toda la DE, sin truncamientos. Para esto se empleó el Código C.7, que sigue el mismo esquema de realización efectuado hasta ahora, pero aumentando la precisión a 30 decimales. Esto último debido a que al tomar la precisión que se venía usando, el algoritmo de la realización perdía su estabilidad numérica. Esto daba pie a que se acumularan imprecisiones significativas sobre las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ , generando que la órbita  $HF^{t-1}G$  diverja de manera abrupta de la DE.

La realización con el aumento de la precisión pudo lograr lo esperado teóricamente: una pequeña

diferencia promedio de su estimación con respecto a la DE, que rondó el  $4.26 \times 10^{-9}$ . Una forma de acentuar este resultado es advertir la Figura 4.13. En ella se observa como las series de tiempo de las entradas de la estimación (azules) y las respectivas de la DE (naranjas), son tan parecidas que prácticamente se encuentran superpuestas.

Figura 4.13: Series de tiempo de las coordenadas en la DE (naranja) y en las aproximaciones de la realización sin compresión de información (azul)



#### 4.2.2. Estabilidad, observabilidad y controlabilidad del sistema entre $BC$ , $INPC$ y $TD$ con respecto a sus rezagos

La ejecución sin compresión del modelo 4 permite llevar a cabo un análisis de la estabilidad del sistema subyacente, así como de su observabilidad y controlabilidad. En cuanto a la estabilidad del sistema, el Código C.7 nos brinda la capacidad de calcular los valores propios de la matriz de estado  $F$  y determinar la proporción de aquellos con parte real negativa, que resulta ser del 0 %. Por lo tanto, ninguno de los valores propios tiene parte real negativa, lo que implica que el sistema carece de estabilidad de Lyapunov. Esto significa que el sistema es inestable bajo condiciones de entrada nula, es decir, cuando  $(I_v \ I_e) = (0 \ 0)$ . En consecuencia, ante una perturbación inicial, el sistema no puede retornar a un estado de equilibrio ni mantenerse cerca de uno a medida que avanza en el tiempo, lo que se traduce en una divergencia temporal. En otras palabras, no es posible encontrar una entrada controlada adecuada  $(I_v \ I_e)^T$  que permita que el sistema regrese la salida  $(I_S \ I_N)^T$  a una posición de equilibrio; en su lugar, la salida tenderá a oscilar de manera impredecible e incontrolable a medida que pasa el tiempo. En resumen, no es factible influir en

la convergencia de  $I_S$  e  $I_N$  manipulando los valores de las incidencias de entrada,  $I_v$  e  $I_e$ .

La falta de estabilidad ante entrada nula indica que incluso pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o el ruido en el sistema pueden desencadenar respuestas no deseadas y potencialmente caóticas cuando no hay entrada. Esto puede ser problemático en aplicaciones donde es crucial mantener el sistema en un estado estable o cerca de un punto de operación deseado. La inestabilidad del sistema puede restringir su uso efectivo en ciertas aplicaciones, y algunos sistemas inestables pueden requerir un diseño especializado o no ser adecuados para aplicaciones críticas. Debido a su inestabilidad, será necesario implementar algún tipo de control o retroalimentación para estabilizar el sistema y mantenerlo dentro de los límites deseados.

Por otro lado, en relación con la observabilidad y la controlabilidad del sistema, estas se refieren a la capacidad de estimar el estado actual del sistema a partir de las salidas observadas y la capacidad de controlar el estado del sistema mediante entradas apropiadas, respectivamente. Un sistema es completamente observable si es posible determinar el estado inicial del sistema a partir de las salidas observadas y las entradas conocidas. La observabilidad se relaciona con la matriz de observación  $H$ . Por otro lado, un sistema es completamente controlable si es posible llevarlo desde cualquier estado inicial a cualquier estado deseado en un tiempo finito mediante una elección adecuada de las entradas de control. La controlabilidad se relaciona con las matrices de entrada  $F$  y  $G$  del sistema.

En nuestro caso, con base en lo explicado en el capítulo anterior y considerando que la dimensión del espacio de estados es  $n = 300$ , las matrices de controlabilidad  $C$  y observabilidad  $O$  se pueden expresar de la siguiente manera:

#### *Controlabilidad y observabilidad*

Utilizando el Código C.6, pudimos construir tanto  $C$  como  $O$  y determinar sus rangos. El resultado mostró que ambos tenían el mismo rango que la matriz  $F$ . Por lo tanto, dado que el rango de esta última matriz es igual a la dimensión del sistema, podemos afirmar que el sistema es completamente controlable y observable.

La completa observabilidad en este sistema nos permite estimar con precisión el estado  $x(t)$  del sistema en cualquier momento a partir de las medidas observadas de  $(I_S \ I_N)_t^T$ . Por otro lado, la completa controlabilidad facilita el diseño de entradas de control  $(I_v \ I_e)_t^T$  para llevar el sistema desde cualquier estado inicial  $x(0)$  a cualquier estado deseado  $x^*(t)$ . Sin embargo, determinar cuánto tiempo tomará esta transición de estados requerirá un análisis adicional de las limitaciones específicas del sistema de incidencias de las componentes de la inflación. Estas limitaciones podrían incluir objetivos económicos, políticas y decisiones económicas, factores externos como crisis económicas, fluctuaciones en los mercados internacionales, desastres naturales o cambios políticos, así como la complejidad del sistema y las entradas de control disponibles. Aunque este análisis escapa al alcance de la presente investigación, es importante considerarlo al diseñar un sistema de control para un sistema económico específico.

### **4.3. Identificación del cambio estructural y su control: modelos de incidencia y de BP, INPC y TD con respecto a sus rezagos**

El análisis y control del cambio estructural es un tema importante en el campo de la teoría de sistemas y control. Se refiere a la detección y adaptación a cambios en la estructura o comportamiento de un sistema a lo largo del tiempo. La realización lineal es una herramienta que puede ser utilizada para abordar este tipo de problemas.

En el análisis del cambio estructural, comenzamos con un modelo inicial del sistema. Esto puede ser un modelo en espacio de estado representado por  $F$ ,  $G$  y  $H$  en la realización lineal. A medida que los datos del sistema se van recolectando a lo largo del tiempo, se puede observar si hay un cambio significativo en el comportamiento del sistema. Esto puede ser detectado a través de métodos estadísticos, análisis de residuos o pruebas de hipótesis.

Si se detecta un cambio estructural, se busca identificar qué componente específico del sistema ha cambiado. En una realización lineal, esto podría manifestarse como cambios en las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$ . Una vez que se identifica el cambio, es posible actualizar la realización lineal del sistema para reflejar el nuevo comportamiento. Esto podría implicar ajustar las matrices  $F$ ,  $G$  y  $H$  para que se adapten a los datos observados después del cambio.

Una realización lineal puede ser utilizada para estimar y predecir el comportamiento futuro del sistema después del cambio. Esto puede ser útil para anticipar cómo el sistema responderá a nuevas condiciones. Si el cambio afecta la dinámica del sistema, el controlador utilizado podría necesitar ser adaptado para asegurarse de que el sistema siga siendo controlado de manera efectiva. Esto podría requerir ajustes en los parámetros del controlador o incluso cambios en la estructura del controlador. La realización lineal también puede ayudar a evaluar la robustez del control en presencia de cambios estructurales. Esto implica considerar cómo las incertidumbres y cambios afectarán la estabilidad y el rendimiento del sistema controlado.

# Conclusiones

## Apéndice A

# Teoría de la Realización

**Definición A.1 (Sistema Dinámico)** (Casti, 1987)). *Un sistema dinámico  $\Sigma$  es un concepto matemático definido por los siguiente axiomas: Un sistema dinámico  $\Sigma$  es un concepto matemático definido por los siguiente axiomas:*

(i) *Existe un conjunto de tiempo  $T$ , un conjunto de estado  $X$ , un conjunto de valores de entrada  $U$  un conjunto de funciones de entrada  $\Omega = \{u : T \rightarrow U\}$ , un conjunto de valores de salida  $Y$ , y un conjunto de funciones de salida  $\Gamma = \{y : T \rightarrow Y\}$ .*

(ii)  *$T$  es un subconjunto ordenado de números reales.*

(iii)  *$\Omega$  satisface las condiciones:*

a)  $\Omega \neq \emptyset$

b) *Un segmento de entrada  $u(t)$ ,  $t_1 < t \leq t_2$  en  $\Omega$  está restringido a  $(t_1, t_2] \cap T$ . Si  $u, u' \in \Omega$  y  $t_1 \leq t \leq t_3$ , entonces existe  $u'' \in \Omega$  tal que  $u''(t) = u(t)$ ,  $t_1 \leq t < t_2$  y  $u''(t) = u'(t)$ ,  $t_2 \leq t < t_3$ .*

(iv) *Existe una función de transición de estado*

$$\psi : T^2 \times X \times \Omega \rightarrow X$$

*cuyo valor es el estado  $x(t) = \psi(t; \tau, x, u) \in X$ , que se obtiene en el tiempo  $t \in T$  del estado inicial  $x(\tau) \in T$  en el tiempo inicial  $\tau \in T$ , bajo la acción de la entrada  $u \in \Omega$ .  $\psi$  tiene las siguientes propiedades:*

a)  *$\psi$  está bien definida para todo  $t \geq \tau$  pero no necesariamente para todo  $t < \tau$ .*

b)  *$\psi(t; t, x, u) = x$  para todo  $t \in T$ ,  $x \in X$ ,  $u \in U$ .*

c) *Para todo  $t_1 < t_2 \leq t_3$ , tenemos que  $\psi(t_3; t_1, x, u) = \psi(t_3; t_2, \psi(t_2; t_1, x, u), u)$  para todo  $x \in X$ ,  $u \in U$ .*

d) *Si  $u, u' \in \Omega$  y  $u(t) = u'(t)$ ,  $\tau < t \leq \tau_2$ , entonces  $\psi(\tau_2; \tau, x, u) = \psi(\tau_2; \tau, x, u')$*

(v) *Existe una función de salida legible  $\eta : T \times X \rightarrow Y$  que asigna la salida  $y(t) = \eta(t, x(t))$  en el tiempo  $t$ .*

**Definición A.2** (Equivalencia de Sistemas). *Sean  $(F, G, H)$  y  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$  las RI de sendos sistemas MDLIF. Se dice que los sistemas representados por  $(F, G, H)$  y  $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$  son equivalentes algebraicos siempre y cuando  $\exists Z \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$  no singular, tal que*

$$\bar{F} = Z^{-1}FZ \quad \bar{G} = Z^{-1}G \quad \bar{H} = HZ$$

**Definición A.3** (Matriz de Controlabilidad). *Sea  $j \in \mathbb{N}$  arbitrario y sea  $(F, G, H)$  la RI de un sistema MDLIF, donde  $F \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$ ,  $G \in \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$  y  $H \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$ . Se dice que*

$$\mathcal{C}_j = \begin{pmatrix} G & FG & \cdots & F^{j-1}G \end{pmatrix}$$

*es la  $j$ -matriz de controlabilidad  $q \times jr$  del sistema. Y se dice que  $\alpha \in \mathbb{N}$  es el índice de controlabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que  $\text{rango}(\mathcal{C}_\alpha) = \text{rango}(\mathcal{C}_{\alpha+1})$ .*

**Definición A.4** (Matriz de Observabilidad). *Sea  $j \in \mathbb{N}$  arbitrario y sea  $(F, G, H)$  la RI de un sistema MDLIF, donde  $F \in \mathcal{M}_{q \times q}(\mathbb{R})$ ,  $G \in \mathcal{M}_{q \times r}(\mathbb{R})$  y  $H \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$ . Se dice que*

$$\mathcal{O}_j = \begin{pmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{j-1} \end{pmatrix}$$

*es la  $j$ -matriz de observabilidad  $jp \times q$  del sistema. Y se dice que  $\beta \in \mathbb{N}$  es el índice de observabilidad del sistema, siempre y cuando sea el valor natural más pequeño tal que  $\text{rango}(\mathcal{O}_\beta) = \text{rango}(\mathcal{O}_{\beta+1})$ .*

**Definición A.5** (Matriz de Hankel con Entradas Matriciales). *Sea la sucesión  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ , y sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . La matriz de hankel con entradas matriciales (MHEM) de  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ , de orden  $(n, m)$  y dimensión  $n\mu \times m\eta$  es la función  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}}) : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m \rightarrow \{\mathcal{L}_{\mathbb{N}}\}$  definida como*

$$\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})(i, j) = L_{i,j} = L(i + j - 1) \quad (1)$$

*donde a  $L_{i,j}$  lo llamamos la entrada matricial  $(i, j)$ .*

*Definimos el bloque fila  $i \in \mathbb{N}_n$  como la función (1) cuando se fija  $i \in \mathbb{N}_n$ . En caso de fijar  $j \in \mathbb{N}_m$  se dice que la función (1) es el bloque columna  $j$ .*

*Sea  $\lceil \cdot \rceil$  la función techo.<sup>1</sup> La entrada escalar  $(r, s) \in \mathbb{N}_{n\mu} \times \mathbb{N}_{m\eta}$  de  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})$  está definida como  $(\mathcal{H}_{n,m})_{r,s} = (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s}$ , donde  $i_r = \lceil \frac{r}{\mu} \rceil$ ,  $j_s = \lceil \frac{s}{\eta} \rceil$ ,  $w_r = r - (i_r - 1)\mu$  y  $w_s = s - (j_s - 1)\eta$ .*

**Lema A.1.** *Sea la sucesión de matrices  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Para toda  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{N}_{n-1}$  y  $q \in \mathbb{N}_{m-1}$  se cumple que*

$$\mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = (\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}))_{1:p\mu, 1:q\eta} \quad (2)$$

**Demostración.** Por la Definición A.5, para  $(r, s) \in \mathbb{N}_{p\mu} \times \mathbb{N}_{q\eta}$  arbitrario,

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{p,q})_{r,s} &= (L_{i_r, j_s})_{w_r, w_s} \\ &= (L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} \\ (\mathcal{H}_{n,m})_{r,s} &= (L_{i'_r, j'_s})_{w'_r, w'_s} \\ &= (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>  $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida como  $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : x \leq n\}$ .

Pero como  $i_r = \left\lceil \frac{r}{\mu} \right\rceil = i'_r$  y  $j_s = \left\lceil \frac{r}{\eta} \right\rceil = j'_s$ , entonces  $w_r = r - (i_r - 1)\mu = r - (i'_r - 1)\mu = w'_r$  y  $w_s = s - (j_s - 1)\mu = r - (j'_s - 1)\mu = w'_s$ , por consiguiente  $(L(i_r + j_s - 1))_{w_r, w_s} = (L(i'_r + j'_s - 1))_{w'_r, w'_s}$ . Con lo cuál tenemos que

$$(\mathcal{H}_{p,q})_{r,s} = (\mathcal{H}_{n,m})_{r,s}$$

para cualquier  $(r, s) \in \mathbb{N}_{p\mu} \times \mathbb{N}_{q\eta}$ .

$$\therefore \mathcal{H}_{p,q}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = (\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}))_{1:p\mu, 1:q\eta}$$



**Teorema A.1 (Realización Mínima).** (a) La sucesión  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{p \times q}$ , es realizable si y sólo si existen enteros positivos  $\alpha, \beta$  y  $n$  tales que

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = \text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = n \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty} \quad (3)$$

(b) Si  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$  es realizable, entonces  $n$  es la dimensión de su realización mínima.

(c) Si  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$  es realizable y  $\beta, \alpha$  son los primeros enteros para los cuales (3) es verdad, entonces  $\beta$  es el índice de observabilidad y  $\alpha$  es el índice de controlabilidad de cualquier realización mínima de  $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ .

**Demostración.** (a) ( $\Leftarrow$ ) Esta demostración es en sí un algoritmo para generar una realización. En su desarrollo remarco con un número romano el paso correspondiente del algoritmo.

I. Sean  $\alpha, \beta$  y  $n$  enteros positivos tales que

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = \text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}(\mathcal{L}_{\mathbb{N}})) = n \quad \forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$$

II. Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n$  las posiciones de las primeras  $n$  filas independientes de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ . Se definen  $\Lambda_{\alpha} \in \mathcal{M}_{n \times \alpha q}$  y  $\Lambda_{\alpha}^* \in \mathcal{M}_{n \times \alpha q}$  como las matrices compuestas por las filas  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ , y por las filas  $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$ , respectivamente.

III. Sean  $s_1, s_2, \dots, s_n$  las posiciones de las primeras  $n$  columnas independientes de  $\Lambda_{\alpha}$ . Definimos a  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}^* \in \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}_1 \in \mathcal{M}_{p \times n}$  y  $\mathbf{A}_2 \in \mathcal{M}_{n \times q}$  como las matrices compuestas por las columnas  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de  $\Lambda_{\alpha}$ , por las columnas  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de  $\Lambda_{\alpha}^*$ , por las columnas  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$ , y por las primeras  $q$  columnas de  $\Lambda_{\alpha}$ .

Un resultado indispensable para la última parte de la demostración es la siguiente

**Proposición A.1.** Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n$  las posiciones de las primeras  $n$  filas independientes de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ , sea  $j \in \mathbb{N}$  y sean  $\Lambda_j$  y  $\Lambda_j^*$  las matrices compuestas por las filas  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta,j}$  y por las filas  $r_1 + p, r_2 + p, \dots, r_n + p$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$ , respectivamente. Entonces, para toda  $j \in \mathbb{N}$  se cumplen las siguientes igualdades<sup>2</sup>

$$\mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1} \Lambda_j = \Lambda_j^* \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{A}^{-1} \Lambda_j = \mathcal{H}_{1,j} \quad (5)$$

$$(\mathbf{A}_2 | \Lambda_j^*) = \Lambda_{j+1} \quad (6)$$

<sup>2</sup>Como las columnas de  $A$  son independientes y el rango de columnas es igual al de filas (Teorema 24 en Hoffman y Kunze (1971, p.114)), entonces las filas de  $A$  son independientes. Por lo tanto,  $A$  es invertible (Corolario 3 en Hoffman y Kunze (1971, p.46)).

**Demostación.** Sea  $W$  el conjunto de las columnas de  $A$ . Entonces,  $W$  es una base del espacio columna de  $\Lambda_j$ , para toda  $j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ . Para demostrarlo, observamos que  $\Lambda_\alpha$  tiene rango fila  $n$ ,<sup>3</sup> entonces por el Teorema B.3, su rango columna es  $n$ . Y como  $W$  es el conjunto de  $n$  columnas independientes de  $\Lambda_\alpha$ , entonces  $W$  es una de sus bases. Supongamos que para  $k \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ ,  $W$  es base del espacio columna de  $\Lambda_k$ . Entonces, por el Teorema B.3,  $\Lambda_k$  tiene rango fila  $n$  y sus  $n$  filas son una base de su espacio fila.<sup>4</sup> Por consiguiente, las  $n$  filas de  $\Lambda_{k+1}$  son una base de su espacio fila.<sup>5</sup> Y por el Teorema B.3 el rango columna de  $\Lambda_{k+1}$  es  $n$ , lo que concluye la demostración.

Además, si a lo anterior se aúna que cada columna de  $\Lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_\alpha$ , es combinación lineal de  $W$ ,<sup>6</sup> se sigue que

$$(\Lambda_j)_{:,u} = \sum_{k=1}^n c_{(u,k)} (\Lambda_\alpha)_{:,s_k} \quad (7)$$

para toda columna  $u \in \mathbb{N}_{jp}$  de  $\Lambda_j$ , y para cualquier  $j \in \mathbb{N}$ . Luego, como

$$\begin{aligned} I_n &= A^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} \left( (\Lambda_\alpha)_{:,s_1} \quad (\Lambda_\alpha)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_\alpha)_{:,s_n} \right) \end{aligned}$$

es decir,  $A_{i,:}^{-1}(\Lambda_\alpha)_{:,s_k}$  es 1 si  $i = k$  y 0 cuando  $i \neq k$ , tenemos que

$$\begin{aligned} A^{-1}\Lambda_j &= \begin{pmatrix} A_{1,:}^{-1} \\ A_{2,:}^{-1} \\ \vdots \\ A_{n,:}^{-1} \end{pmatrix} \left( (\Lambda_j)_{:,1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,s_n} \quad \cdots \quad (\Lambda_j)_{:,j_q} \right) \\ &= \begin{pmatrix} c_{(1,s_1)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(s_2,s_1)} & \cdots & c_{(s_n,s_1)} & \cdots & c_{(j_q,s_1)} \\ c_{(1,s_2)} & \cdots & c_{(s_1,s_2)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(s_n,s_2)} & \cdots & c_{(j_q,s_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{(1,s_n)} & \cdots & c_{(s_1,s_n)} & \cdots & c_{(s_2,s_n)} & \cdots & 1 & \cdots & c_{(j_q,s_n)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Sea  $S$  el conjunto de las columnas  $s_1, \dots, s_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$ . Entonces  $S$  es una base del espacio columna de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ .<sup>7</sup> Además, las columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$ ,  $j < \alpha$  son columnas

<sup>3</sup>Sus  $n$  filas son idependientes y generan su espacio de filas.

<sup>4</sup>Suponiendo que no, serían dependientes. Lo que implica que un número de filas menor a  $n$  genera el espacio de filas de  $\Lambda_k$ , contradiciendo el Corolario B.2.1 (a)

<sup>5</sup>Suponiendo lo contrario serían dependientes. Luego,  $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_{k+1})_{i,:} = \bar{0}$  con  $a_i \neq 0$ , para algún  $i \in \mathbb{N}_n$ . Sin embargo, como  $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_{k+1})_{i,1:p_k} = \sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_k)_{i,:} = \bar{0}$  con  $a_i \neq 0$ , para algún  $i \in \mathbb{N}_n$ , llegamos a una contradicción puesto que las filas de  $\Lambda_k$  son independientes.

<sup>6</sup>Como las columnas de  $\Lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_\alpha$ , son columnas de  $\Lambda_\alpha$  y como  $W$  es una base del espacio columna de  $\Lambda_\alpha$ , entonces las columnas de  $\Lambda_j$ ,  $j \in \mathbb{N}_\alpha$  son combinación lineal de  $W$ .

<sup>7</sup>Por hipótesis  $\text{rango}(\mathcal{H}_{\beta+1,j}) = n$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ , entonces el rango del espacio columna de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$  es  $n$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$ . Si  $S$  no es base de algún espacio columna de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}^*$ , entonces es dependiente o no genera tal espacio. Si es dependiente,  $\sum_{i=1}^n a_i (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{i,:} = \bar{0}$  con algún  $a_i \neq 0$ , implicando  $\sum_{i=1}^n a_i (\Lambda_j)_{i,:} = \bar{0}$  con algún  $a_i \neq 0$ , una contradicción. Así  $S$  no genera tal espacio y  $\exists \bar{y}$  del espacio columna que no es combinación lineal de  $S$ . Entonces,  $S \cup \{\bar{y}\}$  es independiente con  $n + 1$  elementos, lo que contradice el Corolario B.2.1 (a). Luego,  $S$  cumple ambas condiciones, por lo tanto es una base.

de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}$ , y por lo tanto, son combinaciones lineales de  $S$ . Entonces, cualquier columna  $u \in \mathbb{N}_{jq}$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,j}$ , con cualquier  $j \in \mathbb{N}$ , garantiza

$$(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{:,s_k} \quad (9)$$

Luego, por definición de  $\Lambda_j$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , el elemento de la columna  $(\Lambda_j)_{:,u}$  en la coordenada  $i$  es el elemento de la columna  $(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u}$  en la coordenada  $r_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ . Entonces, de (7) y (9) tenemos

$$\sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)} (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k}$$

y como también  $(\Lambda_\alpha)_{i,s_k} = (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k}$ ,  $\forall i, k \in \mathbb{N}_n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)} (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{r_i,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n c_{(u,s_k)} (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} - \sum_{k=1}^n d_{(u,s_k)} (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \\ &= \sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)}) (\Lambda_\alpha)_{i,s_k} \end{aligned}$$

Pero como esto se cumple para toda  $i \in \mathbb{N}_n$ , entonces

$$\sum_{k=1}^n (c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)}) (\Lambda_\alpha)_{:,s_k} = \bar{0}$$

y como  $W$  es independiente,  $c_{(u,s_k)} - d_{(u,s_k)} = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_n$ , es decir,  $c_{(u,s_k)} = d_{(u,s_k)}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_n$ , y por las igualdades (8) y (9), y que por definición de  $\Lambda_j^*$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , el elemento de la columna  $(\Lambda_j^*)_{:,u}$  en la coordenada  $i$  es el elemento de la columna  $(\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{:,u}$  en la coordenada  $r_i + p$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ , se sigue que

$$\begin{aligned} A^* A^{-1} \Lambda_j &= \left( (\Lambda_j^*)_{:,s_1} \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_n} \right) A^{-1} \Lambda_j \\ &= \left( \sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(jq,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(jq,s_k)} (\Lambda_j^*)_{:,s_k} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(jq,s_k)} \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_k} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_k} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,1} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,s_m} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,s_m} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_1+p,jq} \\ \vdots \\ (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_n+p,jq} \end{pmatrix} \right) \\ &= \left( (\Lambda_j^*)_{:,1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_1} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,s_n} \quad \cdots \quad (\Lambda_j^*)_{:,jq} \right) \\ &= \Lambda_j^* \end{aligned}$$

para toda  $j \in \mathbb{N}$ , demostrando la igualdad (4) de la proposición. Además,

$$\begin{aligned}
A_1 A^{-1} \Lambda_j &= \left( (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_1} \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_2} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_n} \right) A^{-1} \Lambda_j \\
&= \left( \sum_{k=1}^n c_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(s_m,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n c_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(s_m,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_k} \right) \\
&= \left( \sum_{k=1}^n d_{(1,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^n d_{(j_q,s_k)} (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_k} \right) \\
&= \left( (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,1} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,s_m} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha})_{1:p,j_q} \right) \\
&= \left( (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,1} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,s_m} \quad \cdots \quad (\mathcal{H}_{1,\alpha})_{:,j_q} \right) \\
&= \mathcal{H}_{1,j}
\end{aligned}$$

para toda  $j \in \mathbb{N}$ , demostrando la igualdad (5) de la proposición.

Por ultimo, como  $A_2 = (\Lambda_\alpha)_{:,1:q}$ , y  $(\Lambda_\alpha)_{i,1:q} = (\mathcal{H}_{\beta,\alpha})_{r_i,1:q} = (\mathcal{H}_{\beta,j+1})_{r_i,1:q} = (\Lambda_{j+1})_{i,:}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ , entonces

$$A_2 = (\Lambda_{j+1})_{:,1:q} \quad (10)$$

Luego, por las definiciones A.5 y la de  $\Lambda_j^*$ , y debido al Lema A.1, para cualquier  $(a, b) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_{jq}$

$$(\Lambda_j^*)_{a,b} = (\mathcal{H}_{\beta+1,j})_{r_a+p,b} = (\mathcal{H}_{\beta+1,j+1})_{r_a+p,b} = (L_{a',b'})_{w_{r_a+p},w_b} = (L(a' + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b}$$

Pero como  $\beta + 1 \geq a' = \lceil \frac{r_a+p}{p} \rceil = 1 + \lceil \frac{r_a}{p} \rceil \geq 2$  y  $b' = \lceil \frac{b}{q} \rceil \leq \lceil \frac{jq}{q} \rceil = \lceil j \rceil = j < j + 1$ , entonces la entrada matricial  $L_{a'-1,b'+1}$  de  $\mathcal{H}_{\beta,j+1}$  está bien definida, por lo que

$$\begin{aligned}
(L(a' + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} &= (L(a' + 0 + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L(a' + (-1 + 1) + b' - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L((a' - 1) + (b' + 1) - 1))_{w_{r_a+p},w_b} \\
&= (L_{a'-1,b'+1})_{w_{r_a},w_{b+q}} \stackrel{8}{=} \\
&= (\mathcal{H}_{\beta+1,j+1})_{r_a,b+q} \\
&= (\Lambda_{j+1})_{a,b+q}
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\Lambda_j^* = (\Lambda_{j+1})_{:,q+1:(j+1)q} \quad (11)$$

$\therefore$  De las igualdades en (10) y (11), se demuestra la igualdad (6) de la proposición. ■

**IV.** Sean las matrices  $\mathbf{F} = A^* A^{-1}$ ,  $\mathbf{G} = A_2$  y  $\mathbf{H} = A_1 A^{-1}$ . Entonces, por las igualdades (4), (5) y (6),

$$A_1 A^{-1} \Lambda_s = \begin{cases} (HG \mid H F \Lambda_{s-1}), & \text{si } 1 < s \\ HG (= HA_2), & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

---

<sup>8</sup>Tenemos que  $w_{r_a+p} = r_a + p - (a' - 1)p = r_a + p - [(a' - 1) - 1]p - p = r_a - [(a' - 1) - 1]p = w_{r_a}$  y que  $w_b = b - (b' - 1)q = b - [(b' + 1) - 1]q + q = b + q - [(b' + 1) - 1]q = w_{b+q}$ .

además de que  $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{1,j} &= (HG|HFA_{j-1}) = (HG|HFG|HF\Lambda_{j-2}^*) = (HG|HFG|HF^2\Lambda_{j-2}) = \dots \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{k-1}\Lambda_{j-k}^*) = (HG|HFG|\dots|HF^k\Lambda_{j-k}) = \dots \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{j-2}\Lambda_1^*) = (HG|HFG|\dots|HF^{j-1}\Lambda_1) \\ &= (HG|HFG|\dots|HF^{j-1}G)\end{aligned}$$

Y ya que por la Definición A.5,  $\mathcal{H}_{1,j} = (L_{1,1}\dots L_{1,j}) = (L(1)\dots L(j))$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , por consiguiente

$$L(j) = HF^{j-1}G$$

para cualquier  $j \in \mathbb{N}$ .

■

**Proposición A.2.** Sea  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -3$  y  $a_2 = 3$ , entonces  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^2 a_i \frac{(n+i)(n+i+1)}{2} = \frac{(n+3)(n+4)}{2} \quad (1)$$

**Demostación.** Para 1 tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 a_i \frac{(1+i)(1+i+1)}{2} &= \frac{(1)(1+1)}{2} - 3 \frac{(1+1)(1+1+1)}{2} + 3 \frac{(1+2)(1+2+1)}{2} \\ &= \frac{2-18+36}{2} \\ &= \frac{2-18+36}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= \frac{(4)(5)}{2} \\ &= \frac{(1+3)(1+4)}{2}\end{aligned}$$

Sea  $k$  cualquier natural que cumple con la igualdad (1), entonces  $k+1$ , como se ve debajo, también la respeta. Por tanto, todo  $n \in \mathbb{N}$  sustenta la igualdad anterior.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+1)+i)((k+1)+i+1)}{2} &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{((k+i)+1)((k+i+1)+1)}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1)+(k+i+1)+(k+i)+1}{2} \\ &= \sum_{i=0}^2 a_i \frac{(k+i)(k+i+1)}{2} + \sum_{i=0}^2 a_i \frac{2(k+i+1)}{2}\end{aligned}$$

y, a causa de la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+3)(k+4)}{2} + \frac{2(k+1) - 6(k+2) + 6(k+3)}{2} \\
&= \frac{(k+3)(k+4) + 2(k+4)}{2} \\
&= \frac{(k+4)((k+3)+2)}{2} \\
&= \frac{((k+1)+3)((k+1)+4)}{2}
\end{aligned}$$

■

**Definición A.6 (Factorización).** Sea la sucesión  $\mathcal{G}_{\mathbb{N}}$ , con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Se dice que **Factorizar** la matriz  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{G}_{\mathbb{N}})$  es generar las matrices  $P_{n,n} \in \text{It}_{n\mu}$ , cuya diagonal principal está compuesta de unos, y  $Q_{n,m} \in \mathcal{M}_{n\mu \times m\eta}$ :

$$P_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ p_{n\mu,1} & \cdots & p_{n\mu,n\mu-1} & 1 \end{pmatrix}; \quad y \quad Q_{n,m} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,m\eta} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,m\eta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{n\mu,1} & q_{n\mu,2} & \cdots & q_{n\mu,m\eta} \end{pmatrix}$$

tales que  $\mathcal{H}_{n,m} = P_{n,n}Q_{n,m}$ . Por **Algoritmo de Factorización (AF)** se entenderá la sucesión de pasos para **factorizar** la matriz  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{G}_{\mathbb{N}})$ , los cuales se definen a continuación:

1. Definir  $(Q_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:}$ ;
2. Determinar la condición:
  - 2.1. Si  $\mathcal{H}_{n,m}$  tiene solo una fila, se define  $P_{n,n} = [1]$ , y  $Q_{n,m} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:}$
  - 2.1.1 Fin.
  - 2.2. Si  $\mathcal{H}_{n,m}$  tiene más de una fila, definimos  $i = 1$ ;
  3. Si  $(Q_{n,m})_{i,:} \neq \bar{0}$ , hallar la primer columna  $j_i$  de  $(Q_{n,m})_{i,:}$  tal que  $q_{i,j_i} \neq 0$  y definir  $q_{s,j_i} = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}_{i+1:n\mu}$ ;
  4. Determinar  $p_{u+i,i}$  como<sup>9</sup>

$$p_{u+i,i} = \frac{(\mathcal{H}_{n,m})_{u+i,j_i} - \left( \sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i} \right)}{q_{i,j_i}}$$

para toda  $u \in \mathbb{N}_{n\mu-i}$ ;

5. Determinar  $q_{i+1,j}$  como<sup>10</sup>

$$q_{i+1,j} = (\mathcal{H}_{n,m})_{i+1,j} - \sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo  $j \in \mathbb{N}_{m\eta}/\{j_r : \forall r \in \mathbb{N}_i\}$ ,<sup>11</sup>

<sup>9</sup> Esta expresión es equivalente a  $(\mathcal{H}_{n,m})_{u+i,j_i} = (P_{n,m})_{u+i,:}(Q_{n,m})_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i}$ . Para ello considere el paso 3, que implica  $\sum_{s=i+1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$ . Además, está bien definida, por el inciso 3,  $q_{i,j_i} \neq 0$ .

<sup>10</sup> Esta expresión es equivalente a  $(\mathcal{H}_{n,m})_{i+1,j} = (P_{n,m})_{i+1,:}(Q_{n,m})_{:,j} = \sum_{s \in \mathbb{N}_{m\eta}} p_{i+1,s} q_{s,j}$ . Para ello considere que  $P_{n,n} \in \text{It}_{n\mu}$ , con unos en su diagonal principal. Lo que implica que  $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j_i} = 0$  y  $p_{i+1,i+1} = 1$ .

<sup>11</sup> Es decir, todo  $j$  en  $\mathbb{N}_{m\eta}$  que no corresponda a la columna del primer elemento no nulo de la fila  $1, \dots, i$  de  $Q_{n,m}$ .

6. Determinar la condición:

- 6.1. Si  $(Q_{n,m})_{i+1,:} = \bar{0}$ , entonces con los valores obtenidos en las  $i$  repeticiones precedentes del AF, y haciendo  $(Q_{n,m})_{i+1+k,:} = \bar{0}$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}_{n\mu-(i+1)}$ , conformamos las matrices  $P_{n,n}$  y  $Q_{n,m}$ , y terminamos.
- 6.2. Si  $\mathcal{H}_{n,m}$  tiene sólo  $i + 1$  filas, entonces con los valores obtenidos en las  $i$  repeticiones precedentes del AF conformamos las matrices  $P_{n,n}$  y  $Q_{n,m}$ , y terminamos.
- 6.3. Si  $\mathcal{H}_{n,m}$  tiene más de  $i + 1$  filas y  $(Q_{n,m})_{i+1,:} \neq \bar{0}$ , entonces definimos  $i = i + 1$ , es decir, tomamos una nueva  $i$  igual a la  $i$  inmediatamente anterior, más 1, y repetimos el AF desde el inciso 3.

**Definición A.7.** Sea  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ , y sean  $P_{n,n}$  y  $Q_{n,m}$  las matrices que resultan al factorizar  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$  según la Definición A.6, y sea  $k \in \mathbb{N}_{(n-1)\mu}$ . Se definen  $P'_{k,k} \in \mathcal{M}_{k \times k}$ ,  $P^*_{k,k} \in \mathcal{M}_{k \times k}$ ,  $G_k \in \mathcal{M}_{k \times \eta}$  y  $H_k \in \mathcal{M}_{\mu \times k}$ ,

$$P'_{k,k} = (P_{n,n})_{1:k,1:k}; \quad P^*_{k,k} = (P_{n,n})_{\mu+1:\mu+k,1:k};$$

$$G_k = (Q_{n,m})_{1:k,1:\eta}; \quad H_k = (P_{n,n})_{1:\mu,1:k}; \quad F_k = (P'_{k,k})^{-1} P^*_{k,k}$$

**Lema A.2.** Sea  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Si se cumple que  $rango \mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = k$ , entonces la matriz  $Q_{n,m}$  generada por el **AF** de la Definición A.6 tiene sus últimas  $n\mu - k$  filas nulas.

**Demostación.** Como la matriz  $P_{n,n}$  es triangular inferior, entonces su determinante es igual a la multiplicación de los elementos en su diagonal principal, que es 1, por lo cual tiene inversa. Por consiguiente,  $k = rango \mathcal{H}_{n,m} = rango P_{n,n} Q_{n,m} = rango Q_{n,m}$ . Luego, las primeras  $k$  filas de  $Q_{n,m}$  deben ser no nulas, en caso contrario, existe  $s \in \mathbb{N}_k$  tal que  $(Q_{n,m})_{s,:} = \bar{0}$ , pero por el paso d6 de la Definición A.6,  $(Q_{n,m})_{s+k,:} = \bar{0}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_{n\mu-k}$ , por consiguiente sólo existen  $k - 1$  filas no nulas en  $Q_{n,m}$ , lo que contradice que su rango sea  $k$ .

Ahora, si probamos que la fila  $(Q_{n,m})_{k+1,:} = \bar{0}$ , por el paso d6 de la Definición A.6, entonces  $(Q_{n,m})_{k+1+t,:} = \bar{0}$ ,  $\forall t \in \mathbb{N}_{n\mu-(k+1)}$ , terminando la demostración.

Si suponemos que la fila  $k + 1$  es no nula, entonces tenemos  $k + 1$  filas no nulas y, por la Definición A.6, la fila  $r \in \mathbb{N}_{k+1}$  tiene la columna  $j_r$  no nula, y  $j_r \neq j_s$ ,  $\forall r, s \in \mathbb{N}_{k+1}$  con  $r \neq s$ . Por consiguiente, si  $\sum_{r=1}^{k+1} \lambda_r (Q_{n,m})_{r,:} = 0$ ,  $\lambda_r \in \mathbb{R}$ , entonces para cada  $s \in \mathbb{N}_{k+1}$ ,

$$\sum_{r=1}^k \lambda_r q_{r,j_s} = \lambda_s q_{s,j_s} = 0$$

siempre y cuando  $\lambda_s = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}_{k+1}$ , o lo que es lo mismo, que las primeras  $k + 1$  filas son independientes, lo que contradice que  $rango Q_{n,m} = k$ . Por tanto, la fila  $k + 1$  debe ser nula.



**Lema A.3.** Sea  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ , y sean  $n', m', n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $n' \geq n$  y  $m' \geq m$ . Al aplicar el **AF** en la definición A.6 a  $\mathcal{H}_{n,m}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$  y  $\mathcal{H}_{n',m'}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$ , las matrices obtenidas  $P_{n,n}$  y  $Q_{n,m}$ , y  $P_{n',n'}$  y  $Q_{n',m'}$ , respectivamente, son tales que

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu} \\ Q_{n,m} &= (Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta} \end{aligned}$$

**Demostración.** Por la Definición A.6 y el Lema A.1 se sigue que

$$P_{n,n}Q_{n,m} = \mathcal{H}_{n,m} = (\mathcal{H}_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1:n\mu}(Q_{n',m'})_{1:n\mu,1:m\eta}$$

por consiguiente,  $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_{n\mu} \times \mathbb{N}_{m\eta}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,j} \quad (2)$$

Además, tenemos que

$$(Q_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n,m})_{1,:} = (\mathcal{H}_{n',m'})_{1,1:m\eta} = (Q_{n',m'})_{1,1:m\eta} \quad (3)$$

Se probará por inducción que para toda  $u \in \mathbb{N}_{n\mu-1}$ ,

$$(Q_{n,m})_{u+1,:} = (Q_{n',m'})_{u+1,1:m\eta}; \quad y \quad (P_{n,n})_{:,u} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u} \quad (4)$$

Sea  $u = 1$ , y debido a (3), los primeros elementos no nulos de  $(Q_{n,m})_{1,:}$  y  $(Q_{n',m'})_{1,1:m\eta}$  están en la misma columna,  $k_1$ , y son tales que  $q_{1,k_1} = q'_{1,k_1}$ , además, por el **AF**,  $q_{s,k_1} = q'_{s,k_1} = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}_{2:n\mu}$ , entonces  $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_1} = p_{i,1} q_{1,k_1}$  y  $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_1} = p'_{i,1} q'_{1,k_1} \forall i \in \mathbb{N}_{n\mu}$ , y por (2) se sigue

$$(P_{n,n})_{:,1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,1} \quad (5)$$

Asimismo, tenemos que  $\sum_{r=1}^{n\mu} p_{2,r} q_{r,j} = p_{2,1} q_{1,j} + q_{2,j}$  y  $\sum_{r=1}^{n\mu} p'_{2,r} q'_{r,j} = p'_{2,1} q'_{1,j} + q'_{2,j}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_{m\eta}$ , y debido a (3) y (5),  $p_{2,1} q_{1,j} = p'_{2,1} q'_{1,j}$ , por lo cual

$$(Q_{n,m})_{2,:} = (Q_{n',m'})_{2,1:m\eta} \quad (6)$$

Suponiendo que (4) se cumple para los primeros  $u$  enteros, con  $u \in \mathbb{N}_{n\mu-2}$ , se probará que se cumple para  $u+1$ . Por hipótesis de inducción, en particular, (4) se cumple para  $u$ , por lo cual  $(Q_{n,m})_{u+1,:}$  y  $(Q_{n',m'})_{u+1,1:m\eta}$  son iguales, así los primeros elementos no nulos de ambas están en la misma columna,  $k_{u+1}$ , además, por el **AF**,  $q_{s,k_{u+1}} = q'_{s,k_{u+1}} = 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{N}_{u+2:n\mu}$ , entonces para cada  $i \in \mathbb{N}_{n\mu}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n\mu} p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} + p_{i,u+1} q_{u+1,k_{u+1}} \\ \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} &= \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}} + p'_{i,u+1} q'_{u+1,k_{u+1}} \end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción y por (3) se sigue que  $\sum_{r=1}^u p_{i,r} q_{r,k_{u+1}} = \sum_{r=1}^u p'_{i,r} q'_{r,k_{u+1}}$  y  $q_{u+1,k_{u+1}} = q'_{u+1,k_{u+1}}$ , así, debido a (2)

$$(P_{n,n})_{:,u+1} = (P_{n',n'})_{1:n\mu,u+1} \quad (7)$$

Por otro lado, para todo  $j \in \mathbb{N}_{m\eta}$

$$\sum_{r=1}^{n\mu} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} + q_{u+2,j}; \quad y \quad \sum_{r=1}^{n\mu} p'_{u+2,r} q'_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j} + q'_{u+2,j}$$

Debido a la hipótesis de inducción y a (7),  $\sum_{r=1}^{u+1} p_{u+2,r} q_{r,j} = \sum_{r=1}^{u+1} p'_{u+2,r} q'_{r,j}$ , y a causa de (2),

$$(Q_{n,m})_{u+2,:} = (Q_{n',m'})_{u+2,1:m\eta} \quad (8)$$



**Lema A.4.** Sea la sucesión  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ , sea  $\mathcal{H}_{\beta+1,\beta+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$ , y sean  $n, n_1 \in \mathbb{N}_{\mu\beta}$  tales que  $n_1 \leq n$ . Si  $F_n$  y  $F_{n_1}$  son como en la Definición A.7, con respecto a la matriz  $P_{\beta+1,\beta+1}$ . Entonces

$$F_{n_1} = (F_n)_{1:n_1, 1:n_1} \quad (9)$$

**Demostración.** Por la Definición A.7, para cada  $i, j \in \mathbb{N}_{n_1}$  se sigue que

$$\begin{aligned} ((F_n)_{1:n_1, 1:n_1})_{i,j} &= (F_n)_{i,j} = ((P'_{n,n})^{-1} P_{n,n}^*)_{i,j} \\ &= \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \end{aligned}$$

ya que  $P'_{n,n} \in \text{It}_n(\mathbb{R})$ , entonces  $(P'_{n,n})^{-1} \in \text{It}_n(\mathbb{R})$ , por consiguiente,  $((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} = 0$ , si  $i < r$ , y ya que  $i \in \mathbb{N}_{n_1}$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} \end{aligned}$$

y por el Teorema B.6 y la Definición A.7

$$\sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n,n})^{-1})_{i,r} (P_{n,n}^*)_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} ((P'_{n_1,n_1})^{-1})_{i,r} (P_{n_1,n_1}^*)_{r,j} = (F_{n_1})_{i,j}$$

■

**Lema A.5.** Sea  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$  con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Si se cumple que el rango de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}})$  es  $n$  y que  $n \leq \beta\mu$ . Entonces  $\forall i \in \mathbb{N}_{(\alpha-1)\eta}$  y  $j \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$

$$F_n(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i} = (Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n, i+\eta} \quad (10)$$

donde  $F_{\beta\mu}$  es como en la Definición A.7, con respecto a  $Q_{\beta+1,\alpha}$  y  $P_{\beta+1,\beta+1}$ , que son como en la Definición A.6.

**Demostración.** Sea cualquier  $i \in \mathbb{N}_{(\alpha-1)\eta}$  y  $j \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$ . Por la relación entre  $P'_{n\mu,n\mu}$  y  $P_{n\mu,n\mu}^*$  en

la Definición A.7, las propiedades de la MH, el Teorema B.6 y los Lemas A.2 y A.3

$$\begin{aligned}
 (F_n)_{w,:}(Q_{\beta+1,\alpha})_{1:n,i} &= \sum_{s=1}^n (F_n)_{w,s} q_{s,i} = \sum_{s=1}^n \left( \sum_{r=1}^n (P'_{n,n})_{w,r}^{-1} (P_{n,n}^*)_{r,s} \right) q_{s,i} \\
 &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{r=1}^n (P_{\beta+1,\beta+1})_{w,r}^{-1} p_{r+\mu,s} \right) q_{s,i} \\
 &= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left( \sum_{s=1}^n p_{r+\mu,s} q_{s,i} \right) \\
 &= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (\mathcal{H}_{n+1,\alpha}(\mathcal{J}_N))_{r+\mu,i} \\
 &= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (\mathcal{H}_{n+1,\alpha}(\mathcal{J}_N))_{r,i+\eta} \\
 &= \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} \left( \sum_{s=1}^n p_{r,s} q_{s,i+\eta} \right) \\
 &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} p_{r,s} \right) q_{s,i+\eta} \\
 &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{r=1}^n (P_{\beta,\beta})_{w,r}^{-1} (P_{\beta,\beta})_{r,s} \right) q_{s,i+\eta} \\
 &= (Q_{n+1,\alpha})_{w,i+\eta}
 \end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad (10). ■

**Teorema A.2.** Sea  $\mathcal{J}_N$  con elementos en  $\subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Si

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_N) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_N) = n$$

para algún  $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha+1:\infty}$ . Entonces,

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\psi-1}(\mathcal{J}_N) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}(\mathcal{J}_N) = n$$

**Demostación.** (i) Supongamos que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$  tiene rango  $n_1 < n$ . Como  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$  tiene rango  $n$ , la base de su espacio de columnas se compone por  $n$  de sus columnas en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ . Luego, tomando las columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$  en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$ , tenemos que deben ser linealmente dependientes, es decir  $\forall j \in \mathbb{N}_{(\beta+1)\mu}$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1})_{j,v_i} = 0$$

donde  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  y existe algún  $i \in \mathbb{N}_n$  tal que  $\gamma_i \neq 0$ , en particular esto garantiza que

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i (\mathcal{H}_{\beta,\alpha})_{k,v_i} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}_{\beta\mu}$ , donde  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  y existe algún  $i \in \mathbb{N}_n$  tal que  $\gamma_i \neq 0$ , pero esto contradice que las columnas  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$  sean una base del espacio de columnas.

(ii) Supongamos que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$  tiene rango  $n_1 > n$ . Entonces tiene  $n_1$  columnas linealmente independiente, sin embargo, cada una de ellas también son columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi}$ , pero como su rango es  $n < n_1$ , estas deberían ser linealmente dependientes.

(iii) Supongamos que  $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$  tiene rango  $n_1 < n$ . Entonces cualquier conjunto de más de  $n_1$  columnas son linealmente dependientes, sin embargo, como cada columna de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$  es columna de  $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$ , entonces la base del espacio de columnas de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}$ , que contiene  $n > n_1$  columnas, sería linealmente dependiente.

(iv) Supongamos que  $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$  tiene rango  $n_1 > n$ . Por el inciso (i) y (ii) sabemos que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$  tiene rango  $n$ . Como toda fila de  $\mathcal{H}_{\beta,\psi-1}$  es fila de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi-1}$ , entonces cada una de las  $n_1$  filas de la base del espacio de filas de la primera matriz también es fila de la segunda, pero como la segunda tiene rango  $n < n_1$ , la base tendría que se linealmente dependiente.

■

**Teorema A.3.** *Sea la sucesión  $\mathcal{J}_N$ , con  $\langle \mathcal{J}_N \rangle \subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ . Si  $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$  y la sucesión parcial  $\mathcal{J}_{N_k}$  satisfacen que*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$$

*Entonces, existe  $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  tal que al expandir  $\mathcal{J}_{N_k}$  a  $\mathcal{J}'_{N_{k+1}}$ , agregándole  $J(k+1)$ , se garantiza que*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}) = n$$

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  el rango de la matriz  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$ . Por hipótesis y la Definición A.5,  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$  y  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$  tienen el mismo rango y los mismos primeros  $\alpha$  bloques columna, por tanto, comparten el mismo espacio de columnas y tienen una base,  $\mathcal{H}$ , en los primeros  $\alpha$  bloques columna, formada por  $n$  columnas en las posiciones  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Incluso, la matriz  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$  tiene como base de su espacio de columnas, aquellas columnas que se hallan en las posiciones  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .<sup>12</sup>

Definamos  $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  como la matriz cuya columna  $j \in \mathbb{N}_\eta$  es combinación lineal de las columnas en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$  del bloque de fila  $\beta+1$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$ :  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})(\beta+1, :) = (J(\beta+1) \ \dots \ J(\beta+\alpha))$ , empleando el vector coordenado  $[(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}}$ , y sea  $\mathcal{J}'_{N_{k+1}}$  la sucesión expandida de  $\mathcal{J}_{N_k}$  al agregar  $J(k+1)$ . Entonces, el rango de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}})$  es  $n$ , en efecto, para comprobarlo sólo hay que probar que las columnas en su bloque columna  $\alpha+1$ ,  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}})(:, \alpha+1)$ , pertenecen al espacio de columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})$ .

Sea la matriz  $V_e = (e_{v_1} \dots e_{v_n})$ , donde  $e_{v_i} \in \mathbb{R}^{\alpha\eta}$  es el vector con 1 en la coordenada  $v_i$  y 0 en las restantes. Dado que  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k})$  y por la definición de  $J(k+1)$ , se sigue que

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{N_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} &= \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\ J(k+1)_{:,j} &= \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k})(\beta+1, :) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Suponiendo que fuesen linealmente independientes, tenemos que  $\exists \lambda_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_n$ , tal que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,v_i} = \vec{0}$ , que implica  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{1:\beta\mu, v_i} = \vec{0}$ , es decir,  $\exists \lambda_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_n$  tal que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{N_k}))_{:,v_i} = \vec{0}$ , lo que contradice que  $\mathcal{H}$  sea una base.

por lo cuál tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} &= \begin{pmatrix} (\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}))_{:,j+\alpha\eta} \\ J(k+1)_{:,j} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\ \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})(\beta+1,:) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \\ \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})(\beta+1,:) \end{pmatrix} V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}} \\
 &= \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) \cdot V_e \cdot [(\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}))_{:,j+\alpha\eta}]_{\mathcal{H}}
 \end{aligned}$$

Así, las columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:, \alpha+1)$ , pertenecen al espacio de columnas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ . Por lo tanto, se concluye que  $rango \mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}) = n$ .

■

**Teorema A.4.** *Sea la sucesión  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ , con  $\langle \mathcal{J}_{\mathbb{N}} \rangle \subset \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  y sean  $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$  y  $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$  dados. Si la sucesión parcial  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ ,  $k = \psi + \beta$ , satisface que*

$$rango \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = rango \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = rango \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}) = n$$

Entonces, existen  $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  tales que al expandir  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  a  $\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$ , agregando ordenadamente estos  $\beta$  elementos, se garantiza que

$$rango \mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}) = n$$

**Demostración.** (i) Tomemos  $\psi = \alpha$ . Como  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$  y  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$  tienen rango  $n$ , y por hipótesis también  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ , por el Teorema A.3 existe un  $J(k+1) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  tal que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  tiene rango  $n$ , donde  $\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_k}$  es la expansión de  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  al agregarle  $J(k+1)$ .

Sean  $v_1, \dots, v_n$  las posiciones de las filas de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  que conforman la base de su espacio de filas,  $\mathcal{H}$ . Como  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  y  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  tienen rango  $n$ , entonces cada fila de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:, \alpha+1)$  pertenece a  $\mathcal{H}$ , en particular, cada fila de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, \alpha+1)$  es combinación lineal de las filas en las posiciones  $v_1, \dots, v_n$  de  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, :)$ .

Luego, como  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, \alpha+1) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:, \alpha+2)$  y  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(2 : \beta+1, :) = \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:, 2 : \alpha+1)$ , entonces cada fila de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})(:, \alpha+2)$  es combinación lineal de las filas en las posiciones  $v_1 + \mu, \dots, v_n + \mu$  de  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ , por tanto  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  tiene rango  $n$ .

Así tenemos que  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+2}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$ ,  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  y  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}})$  tienen rango  $n$ , por el Teorema A.3, tenemos que existe un  $J(k+2) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  que expande  $\mathcal{J}'_{\mathbb{N}_{k+1}}$  a  $\mathcal{J}''_{\mathbb{N}_{k+2}}$  al agregarle  $J(k+2)$ , tal que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+2}(\mathcal{J}''_{\mathbb{N}_{k+2}})$  tiene rango  $n$ . Repitiendo el proceso anterior un número  $\beta$  de veces, expandimos  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  a  $\mathcal{J}^{(\beta)}_{\mathbb{N}_{k+\beta}} = \mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$  y obtenemos que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\alpha+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}})$  tiene rango  $n$ .

(ii) Tomando  $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha+1:\infty}$ . Por el Teorema A.2 y repitiendo un número  $\beta$  de veces el proceso del caso anterior, podemos expandir  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  a  $\mathcal{J}^{(\beta)}_{\mathbb{N}_{k+\beta}} = \mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}}$  y obtenemos que  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}^*_{\mathbb{N}_{k+\beta}})$  tiene rango  $n$ .

■

**Teorema A.5 (Realización Parcial Mínima).** *Sea la sucesión  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ , con elementos en  $\mathcal{M}_{\mu \times \eta}$  y sean  $\beta, \alpha \in \mathbb{N}$  y  $\psi \in \mathbb{N}_{\alpha:\infty}$  dados. Si  $\alpha, \beta$  son los menores valores tales que*

$$\text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta,\alpha+1}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = \text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}}) = n \quad (11)$$

*Entonces, la sucesión parcial  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ , de los  $k = \beta + \psi$  primeros elementos de  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}}$ , es mínimamente realizada por*

$$(F_n \ G_n \ H_n)$$

*donde  $F_n$ ,  $G_n$  y  $H_n$  son como en la Definición A.7.*

**Demostración.** Por el Teorema A.4, existen  $J(k+1), \dots, J(k+\beta) \in \mathcal{M}_{\mu \times \eta}$ , tales que expanden  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  a  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k+\beta}$ , donde esta extensión permite que  $\text{rango } \mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k+\beta}) = n$ . Al factorizar  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi+\beta}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k+\beta})$  y  $\mathcal{H}_{\beta+1,\psi}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ , por el Lema A.3, se comprueba que ambas tienen la misma matriz  $P_{\beta+1,\beta+1}$ , y sus matrices  $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$  y  $Q_{\beta+1,\psi}$ , respectivamente, satisfacen que (i) por el Lema A.2 las filas mayores a  $n$  son nulas, y (ii),  $(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:,1:\psi\eta} = Q_{\beta+1,\psi}$ . Por consiguiente, si  $F_n$ ,  $G_n$  y  $H_n$  están definidas bajo A.7, con respecto a  $P_{\beta+1,\beta+1}$  y  $Q_{\beta+1,\psi}$ , y  $F'_n$ ,  $G'_n$  y  $H'_n$  con respecto a  $P_{\beta+1,\beta+1}$  y  $Q_{\beta+1,\psi+\beta}$ , entonces  $F_n = F'_n$ ,  $G_n = G'_n$  y  $H_n = H'_n$ .

Por lo tanto, si  $t \in \mathbb{N}_{\psi+\beta}$ , y empleando los Lemas A.2, A.3, A.4 y A.5, se sigue que

$$\begin{aligned} H_n(F_n)^{t-1}G_n &= H'_n(F'_n)^{t-1}G'_n \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,1:n}(F_n)^{t-1}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,1:\eta} \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,1:n}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{1:n,(t-1)\eta+1:t\eta} \\ &= (P_{\beta+1,\beta+1})_{1:\mu,:}(Q_{\beta+1,\psi+\beta})_{:(t-1)\eta+1:t\eta} \\ &= J_{1+t} = J(1+t-1) = J(t) \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que  $(F_n \ G_n \ H_n)$  realiza  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$ .

Por último pruebo que la realización  $(F_n \ G_n \ H_n)$  de  $\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k}$  es mínima. Suponiendo que no lo es, entonces existe una realización de dimensión  $v < n$ . Como  $\alpha, \beta$  son los menores enteros para los cuales se garantiza (11), entonces  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  son los índices de controlabilidad y observabilidad, respectivamente.<sup>13</sup> Por consiguiente,  $\mathcal{O}_{\beta} * \mathcal{C}_{\alpha}$  tiene rango  $v$ , y ya que  $\mathcal{O}_{\beta} * \mathcal{C}_{\alpha} = \mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$ , entonces  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$  tiene rango  $v$ . Pero, por hipótesis,  $\mathcal{H}_{\beta,\alpha}(\mathcal{J}_{\mathbb{N}_k})$  tiene rango  $n$ , así  $v < n = v$ . Por tanto,  $(F_n \ G_n \ H_n)$  es una realización parcial mínima.

■

**Teorema A.6.** *Sea  $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$  la sucesión parcial sobre  $\mathbb{F}^{\alpha \times \beta}$  y sean  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $p+q+1 \leq z$ . Si  $\mathcal{H}_{p,q} \in \mathbb{F}^{pa \times qb}$  es la matriz de hankel formada por  $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_n}$  tal que*

$$\text{rango}(\mathcal{H}_{p,q}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{p,q+1}) = \text{rango}(\mathcal{H}_{p+1,z-(p+1)}) \quad (12)$$

*y si cualquier  $\mathcal{H}_{r,s}$  con  $r < p$  y  $s \leq q$  o  $r = p$  y  $s < q$  no satisface (12), entonces, toda  $\mathcal{H}_{u,v}$  con  $u < p$ ,  $v > q$  o  $u > p$  y  $v < q$ , y  $u+v+1 \leq z$ , no garantiza (12).*

**Demostración.**

Sea  $w$  el rango de  $\mathcal{H}_{p,q}$ , sean  $r_j$ ,  $j = 1, \dots, w$  las posiciones de las columnas de  $\mathcal{H}_{p,q}$  que forman la base de su espacio de columnas, y sea  $\mathcal{H}_{u,v}$  con  $u < p$  y  $v > q$ , y  $u+v+1 \leq z$ . Entonces,

<sup>13</sup>Véase la Definición A.3 (Matriz de Controlabilidad) y Definición A.4 (Matriz de Observabilidad)

si suponemos que  $\mathcal{H}_{u,v}$  satisface (12), se demostrará que  $\mathcal{H}_{u,q}$  satisface (12), pero por hipótesis,  $\mathcal{H}_{u,q}$  no puede satisfacer (12). Por lo tanto, no existe  $\mathcal{H}_{u,v}$ , con  $u < p$ ,  $v > q$  y  $u + v + 1 \leq z$ , que satisfaga (12).

Considerar únicamente la demostración del caso anterior no produce pérdida de generalidad. Para el segundo caso, si suponemos que existe una matriz  $\mathcal{H}_{c,d}$  con  $c > p$ ,  $d < q$  y  $c + d + 1 \leq z$  que satisface (12) y dado que  $\mathcal{H}_{p,q}$  con  $p < c$ ,  $q > d$  y  $p + q + 1 \leq z$  satisface (12) por hipótesis, entonces  $\mathcal{H}_{c,d}$  y  $\mathcal{H}_{p,q}$  ocupan el lugar de  $\mathcal{H}_{p,q}$  y  $\mathcal{H}_{u,v}$  del caso anterior, respectivamente. Esto nos lleva a que  $\mathcal{H}_{p,d}$  satisface (12), pero como  $\mathcal{H}_{p,d}$  tiene que  $p = p$  y  $d < q$ , entonces no puede satisfacer (12) por hipótesis. Por lo tanto, como esta contradicción surgió del supuesto inicial de este caso, no puede existir  $\mathcal{H}_{c,d}$ ,  $c > p$ ,  $d < q$  y  $c + d + 1 \leq z$ , que satisfaga (12).

Iniciamos la demostración con unas observaciones que se usarán en la demostración:

- i) Las columnas de  $\mathcal{H}_{p,q}$  son también columnas de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ , por definición de Matriz de Hankel (MH).
- ii) Las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{p,q}$  también son una base del espacio de columnas de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ , por la condición (12).
- iii)  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  y  $\mathcal{H}_{p,q+1}$  tienen el mismo número de columnas y la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  está compuesta por los elementos en las primeras  $\alpha u$  coordenadas de la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ , por definición de MH.
- iv) Las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  generan todas las columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ , por el inciso (iii).
- v) Las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ , debido a que cada  $r_j \leq bq$  y las primeras  $bq$  columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  forman  $\mathcal{H}_{u,q}$ , por definición de MH.
- vi) Hay al menos tantos bloques fila en  $\mathcal{H}_{u+1:p,q+1}$  como bloques columna en  $\mathcal{H}_{u,q+1:v}$ . Esto a causa de las restricciones

$$\begin{aligned} v + u + 1 &\leq z \\ p + q + 1 &\leq z \end{aligned}$$

que implican lo que se afirma

$$v - q \leq z - (u + 1) - (z - (p + 1)) = p - u \quad (13)$$

lo cuál se puede ver en las siguientes representaciones matriciales

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q+1} &= \left( \begin{array}{c} \mathcal{H}_{u,q+1} \\ \mathcal{H}_{u+1:p,q+1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} J_1 & \dots & J_{q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+q} \\ J_{u+1} & \dots & J_{u+q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_p & \dots & J_{p+q} \end{array} \right)_{p-u}^{\overbrace{v-q}} \\ \mathcal{H}_{u,v} &= \left( \begin{array}{cc} \mathcal{H}_{u,q} & \mathcal{H}_{u,q+1:v} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} J_1 & \dots & J_q & \overbrace{J_{q+1} \dots J_v}^{v-q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+q-1} & J_{u+q} & \dots & J_{u+v-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

vii) Para  $i = 1, \dots, v - (q + 1)$  se sostiene la siguiente igualdad

$$\mathcal{H}_{1+i:u+i,q+1} = \mathcal{H}_{u,1+i:q+1+i}$$

Igualdad que es valida ya que de (13) tenemos  $u + v - q \leq p$ , y por la estructura de la MH. La igualdad se puede ver en la siguiente representación matricial

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q+1} &= \left( \begin{array}{ccc} J_1 & \dots & J_{q+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_i & \dots & J_{q+i} \\ \left( \begin{array}{ccc} J_{1+i} & \dots & J_{q+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{u+i} & \dots & J_{q+u+i} \end{array} \right) \\ J_{u+i+1} & \dots & J_{q+u+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_p & \dots & J_{p+q} \end{array} \right) \mathcal{H}_{1+i:u+i,q+1} \\ \mathcal{H}_{u,v} &= \left( \begin{array}{ccccc} J_1 & \dots & J_i & \overbrace{\left( \begin{array}{ccc} J_{1+i} & \dots & J_{q+1+i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{u+i} & \dots & J_{q+u+i} \end{array} \right)}^{\mathcal{H}_{u,1+i:q+1+i}} & J_{q+2+i} & \dots & J_v \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_u & \dots & J_{u+i-1} & & J_{q+u+i+1} & \dots & J_{u+v-1} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Prosiguiendo con la demostración, si tomamos  $i = 1$ , entonces  $\mathcal{H}_{u,2:q+2} = \mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$ , y como  $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$  y  $\mathcal{H}_{p,q+1}$  tienen el mismo número de columnas, y la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$  es igual a los elementos en las coordenadas  $\alpha + 1$  hasta  $(u + 1)\alpha$  de la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ , entonces para  $\mathcal{H}_{2:u+1,q+1}$ , sus columnas  $r_j$  generan su espacio de columnas. Por lo cual, las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$  generan cualquiera de las columnas de  $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$ . Pero como la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$  es la columna  $k + \beta$  de  $\mathcal{H}_{u,q+2}$ , entonces las columnas  $r_j + \beta$  de  $\mathcal{H}_{u,q+2}$  generan cualquier columna de  $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$ . Más aún, como  $r_j + \beta \leq \beta q + \beta = \beta(q + 1)$  y las primeras  $\beta(q + 1)$  columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+2}$  forman a  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ , entonces las columnas  $r_j + \beta$  son columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ .

En virtud de que las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ , entonces las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas  $r_j + \beta$  de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$ . Y como cualquier columna de  $\mathcal{H}_{u,q+2}$  es columna de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  o  $\mathcal{H}_{u,2:q+2}$ , entonces las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan cualquier columna de  $\mathcal{H}_{u,q+2}$ .

Ahora, si para  $n < v - (q + 1)$ , las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,1+n:q+n+2}$ . Entonces, como  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2} = \mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$ , y ya que cada columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$  está formada por los elementos entre las coordenadas  $\alpha(n+1)+1$  y  $\alpha(u+n+1)$  de la columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{p,q+1}$ , entonces las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q+1}$  generan cualquier columna de  $\mathcal{H}_{2+n:u+n+1,q}$ . Así, las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$  generan cada columna de  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+1}$ . Pero como cada columna  $k$  de  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$  es la columna  $k + \beta(n + 1)$  de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ , entonces las columnas  $r_j + \beta(n + 1)$  de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$  generan cualquier columna de  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$ . Incluso, como  $r_j + \beta(n + 1) \leq \beta q + \beta(n + 1) = \beta(q + n + 1)$  y las primeras  $\beta(q + n + 1)$  columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$  forman a  $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$ , entonces las columnas  $r_j + \beta(n + 1)$  de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$  son columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$ .

Luego, ya que por hipótesis cada columna de  $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$  es generada por las  $r_j$  columnas de  $\mathcal{H}_{u,q}$ , entonces las columnas  $r_j + \beta(n + 1)$  de  $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$  son generadas por las  $r_j$  columnas de  $\mathcal{H}_{u,q}$ . A partir de esto, tenemos que las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$ . Pero

como toda columna de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$  es columna de  $\mathcal{H}_{u,q+n+1}$  o  $\mathcal{H}_{u,2+n:q+n+2}$ , entonces las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,q+n+2}$ .

Por consiguiente, hemos demostrado que las columnas de  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,v}$ . Así mismo, como el rango de  $\mathcal{H}_{u,v}$  es  $w$ , entonces las columnas  $r_j$  de  $\mathcal{H}_{u,q}$  son una base del espacio de columnas de  $\mathcal{H}_{u,v}$ . En efecto, ellas generan las columnas de  $\mathcal{H}_{u,v}$ , y si no son linealmente independientes, un subconjunto de ellas con menos de  $w$  elementos sería una base de  $\mathcal{H}_{u,v}$ , sin embargo, esto contradice que el rango de  $\mathcal{H}_{u,v}$  es  $w$ .

Luego, debido a que  $\mathcal{H}_{u,q}$  tiene  $w$  elementos linealmente independientes que generan cualquiera de sus columnas, entonces su rango es de  $w$ . Pero como los rangos de  $\mathcal{H}_{u,q+1}$  y  $\mathcal{H}_{u+1,v}$  también son  $w$ , tenemos que  $\mathcal{H}_{u,q}$  satisface (12), lo cual es una contradicción.

$\therefore$  Toda  $\mathcal{H}_{u,v}$  con  $u < p, v > q$  y  $u+v+1 \leq n$  no puede garantizar (12), como se quería demostrar. ■

**Definición A.8.** Sea la sucesión  $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$ , con elementos en  $\mathbb{F}^{\alpha \times \beta}$  y sean  $p, q \in \mathbb{N}$  tales que  $p + q + 1 \leq z$ . Se dice que la matriz de hankel  $\mathcal{H}_{p,q}$  formada por  $\{J_t\}_{t \in \mathbb{N}_z}$  es mínima siempre que  $p, q$  son los mínimos enteros para los cuales

$$\text{rango } \mathcal{H}_{p,q} = \text{rango } \mathcal{H}_{p,q+1} = \text{rango } \mathcal{H}_{p+1,z-(p+1)}$$

## Apéndice B

# Álgebra Lineal

**Definición B.1** (Espacio Vectorial). *Sea  $\mathbb{F}$  un cuerpo. Un conjunto  $V \neq \emptyset$  con las operaciones  $+ : V \times V \rightarrow V$  y  $\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ , llamadas adición y multiplicación escalar, respectivamente, se dice que es un **espacio vectorial** sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$  si*

- (a)  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;
- (b)  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{g}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{g}$ ;
- (c)  $\exists! \mathbf{0} \in V$  tal que  $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V$ ;
- (d)  $\forall \mathbf{a} \in V, \exists! -\mathbf{a} \in V$  tal que  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .
- (e)  $1\mathbf{a} = \mathbf{a}, \forall \mathbf{a} \in V$ ;
- (f)  $(c_1 c_2)\mathbf{a} = c_1(c_2\mathbf{a})$ ;
- (g)  $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$ ;
- (h)  $(c_1 + c_2)\mathbf{a} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{a}$ .

A los elementos de  $V$  les llamaremos vectores y a los de  $\mathbb{F}$  escalares. El vector  $\mathbf{0} \in V$  que satisface el inciso (c) lo llamamos **vector nulo** o **vector cero**, y al vector  $-\mathbf{a} \in V$  que satisface (d) se le denomina **vector inverso aditivo** de  $\mathbf{a} \in V$ .

**Definición B.2** (Combinación Lineal). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ . Un vector  $\mathbf{b} \in V$  se dice que es una **combinación lineal** de los vectores  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$  siempre que existan  $c_1, \dots, c_n \in F$  tales que*

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i$$

**Definición B.3** (Subespacio Generado). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ , sea  $S \subseteq V$  y sea  $A_s$  el conjunto de subespacios de  $V$  que contienen a  $S$ . Se dice que el **subespacio generado** por  $S$  es el conjunto  $W_s$  definido como*

$$W_s = \bigcap_{N \in A_s} N$$

**Teorema B.1.** *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$ , sea  $S \subseteq V$  no vacío. Si  $L$  es el conjunto de combinaciones lineales de  $S$ , entonces, el espacio generado por  $S$  es  $L$ .*

**Demostración.** Sea  $W_s$  el espacio generado por  $S$ . Tomando  $\mathbf{a} \in L$  arbitrario, entonces  $\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b}$ , con  $c_b \in \mathbb{F}$ . Como cada  $\mathbf{b} \in S \subseteq W_s$  y  $W_s$  es un espacio vectorial, entonces cada  $c_b \mathbf{b}$  pertenece a  $W_s$ , es más, la suma de todos ellos pertenece a  $W_s$ . Por consiguiente  $\mathbf{a} \in W_s$ , y así tenemos que  $L \subseteq W$ .

Por otro lado, sean  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in L$  y  $c_{a_1} \in \mathbb{F}$  arbitrarios. Entonces  $\mathbf{a}_1 = \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b}$  y  $\mathbf{a}_2 = \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b}$ , y por consiguiente

$$\begin{aligned} c_{a_1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 &= c_{a_1} \sum_{\mathbf{b} \in S} c_b \mathbf{b} + \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b} \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} c_{a_1} c_b \mathbf{b} + \sum_{\mathbf{b} \in S} d_b \mathbf{b} \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} (c_{a_1} c_b \mathbf{b} + d_b \mathbf{b}) \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in S} (c_{a_1} c_b + d_b) \mathbf{b} \end{aligned}$$

Por lo que  $c_{a_1} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in L$ . Por tanto  $L$  es subespacio vectorial y como contiene a  $S$ , entonces  $W \subseteq L$ .

∴  $W = L$ . ■

**Definición B.4** (Dependencia Lineal). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $S \subseteq V$ . Se dice que  $S$  es **linealmente dependiente** si existe una combinación lineal de los vectores  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in S$  tal que*

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n = \bar{0}.$$

donde algún escalar  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{F}$  no sea nulo. Si un conjunto no es linealmente dependiente diremos que es **linealmente independiente**. Decir que un conjunto es linealmente dependiente o independiente será lo mismo que decir que sus vectores son linealmente dependientes o independientes.

**Definición B.5** (Base de un espacio vectorial). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $S \subseteq V$ . Se dice que  $S$  es una **base** de  $V$  si es linealmente independiente y genera a  $V$ . Definimos la **dimensión** de  $V$  como la cardinalidad de  $S$  y la representamos como  $\dim(V)$ . Si la cardinalidad de  $S$  es finita, decimos que  $V$  es finito.*

**Teorema B.2.** *Sea  $V$  un espacio sobre el cuerpo  $\mathbb{F}$  que es generado por un conjunto finito de vectores  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$ . Entonces cualquier conjunto independiente de vectores en  $V$  es finito y contiene no más de  $m$  vectores.*

**Demostración.** Véase Hoffman y Kunze (1971, p.44). ■

**Corolario B.2.1.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{F}$  y sea  $n = \dim V$ . Entonces*

- (a) *cualquier subconjunto de  $V$  que contenga más de  $n$  vectores es linealmente dependiente;*
- (b) *ningún subconjunto de  $V$  que contenga menos de  $n$  vectores puede generar  $V$ .*

**Demostración.** Véase Hoffman y Kunze (1971, p.44-45). ■

**Definición B.6.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ . Se dice que el **rango fila** de  $A$  es la dimensión del espacio generado por las filas de  $A$ . El **rango columna** de  $A$  se define como la **dimensión** del espacio generado por las columnas de  $A$ .

**Teorema B.3.** Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ , entonces  $\text{rango fila}(A) = \text{rango columna}(A)$ .

**Demostración.** Véase Hoffman y Kunze (1971, p.72). ■

**Definición B.7.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ . Se dice que el **rango** de  $A$  es la dimensión del espacio generado por las filas o las columnas de  $A$ .

**Teorema B.4.** Sea  $K$  un anillo comunitativo con unidad y sea  $n$  un entero positivo. Existe exactamente una función determinante sobre el conjunto de las matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{F}$ , y es la función  $\det$  definida por  $\det(A) = \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) A(1, \sigma_1) \cdots A(n, \sigma_n)$ .<sup>1</sup>

**Demostración.** Véase Hoffman y Kunze (1971, p.150-152). ■

**Teorema B.5.** Sea  $A \in \text{It}_n(\mathbb{F})$  con  $A_{i,i} \neq 0$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ . Entonces existe su inversa,  $A^{-1}$ .

**Demostración.** Solamente hay que probar que las columnas de la  $A$  son linealmente independientes. En efecto, si lo son, generan el espacio  $\mathbb{F}^n$ , en particular, los vectores canónicos de este espacio. Así, existen coeficientes asociados a cada combinación lineal. Todos ellos forman la matriz inversa que buscamos.

Si existen coeficientes no nulos  $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_k}$  tales que la combinación lineal de las columnas de  $A$  es igual al vector nulo, entonces tomando el menor de ellos

$$\sum_{i=1}^k b_{j_i} A_{j_r j_i} = b_{j_i} A_{j_i j_i} = 0$$

Sin embargo, como  $A_{j_i j_i}, b_{j_i} \neq 0$ , llegamos a una contradicción.

∴ Las columnas de  $A$  son linealmente independientes. ■

**Teorema B.6.** Sea  $A \in \text{It}_n(\mathbb{F})$  tal que su diagonal principal es unitaria, y sea  $n_1 \in \mathbb{N}_{n-1}$ . Si  $A_1 = A_{1:n_1, 1:n_1}$  es la submatriz de las primeras  $n_1$  filas y columnas de  $A$ . Entonces,

$$A_1^{-1} = A_2$$

donde  $A_2 = (A^{-1})_{1:n_1, 1:n_1}$  es la submatriz de las primeras  $n_1$  filas y columnas de  $A^{-1}$

---

<sup>1</sup>La función  $\text{sgn } \sigma$  es 1 si  $\sigma$  es par y -1 si  $\sigma$  es impar. Aquí  $\sigma$  es una permutación de

**Demostración.** Por el Teorema B.5, entonces existen  $A_1^{-1}$  y  $A^{-1}$ , y por ende existe  $A_2$ . Luego, para cada  $i, j \in \mathbb{N}_{n_1}$

$$(A_1 A_2)_{i,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A_1)_{i,r} (A_2)_{r,j} = \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j}$$

Como  $(A)_{i,r} = 0$ , si  $i < r$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + 0 \\ &= \sum_{r=1}^{n_1} (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} + \sum_{r=n_1+1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \sum_{r=1}^n (A)_{i,r} (A^{-1})_{r,j} \\ &= \delta(i-j) \end{aligned}$$

Es decir,  $A_1 A_2 = I_{n_1}$ , lo cuál implica que

$$A_2 = I_{n_1} A_2 = (A_1^{-1} A_1) A_2 = A_1^{-1} (A_1 A_2) = A_1^{-1} I_{n_1} = A_1^{-1}$$

$$\therefore A_2 = A^{-1}. \quad \blacksquare$$

**Definición B.8.** Sea  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ . Decimos que  $a - bi \in \mathbb{C}$  es el **conjugado** de  $z$ , y lo denotaremos como  $\bar{z}$ .

**Proposición B.1.** Sean  $w, z \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $\overline{w+z} = \overline{w} + \overline{z}$  y  $\overline{wz} = (\overline{w})(\overline{z})$ .

**Demostración.** Sea  $w = a + bi$  y  $z = c + di$ , entonces por las propiedades de cuerpo

$$\begin{aligned} \overline{(a+bi)+(c+di)} &= \overline{a+c+(b+d)i} \\ &= a+c-(b+d)i \\ &= (a-bi)+(c-di) \\ &= \overline{(a+bi)+(c+di)} \end{aligned}$$

Y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{(a+bi)(c+di)} &= \overline{ac+adi+bic+bid} \\ &= \overline{ac+adi+bci-bd} \\ &= ac-bd-(ad+cb)i \\ &= ac+bdii-adi-cbi \\ &= (a-bi)(c-di) \\ &= \overline{(a+bi)(c+di)} \end{aligned}$$



**Definición B.9.** Sean  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  y  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ . Entonces si  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  decimos que

1.  $A' \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$  es la **matriz transpuesta** de  $A$  siempre y cuando  $(A')_{i,j} = A_{j,i}$ .
2.  $\bar{A} \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  es la **matriz conjugada** de  $A$  siempre y cuando  $(\bar{A})_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$ .
3.  $A^* \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$  es la **matriz adjunta** de  $A$  siempre y cuando  $A^* = \bar{A'}$ .

**Proposición B.2.** Sea  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces

1.  $(A')' = A$ ;
2.  $(AC)' = C'A'$ ;
3.  $(A + B)' = A' + B'$ ; y
4.  $(zA)' = zA'$

**Demostración.** Por la Definición B.9 (1) tenemos que

1.  $(A')_{i,j}' = A'_{j,i} = A_{i,j}$ . Por lo tanto,  $(A')' = A$ .
2.  $(AC)_{i,j}' = (AC)_{j,i} = \sum_{r=1}^m A_{j,r} C_{r,i} = \sum_{r=1}^m C'_{i,r} A'_{r,j} = (C'A')_{i,j}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ . Por lo tanto,  $(AC)' = C'A'$ .
3.  $(A + B)_{i,j}' = (A + B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i} = A'_{i,j} + B'_{i,j}$ . Por lo tanto,  $(A + B)' = A' + B'$ .
4.  $(zA)_{i,j}' = (zA)_{j,i} = zA_{j,i} = zA'_{i,j}$ . Por lo tanto,  $(zA)' = zA'$ .

■

**Proposición B.3.** Sea  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces,  $(A+B)^* = A^* + B^*$  y  $(zA)^* = \bar{z}A^*$ .

**Demostración.** Por la Proposición B.2 tenemos que  $(A + B)' = A' + B'$ . Además, por la Proposición B.1

$$\begin{aligned} \overline{(A+B)_{i,j}'} &= \overline{A'_{i,j} + B'_{i,j}} \\ &= \overline{A'_{i,j}} + \overline{B'_{i,j}} \end{aligned}$$

Por otra parte, por la Proposición B.1 y la Definición B.9,  $(zA)_{i,j}^* = \overline{(zA)_{i,j}'} = \overline{(zA)_{j,i}} = \overline{zA_{j,i}} = \bar{z}\overline{A_{j,i}} = \bar{z}\overline{A'_{i,j}} = \bar{z}A_{i,j}^*$ .

■

**Definición B.10** (Producto interno). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Decimos que la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  es el **producto interior** de  $V$  siempre que  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$  y  $c \in \mathbb{C}$  se cumple que

1.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ ;
2.  $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ;
3.  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$ ; y

4.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$  si  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $V$ , entonces diremos que  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$  es un **espacio producto interno**.

**Lema B.1.** Sea  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$  un espacio producto interno sobre  $\mathbb{C}$ . Entonces  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$  para todo  $\mathbf{v} \in V$ .

**Demostración.** De la propiedad 1 de la Definición B.10 tenemos

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle$$

siempre y cuando,  $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0$

■

**Proposición B.4.** Sea  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$  un espacio producto interno. Si  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  entonces  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

**Demostración.** Por el Lema B.1 sabemos que  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  está bien definida. Ahora, si suponemos que  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  entonces por la propiedad 4 de la Definición B.10  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ , contradiciendo la hipótesis.

■

**Teorema B.7.** Sea  $V$  es un espacio producto interno sobre  $\mathbb{C}$ . Si  $M(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$  está definida como  $M(\mathbf{a}) = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ , entonces para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$  y  $c \in \mathbb{C}$ ,

1.  $M(c\mathbf{a}) = |c|M(\mathbf{a});$
2.  $M(\mathbf{a}) > 0$  cuando  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0};$
3.  $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq M(\mathbf{a})M(\mathbf{b})$
4.  $M(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq M(\mathbf{a}) + M(\mathbf{b})$

**Demostración.** Véase Hoffman y Kunze (1971, pp.273 y 277)

■

**Definición B.11** (Norma). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . Decimos que la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  es una **norma** en  $V$  siempre que

1.  $\|\mathbf{v}\| > 0$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V/\{0\};$
2.  $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0};$
3.  $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ ,  $\forall \mathbf{v} \in V$  y  $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ; y
4.  $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$ ,  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ .

Si  $\|\cdot\|$  es una norma en  $V$ , entonces diremos que  $(\|\cdot\|, V)$  es un **espacio normado**.

**Teorema B.8.** Sea  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$  un espacio producto interno. Entonces  $M(\mathbf{v}) = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$  es una norma sobre  $V$ .

**Demostración.** Las condiciones 1, 3 y 4 de la Definición B.11 se siguen del Teorema B.7, mientras que la condición 2 de la misma definición del Lema B.1 y la Proposición B.4.



**Definición B.12** (Norma inducida por producto interno). *Sea  $(\langle \cdot, \cdot \rangle, V)$  un espacio producto interno. Decimos que la **norma inducida por el producto interno** en  $V$  es la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}$ .*

**Definición B.13** (Distancia). *Sea  $(\|\cdot\|, V)$  un espacio normado. Decimos que la **distancia inducida por una norma** en  $V$  es la función  $d(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ .*

**Definición B.14.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Se dice que la función  $tr(\cdot) : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{i,i}$  es la **traza** de  $A$ .*

**Proposición B.5.** *Sean  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n \times m}$ ,  $D \in \mathcal{M}_{m \times n}$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces se cumplen las siguientes igualdades  $tr(zA + B) = ztr(A) + tr(B)$  y  $tr(CD) = tr(DC)$*

**Demostración.**

$$\begin{aligned} tr(zA + B) &= \sum_{i=1}^n (zA + B)_{i,i} = \sum_{i=1}^n [(zA)_{i,i} + B_{i,i}] = \sum_{i=1}^n (zA)_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^n zA_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} = z \sum_{i=1}^n A_{i,i} + \sum_{i=1}^n B_{i,i} \\ &= ztr(A) + tr(B) \\ tr(CD) &= \sum_{i=1}^n (CD)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m C_{i,r} D_{r,i} = \sum_{r=1}^m \sum_{i=1}^n D_{r,i} C_{i,r} = \sum_{r=1}^m (DC)_{r,r} \\ &= tr(DC) \end{aligned}$$



**Teorema B.9.** *Sea  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ . Entonces  $\langle A, B \rangle = tr(AB^*)$  es un producto interno en  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ .*

**Demostración.**

1. Sea  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Entonces por la Proposición B.5

$$\begin{aligned} \langle z(A + B), C \rangle &= tr((z(A + B))C^*) \\ &= tr((zA)C^* + (zB)C^*) \\ &= ztr(AC^*) + ztr(BC^*) \\ &= z\langle A, C \rangle + z\langle B, C \rangle \end{aligned}$$

Como se cumple para un  $z \in \mathbb{C}$  arbitrario, tomando  $z = 1 + 0i = 1$  se cumple la condición 1 de la Definición B.10. Inclusive, como  $B$  es arbitrario, tomando  $B = \mathbf{0}$  se cumple la condición 2 de la misma definición.

2. Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ , entonces por la Proposición B.1 y la Definición B.9

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= \text{tr}(AB^*) = \sum_{i=1}^n (AB^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{B_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r}} (\overline{A_{r,i}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \overline{B_{i,r} A_{r,i}^*} = \sum_{i=1}^n \overline{(BA^*)_{i,i}} = \overline{\sum_{i=1}^n (BA^*)_{i,i}} \\ &= \overline{\langle B, A \rangle}\end{aligned}$$

Lo que comprueba la condición 3 de la Definición B.10.

3. Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$  no nula. Entonces  $A_{p,q} \neq 0$  para algún  $(p, q) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ , que implica

$$\begin{aligned}\langle A, A \rangle &= \text{tr}(AA^*) = \sum_{i=1}^n (AA^*)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m A_{i,r} \overline{A_{i,r}} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m \text{Re}(A_{i,r})^2 + \text{Im}(A_{i,r})^2 \\ &\geq \text{Re}(A_{p,q})^2 + \text{Im}(A_{p,q})^2 > 0\end{aligned}$$

■

**Definición B.15** (Norma de Frobenius). *Decimos que la función  $\|\cdot\|_F : \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} = \sqrt[2]{\text{tr}(A^*A)}$$

es la **norma de Frobenius** en  $\mathcal{M}_{n \times m}$ .

**Definición B.16.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Entonces decimos que  $A$  es

1. **Simétrica** si  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ , y  $A = A'$ .
2. **Hermitiana** si  $A = A^*$ .
3. **Ortogonal** si  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ , y  $AA' = A'A = I_n$ .
4. **Normal** si  $A^*A = AA^*$ .
5. **Unitaria** si  $A^*A = AA^* = I_n$ .
6. **Regular** si  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tal que  $AB = BA = I_n$ , donde a  $B$  se le denomina **inversa** de  $A$ .
7. **Semidefinida positiva** si  $\mathbf{x}^* A \mathbf{x} \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ .

**Definición B.17** (Valor propio). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{C}$ . Se dice que  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un **valor propio** de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  si  $\exists \bar{v} \in V$ ,  $\bar{v} \neq \bar{0}$ , tal que  $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$ . En este caso, el vector  $\bar{v}$  asociado a  $\lambda$  se conoce como **vector propio**.*

Además, definimos a  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  como el **polinomio característico** de  $A$ . Así mismo, decimos que la **multiplicidad algebraica** de  $\lambda$ , denotada como  $m_a(\lambda)$ , es la multiplicidad de  $\lambda$  como raíz de  $p(\lambda)$ .

---

<sup>2</sup>Esta igual es dada por la Proposición B.5

**Teorema B.10** (Shur). *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los valores propios de  $A$  ordenados de forma arbitraria y considerando su multiplicidad algebraica, entonces existen  $U \in \mathcal{M}_n$  unitaria y  $\Sigma \in \mathcal{M}_n$  triangular superior tales que  $A = U\Sigma U^*$  y  $\Sigma_{i,i} = \lambda_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ .*

**Demostración.** Véase Antezana y Stojanoff (2009, p.15)

**Corolario B.10.1.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  con valores propios  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  en un orden arbitrario y considerando su multiplicidad algebraica. Entonces*

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

**Demostración.** Por el Teorema B.10, existen  $U \in \mathcal{M}_n$  unitaria y  $\Sigma \in \mathcal{M}_n$  triangular superior tales que  $A = U\Sigma U^*$  y  $\Sigma_{i,i} = \lambda_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_n$ . Luego, por la Proposición B.5 y la Definición B.16 en su inciso 5 sobre la matriz unitaria,

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(U\Sigma U^*) = \text{tr}(\Sigma U^* U) = \text{tr}(\Sigma I_n) = \text{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^n \Sigma_{i,i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

■

**Lema B.2.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ , entonces  $A^* = A'$ .*

**Demostración.** Debido a que  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ , entonces  $A_{i,j} = \text{Re}(A_{i,j}) = \text{Re}(A_{i,j}) + 0 * \text{Im}(A_{i,j})$ . Por consiguiente,  $\overline{A_{i,j}} = \text{Re}(A_{i,j}) - 0 * \text{Im}(A_{i,j}) = \text{Re}(A_{i,j}) = A_{i,j}$ . De lo cual se sigue que  $A_{i,j}^* = \overline{A_{i,j}} = \overline{A_{j,i}} = A_{j,i}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ .

$\therefore$  Como lo anterior se cumple para todo  $i, j \in \mathbb{N}_n$ ,  $A^* = A'$ .

■

**Lema B.3.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$  y  $A'A = AA'$ , entonces  $A$  es normal.*

**Demostración.** Como  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ , por el Lema B.2,  $A^* = A'$ . Luego, como  $A'A = AA'$ , entonces  $A^*A = AA^*$ .

$\therefore$  Por la Definición B.16 (4),  $A$  es una matriz normal.

■

**Teorema B.11.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$  no nula. Si  $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$ , entonces  $A'A$  es una matriz simétrica, hermitiana, normal y semidefinida positiva.*

**Demostración.** A causa de la Proposición B.2,  $(A'A)' = A'(A')' = A'A$ , por lo cual  $A'A$  es simétrica. Además, como  $(A'A)_{i,j} = \sum_{r=1}^n A'_{i,r} A_{r,j} = \sum_{r=1}^n A_{r,i} A_{r,j} \in \mathbb{R}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$  y del Lema B.2, entonces  $(A'A)^* = (A'A)'$ , por consiguiente  $A'A$  es hermitiana.

Incluso, por el Lema B.2 y la Proposición B.2

$$\begin{aligned} (A'A)'(A'A) &= (A'(A')')(A'A) \\ &= (A'A)(A'A) \\ &= (A'A)(A'(A')') \\ &= (A'A)(A'A)' \end{aligned}$$

y debido al Lema B.3,  $A'A$  es una matriz normal. Luego, por la Propiedad B.3, que  $A$  es no nula con  $A_{u,v} = \operatorname{Re}(A_{u,v}) + 0i$ , y que para  $z \in \mathbb{C}$  no nulo,  $\bar{z}z > 0$ <sup>3</sup>, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*(A'A)\mathbf{x} &= (A\bar{\mathbf{x}})'A\mathbf{x} \\ &= (\bar{A}\mathbf{x})'A\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} \bar{x}_j \right) \left( \sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} x_j \right) \left( \sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m \overline{A_{i,j}} x_j \right) \left( \sum_{j=1}^m A_{i,j} x_j \right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

∴  $A'A$  es semipositiva definida. ■

**Teorema B.12.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si  $A$  es hermitiana y semidefinida positiva, entonces sus valores propios son todos reales no negativos.*

**Demostración.** Véase Antezana y Stojanoff (2009, pp.29 y 39). ■

**Definición B.18** (Valor singular). *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Decimos que los **valores singulares** de  $A$  son las raíces cuadradas de los valores propios de  $A'A$  y los designamos mediante  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ , donde el orden es tal que  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_m$ .*

**Teorema B.13.** *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Si  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  son los valores singulares de  $A$ , entonces*

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$$

**Demostración.** La función  $\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}$  está bien definida por los teoremas B.11 y B.12, y la Definición B.18. El resto de la demostración es inmediata a partir del Corolario B.10.1 y la Definición B.15. ■

**Definición B.19** (Distancia de Frobenius). *Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Decimos que la función  $d_F(\cdot, \cdot) : \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d_F(A, B) = \|A - B\|_F$  es la **distancia** en el espacio  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ .*

**Teorema B.14** (Descomposición en Valores Singulares). *Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  arbitraria con rango  $r$  y sean  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  sus valores singulares ordenados de mayor a menor. Entonces existen las matrices ortogonales  $U \in \mathcal{M}_n$  y  $V \in \mathcal{M}_m$ , y una matriz diagonal  $\Sigma$  tales que*

---

<sup>3</sup>Sea  $z \in \mathbb{C}$  no nulo. Entonces  $\bar{z}z = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 > 0$

i.  $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$ , si  $i \leq r$  y 0 si  $i > r$ ;

ii.  $A = U\Sigma V$

**Demostración.** Véase Lay *et al.* (2016, pp.419-420). ■

**Corolario B.14.1** (Equivalencia distancia de Frobenius). *Sean  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$d_F(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2}$$

**Demostración.** Por el Lema B.2  $(A - B)^* = (A - B)'$ , luego

$$\begin{aligned} d_F(A, B) &= \|A - B\|_F \\ &= \sqrt{\text{tr}((A - B)'(A - B))} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)'_{j,i} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A - B)_{i,j} (A - B)_{i,j}} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})(A_{i,j} - B_{i,j})} \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2} \end{aligned}$$



# Apéndice C

## Algoritmos

Código C.1: Módulo de funciones para el proceso de realización

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armando
5
6 Módulo con funciones desarrolladas para los códigos empleados en la tesis de
7 Doctorado
8 """
9 import numpy as np
10 import itertools as it
11 #import matplotlib.pyplot as plt
12 import scipy.linalg
13 #from scipy.linalg import hankel
14 from mpmath import mp, matrix
15 import sympy as sp
16 # =====
17 def lista_matriz_c1(n):
18     sm=[]
19     for i in range(1,n+1):
20         a1=((i)*(i+1))/2
21         n_el=np.round(np.matrix([[a1]]))
22         sm.append(n_el)
23     return(sm)
24 # =====
25 def lista_matriz(n):
26     sm=[np.matrix([[1,1],[1,1]]),np.matrix([[3,1],[1,3]])]
27     for i in range(n-2):
28         n_el=np.matrix([[sm[i+1][0,0]+(i+3),sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1]],
29                         [sm[i][0,1]+sm[i+1][0,1],sm[i+1][0,0]+(i+3)]])
30         sm.append(n_el)
31     return(sm)
32 # =====
33 def valores_rank_MH(L):
34     i=1
35     j=i
36     val_MH=[]
37     while i+j<=len(L):
38         H_1=matriz_hankel(L,i,j)
39         H_2=matriz_hankel(L,i+1,j)
40         if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_2):
41             H_3=matriz_hankel(L,i,j+1)
42             if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_3):
43                 H_psi=matriz_hankel(L,i+1,len(L)-i)
44                 if np.linalg.matrix_rank(H_1)==np.linalg.matrix_rank(H_psi):
45                     val_MH.append(["Los valores de la MH son b=%i, a=%i, psi=%i y n=%i."
46 % (H_1.shape[0]/L[0].shape[0],H_1.shape[1]/L[0].shape[1],len(L)-H_1.shape[1]/L[0].
47 shape[1],np.linalg.matrix_rank(H_1))])
```

```

46         break
47     else:
48         i=i+1
49     else:
50         j=j+1
51   else:
52     i=i+1
53 return(np.round(H_psi),val_MH[0])
54 # =====
55 def matriz_hankel(L,r,s):
56   f=L[0].shape[0]
57   c=L[0].shape[1]
58   H=np.matrix(np.zeros([f*r,c*s]),dtype=np.float64)
59   for i, j in it.product(range(r),range(s)):
60     H[f*i:f*(i+1),c*j:c*(j+1)]=L[i+j]
61   return(H)
62 # =====
63 def MH(L_M):
64   f_sm=L_M[0].shape[0]
65   c_sm=L_M[1].shape[1]
66   n=len(L_M)
67   l_rank=[]
68   for i, j in it.product(range(n+1),range(n+1)):
69     if i+j==n:
70       l_rank.append((i,j))
71   if (i+j==n and np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n))==n):
72     np.linalg.matrix_rank(matriz_hankel(i,j,f_sm,c_sm,n)))
73     print(2)
74   return(2)
75 # =====
76 def matrizPQ(H):
77   mp.dps = 80
78   n=H.shape[0]
79   m=H.shape[1]
80   P=matrix(np.eye(n),prec=mp.dps)
81   Q=matrix(np.zeros([n,m]),prec=mp.dps)
82   fila=0
83   indice=[]
84   #Encontrar columna j de H no nulo para una fila dada
85   for r in range(m):

```

Código C.2: Ajuste sistemas input-output en C

```
1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Wed May 5 14:30:05 2021
5
6 @author: armando
7 """
8
9 import numpy as np
10 import pandas as pd
11
12 bio=pd.read_excel(io="io.xlsx")
13
14 Cve=bio[bio.columns[1]]+bio[bio.columns[2]]+bio[bio.columns[4]]
15 Mc=(bio[bio.columns[5]]+bio[bio.columns[6]])*bio[bio.columns[9]]
16 X=bio[bio.columns[8]]*bio[bio.columns[9]]
17 Yf=Cve+X+bio[bio.columns[3]]
18 M=Mc+(bio[bio.columns[7]]*bio[bio.columns[9]])
19 vX=pd.DataFrame({'X1':bio["Kf"],'X2':bio["Mk"]}).drop(range(100,104,1),axis=0)
20 vY=pd.DataFrame({'Y1':Yf,'Y2':M}).drop(range(100,104,1),axis=0)
21
22 ict=[]
23 cx=[]
24 cy=[]
25 cx_s=[]
```

```

26 for i in range(cot.shape[0]):
27     cx.append(np.array([1,np.complex(vX.iloc[i][0],vX.iloc[i][1])]))
28     cy.append(np.array([np.complex(vY.iloc[i][0],vY.iloc[i][1])]))
29     cx_s.append(np.array([np.complex(vX.iloc[i][0],vX.iloc[i][1])]))
30
31 ls=[np.matrix(cx),np.matrix(cy),np.matrix(cx_s)]
32
33 alfa=np.linalg.solve(ls[0].H*ls[0],ls[0].H*ls[1])
34 alfa_s=np.linalg.solve(ls[2].H*ls[2],ls[2].H*ls[1])

```

Código C.3: Realizaciones bajo la propuesta de preservación de la estructura de Hankel del Capítulo 3, aplicadas a descripciones externas simuladas

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 Created on Fri Jun 30 22:21:30 2023
5
6 @author: armandorg
7 """
8 import numpy as np
9 import scipy.linalg
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 import realpar as rp
12 import pandas as pd
13 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
14 import pickle
15
16 seq = np.linspace(1,100,100); n=51; m=50
17 np.random.seed(123)
18 min_dist=[]
19 for i in range(10000):
20     muestra = np.sin(seq**2)+np.random.normal(0, 3, size=len(seq))+seq***(1/2)
21     dist_prom=[]
22     for j in range(1,25):
23         K=50-2*j
24         muestra_e=rp.obs_estreal(n, m, muestra, K, p=1, q=1)
25         dist_prom.append(np.mean(muestra_e[0]-muestra))
26     min_dist.append(np.min(np.abs(dist_prom)))
27     print(np.min(np.abs(dist_prom)))
28 archivo = 'dis_min_Golub.pkl'
29 # Guardar la lista de matrices en archivo
30 with open(archivo, 'wb') as f:
31     pickle.dump(min_dist, f)
32 # Cargar la lista de matrices en archivo
33 with open(archivo, 'rb') as f:
34     mejor_est_gol = pickle.load(f)
35 dts_gol=np.nan_to_num(mejor_est_gol, nan=1e1000)
36 num_div=1
37 menor=len(dts_gol[dts_gol<num_div])/len(mejor_est_gol)*100
38 medio=len(dts_gol[(dts_gol<100)&(dts_gol>1)])/len(mejor_est_gol)*100
39 mayor=len(dts_gol[dts_gol>100])/len(mejor_est_gol)*100
40 categorias = ['Menor a 1', 'Entre 1 y 100', 'Mayor a 100']
41 conteos = [menor, medio, mayor]
42 # Crea el gráfico de barras
43 plt.bar(categorias, conteos, width=0.6)
44 plt.ylabel('Porcentaje')
45 plt.yticks(range(0, 101, 10))
46 def porcentaje_formatter(x, pos):
47     return f'{x:.0f}%'
48 # Aplica la función de formato a las etiquetas del eje Y
49 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(porcentaje_formatter))
50 for i, v in enumerate(conteos):
51     plt.text(i, v + 1, str(v)+"%", ha='center', va='bottom')

```

Código C.4: Realización simbólica de la sucesión  $a, b, c, d, e$  y  $f$

```
1 #!/usr/bin/env python3
```

```

2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 Este código permite efectuar una realización simbólica de la
6 sucesión a, b, c, d, e y f
7 """
8 import realpar as rp
9 import sympy as sp
10
11 x = sp.symbols('a b c d e f')
12 n = 4 # Número de filas
13 m = 3 # Número de columnas
14 Hankel = sp.zeros(n, m)
15 for i in range(n): #Crea la matriz de Hankel
16     for j in range(m):
17         Hankel[i, j] = x[i+j]
18 A=rp.matrizPQs(Hankel)
19 p=q=1 # p filas y q columnas de los elementos en la sucesión
20 rango=Hankel.rank()
21 G_n=A[1][:rango,:q]
22 H_n=A[0][:p,:rango]
23 P_nmin=A[0][:rango,:rango]
24 P_nmin_inv=P_nmin.inv()
25 P_ast=A[0][p:rango+p,:rango]
26 F_n=P_nmin_inv@P_ast
27 print("Matriz P:")
28 display(A[0])
29 print("Matriz Q:")
30 display(A[1])
31 print("Matriz F:")
32 display(F_n)

```

Código C.5: Realizaciones truncadas del modelo de incidencias de los componentes de la inflación bajo el AF y el FSF

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import matplotlib.dates as mdates
12 import pandas as pd
13 import itertools as it
14 from scipy.stats import rankdata
15 from datetime import datetime, timedelta
16 import csv
17
18 # =====
19 # DESCRIPCIÓN EXTERNA, GRAFICARLA Y OBTENER H
20 # =====
21 # Carga de datos
22 direct="ca56_2018_quinc.xlsx"
23 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja2')
24 b=b.iloc[:,[0,2,10,3,11,8,9,16]]
25
26 # Ajustar el tiempo de la serie
27 q2=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-07-01', freq='M')
28 q1=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-06-30', freq='MS')+timedelta(days=14)
29 b["Periodo"]=q1.union(q2)
30
31 # Determinantes para la inversa
32 det1=(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
33 det2=(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No"]

```

```

    subyacente"])
34 det=det1-det2
35
36 # Series de tiempo de las entradas de la DE
37 b["a11"]=(1/det)*(1-b["Tarifas"])/b["No subyacente"])
38 b["a12"]=(1/det)*((b["Educación"])+b["Otros servicios"])/b["No subyacente"])
39 b["a21"]=(1/det)*(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])
40 b["a22"]=(1/det)*(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])
41
42 # Creación de la DE
43 DE=[]
44 for i in range(len(b)):
45     DE.append(np.matrix([[b["a11"]][i],b["a12"][i]],
46                         [b["a21"][i],b["a22"][i]],dtype=np.float128))
47
48 # Crear la gráfica de las series de tiempo de las coordenadas de la DE
49 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
50
51 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"], label='(1,1)')
52 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
53 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
54 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"], label='(1,2)')
55 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
56 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
57 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"], label='(2,1)')
58 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
59 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
60 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"], label='(2,2)')
61 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
62 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
63 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
64
65 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
66 mhs=rp.matriз_hankel(DE,151,150)
67
68 # =====
69 # DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE HANKEL Y GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES
70 # =====
71
72 def desc_esp_mh(MHank):
73     usv=np.linalg.svd(MHank)
74     s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
75     U=usv[0]
76     V=usv[2]
77     S=np.matrix(s)
78     vs_n=usv[1]/sum(usv[1])
79     return(usv,V,S,U,usv[1],vs_n)
80
81 dvs=desc_esp_mh(mhs)
82
83 svs=0
84 for i in range(len(dvs[5])):
85     if svs<.8: svs=dvs[5][i]+svs
86     else: break
87 pos=i
88 N=len(DE)
89
90 # Función para cambiar el porcentaje de las etiquetas en el eje Y en una gráficas
91 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
92 def percentage_formatter(x, pos):
93     return f'{x*100:.1f}%'
94
95 qui_vs=0
96 plt.figure(figsize=(20, 10), dpi=200)
97 plt.plot(np.arange(len(DE)-qui_vs)+qui_vs+ 1,dvs[5][qui_vs:N],"o", color="c", markersize=15)
98 plt.plot(pos,dvs[5][pos],"o", color="r", markersize=18)
99 formatter = FuncFormatter(percentage_formatter)

```

```

100 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(formatter)
101 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR", fontsize=25)
102 plt.ylabel("PORCENTAJE", fontsize=25)
103 plt.grid()
104 plt.xticks(fontsize=25)
105 plt.yticks(fontsize=25)
106
107 # =====
108 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, REALIZACIÓN Y MATRICES ESTIMADAS
109 # =====
110
111 def mh_red_est(V,S,U,des_ext):
112     mt_est=[]
113     MH_red=[]
114     rp_red=[]
115     dim=np.shape(des_ext[0])
116     for i in range(1,int(V.shape[0]/dim[0])):
117         print(i)
118         V_i=V[0:dim[0]*i,0:]
119         S_i=S[0:dim[0]*i,0:dim[0]*i]
120         U_i=U[0:,0:dim[0]*i]
121         H_red=U_i*S_i*V_i
122         MH_red.append(H_red)
123         F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red,dim[0],dim[1]) #Realización MH reducida
124         real_red=[F_r,G_r,H_r]
125         rp_red.append(real_red)
126         for j in range(len(des_ext)):
127             print(j)
128             mt_est.append(H_r@(F_r**j)@G_r)
129     return(MH_red,mt_est,rp_red)
130
131 MH_red=mh_red_est(dvs[1],dvs[2],dvs[3],DE)
132
133 # =====
134 # DETERMINACIÓN DE LA MEJOR APROXIMACIÓN DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS
135 # =====
136
137 def prox_de_di(mat_red,des_ext):
138     distancias=[]
139     distancia=[]
140     for j in range(int(len(mat_red)/len(des_ext))):
141         prom_F=0
142         for i in range(len(des_ext)):
143             prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mat_red[i+len(des_ext)*j]-des_ext[i])
144         distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),j+1])
145         distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
146     p_min=distancia.index(min(distancia))
147     MEJOR_EST=mat_red[p_min*len(des_ext):(p_min+1)*len(des_ext)]
148     return(distancias,p_min+1,MEJOR_EST,distancia)
149
150 distancias=prox_de_di(MH_red[1],DE)
151
152 # =====
153 # GRÁFICA DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL Y LAS ESTIMADAS
154 # =====
155
156 # Extrae las posiciones y los valores de A en listas separadas
157 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias[0]]
158 valores = [elemento[0] for elemento in distancias[0]]
159
160 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
161 col_r=230
162 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)), width=.95)
163 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
164     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
165     bar.set_alpha(.9)
166 plt.xlabel('PARES DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES', fontsize=22)
167 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA', fontsize=19)

```

```

168 pl.xticks(np.arange(0, len(posiciones)+1,2))
169 pl.xlim(0.3, len(posiciones)+1)
170 plt.xticks(fontsize=18, rotation=90)
171 plt.yticks(fontsize=15)
172
173 valores_sin_nan = [x for x in valores if not np.isnan(x)]
174 min(valores_sin_nan)
175 max(valores_sin_nan)
176 np.mean(valores_sin_nan)
177 np.nanmedian(valores_sin_nan)
178 np.std(valores_sin_nan)
179
180 # =====
181 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
182 # =====
183
184 F_c,G_c,H_c=MH_red[2][26]
185 a11=[]
186 a12=[]
187 a21=[]
188 a22=[]
189 prom_F=0
190 for i in range(len(DE)):
191     approx=H_c@F_c**i@G_c
192     prom_F=prom_F+np.linalg.norm(approx-DE[i])
193     a11.append(approx[0,0])
194     a12.append(approx[0,1])
195     a21.append(approx[1,0])
196     a22.append(approx[1,1])
197 print(round(prom_F*(1/len(DE)),2))
198
199 # Crear la gráfica de cercanía promedio
200 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
201
202 ax[0].plot(list(range(1, 301)),a11, label='(1,1)', linewidth=3,color="blue")
203 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"]-4, label='(1,1)', linewidth=3,color="orange")
204 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
205 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
206 ax[0].yaxis.major.formatter._useMathText = True
207 ax[0].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(20)
208
209 ax[1].plot(list(range(1, 301)),a12, label='(1,2)', linewidth=3,color="blue")
210 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"]-4, label='(1,2)', linewidth=3,color="orange")
211 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
212 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
213 ax[1].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
214
215 ax[2].plot(list(range(1, 301)),a21, label='(2,1)', linewidth=3,color="blue")
216 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"]-6, label='(2,1)', linewidth=3,color="orange")
217 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
218 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
219 ax[2].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
220
221 ax[3].plot(list(range(1, 301)),a22, label='(2,2)', linewidth=3,color="blue")
222 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"]-3, label='(2,2)', linewidth=3,color="orange")
223 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
224 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
225 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
226 ax[3].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(0)
227
228 # =====
229 # REALIZACIONES COMPACTAS BAJO EL FSF
230 # =====
231
232 def de_est_fsf(MsH,des_ext):
233     distancias=[]
234     distancia=[]
235     rp_red=[]

```

```

236 for i in range(len(MsH)):
237     print(i)
238     F_r,G_r,H_r=rp.real_parfsf(MsH[i],2,2) #Realización MH reducida fsf
239     rp_red.append([F_r,G_r,H_r])
240     prom_F=0
241     for j in range(len(des_ext)):
242         prom_F=prom_F+np.linalg.norm(H_r@(F_r**j)@G_r-des_ext[i])
243     distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),i+1])
244     distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
245     print(distancia[i])
246 return(rp_red,distancia,distancias)
247
248 realiz,dist,distancias=de_est_fsf(MH_red,DE) # MH_red [0]
249
250 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias]
251 valores = [elemento[0] for elemento in distancias]
252
253 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
254 col_r=230
255 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)),width=.95)
256 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
257     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
258     bar.set_alpha(.9)
259 plt.xlabel('PARES DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES',fontsize=22)
260 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA',fontsize=19)
261 pl.xticks(np.arange(0,len(posiciones)+1,2))
262 pl.xlim(0.3,len(posiciones)+1)
263 plt.xticks(fontsize=18,rotation=90)
264 plt.yticks(fontsize=15)

```

Código C.6: Realización lineal del modelo de incidencias de los componentes de la inflación, sin compresión de información y empleando el AF

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import matplotlib.dates as mdates
12 import pandas as pd
13 from datetime import datetime, timedelta
14
15 # =====
16 # CARGAR DATOS, CONSTRUIR LA DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
17 # =====
18 direct="/home/armandorg/Documentos/Doctorado/Código Python/ca56_2018_quinc.xlsx"
19 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja2')
20 b=b.iloc[:,[0,2,10,3,11,8,9,16]]
21
22 q2=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-07-01', freq='M')
23 q1=pd.date_range(start='2011-01-01', end='2023-06-30', freq='MS')+ timedelta(days=14)
24 b["Periodo"]=q1.union(q2)
25
26 det1=(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
27 det2=(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No
    subyacente"])
28 det=det1-det2
29
30 b["a11"]=(1/det)*(1-b["Tarifas"]/b["No subyacente"])
31 b["a12"]=(1/det)*((b["Educación"]+b["Otros servicios"])/b["No subyacente"])
32 b["a21"]=(1/det)*(b["Agropecuarios"]/b["Subyacente"])
33 b["a22"]=(1/det)*(1-b["Mercancías"]/b["Subyacente"])
34

```

```

35 # Descripción Externa
36 DE=[]
37 for i in range(len(b)):
38     DE.append(np.matrix([[b["a11"]][i],b["a12"][i]],
39                         [b["a21"][i],b["a22"][i]],dtype=np.float128))
40 # Matriz de Hankel
41 mhs=rp.matriз_hankel(DE,151,150)
42
43 # =====
44 # REALIZACIÓN CON LA MH ORIGINAL
45 # =====
46
47 # Realización
48 F,G,H=rp.real_par(mhs,2,2)
49
50 # Distancia promedio y series de las coordenadas de la estimación
51 disp=0; a_11=[]; a_12=[]; a_21=[]; a_22=[]
52 for i in range(len(DE)):
53     disp=disp+np.linalg.norm(H@F**i@G-DE[i])
54     if i==len(DE)-1:
55         disp=disp/len(DE)
56     aprox=H@F**i@G
57     a_11.append(aprox[0,0])
58     a_12.append(aprox[0,1])
59     a_21.append(aprox[1,0])
60     a_22.append(aprox[1,1])
61
62 # Crear la figura y los ejes
63 fig, ax = plt.subplots(4,1,figsize=(20, 15), dpi=100)
64 # Graficar las cuatro series de tiempo
65 ax[0].plot(list(range(1, 301)),a_11, label='(1,1)', linewidth=3,color="blue")
66 ax[0].plot(list(range(1, 301)),b["a11"]-4, label='(1,1)', linewidth=3,color="orange")
67 ax[0].set_ylabel('Coordenada (1,1)', fontsize=18)
68 ax[0].tick_params(axis='both', labelsize=16)
69
70 ax[1].plot(list(range(1, 301)),a_12, label='(1,2)', linewidth=3,color="blue")
71 ax[1].plot(list(range(1, 301)),b["a12"]-4, label='(1,2)', linewidth=3,color="orange")
72 ax[1].set_ylabel('Coordenada (1,2)', fontsize=18)
73 ax[1].tick_params(axis='both', labelsize=16)
74
75 ax[2].plot(list(range(1, 301)),a_21, label='(2,1)', linewidth=3,color="blue")
76 ax[2].plot(list(range(1, 301)),b["a21"]-6, label='(2,1)', linewidth=3,color="orange")
77 ax[2].set_ylabel('Coordenada (2,1)', fontsize=18)
78 ax[2].tick_params(axis='both', labelsize=16)
79
80 ax[3].plot(list(range(1, 301)),a_22, label='(2,2)', linewidth=3,color="blue")
81 ax[3].plot(list(range(1, 301)),b["a22"]-3, label='(2,2)', linewidth=3,color="orange")
82 ax[3].set_ylabel('Coordenada (2,2)', fontsize=18)
83 ax[3].tick_params(axis='both', labelsize=16)
84 ax[3].set_xlabel('Quincena', fontsize=20)
85
86 # =====
87 # ESTABILIDAD DEL SISTEMA
88 # =====
89
90 # Estabilidad de Lyapunov o de entrada 0
91
92 # Descomposición en valores y vectores propios de F
93 val_p=np.linalg.svd(F)[1]
94 porc_val_neg=sum(val_p<0)/len(val_p)
95
96 # Porcentaje de valores propios con parte real negativa
97 print(porc_val_neg)
98
99 # Estabilidad BIBO
100
101 # Matriz de transferencia
102

```

```

103
104 # =====
105 # OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA
106 # =====
107
108 # Dimensión del sistema
109 n = F.shape[0]
110 m = G.shape[1]
111 p = H.shape[0]
112
113 # Matriz de controlabilidad
114 C = np.zeros((n, n * m))
115
116 for i in range(n):
117     C[:, i * m:(i + 1) * m] = np.linalg.matrix_power(F, i) @ G
118
119 # Matriz de observabilidad
120 O = np.zeros((p * n, n))
121
122 for i in range(n):
123     O[i * p:(i + 1) * p, :] = H @ np.linalg.matrix_power(F, i)
124
125 # Rangos de las matrices O y C
126 rank_C=np.linalg.matrix_rank(C)
127 rank_O=np.linalg.matrix_rank(O)
128 print(rank_C,rank_O)

```

Código C.7: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, comprimiendo información y empleando el AF

```

1#!/usr/bin/env python3
2# -*- coding: utf-8 -*-
3"""
4@author: armandorg
5"""
6import numpy as np
7import scipy.linalg as spl
8import realpar as rp
9import matplotlib.pyplot as plt
10import matplotlib.pylab as pl
11import pandas as pd
12import itertools as it
13
14# =====
15# DESCRIPCIÓN EXTERNA, GRAFICARLA Y OBTENER H
16# =====
17# Carga de datos
18direct="mod2_cap4.xlsx"
19b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
20
21# Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE
22b["BC"] = b["X"] - b["M"]
23bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
24
25ent_de={}
26ind=[(0,2),(1,0),(2,1)]
27pos_de=[]
28for i,j in it.product(range(3),range(3)):
29    if (i,j) in ind:
30        peso=1/2
31    else:
32        peso=1/4
33    var=f'a{i+1}{j+1}'
34    ent_de[f'a{i+1}{j+1}']=peso*bn.iloc[:,i]/bn.iloc[:,j].shift(1)
35    pos_de.append((i,j,f'a{i+1}{j+1}'))
36
37DE=[]
38for count in range(len(b)-1):

```

```

39     M=np.empty((3,3),dtype=np.float128)
40     for ter in pos_de:
41         M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
42     DE.append(M)
43
44 pos_graf=[]
45 k=0
46 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
47     if (i,j) !=(4,1):
48         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
49     k=k+1
50
51 # Crear la gráfica de las series de tiempo de las coordenadas de la DE
52 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
53 # Eliminar el último subplot (espacio en blanco)
54 fig.delaxes(ax[4, 1])
55 for ent in pos_graf:
56     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:], label='(1,1)')
57     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
58     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
59 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
60 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
61 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
62 mhs=rp.matriiz_hankel(DE,70,69)
63
64 # =====
65 # DESCOMPOSICIÓN DE LA MATRIZ DE HANKEL Y GRAFICACIÓN DE SUS VALORES SINGULARES
66 # =====
67
68 def desc_esp_mh(MHank):
69     usv=np.linalg.svd(MHank)
70     s=spl.diagsvd(usv[1],usv[0].shape[1],usv[2].shape[0])
71     U=usv[0]
72     V=usv[2]
73     S=np.matrix(s)
74     vs_n=usv[1]/sum(usv[1])
75     return(usv,V,S,U,usv[1],vs_n)
76
77 dvs=desc_esp_mh(mhs)
78
79 svs=0
80 for i in range(len(dvs[5])):
81     if svs<.8: svs=dvs[5][i]+svs
82     else: break
83 pos=i
84 N=len(DE)
85
86 # Función para cambiar a porcentaje las etiquetas en el eje Y en una gráficas
87 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
88 def percentage_formatter(x, pos):
89     return f'{x*100:.1f}%'
90
91 qui_vs=0
92 plt.figure(figsize=(20, 10), dpi=200)
93 plt.plot(np.arange(len(dvs[5]))-qui_vs+1,dvs[5],"o", color="c", markersize=15)
94 plt.plot(pos,dvs[5][pos],"o", color="r", markersize=18)
95 formatter = FuncFormatter(percentage_formatter)
96 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(formatter)
97 plt.xlabel("POSICIÓN DEL VALOR SINGULAR", fontsize=25)
98 plt.ylabel("PORCENTAJE", fontsize=25)
99 plt.grid()
100 plt.xticks(fontsize=25)
101 plt.yticks(fontsize=25)
102
103 # =====
104 # GENERACIÓN DE LAS MH REDUCIDAS, REALIZACIÓN Y MATRICES ESTIMADAS
105 # =====

```

```

107 def mh_red_est(V,S,U,des_ext):
108     mt_est=[]
109     MH_red=[]
110     rp_red=[]
111     dim=np.shape(des_ext[0])
112     for i in range(1,int(V.shape[0]/dim[0])):
113         print(i)
114         V_i=V[0:dim[0]*i,0:]
115         S_i=S[0:dim[0]*i,0:dim[0]*i]
116         U_i=U[:,0:dim[0]*i]
117         H_red=U_i*S_i*V_i
118         MH_red.append(H_red)
119         F_r,G_r,H_r=rp.real_par(H_red,dim[0],dim[1]) #Realización MH reducida
120         real_red=[F_r,G_r,H_r]
121         rp_red.append(real_red)
122         for j in range(len(des_ext)):
123             print(j)
124             mt_est.append(H_r@(F_r**j)@G_r)
125     return(MH_red,mt_est,rp_red)
126
127 MH_red=mh_red_est(dvs[1],dvs[2],dvs[3],DE)
128
129 # =====
130 # DETERMINACIÓN DE LA MEJOR APROXIMACIÓN DE LAS DESCRIPCIONES EXTERNAS ESTIMADAS
131 # =====
132
133 def prox_de_di(mat_red,des_ext):
134     distancias=[]
135     distancia=[]
136     for j in range(int(len(mat_red)/len(des_ext))):
137         prom_F=0
138         for i in range(len(des_ext)):
139             prom_F=prom_F+np.linalg.norm(mat_red[i+len(des_ext)*j]-des_ext[i])
140         distancias.append([round(prom_F*(1/len(des_ext)),2),j+1])
141         distancia.append(round(prom_F*(1/len(des_ext)),2))
142     p_min=distancia.index(min(distancia))
143     MEJOR_EST=mat_red[p_min*len(des_ext):(p_min+1)*len(des_ext)]
144     return(distancias,p_min+1,MEJOR_EST,distancia)
145
146 distancias=prox_de_di(MH_red[1],DE)
147
148 # =====
149 # GRÁFICA DE LAS DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DESCRIPCIÓN EXTERNA REAL Y LAS ESTIMADAS
150 # =====
151
152 # Extrae las posiciones y los valores de A en listas separadas
153 posiciones = [elemento[1] for elemento in distancias[0]]
154 valores = [elemento[0] for elemento in distancias[0]]
155
156 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
157 col_r=230
158 bars=pl.bar(posiciones, np.array(np.log(valores)),width=.95)
159 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)), bars):
160     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
161     bar.set_alpha(.9)
162 plt.xlabel('TERNAS DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES',fontsize=22)
163 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA',fontsize=19)
164 pl.xticks(np.arange(0,len(posiciones)+1,2))
165 pl.xlim(0.3,len(posiciones)+1)
166 pl.xticks(fontsize=18,rotation=90)
167 pl.yticks(fontsize=15)
168
169 valores_sin_nan = [x for x in valores if not np.isnan(x)]
170 minimos=np.array(posiciones)[np.array(valores)<=10**10]-1
171 min_pos=valores.index(min(valores))
172 min(valores_sin_nan)
173 max(valores_sin_nan)
174 np.mean(valores_sin_nan)

```

```

175 np.nanmedian(valores_sin_nan)
176 np.std(valores_sin_nan)
177
178 # =====
179 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
180 # =====
181
182 F_c,G_c,H_c=MH_red[2][min_pos]
183 ent_es={}
184 prom_F=0
185 for k in range(len(DE)):
186     aprox=H_c@F_c**k@G_c
187     prom_F=prom_F+np.linalg.norm(aprox-DE[k])
188     if k==0:
189         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
190             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"]=[aprox[i,j]]
191     else:
192         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
193             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"].append(aprox[i,j])
194 print(round(prom_F*(1/len(DE)),2))
195
196 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
197 fig.delaxes(ax[4, 1])
198 for ent in pos_graf:
199     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]], linewidth=3, label='(1,1)', color="blue")
200     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]-4, linewidth=3, label='(1,1)', color="orange")
201     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
202     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
203     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
204     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
205 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
206 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
207 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)

```

Código C.8: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, comprimiendo información, empleando el AF y con mayor precisión

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import matplotlib.pylab as pl
11 import pandas as pd
12 import itertools as it
13 from mpmath import mp, matrix
14
15 # =====
16 # DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
17 # =====
18 # Carga de datos
19 direct="mod2_cap4.xlsx"
20 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
21 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE
22 b[["BC"]]=b[["X"]]-b[["M"]]
23 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
24
25 ent_de={}
26 ind=[(0,2),(1,0),(2,1)]
27 pos_de=[]
28 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
29     if (i,j) in ind:

```

```

30         peso=1/2
31     else:
32         peso=1/4
33     var=f"a{i+1}{j+1}"
34     ent_de[f"a{i+1}{j+1}"] = peso*bn.iloc[:, i]/bn.iloc[:, j].shift(1)
35     pos_de.append((i, j, f"a{i+1}{j+1}"))
36
37 DE=[]
38 for count in range(len(b)-1):
39     M=np.empty((3,3), dtype=np.float128)
40     for ter in pos_de:
41         M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
42     DE.append(M)
43 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
44 mhs=rp.matriz_hankel(DE, 70, 69)
45
46 # =====
47 # MH REDUCIDAS, REALIZACIONES Y MATRICES ESTIMADAS CON MAYOR PRECISIÓN
48 # =====
49
50 real_estim=[]
51 for i in range(1,68):
52     dim=np.shape(DE[0])[0]*i
53     mp.dps = 30 # Precisión de 30 decimales
54     # Obtención de la descomposición SVD de alta precisión
55     U, S, V = mp.svd(matrix(mhs))
56     St = mp.diag(S)
57     mhs_t=U[0:,0:dim]@St[0:dim,0:dim]@V[0:dim,0:]
58     # Realización de alta precisión
59     F,G,H=rp.real_parap(mhs_t,np.shape(DE[0])[0],np.shape(DE[0])[0])
60     real_estim.append([F,G,H])
61     print(i)
62
63 estimaciones_trunc=[]
64 i=1
65 for sublist in real_estim:
66     Fp=mp.eye(sublist[0].cols)
67     for k in range(len(DE)):
68         estimaciones_trunc.append(sublist[2]@Fp@sublist[1])
69     Fp=Fp@sublist[0]
70     print(i)
71     i=i+1
72 de_estimada_ap_trunc=[mat.tolist() for mat in estimaciones_trunc]
73
74 num_trunc=int(len(estimaciones_trunc)/len(DE))
75 mean_dist_trunc=[]
76 for i in range(num_trunc):
77     dist_trunc=0
78     for j in range(len(DE)):
79         dist_trunc=dist_trunc+np.linalg.norm(de_estimada_ap_trunc[i*len(DE)+j]-DE[i])
80     mean_dist_trunc.append(np.sum(dist_trunc)/len(DE))
81
82 # =====
83 # GRÁFICA DE DISTANCIAS PROMEDIO ENTRE LA DE Y LAS ESTIMACIONES CON MAYOR PRECISIÓN
84 # =====
85
86 valores = [float(elemento) for elemento in mean_dist_trunc]
87 pl.figure(figsize=(25, 8), dpi=100)
88 col_r=230
89 bars=pl.bar(range(1,len(valores)+1),np.log(valores),width=.95)
90 for r,bar in zip(np.array(np.log(valores)),bars):
91     bar.set_facecolor(pl.cm.jet(r/col_r))
92     bar.set_alpha(.9)
93 plt.xlabel('TERNAS DE VALORES SINGULARES MÁS GRANDES', fontsize=22)
94 plt.ylabel('LOGARITMO DEL PROMEDIO DE LA DISTANCIA', fontsize=19)
95 pl.xticks(np.arange(0,len(valores)+1,2))
96 pl.xlim(0.3,len(valores)+1)
97 plt.xticks(fontsize=18, rotation=90)

```

```

98 plt.yticks(fontsize=15)
99
100 min_pos=valores.index(min(valores))
101 min(valores)
102 max(valores)
103 np.mean(valores)
104 np.nanmedian(valores)
105 np.std(valores)
106
107 # =====
108 # GRÁFICA DE PROXIMIDAD ENTRE MEJOR APROXIMACIÓN DEL AF COMPACTADA Y LA DE
109 # =====
110
111 ent_es={}
112 for k in range(len(DE)):
113     aprox=de_estimada_ap_trunc[min_pos*len(DE)+k]
114     if k==0:
115         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
116             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"]=[aprox[i][j]]
117     else:
118         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
119             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"].append(aprox[i][j])
120 pos_graf=[]
121 k=0
122 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
123     if (i,j) != (4,1):
124         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
125     k=k+1
126
127 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
128 fig.delaxes(ax[4, 1])
129 for ent in pos_graf:
130     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]],linewidth=3,label='(1,1)',color="blue")
131     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]-4,linewidth=3,label='(1,1)',color="orange")
132     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{ent[2]}', fontsize=18)
133     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
134     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
135     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
136 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
137 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
138 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)

```

Código C.9: Realización lineal del modelo de *BP*, *INPC* y *TD* con respecto a sus primeros rezagos, sin compresión de información, empleando el AF y con mayor precisión

```

1 #!/usr/bin/env python3
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 """
4 @author: armandorg
5 """
6 import numpy as np
7 import scipy.linalg as spl
8 import realpar as rp
9 import matplotlib.pyplot as plt
10 import pandas as pd
11 import itertools as it
12 from mpmath import mp, matrix
13
14 # =====
15 # CARGAR DATOS, CONSTRUIR LA DESCRIPCIÓN EXTERNA Y MATRIZ DE HANKEL
16 # =====
17 # Carga de datos
18 direct="mod2_cap4.xlsx"
19 b=pd.read_excel(direct,sheet_name='Hoja1')
20
21 # Crear balanza de pagos y las series de tiempo de las entradas en la DE

```

```

22 b["BC"] = b["X"] - b["M"]
23 #bn=(b.iloc[:,[5,4,1]]-b.iloc[:,[5,4,1]].mean())/b.iloc[:,[5,4,1]].std()
24 #bn=(b.iloc[:,[5,4,1]]-b.iloc[:,[5,4,1]].min())/(b.iloc[:,[5,4,1]].max()-b.iloc
25 [:,[5,4,1]].min())
25 bn=b.iloc[:,[5,4,1]]
26
27 ent_de={}
28 ind=[(0,2),(1,0),(2,1)]
29 pos_de=[]
30 for i,j in it.product(range(3),range(3)):
31     if (i,j) in ind:
32         peso=1/2
33     else:
34         peso=1/4
35     var=f"a{i+1}{j+1}"
36     ent_de[f"a{i+1}{j+1}"]=np.float128(peso*bn.iloc[:,i]/bn.iloc[:,j].shift(1))
37     pos_de.append((i,j,f"a{i+1}{j+1}"))
38
39 def gen_DE(ent_de,pos_de,N,i):
40     DE=[]
41     for count in range(N-1):
42         M=np.empty((3,3),dtype=np.float128)
43         for ter in pos_de:
44             if i==0:
45                 M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count]
46             else:
47                 M[ter[0],ter[1]]=ent_de[ter[2]][count+1]
48         DE.append(M)
49     return(DE)
50
51 # Creación de la MH de 151 bloques fila y 150 bloques columna
52 DE=gen_DE(ent_de,pos_de,len(b),1)
53 mhs=rp.matriz_hankel(DE,70,69)
54
55 # =====
56 # REALIZACIÓN CON LA MH ORIGINAL Y GRÁFICA DE SU RESULTADO CON RESPECTO A LA DE
57 # =====
58 # Realización
59 F,G,H,presicion=rp.real_parap(mhs,3,3)
60
61 # DE estimada bajo F, G, H
62 ent_es={}
63 Fp=mp.eye(F.cols)
64 for k in range(len(DE)):
65     aprox=H@Fp@G
66     if k==0:
67         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
68             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"]=[aprox[i,j]]
69     else:
70         for i,j in it.product(range(3),range(3)):
71             ent_es[f"a{i+1}{j+1}"].append(aprox[i,j])
72     Fp=Fp@F
73     print(k,sum(aprox-matrix(DE[k])))
74
75 DEe=gen_DE(ent_es,pos_de,len(b),0)
76 dist=0
77 for s in range(len(DE)):
78     dist=dist+np.linalg.norm(DEe[s]-DE[s])
79 print(dist/len(DE))
80
81
82 # Gráfica que compara la DE y la DE estimada bajo F, G, H
83 pos_graf=[]
84 k=0
85 for i,j in it.product(range(5),range(2)):
86     if (i,j)!=(4,1):
87         pos_graf.append((i,j,list(ent_de.keys())[k]))
88     k=k+1

```

```

89 fig, ax = plt.subplots(5,2,figsize=(20, 15), dpi=100)
90 fig.delaxes(ax[4, 1])
91 for ent in pos_graf:
92     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_es[ent[2]],linewidth=3,label='(1,1)',color="blue")
93     ax[ent[0],ent[1]].plot(list(range(1, len(b))),ent_de[ent[2]][1:]+(max(ent_es[ent[2]])-min(ent_es[ent[2]]))*(1.3*10**(-2)),linewidth=3,label='(1,1)',color="orange")
94     ax[ent[0],ent[1]].set_ylabel(f'{{ent[2]}}, fontsize=18)
95     ax[ent[0],ent[1]].tick_params(axis='both', labelsize=16)
96     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.major.formatter._useMathText = True
97     ax[ent[0],ent[1]].yaxis.get_offset_text().set_fontsize(15)
98 plt.subplots_adjust(hspace=0.3)
99 ax[3,1].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
100 ax[4,0].set_xlabel('Mes', fontsize=20)
101
102 # =====
103 # ESTIMACIÓN
104 # =====
105
106 # Muestras bootstrap deseadas
107 num_muestras_bootstrap = 100
108 DE_estim_bootstrap=[]
109 # Realiza el remuestreo con reemplazo
110 for i in range(num_muestras_bootstrap):
111     DE_bootstrap=random.choices(DE, k=len(DE))
112     mhs1=rp.matz_hankel(DE_bootstrap,151,150)
113     Fb,Gb,Hb=rp.real_par(mhs1,2,2)
114     DE_estim=[]
115     for j in range(300,306):
116         DE_estim.append(Hb@Fb**j@Gb)
117     DE_estim_bootstrap.append(DE_estim)
118
119 DE_estim_bootstrap[i]
120
121 # =====
122 # ESTABILIDAD DEL SISTEMA
123 # =====
124
125 # Estabilidad de Lyapunov o de entrada 0
126
127 # Descomposicion en valores y vectores propios de F
128 val_p=np.linalg.svd(F)[1]
129 porc_val_neg=sum(val_p<0)/len(val_p)
130
131 # Porcentaje de valores propios con parte real negativa
132 print(porc_val_neg)
133
134 # =====
135 # OBSERVABILIDAD Y CONTROLABILIDAD DEL SISTEMA
136 # =====
137
138 # Dimensión del sistema
139 n = F.shape[0]
140 m = G.shape[1]
141 p = H.shape[0]
142
143 # Matriz de controlabilidad
144 C = np.zeros((n, n * m))
145
146 for i in range(n):
147     C[:, i * m:(i + 1) * m] = np.linalg.matrix_power(F, i) @ G
148
149 # Matriz de observabilidad
150 O = np.zeros((p * n, n))
151
152 for i in range(n):
153     O[i * p:(i + 1) * p, :] = H @ np.linalg.matrix_power(F, i)
154

```

```
155 # Rangos de las matrices  $\mathcal{O}$  y  $C$ 
156 rank_C=np.linalg.matrix_rank(C)
157 rank_O=np.linalg.matrix_rank(O)
158 print(rank_C,rank_O)
```

## Apéndice D

# Datos empleados

Tabla D.1: Datos trimestrales de México, 1993-2018

Año / Trimestre	Consumo del Gobierno <sup>1</sup>	Consumo Privado <sup>1</sup>	Formación Bruta de Capital Fijo <sup>1</sup>	Variación de Existencias <sup>1</sup>	Importación de Bienes Finales <sup>2</sup>	Importación de Bienes Intermedios <sup>2</sup>	Importación de Bienes de Capital <sup>2</sup>	Exportaciones Totales <sup>2</sup>	Tipo de Cambio <sup>3</sup>
1993/01	134 056.53	1 017 774.94	324 289.55	46 372.24	1 798.68	10 914.75	2 671.22	11 769.29	3.11
1993/02	139 849.02	1 073 692.04	305 642.01	56 521.89	1 879.30	11 660.23	2 779.95	13 046.54	3.11
1993/03	140 634.87	1 079 579.95	323 636.66	19 135.45	1 938.79	11 726.94	2 660.52	12 818.20	3.12
1993/04	154 256.09	1 158 893.15	347 513.68	13 458.38	2 225.58	12 266.20	2 844.38	14 251.93	3.12
1994/01	161 709.76	1 125 906.78	375 637.40	80 398.47	2 067.48	12 964.39	3 041.23	13 775.92	3.17
1994/02	171 024.52	1 215 635.70	373 191.35	85 285.54	2 350.27	13 984.22	3 283.55	15 067.75	3.34
1994/03	167 436.24	1 234 138.85	394 947.53	36 990.27	2 284.03	14 258.33	3 316.14	15 064.15	3.39
1994/04	174 406.13	1 314 877.72	400 588.12	28 922.13	2 808.67	15 306.79	3 680.80	16 974.39	3.64
1995/01	179 617.51	1 284 669.88	343 814.98	116 175.01	1 469.61	14 348.91	2 371.48	18 786.74	6.03
1995/02	195 254.98	1 482 540.91	336 908.71	97 399.75	1 196.54	13 773.30	2 062.77	19 631.46	6.14
1995/03	199 586.21	1 590 023.26	383 658.05	87 100.20	1 216.29	14 598.61	2 057.71	20 087.17	6.21
1995/04	216 167.34	1 765 919.99	447 685.64	125 727.33	1 452.30	15 700.25	2 205.30	21 036.19	7.35
1996/01	232 694.56	1 854 077.06	506 711.90	131 221.40	1 455.89	16 140.09	2 340.07	21 870.38	7.52
1996/02	247 727.30	2 000 318.79	519 842.01	99 680.28	1 455.41	17 351.89	2 602.25	23 606.88	7.48
1996/03	254 501.28	2 123 101.37	600 914.71	85 555.16	1 623.86	18 531.84	2 679.46	24 247.08	7.56
1996/04	279 446.10	2 376 683.97	672 909.58	78 099.34	2 121.61	19 865.80	3 300.59	26 275.40	7.83
1997/01	302 287.82	2 355 533.98	678 673.66	159 187.94	1 518.04	18 982.09	3 028.92	25 098.39	7.86
1997/02	322 560.04	2 606 061.50	743 730.15	113 758.33	2 184.79	20 795.99	3 818.93	27 440.43	7.92
1997/03	327 167.82	2 675 387.74	836 181.30	79 086.66	2 289.54	22 426.69	3 768.92	28 176.38	7.81
1997/04	357 456.29	2 934 217.61	887 128.24	83 889.55	3 097.95	23 434.40	4 461.93	29 716.30	8.07
1998/01	377 536.83	2 921 015.89	948 018.82	176 814.83	2 703.31	23 008.60	4 162.25	28 106.17	8.43
1998/02	401 250.40	3 136 284.55	940 477.42	122 107.63	2 584.99	24 040.18	4 397.53	29 871.52	8.68
1998/03	412 399.89	3 261 141.12	1 066 315.32	92 249.82	2 631.74	24 085.12	4 308.48	28 586.59	9.47
1998/04	452 553.02	3 509 423.24	1 102 694.55	110 003.02	3 188.43	25 801.32	4 461.10	30 975.02	10.01
1999/01	489 642.36	3 568 342.77	1 172 569.27	95 967.24	2 442.60	24 127.63	4 576.71	29 940.37	9.94
1999/02	521 168.14	3 801 665.72	1 139 024.65	103 109.73	2 811.78	26 825.43	4 980.46	33 641.11	9.45
1999/03	527 649.66	3 918 757.54	1 254 411.26	55 313.55	2 965.28	28 023.25	5 266.45	35 293.00	9.37
1999/04	568 363.18	4 153 842.28	1 281 098.98	81 205.04	3 955.37	30 293.31	5 706.51	37 487.33	9.46
2000/01	609 975.23	4 201 895.45	1 383 192.04	151 180.28	3 509.77	30 384.61	5 324.60	38 017.74	9.40
2000/02	632 286.66	4 485 433.73	1 381 838.39	131 570.21	3 919.12	32 910.56	5 648.34	41 027.14	9.59
2000/03	633 682.02	4 628 401.55	1 513 123.85	62 565.82	3 968.57	34 693.97	6 214.86	42 783.21	9.35
2000/04	671 730.58	4 874 553.68	1 475 438.34	48 082.59	5 293.10	35 648.22	6 942.14	44 292.64	9.50
2001/01	672 251.58	4 672 918.23	1 440 146.53	117 260.17	4 531.15	31 608.69	5 722.72	39 730.26	9.69
2001/02	696 356.20	4 849 357.45	1 332 612.46	96 879.00	4 763.94	32 154.39	5 603.99	40 748.10	9.18
2001/03	692 564.80	4 872 250.16	1 458 592.05	16 082.60	4 686.95	30 837.15	5 274.52	39 129.15	9.23
2001/04	732 963.74	5 088 672.66	1 405 402.93	24 646.87	5 769.94	31 548.52	5 894.45	39 172.23	9.25
2002/01	738 161.65	4 840 452.83	1 331 951.29	165 075.80	4 366.13	28 833.71	4 921.68	36 677.19	9.11
2002/02	770 824.80	5 225 346.00	1 403 586.43	132 171.91	5 305.65	32 172.87	5 499.09	41 480.50	9.47
2002/03	768 787.57	5 250 586.43	1 503 069.06	87 302.12	5 128.10	32 890.76	4 906.22	41 367.21	9.89
2002/04	817 051.64	5 458 095.01	1 507 889.36	43 796.49	6 378.47	32 610.73	5 665.47	41 521.08	10.17
2003/01	841 323.34	5 256 478.10	1 542 091.85	181 294.93	4 973.26	29 565.99	4 650.16	39 051.49	10.81
2003/02	884 628.06	5 483 515.38	1 512 123.49	119 541.29	4 885.33	32 012.83	4 992.97	40 244.55	10.45
2003/03	850 843.71	5 534 132.37	1 575 135.20	28 611.87	5 214.95	32 788.72	4 968.45	41 543.04	10.71
2003/04	896 116.70	5 830 030.95	1 595 791.25	85 386.77	6 435.49	34 463.93	5 593.77	43 927.35	11.19
2004/01	907 627.02	5 640 640.91	1 695 674.47	141 839.43	5 200.68	33 589.94	4 926.28	43 193.01	10.98
2004/02	937 287.55	5 955 078.92	1 791 045.52	207 229.46	5 948.15	37 162.67	5 396.54	47 387.84	11.39
2004/03	899 533.26	6 086 046.68	1 832 711.24	122 580.01	6 314.29	37 807.83	5 699.75	47 874.26	11.45
2004/04	958 978.08	6 445 208.85	1 911 517.13	107 879.99	7 945.86	40 243.28	6 574.39	49 543.44	11.32
2005/01	961 231.13	6 176 929.94	1 905 165.73	134 812.55	6 554.21	36 420.54	5 797.28	46 894.76	11.18
2005/02	1 008 967.19	6 576 518.89	1 950 469.28	96 646.41	7 289.19	41 090.79	6 274.72	53 977.04	10.97
2005/03	992 525.04	6 639 203.69	1 967 492.53	36 298.27	7 686.72	41 578.05	6 606.59	54 183.35	10.71
2005/04	1 061 891.78	6 857 958.41	2 096 163.11	91 921.02	9 982.76	45 001.75	7 536.93	59 177.82	10.71
2006/01	1 078 524.49	6 750 621.59	2 112 334.84	146 743.88	8 237.27	42 953.44	6 928.61	58 852.39	10.60
2006/02	1 115 793.57	7 141 213.96	2 257 080.75	214 897.17	8 758.23	47 767.36	7 406.03	63 779.72	11.18
2006/03	1 071 233.04	7 212 024.43	2 361 997.90	104 521.39	9 534.88	48 568.90	7 658.94	63 139.91	10.95
2006/04	1 133 286.48	7 499 115.15	2 429 623.41	77 962.61	10 370.63	49 342.77	8 531.29	64 153.13	10.89
2007/01	1 140 500.96	7 345 042.77	2 364 026.75	157 876.20	9 142.87	46 051.96	7 527.92	60 269.04	11.02
2007/02	1 200 639.30	7 691 347.19	2 426 664.08	190 080.50	10 501.81	51 128.67	8 333.24	67 655.77	10.87

2007/03	1 180 499.31	7 784 629.30	2 551 401.94	75 329.63	10 924.89	53 358.50	8 380.44	70 269.40	10.96
2007/04	1 266 532.04	8 080 075.64	2 754 760.52	118 281.80	12 484.95	54 756.36	9 357.44	73 681.10	10.85
2008/01	1 244 310.11	7 930 371.20	2 628 697.80	93 548.08	11 259.63	52 234.59	8 237.74	70 084.13	10.81
2008/02	1 337 952.13	8 410 688.29	2 853 134.32	182 129.32	11 922.49	58 312.63	10 032.78	79 402.87	10.43
2008/03	1 309 872.13	8 324 469.21	2 878 769.51	56 736.99	13 266.88	61 159.24	10 468.06	78 466.80	10.32
2008/04	1 409 898.27	8 409 489.45	3 086 170.57	133 302.18	11 491.71	49 858.98	10 358.53	63 388.80	13.04
2009/01	1 393 431.91	7 728 821.76	2 625 853.32	81 439.88	7 020.70	37 574.52	7 361.65	49 664.85	14.38
2009/02	1 458 094.81	7 793 042.76	2 623 124.61	77 935.08	7 167.65	39 378.43	7 016.14	54 012.20	13.31
2009/03	1 432 551.80	8 043 991.92	2 690 814.40	60 035.39	8 854.48	44 809.55	7 643.03	58 520.88	13.27
2009/04	1 513 649.68	8 460 424.93	2 824 969.94	151 525.92	9 785.24	49 149.16	8 624.42	67 505.62	13.06
2010/01	1 496 786.96	8 191 015.02	2 766 614.53	207 833.29	9 104.78	50 315.82	6 804.15	66 596.62	12.76
2010/02	1 585 008.07	8 618 735.08	2 843 282.67	188 815.36	10 055.33	57 678.35	6 991.17	74 641.43	12.57
2010/03	1 560 216.70	8 831 326.55	2 859 818.49	75 139.68	10 269.77	59 874.74	7 696.45	75 589.82	12.80
2010/04	1 651 607.55	9 298 298.71	3 069 584.96	175 355.21	11 992.85	61 943.50	8 754.91	81 645.28	12.39
2011/01	1 644 255.49	8 970 318.17	2 909 996.66	219 464.37	11 583.08	60 603.55	7 706.05	81 801.20	12.06
2011/02	1 708 514.14	9 331 501.54	3 105 666.53	188 470.71	12 688.58	66 678.26	8 676.67	89 282.61	11.73
2011/03	1 718 061.39	9 636 372.31	3 305 363.61	55 615.19	13 851.03	69 022.69	9 094.40	88 087.09	12.31
2011/04	1 837 877.49	10 078 909.43	3 745 365.21	127 351.55	13 667.54	67 715.75	9 555.28	90 262.49	13.63
2012/01	1 839 767.80	9 897 927.02	3 450 147.09	229 466.37	12 819.15	66 131.69	8 954.86	89 608.97	13.00
2012/02	1 896 162.86	10 045 719.25	3 590 282.16	228 428.69	13 310.40	70 296.76	9 334.06	94 308.60	13.57
2012/03	1 859 125.80	10 294 103.45	3 663 796.28	43 563.98	13 223.02	69 661.27	9 531.30	91 234.18	13.17
2012/04	1 963 763.78	10 714 140.29	3 747 151.66	160 430.47	14 919.85	71 821.36	10 747.84	95 618.14	12.94
2013/01	1 912 523.20	10 317 196.06	3 364 545.79	257 660.45	13 647.34	66 619.77	9 079.70	88 228.08	12.65
2013/02	1 963 197.70	10 713 017.10	3 430 953.70	284 393.13	14 338.17	73 432.50	9 790.60	96 662.69	12.48
2013/03	1 968 384.17	10 878 295.83	3 415 749.49	113 480.67	14 500.31	73 171.22	9 608.29	96 307.24	12.91
2013/04	2 093 554.60	11 368 494.77	3 625 965.12	152 411.99	14 843.56	71 599.91	10 578.80	98 817.04	13.03
2014/01	2 062 083.99	10 975 818.90	3 408 460.76	280 428.76	13 264.96	69 590.03	9 209.38	90 759.10	13.23
2014/02	2 090 793.81	11 375 851.46	3 549 971.69	148 505.39	14 269.77	77 017.62	9 576.16	101 870.05	13.00
2014/03	2 127 278.63	11 571 434.25	3 675 050.93	106 510.63	14 898.86	77 879.31	10 061.94	101 120.72	13.12
2014/04	2 248 661.26	12 111 339.17	4 055 135.21	84 699.44	15 865.54	77 544.29	10 799.37	103 161.81	13.87
2015/01	2 257 960.33	11 581 174.09	3 810 144.69	320 411.69	12 673.56	70 307.65	9 623.47	90 460.71	14.95
2015/02	2 275 898.42	11 840 307.89	4 046 947.68	143 067.52	13 454.21	76 258.93	10 272.31	97 976.27	15.33
2015/03	2 248 161.07	12 297 858.67	4 369 901.87	27 864.08	15 162.78	76 782.40	10 617.32	95 890.31	16.43
2015/04	2 368 232.59	12 932 143.56	4 485 293.64	69 076.02	14 988.81	74 364.13	10 726.81	96 222.30	16.76
2016/01	2 349 138.77	12 452 013.88	4 283 785.14	336 504.33	11 721.62	68 521.82	8 889.94	85 146.83	18.06
2016/02	2 412 627.70	12 824 465.62	4 504 366.90	201 353.93	12 505.99	74 438.41	9 869.21	93 746.17	18.11
2016/03	2 393 451.28	13 331 775.33	4 665 180.02	55 162.05	13 727.96	75 965.00	10 462.04	94 918.85	18.75
2016/04	2 515 113.99	14 153 946.45	4 994 738.35	84 542.71	13 994.72	76 470.16	10 497.64	100 134.85	19.84
2017/01	2 526 625.83	13 718 762.94	4 805 083.64	356 311.36	13 055.59	75 171.01	9 253.03	94 708.75	20.33
2017/02	2 568 426.06	14 063 805.48	4 730 941.67	200 520.93	13 286.14	79 759.47	9 913.64	102 657.44	18.54
2017/03	2 522 967.79	14 348 343.37	4 810 109.96	71 669.85	14 722.61	82 519.46	10 658.47	101 851.48	17.82
2017/04	2 673 080.31	15 097 438.55	5 052 831.91	102 755.55	16 268.70	84 571.80	11 189.22	110 183.41	18.96
2018/01	2 687 714.89	14 534 067.75	4 949 016.43	383 926.90	14 523.59	82 060.11	10 434.86	105 242.02	18.74
2018/02	2 766 519.21	15 104 267.30	5 231 051.83	192 891.26	15 354.45	89 927.28	11 332.91	113 841.81	19.43
2018/03	2 667 651.25	15 291 482.50	5 274 734.95	99 234.55	16 462.57	91 157.19	12 116.38	114 062.56	18.96
2018/04	2 805 468.19	15 909 520.09	5 365 900.29	168 798.80	16 770.73	92 135.59	12 000.95	117 425.77	19.82

<sup>1</sup> Millones de pesos a precios corrientes. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>

<sup>2</sup> Millones de dólares. Tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: <https://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/>

<sup>3</sup> Promedio trimestral pesos por dólar. Elaboración propia con datos de la Serie histórica diaria del tipo de cambio peso-dólar - (CF373) de Banco de México: <http://www.anterior.banxico.org.mx/SieInternet/consultarDirectorioInternetAction.do?accion=consultarCuadro&idCuadro=CF373&sector=6&locale=es>

Tabla D.2: Datos mensuales de México sobre la contribución porcentual del INPC y sus componentes sobre la inflación general, 2013-2022

INCIDENCIA\* EN LA INFLACIÓN GENERAL DE:

Quincena - Mes - Año	Subyacente	No Subyacente	Mercancías	Agropecuarios	Vivienda	Otros Servicios	Energéticos
1Q Ene 2011	0.159972	0.014489	0.153151	-0.099651	0.022057	-0.025972	0.066371
2Q Ene 2011	0.179828	-0.072530	0.038888	-0.097147	0.021060	0.110060	0.016663
1Q Feb 2011	0.171181	0.034593	0.126617	-0.006807	0.018788	0.023911	0.032966
2Q Feb 2011	0.095813	0.134736	0.076910	0.108045	0.016734	0.001448	0.026132
1Q Mar 2011	0.183149	-0.134402	0.092097	-0.178981	0.016749	0.073367	0.047127
2Q Mar 2011	-0.003720	0.058288	0.073592	0.043640	0.029492	-0.108324	0.025996
1Q Abr 2011	0.039330	-0.129717	0.064895	0.202193	0.014476	-0.042240	-0.335690
2Q Abr 2011	0.041085	0.070964	0.037684	0.051091	0.016265	-0.014259	0.018943
1Q May 2011	0.054682	-0.804186	0.044310	-0.227100	0.016174	-0.005952	-0.593109
2Q May 2011	0.124514	-0.213193	0.070776	-0.248027	0.026804	0.025411	0.031216
1Q Jun 2011	0.031345	-0.086060	0.006557	-0.114732	0.016935	0.006155	0.022106
2Q Jun 2011	0.113561	0.075097	0.066469	0.050267	0.009484	0.034999	0.022802
1Q Jul 2011	0.111160	0.204046	0.009812	0.161080	0.007656	0.092572	0.032613
2Q Jul 2011	0.013752	0.126946	-0.032981	0.103291	0.016612	0.026983	0.018359
1Q Ago 2011	0.068224	0.017358	0.015241	-0.009665	0.005126	-0.012038	0.021625
2Q Ago 2011	0.035763	-0.032336	0.065129	-0.059319	0.012920	-0.056875	0.025318
1Q Sep 2011	0.168596	0.043308	0.070190	0.007601	0.015696	-0.011620	0.034573
2Q Sep 2011	0.039850	0.022977	0.016761	0.002837	0.011646	0.006297	0.020109
1Q Oct 2011	0.158136	0.454703	0.099339	0.023172	0.016301	0.042496	0.430523
2Q Oct 2011	0.046000	0.015582	0.033648	-0.001393	0.010600	0.001519	0.016404
1Q Nov 2011	0.192699	0.773953	0.077818	0.080824	0.014154	0.100729	0.690169
2Q Nov 2011	0.066847	0.099047	0.047213	0.073528	0.014620	0.005292	0.025517
1Q Dic 2011	0.265852	0.240113	0.134067	0.186788	0.011133	0.120629	0.051282

2Q Dic 2011	0.176665	0.285564	0.148041	0.244180	0.014452	0.013933	0.031847
1Q Ene 2012	0.150235	0.168047	0.173992	0.114179	0.018586	-0.054859	0.027846
2Q Ene 2012	0.206953	0.107438	0.093271	0.067443	0.014464	0.080035	0.033655
1Q Feb 2012	0.198584	-0.129103	0.155239	-0.143712	0.021291	0.019414	0.028541
2Q Feb 2012	0.044351	-0.091049	0.040771	-0.089172	0.012609	-0.009145	0.025785
1Q Mar 2012	0.125000	-0.077286	0.049932	-0.079242	0.017609	0.057320	0.019402
2Q Mar 2012	0.079424	-0.013280	0.035570	-0.022851	0.017552	0.026282	0.023207
1Q Abr 2012	0.021430	-0.438710	0.061030	-0.075101	0.018158	-0.057758	-0.364904
2Q Abr 2012	0.108926	0.032388	0.067744	-0.003140	0.003839	0.035519	0.033639
1Q May 2012	0.110222	-0.587416	0.045814	0.022937	0.018280	0.040375	-0.610658
2Q May 2012	0.079728	0.104604	0.053678	0.065425	0.021335	-0.005296	0.028552
1Q Jun 2012	0.079195	0.162012	0.092694	0.115896	0.015101	-0.030687	0.044874
2Q Jun 2012	0.095747	0.157763	0.017874	0.135672	0.012157	0.063093	0.020683
1Q Jul 2012	0.158125	0.231811	0.081740	0.191712	0.017427	0.057351	0.039606
2Q Jul 2012	0.068413	0.020670	0.043276	-0.013983	0.015315	0.006990	0.033882
1Q Ago 2012	0.120222	0.015854	0.097456	-0.030466	0.013154	-0.033418	0.042277
2Q Ago 2012	0.036690	0.201555	0.039595	0.177017	0.012674	-0.025052	0.026358
1Q Sep 2012	0.091134	0.158138	0.068103	0.137145	0.016292	-0.107014	0.016685
2Q Sep 2012	0.053230	0.090580	0.055800	0.164229	0.020968	-0.023538	-0.084391
1Q Oct 2012	0.128798	0.321146	0.061362	-0.035034	0.012067	0.055369	0.354317
2Q Oct 2012	0.038556	-0.071215	0.024403	-0.105671	0.013051	0.001102	0.031967
1Q Nov 2012	0.136545	0.652007	0.122695	-0.028990	0.016488	-0.002638	0.666914
2Q Nov 2012	-0.230640	0.046677	0.001492	0.020451	0.016242	-0.248374	0.023796
1Q Dic 2012	0.196677	0.077525	0.122107	0.023100	0.015111	0.058928	0.053667
2Q Dic 2012	0.021779	0.074504	0.074500	0.063266	0.013903	-0.066623	0.007828
1Q Ene 2013	0.134515	0.019599	0.058248	-0.049297	0.016054	0.042207	0.052888
2Q Ene 2013	0.353495	0.045866	-0.020589	-0.007453	0.025148	0.333086	0.005978
1Q Feb 2013	0.184914	0.052894	0.058240	-0.002395	0.017072	0.105036	0.026279
2Q Feb 2013	0.050161	0.060357	0.006770	0.016211	0.015183	0.027872	0.036490
1Q Mar 2013	0.194068	0.326886	0.070353	0.254557	0.019416	0.104076	0.061974
2Q Mar 2013	0.018901	0.293346	-0.000983	0.279844	0.013841	0.005795	0.003179
1Q Abr 2013	0.038726	-0.132307	0.050244	0.019432	0.013122	-0.025386	-0.269656
2Q Abr 2013	0.025621	-0.018042	0.000365	-0.047618	0.021219	0.003112	0.004068
1Q May 2013	0.108940	-0.454698	0.049509	-0.040267	0.014436	0.043165	-0.415982
2Q May 2013	0.058285	-0.039551	0.020103	-0.059161	0.024320	0.012196	0.010664
1Q Jun 2013	0.054362	-0.101193	0.014624	-0.192459	0.024478	0.011364	0.067278
2Q Jun 2013	0.030132	-0.077154	-0.039166	-0.106796	0.018949	0.048705	0.009906
1Q Jul 2013	0.027065	-0.026961	-0.021865	-0.068975	0.016039	0.030660	0.040904
2Q Jul 2013	-0.032012	0.012193	-0.030416	-0.024781	0.013622	-0.024500	0.021517
1Q Ago 2013	0.080608	0.180194	0.087571	0.118381	0.023597	-0.080785	0.054330
2Q Ago 2013	0.009923	0.058189	0.037523	0.055343	0.012533	-0.044232	-0.009806
1Q Sep 2013	0.231693	0.105803	0.126828	0.048432	0.011687	-0.018349	0.055354
2Q Sep 2013	0.024217	-0.014587	-0.003373	-0.021534	0.013582	0.014879	0.004882
1Q Oct 2013	0.104491	0.297699	0.047227	-0.084402	0.016037	0.041225	0.380371
2Q Oct 2013	0.061583	0.074398	-0.017427	0.061980	0.009008	0.070002	0.004332
1Q Nov 2013	0.085377	0.766023	0.010460	0.206723	0.018467	0.055868	0.555773
2Q Nov 2013	-0.025077	0.049244	-0.020472	0.046738	0.019648	-0.024253	0.001249
1Q Dic 2013	0.231482	0.171353	0.097902	0.071836	0.015215	0.118365	0.072899
2Q Dic 2013	0.059798	0.257314	0.070611	0.136755	0.011127	-0.021940	0.006581
1Q Ene 2014	0.523126	0.152471	0.391775	-0.085999	0.020938	0.094039	0.177343
2Q Ene 2014	0.182929	-0.067273	0.015442	-0.086244	0.027001	0.130922	0.005045
1Q Feb 2014	0.089830	0.029904	0.033478	-0.053693	0.018991	0.027265	0.078290
2Q Feb 2014	0.064060	0.087436	0.004657	0.067018	0.023576	0.034483	0.011854
1Q Mar 2014	0.081460	0.091590	0.043665	0.051995	0.016313	0.021482	0.045322
2Q Mar 2014	0.098213	-0.048421	0.034182	-0.044441	0.011562	0.051449	0.009237
1Q Abr 2014	0.198962	-0.384491	0.051612	-0.057369	0.016460	0.130420	-0.331400
2Q Abr 2014	-0.055501	0.004891	0.023450	-0.040588	0.014948	-0.094526	0.021718
1Q May 2014	0.042364	-0.410795	0.045748	0.072610	0.017382	-0.023860	-0.492019
2Q May 2014	0.114044	0.034242	0.076520	0.035323	0.014138	0.020814	-0.002249
1Q Jun 2014	0.088443	-0.007253	0.032377	-0.042842	0.020032	0.030691	0.034509
2Q Jun 2014	0.033730	0.001460	-0.021599	-0.021187	0.012615	0.041216	0.019435
1Q Jul 2014	0.107150	0.090694	-0.007422	0.042242	0.012762	0.099993	0.044529
2Q Jul 2014	0.039181	0.079395	0.007615	0.074629	0.012167	0.016643	0.003789
1Q Ago 2014	0.112217	0.077439	0.139633	0.057635	0.016011	-0.085034	0.015556
2Q Ago 2014	0.060430	0.158956	0.022501	0.157657	0.014718	0.014309	-0.006258
1Q Sep 2014	0.182207	0.142368	0.082317	0.109488	0.015973	-0.030081	0.032615
2Q Sep 2014	0.021598	-0.006189	0.035683	-0.011255	0.022943	-0.037164	0.004076
1Q Oct 2014	0.088160	0.409029	0.026291	-0.011631	0.010917	0.050952	0.419974
2Q Oct 2014	0.055441	0.039614	0.028400	0.053363	0.011519	0.015523	-0.017440
1Q Nov 2014	0.095139	0.641366	0.044020	0.085093	0.016402	0.034717	0.553194
2Q Nov 2014	-0.000963	0.045439	-0.032437	0.072081	0.016057	0.015414	-0.031409
1Q Dic 2014	0.157718	0.256710	0.068605	0.226557	0.017827	0.071286	0.029063
2Q Dic 2014	0.035224	0.071275	0.022348	0.087145	0.013670	-0.000794	-0.020388
1Q Ene 2015	-0.068953	-0.118066	0.072036	-0.147481	0.019481	-0.171857	0.002990
2Q Ene 2015	0.053286	0.032376	-0.017674	0.060809	0.020435	0.029537	-0.042362
1Q Feb 2015	0.210080	-0.105150	0.124571	-0.092203	0.017718	0.060795	-0.016033
2Q Feb 2015	0.037819	0.045797	-0.006534	-0.041262	0.017637	0.023695	0.067527
1Q Mar 2015	0.110987	0.068501	0.045239	-0.013070	0.013815	0.050607	0.081164
2Q Mar 2015	0.134929	0.235853	0.015856	0.204447	0.018505	0.100568	0.029498
1Q Abr 2015	0.019353	-0.470836	0.080882	-0.050825	0.019346	-0.081691	-0.420793
2Q Abr 2015	0.060952	-0.042716	0.013036	-0.053438	0.014906	0.032176	0.006502
1Q May 2015	0.025625	-0.555657	0.008156	-0.081332	0.010918	0.005650	-0.474650
2Q May 2015	0.063029	-0.020875	0.025828	-0.041820	0.015751	0.018665	0.019975
1Q Jun 2015	0.095492	0.036951	0.061490	0.023024	0.015357	0.016994	0.011232
2Q Jun 2015	0.063486	-0.035818	-0.004125	-0.049564	0.015117	0.050353	0.009870
1Q Jul 2015	0.075201	0.019032	-0.018007	0.021953	0.011932	0.077157	-0.000332
2Q Jul 2015	0.048469	0.029959	0.001746	0.023168	0.014479	0.028249	0.003442
1Q Ago 2015	0.092491	0.022623	0.095029	-0.012762	0.012989	-0.065013	0.015016
2Q Ago 2015	0.071801	0.040051	0.044042	0.045144	0.014798	0.007235	-0.010624
1Q Sep 2015	0.206340	0.114126	0.117054	0.091139	0.013346	-0.030694	0.005201
2Q Sep 2015	0.079102	-0.082773	0.066452	-0.061944	0.012907	-0.001348	-0.021580
1Q Oct 2015	0.118656	0.343672	0.069767	0.000305	0.006706	0.042184	0.331823

2Q Oct 2015	0.065700	0.042796	0.037034	0.069253	0.014670	0.013988	-0.029372
1Q Nov 2015	0.001559	0.519223	0.041098	0.026494	0.017540	-0.057079	0.488779
2Q Nov 2015	-0.015349	-0.042652	0.008903	-0.041457	0.016563	-0.040815	-0.002333
1Q Dic 2015	0.205077	0.052195	0.055067	0.096672	0.018280	0.131534	-0.046615
2Q Dic 2015	0.066922	0.289256	0.027738	0.279631	0.013642	0.025542	0.010417
1Q Ene 2016	0.058829	-0.032190	0.066272	0.022091	0.023726	-0.048357	-0.100897
2Q Ene 2016	0.106062	0.247752	0.016937	0.183850	0.028940	0.046268	0.037018
1Q Feb 2016	0.169919	0.115587	0.133253	0.136319	0.018717	0.013913	-0.026420
2Q Feb 2016	0.092775	-0.142289	0.049817	-0.113781	0.020321	0.021504	-0.031167
1Q Mar 2016	0.226156	-0.129696	0.077697	-0.099345	0.022966	0.125480	-0.030564
2Q Mar 2016	-0.006378	0.157137	0.030650	0.116281	0.020041	-0.057069	0.037079
1Q Abr 2016	0.110742	-0.455466	0.084251	-0.116626	0.018216	0.007716	-0.303568
2Q Abr 2016	0.117340	-0.210349	0.087868	-0.152273	0.016420	0.012352	0.003104
1Q May 2016	0.062748	-0.546174	0.025605	-0.026702	0.019414	0.017239	-0.520755
2Q May 2016	0.081412	0.085876	0.039121	0.059244	0.016159	0.022614	0.025072
1Q Jun 2016	0.123962	-0.100915	0.071764	-0.144203	0.021299	0.028993	0.041125
2Q Jun 2016	0.058364	-0.050265	0.007602	-0.041522	0.014755	0.032555	-0.012167
1Q Jul 2016	0.087476	0.190192	-0.002436	-0.020544	0.024087	0.059800	0.107658
2Q Jul 2016	0.027320	-0.068675	0.021507	-0.062281	0.012661	-0.009451	-0.006901
1Q Ago 2016	0.100024	0.213917	0.094441	0.006809	0.013778	-0.051979	0.203697
2Q Ago 2016	0.061601	-0.084917	0.061299	0.113620	0.014866	-0.023187	-0.198740
1Q Sep 2016	0.275901	0.262297	0.147355	0.222479	0.009482	0.001077	0.038718
2Q Sep 2016	0.112116	0.055400	0.101163	0.018190	0.021172	-0.010527	0.028604
1Q Oct 2016	0.126066	0.367203	0.071566	-0.013635	0.016921	0.037579	0.376388
2Q Oct 2016	0.060928	-0.003023	0.039181	0.000430	0.011204	0.010543	-0.004460
1Q Nov 2016	0.176174	0.595962	0.073532	0.063661	0.015761	0.086880	0.530536
2Q Nov 2016	-0.072228	0.034149	-0.097674	0.010409	0.021279	0.004167	0.016665
1Q Dic 2016	0.352605	0.063088	0.126505	0.043811	0.020143	0.205956	0.011913
2Q Dic 2016	0.040170	0.088125	0.085086	0.084885	0.015783	-0.060699	0.001492
1Q Ene 2017	0.276431	1.236763	0.200979	-0.097628	0.026426	0.031850	1.239525
2Q Ene 2017	0.275662	-0.036402	0.154587	-0.056737	0.035874	0.067469	0.000985
1Q Feb 2017	0.345511	-0.011306	0.237372	-0.079213	0.027568	0.072273	0.040793
2Q Feb 2017	0.172394	0.074579	0.131235	0.040750	0.024666	0.016419	0.022318
1Q Mar 2017	0.233413	0.117696	0.151578	0.128588	0.023532	0.057702	-0.024362
2Q Mar 2017	0.215546	0.060213	0.102818	0.102862	0.016623	0.096104	-0.046783
1Q Abr 2017	0.197455	-0.348376	0.116043	0.049052	0.015126	0.066261	-0.415104
2Q Abr 2017	0.061420	0.211444	0.084376	0.146978	0.020417	-0.044324	0.031779
1Q May 2017	0.113423	-0.450782	0.089497	0.022269	0.013638	0.008711	-0.554355
2Q May 2017	0.124390	0.040344	0.070908	0.036652	0.025758	0.026156	0.003475
1Q Jun 2017	0.128673	0.022970	0.062421	0.002992	0.015604	0.049197	0.018154
2Q Jun 2017	0.076092	-0.041831	0.026013	0.038371	0.018233	0.029274	-0.085836
1Q Jul 2017	0.139456	0.095460	0.013226	0.116974	0.017142	0.105459	-0.028125
2Q Jul 2017	0.048228	0.203700	0.029803	0.204353	0.016545	-0.001198	-0.009335
1Q Ago 2017	0.149371	0.159317	0.141959	0.085524	0.017427	-0.064409	0.059648
2Q Ago 2017	0.034457	0.082785	0.016837	0.028149	0.022551	-0.021049	0.044123
1Q Sep 2017	0.208108	0.132753	0.086909	0.027107	0.011513	-0.007798	0.103589
2Q Sep 2017	-0.027266	-0.145390	0.039785	-0.094410	0.013369	-0.080420	0.082981
1Q Oct 2017	0.155821	0.462984	0.046258	-0.149694	0.017456	0.091804	0.435687
2Q Oct 2017	0.094178	0.099535	0.018527	0.020693	0.019941	0.055709	0.078677
1Q Nov 2017	0.208748	0.706523	0.113382	0.104332	0.015957	0.079410	0.593859
2Q Nov 2017	0.002564	0.033070	-0.011369	-0.005110	0.020932	-0.006999	0.037331
1Q Dic 2017	0.315429	0.119626	0.093593	0.056369	0.012657	0.209179	0.047820
2Q Dic 2017	-0.011546	0.287509	0.047639	0.242028	0.016864	-0.076049	0.033090
1Q Ene 2018	0.125024	0.112798	0.143678	-0.099909	0.023565	-0.052306	0.181914
2Q Ene 2018	0.180944	0.128436	0.049822	-0.035730	0.027243	0.077167	0.128873
1Q Feb 2018	0.219600	-0.015025	0.130811	-0.121720	0.022502	0.057392	0.094954
2Q Feb 2018	0.100063	-0.056743	0.058806	-0.089495	0.018662	0.022312	0.027705
1Q Mar 2018	0.174267	0.120448	0.051100	0.052978	0.021447	0.101720	0.061406
2Q Mar 2018	0.039344	-0.026552	0.014403	0.055522	0.021055	0.003885	-0.085248
1Q Abr 2018	0.052221	-0.397789	0.094676	-0.043547	0.017026	-0.059767	-0.360654
2Q Abr 2018	0.074362	-0.071448	0.025751	-0.062862	0.019567	0.028543	-0.016037
1Q May 2018	0.094746	-0.385796	0.021596	-0.065256	0.016119	0.056223	-0.322979
2Q May 2018	0.118609	0.136942	0.077567	-0.010267	0.021066	0.017959	0.148363
1Q Jun 2018	0.059389	0.075331	-0.001655	-0.066112	0.016776	0.043116	0.140123
2Q Jun 2018	0.107999	0.138371	0.015775	0.081562	0.029947	0.060794	0.053620
1Q Jul 2018	0.140531	0.180990	0.065054	0.103817	0.013426	0.057874	0.074291
2Q Jul 2018	0.038282	0.143151	0.010314	0.067628	0.016338	0.010430	0.075944
1Q Ago 2018	0.132386	0.210792	0.117267	0.091231	0.007339	-0.040810	0.112932
2Q Ago 2018	0.067639	0.228700	0.056175	0.131340	0.019953	-0.014305	0.088889
1Q Sep 2018	0.142233	0.080428	0.083792	-0.037710	0.017245	-0.030122	0.117994
2Q Sep 2018	0.134915	-0.031024	0.074022	-0.099248	0.014932	0.045551	0.065137
1Q Oct 2018	0.127629	0.270580	0.054165	-0.050287	0.011316	0.062148	0.316762
2Q Oct 2018	0.076344	0.059414	0.004808	0.055557	0.012239	0.059298	0.000668
1Q Nov 2018	0.144116	0.469603	0.092704	0.142460	0.019002	0.032410	0.324980
2Q Nov 2018	0.013312	0.320450	0.015691	0.361793	0.017264	-0.019643	-0.042441
1Q Dic 2018	0.314416	0.247222	0.108554	0.270418	0.014425	0.191437	-0.025905
2Q Dic 2018	0.053666	-0.108711	0.029143	-0.064530	0.013083	0.011439	-0.053052
1Q Ene 2019	0.060889	0.048812	0.083816	0.136938	0.019286	-0.049900	-0.124503
2Q Ene 2019	0.121236	-0.114563	0.040069	-0.133543	0.020981	0.044026	-0.010041
1Q Feb 2019	0.190914	-0.290795	0.130764	-0.297586	0.019331	0.027492	-0.001356
2Q Feb 2019	0.140986	-0.004245	0.081017	-0.192906	0.024932	0.033853	0.185586
1Q Mar 2019	0.134100	0.123449	0.073514	0.006997	0.020264	0.040295	0.114070
2Q Mar 2019	0.106346	0.011108	0.038302	0.040345	0.025219	0.042825	-0.039658
1Q Abr 2019	0.296876	-0.331617	0.108532	-0.019550	0.025476	0.162578	-0.316221
2Q Abr 2019	-0.018198	0.076920	0.027496	0.106333	0.017928	-0.063945	-0.034500
1Q May 2019	0.068943	-0.369534	0.049190	0.022008	0.022385	-0.004086	-0.397336
2Q May 2019	0.127222	-0.160702	0.098551	-0.115914	0.018002	0.009709	-0.046778
1Q Jun 2019	0.124671	-0.115821	0.040308	-0.044841	0.019071	0.064570	-0.074919
2Q Jun 2019	0.082079	0.061572	0.002421	0.168666	0.021281	0.056805	-0.109089
1Q Jul 2019	0.126937	0.144950	0.028996	0.119340	0.012499	0.081993	0.019417
2Q Jul 2019	0.057000	0.006686	0.057736	0.003409	0.021760	-0.025041	-0.014138
1Q Ago 2019	0.085940	-0.161562	0.059158	-0.149698	0.016320	-0.024872	-0.022332

2Q Ago 2019	0.078590	-0.025075	0.062616	-0.015786	0.012086	-0.010470	-0.013137
1Q Sep 2019	0.141725	0.031429	0.084703	0.001837	0.016946	-0.030706	0.026870
2Q Sep 2019	0.089477	0.036278	0.070975	0.007036	0.017161	0.001078	0.022037
1Q Oct 2019	0.097420	0.299059	0.048603	-0.007120	0.013652	0.035165	0.297086
2Q Oct 2019	0.088416	0.071572	0.033943	0.029379	0.016127	0.038346	0.017992
1Q Nov 2019	0.119317	0.561699	0.043255	0.151080	0.009976	0.066086	0.404736
2Q Nov 2019	0.007700	0.081783	-0.026279	0.044614	0.015436	0.018544	0.038506
1Q Dic 2019	0.273835	0.076540	0.098407	0.031042	0.023044	0.152384	0.041627
2Q Dic 2019	0.061133	0.262194	0.034885	0.258923	0.008570	0.017677	-0.002388
1Q Ene 2020	0.152441	0.114569	0.201329	0.068968	0.022380	-0.078689	-0.003819
2Q Ene 2020	0.122770	-0.011761	0.076723	-0.014431	0.024505	0.006692	-0.007858
1Q Feb 2020	0.162028	-0.039921	0.094402	0.014582	0.022606	0.036917	-0.061508
2Q Feb 2020	0.098473	0.375144	0.042574	0.353639	0.018085	0.034409	0.014648
1Q Mar 2020	0.116422	-0.011173	0.075121	-0.009191	0.023696	0.017606	-0.008205
2Q Mar 2020	0.107691	-0.882944	0.082442	-0.055533	0.020265	0.004984	-0.836792
1Q Abr 2020	0.151449	-0.872249	0.157493	-0.085096	0.022790	-0.028834	-0.787672
2Q Abr 2020	0.131167	0.057321	0.101399	0.053820	0.007345	0.022422	0.003326
1Q May 2020	0.184756	0.110273	0.141731	0.265137	0.005657	0.037368	-0.174238
2Q May 2020	-0.045687	0.037639	-0.014985	-0.290865	0.006271	-0.036973	0.362063
1Q Jun 2020	0.224477	0.092453	0.170728	-0.099995	0.003017	0.050732	0.189957
2Q Jun 2020	0.156368	0.309268	0.154377	0.032217	0.009379	-0.007514	0.275857
1Q Jul 2020	0.187659	0.167492	0.145435	-0.028241	0.009484	0.032470	0.190202
2Q Jul 2020	0.069151	0.067485	0.061952	0.017308	0.006345	0.000245	0.043933
1Q Ago 2020	0.136687	0.105157	0.104395	0.079686	0.010659	0.022689	-0.000484
2Q Ago 2020	0.137170	0.029091	0.100203	0.010587	0.009501	0.023253	0.013655
1Q Sep 2020	0.125055	0.037382	0.064295	0.017889	0.007966	0.012062	0.006734
2Q Sep 2020	0.090483	-0.122687	0.105431	-0.038106	0.011186	-0.026133	-0.088695
1Q Oct 2020	0.109738	0.435464	0.049812	0.095558	0.006672	0.054905	0.340879
2Q Oct 2020	0.052790	0.109252	0.028930	0.155796	0.012112	0.011747	-0.045389
1Q Nov 2020	-0.080598	0.124078	-0.117580	-0.101621	0.008913	0.028069	0.224314
2Q Nov 2020	-0.018671	-0.080938	-0.037580	-0.037593	0.013138	0.005771	-0.041070
1Q Dic 2020	0.393404	-0.056657	0.307419	-0.115567	0.010678	0.075307	0.059332
2Q Dic 2020	0.057886	0.131259	0.034435	-0.009754	0.008832	0.014619	0.138292
1Q Ene 2021	0.177806	0.335886	0.155753	0.032714	0.015926	0.005902	0.283440
2Q Ene 2021	0.127790	0.370759	0.092445	0.057269	0.017385	0.026381	0.304720
1Q Feb 2021	0.164049	0.063814	0.118456	-0.072362	0.013732	0.026539	0.130663
2Q Feb 2021	0.135290	0.174674	0.082085	0.042091	0.014777	0.037912	0.134327
1Q Mar 2021	0.259155	0.270758	0.160436	0.079382	0.019199	0.079505	0.185859
2Q Mar 2021	0.152809	0.127973	0.071211	0.063449	0.014433	0.067165	0.064193
1Q Abr 2021	0.134960	-0.071668	0.112905	0.167147	0.012664	0.009376	-0.245224
2Q Abr 2021	0.126764	0.119474	0.054554	0.146421	0.013378	0.058833	-0.028476
1Q May 2021	0.246002	-0.252343	0.166591	0.128712	0.017339	0.061876	-0.383114
2Q May 2021	0.166224	0.008623	0.102964	0.004533	0.013810	0.049728	0.001031
1Q Jun 2021	0.265866	0.077021	0.166870	0.014098	0.010939	0.087317	0.058380
2Q Jun 2021	0.157154	0.045986	0.080592	-0.022488	0.019173	0.056519	0.068819
1Q Jul 2021	0.230035	0.136658	0.146154	0.035115	0.015118	0.068117	0.101355
2Q Jul 2021	0.095921	0.142187	0.085004	0.111430	0.014890	-0.008660	0.025071
1Q Ago 2021	0.209466	-0.230366	0.187166	0.128609	0.014181	-0.009783	-0.361379
2Q Ago 2021	0.124761	0.059255	0.098558	0.060545	0.015248	0.001137	-0.004194
1Q Sep 2021	0.231786	0.188473	0.172881	0.101246	0.017179	0.000999	0.077880
2Q Sep 2021	0.099057	0.108742	0.097051	0.040773	0.012679	-0.010768	0.066471
1Q Oct 2021	0.246407	0.294202	0.148379	-0.073201	0.017721	0.080306	0.366742
2Q Oct 2021	0.148547	0.233639	0.083151	0.144784	0.017336	0.048060	0.089255
1Q Nov 2021	0.114946	0.578093	0.027826	0.240397	0.017358	0.069762	0.334870
2Q Nov 2021	0.170531	0.344417	0.110641	0.359548	0.016567	0.043323	-0.016516
1Q Dic 2021	0.435250	-0.335236	0.237566	-0.131718	0.017786	0.179898	-0.213225
2Q Dic 2021	0.148149	-0.137219	0.137345	-0.111380	0.010636	0.000168	-0.031197
1Q Ene 2022	0.254982	0.133459	0.248352	0.061667	0.019677	-0.024753	0.039405
2Q Ene 2022	0.258028	0.135948	0.153803	0.019336	0.026158	0.065135	0.103553
1Q Feb 2022	0.316940	0.104959	0.225607	-0.010809	0.022416	0.058666	0.097125
2Q Feb 2022	0.237724	0.180288	0.165569	0.118023	0.015909	0.056241	0.052925
1Q Mar 2022	0.264134	0.218891	0.194542	0.026653	0.016868	0.052706	0.184599
2Q Mar 2022	0.297257	0.294270	0.185924	0.106053	0.015243	0.096091	0.186753
1Q Abr 2022	0.328557	-0.171230	0.218655	0.074054	0.013765	0.096137	-0.249109
2Q Abr 2022	0.198589	-0.022430	0.198387	-0.018039	0.018106	-0.017905	-0.003158
1Q May 2022	0.229041	-0.293399	0.142725	0.053182	0.019947	0.066186	-0.350770
2Q May 2022	0.218340	0.086418	0.166899	0.087695	0.024807	0.022869	-0.003415
1Q Jun 2022	0.370126	0.123063	0.257488	0.097361	0.022732	0.088974	0.017234
2Q Jun 2022	0.191031	0.204004	0.128249	0.118075	0.018069	0.044499	0.038543
1Q Jul 2022	0.255485	0.172910	0.152489	0.141217	0.017037	0.085320	0.026932
2Q Jul 2022	0.225740	0.001098	0.151651	-0.022395	0.022819	0.048124	0.010508
1Q Ago 2022	0.363930	0.055210	0.290454	0.051708	0.019884	0.020904	-0.000346
2Q Ago 2022	0.236701	0.085439	0.189460	0.144813	0.018466	0.022398	-0.070015
1Q Sep 2022	0.326624	0.081290	0.204818	0.100825	0.013196	0.041809	-0.023586
2Q Sep 2022	0.111902	-0.009138	0.162237	0.005822	0.022652	-0.072986	-0.021661
1Q Oct 2022	0.317533	0.120689	0.215887	-0.054516	0.011553	0.090092	0.173299
2Q Oct 2022	0.190766	-0.039546	0.120216	-0.018918	0.014717	0.055833	-0.026743
1Q Nov 2022	0.257776	0.299182	0.142611	-0.043210	0.011577	0.103588	0.335816
2Q Nov 2022	-0.029933	-0.083942	-0.051705	0.008246	0.018402	0.003370	-0.093928
1Q Dic 2022	0.426259	-0.035832	0.254725	0.038906	0.020470	0.151064	-0.078866
2Q Dic 2022	0.142703	-0.046636	0.148563	0.029344	0.017464	-0.023325	-0.082134
1Q Ene 2023	0.329570	0.127012	0.227188	0.040467	0.041288	0.049477	0.051900
2Q Ene 2023	0.267302	0.078639	0.141062	0.007306	0.029450	0.085463	0.049244
1Q Feb 2023	0.264100	0.038239	0.163942	-0.027655	0.020767	0.059133	0.049338
2Q Feb 2023	0.118926	0.044508	0.065722	0.031921	0.024936	0.025079	-0.008617
1Q Mar 2023	0.225520	-0.077497	0.105808	-0.053415	0.020681	0.099032	-0.040011
2Q Mar 2023	0.215080	-0.139649	0.089980	-0.077150	0.024305	0.100795	-0.066764
1Q Abr 2023	0.138658	-0.301204	0.128842	-0.007682	0.024236	-0.014420	-0.307631
2Q Abr 2023	0.088903	0.121159	0.061649	0.092505	0.020635	0.006619	0.020443
1Q May 2023	0.136383	-0.454047	0.071935	-0.059461	0.021819	0.041480	-0.402840
2Q May 2023	0.126840	-0.135777	0.083996	-0.050553	0.018794	0.022074	-0.085971
1Q Jun 2023	0.086421	-0.062396	0.034075	-0.027566	0.022457	0.029722	-0.039505

2Q Jun 2023	0.156256	0.007825	0.081254	0.051859	0.019425	0.054202	-0.045364
-------------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------

\* Las medidas de incidencia están en puntos porcentuales. Datos tomados del Banco de Información Económica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía: [https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56\\_2018&idrt=137&opc=t](https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56_2018&idrt=137&opc=t)

Tabla D.3: Datos mensuales de México sobre la contribución porcentual del INPC y sus componentes sobre la inflación general, 2013-2022

Año/Mes	INPC*	Importaciones (FOB)**	Exportaciones (FOB)**	Tasa de Desempleo***
2012/01	78.343049	27548.995	27281.577	4.652456
2012/02	78.502314	29517.163	30015.345	5.331331
2012/03	78.547389	30839.530	32312.046	5.100135
2012/04	78.300980	30481.741	30900.421	4.877914
2012/05	78.053819	32801.858	33135.477	4.872353
2012/06	78.413667	29657.623	30272.703	4.850871
2012/07	78.853897	30704.050	30294.406	4.753963
2012/08	79.090540	32641.949	31660.136	4.953229
2012/09	79.439119	29069.597	29279.642	4.699963
2012/10	79.841036	35564.836	33939.839	4.896369
2012/11	80.383437	32716.357	31468.922	5.216650
2012/12	80.568243	29207.860	30209.376	4.934098
2013/01	80.892782	30152.955	27298.537	5.144275
2013/02	81.290943	29066.034	29091.473	4.872142
2013/03	81.887433	30127.821	31838.072	5.044325
2013/04	81.941523	34087.541	32729.138	5.109917
2013/05	81.668820	33305.574	32845.282	4.966475
2013/06	81.619238	30168.158	31088.267	5.081550
2013/07	81.592193	33651.211	32252.174	4.918812
2013/08	81.824328	32902.205	32677.304	4.837648
2013/09	82.132340	30726.402	31377.763	5.004361
2013/10	82.522988	35217.067	35082.425	4.918111
2013/11	83.292265	31363.977	31673.409	4.622533
2013/12	83.770058	30441.223	32061.207	4.739155
2014/01	84.519052	30233.531	27052.385	4.895053
2014/02	84.733157	29543.472	30461.527	4.768073
2014/03	84.965292	32287.360	33245.192	5.288706
2014/04	84.806779	33561.872	34059.950	4.910947
2014/05	84.535579	34251.128	34373.788	4.959952
2014/06	84.682072	33050.550	33436.311	4.835280
2014/07	84.914959	34690.783	33687.101	5.229521
2014/08	85.219965	34483.635	33286.822	4.850225
2014/09	85.596340	33667.444	34147.311	4.795492
2014/10	86.069626	36945.105	36879.601	4.657314
2014/11	86.763778	33407.006	32192.734	4.665628
2014/12	87.188984	33862.450	34090.910	4.142405
2015/01	87.110103	29817.479	26553.377	4.378388
2015/02	87.275377	29125.930	29731.307	4.440329
2015/03	87.630717	33666.222	34177.473	4.256160
2015/04	87.403840	33041.330	32971.490	4.337561
2015/05	86.967366	32359.172	31244.705	4.425659
2015/06	87.113108	34590.363	33761.831	4.416656
2015/07	87.240820	35073.020	32694.944	4.494111
2015/08	87.424875	33831.912	31009.789	4.388654
2015/09	87.752419	33663.061	32187.182	4.195074
2015/10	88.203919	35600.923	34100.594	4.436704
2015/11	88.685468	32595.256	30981.322	4.067927
2015/12	89.046818	31889.184	31142.075	4.294966
2016/01	89.386381	27979.044	24687.865	4.160010
2016/02	89.777781	29751.151	28967.000	4.268925
2016/03	89.910001	31408.485	31493.610	4.135232
2016/04	89.625278	32497.219	30387.276	3.810670
2016/05	89.225615	31854.210	31410.821	3.992825
2016/06	89.324028	32467.942	31949.905	3.920338
2016/07	89.556914	31599.262	29773.010	3.809894
2016/08	89.809333	34332.060	32446.304	3.761704
2016/09	90.357744	34229.627	32701.172	3.842967
2016/10	90.906154	33495.421	32596.379	3.580676
2016/11	91.616834	34267.067	34344.613	3.594539
2016/12	92.039035	33206.048	33195.659	3.624965
2017/01	93.603882	30788.434	27316.175	3.530855
2017/02	94.144780	30586.757	31345.973	3.453581
2017/03	94.722489	36110.316	36048.426	3.540559
2017/04	94.838933	30869.680	31768.954	3.467456
2017/05	94.725494	36546.951	35342.342	3.543744
2017/06	94.963640	35548.917	35547.887	3.281095
2017/07	95.322736	33687.183	32155.156	3.255231
2017/08	95.793768	38513.130	35926.907	3.331458
2017/09	96.093515	35706.801	33771.318	3.339581
2017/10	96.698269	38969.493	36715.630	3.442944
2017/11	97.695174	37082.913	37507.573	3.503509
2017/12	98.272883	35984.012	35986.234	3.352211
2018/01	98.795000	35140.478	30718.527	3.287718
2018/02	99.171374	34149.860	35093.793	3.286959

2018/03	99.492157	37734.615	39484.266	3.273589
2018/04	99.154847	37471.965	37181.694	3.381560
2018/05	98.994080	40766.241	39213.912	3.240954
2018/06	99.376465	38383.337	37483.508	3.366752
2018/07	99.909099	39612.118	36742.212	3.295254
2018/08	100.492000	42129.496	39545.208	3.269958
2018/09	100.917000	38001.683	37700.602	3.332216
2018/10	101.440000	44290.891	41356.070	3.203595
2018/11	102.303000	40928.716	38595.389	3.347126
2018/12	103.020000	35692.967	37597.547	3.568626
2019/01	103.108000	37262.788	32637.220	3.465048
2019/02	103.079000	35073.897	36437.807	3.409518
2019/03	103.476000	37530.886	39018.828	3.629953
2019/04	103.531000	38076.401	39586.470	3.488390
2019/05	103.233000	40792.860	41749.996	3.549229
2019/06	103.299000	35382.744	37924.986	3.553120
2019/07	103.687000	40406.335	39115.793	3.526147
2019/08	103.670000	39648.433	40051.141	3.482862
2019/09	103.942000	37332.184	37180.583	3.519028
2019/10	104.503000	41449.532	40762.123	3.617987
2019/11	105.346000	36697.660	37484.491	3.539373
2019/12	105.934000	35587.869	38654.441	3.087803
2020/01	106.447000	36062.000	33580.843	3.661282
2020/02	106.889000	33715.379	36433.717	3.652479
2020/03	106.838000	34995.932	38310.269	3.310319
2020/04	105.755000	26457.052	23222.658	4.680252
2020/05	106.162000	21578.337	18116.042	4.261330
2020/06	106.743000	27512.168	33047.725	5.487693
2020/07	107.444000	29844.448	35499.490	5.000949
2020/08	107.867000	30845.723	37001.121	4.904372
2020/09	108.114000	34142.602	38539.740	4.790607
2020/10	108.774000	35694.810	41950.815	4.583938
2020/11	108.856000	35257.525	38313.680	4.531450
2020/12	109.271000	36879.948	43154.635	4.045227
2021/01	110.210000	33910.702	32716.018	4.549097
2021/02	110.907000	33486.199	36213.207	4.534263
2021/03	111.824000	45974.454	43029.980	4.461093
2021/04	112.190000	39259.650	40944.531	4.667942
2021/05	112.419000	40458.684	40845.600	4.051187
2021/06	113.018000	41909.429	42619.373	4.028143
2021/07	113.682000	44950.628	40952.956	4.060451
2021/08	113.899000	44215.640	40471.381	4.006320
2021/09	114.601000	44078.456	41754.363	3.914113
2021/10	115.561000	44658.126	41858.778	3.828215
2021/11	116.884000	45698.670	45676.662	3.837585
2021/12	117.308000	47102.458	47866.480	3.767730
2022/01	118.002000	40185.365	33923.041	3.585565
2022/02	118.981000	44953.077	46288.481	3.852951
2022/03	120.159000	51801.683	51948.842	3.447514
2022/04	120.809000	49363.532	47580.499	3.054394
2022/05	121.022000	52220.452	49964.769	3.301356
2022/06	122.044000	55191.302	51220.139	3.369811
2022/07	122.948000	52463.962	46216.526	3.159747
2022/08	123.803000	56168.196	50464.229	3.257713
2022/09	124.571000	53233.431	52323.438	3.123571
2022/10	125.276000	51287.150	49199.060	3.184354
2022/11	125.997000	49407.417	49284.376	2.984986
2022/12	126.478000	48339.024	49321.996	2.975359
2023/01	127.336000	46715.744	42609.734	2.908615
2023/02	128.046000	46778.476	44889.815	2.798632
2023/03	128.389000	52388.861	53584.091	2.791485
2023/04	128.363000	47732.749	46224.226	2.848430
2023/05	128.084000	52934.500	52860.415	2.948670
2023/06	128.214000	51762.018	51800.210	2.670944
2023/07	128.832000	48431.638	47550.443	2.872213

\* Datos tomados del Instituto Nacional de Estadística y Geografía:  
[https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56\\_2018&idrt=137&opc=t](https://www.inegi.org.mx/app/tabulados/default.aspx?nc=ca56_2018&idrt=137&opc=t)  
\*\* Millones de dólares.

# Bibliografía

- ANTEZANA, J. Y STOJANOFF, D. (2009). *Cursos y Seminarios de Matemática. Análisis Matricial*. Buenos Aires, Argentina: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, fascículo 3, serie b ed. URL <http://cms.dm.uba.ar/depto/public/fasc3.pdf>.
- CASTI, J. (1987). *Linear Dynamical Systems*. Orlando, United States: Academic Press, Inc.
- ECKART, C. Y YOUNG, G. (1936). The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika* **1**(3), 211–218.
- GOLUB, G. H., HOFFMAN, A. Y STEWART, G. W. (1987). A Generalization of the Eckart-Young-Mirsky Matriz Approximation Theorem. *Q'ESTIIÓ* **88–89**(C), 317–327.
- GONZÁLEZ, C. J. Y VALDERRAMA, B. M. (1998). Un procedimiento para obtener clusters utilizando la D.V.S de una matriz. Comparaciones con el Biplot y con el modelo Q-Factorial. *Q'ESTIIÓ* **22**(1), 39–68.
- HOFFMAN, K. Y KUNZE, R. (1971). *Linear Algebra*. United States of America: Prentice-Hall, 2da ed.
- LAY, D. C., LAY, S. R. Y McDONALD, J. J. (2016). *Linear Algebra and its Applications*. Pearson, 5 ed.
- MIRSKY, L. (1960). Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. *The Quarterly Journal of Mathematics* **11**(1), 50–59.
- RANGEL G., A. (2019). *La teoría de la realización como método de proyección de los coeficientes técnicos de la matriz insumo-producto: desarrollo teórico y un ejemplo de implementación para el caso de México, 1993-2017*. Tesis de Maestría, Posgrado de la Facultad de Economía, Universidad Nacional Autónoma de México.