Capítulo 1

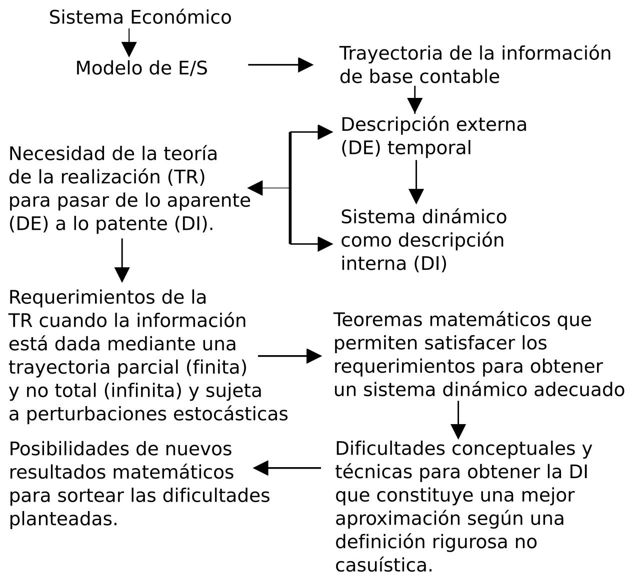
Realización de sistemas lineales, invariantes y finitos no identificados

En este capítulo se explica el proceso de realización empleando la aplicación hecha en **?**. Inicialmente se pormenoriza el modelo usado, el cual representa un subsistema económico dinámico (que se concibió como lineal e invariante), en este caso de base contable. Posteriormente se elucida cómo aplicar la TR a las trayectorias de matrices aleatorias (sucesión de matrices aleatorias), generadas por dicho subsistema, así como sus limitaciones, tanto teóricas, operativas y prácticas. Así mismo, se revisa la noción de cambio estructural en el texto, y se desarrolla un conjunto de mejoras para corregir sus limitaciones, entre ellas la incorporación de mecanismos de control.

Con este ejemplo, se muestra cómo es posible introducir la trayectoria temporal observable de un (sub)sistema económico dentro del proceso de realización, dejando claro que esto requiere especificar al sistema en forma de entrada-salida. Además, se exponen críticamente los planteamientos de la TR en cuanto a su tratamiento de la aleatoriedad, agrupamiento de datos y determinación del cambio estructural, donde se incorpora una revisión crítica de los procesos de optimización, medición y determinación de la bondad de ajuste.

Por otro lado, se brindan algunas ideas sobre cómo, a partir de la realización, se puede habilitar el análisis de la propagación de estimulos en el sistema, para despues hablar un poco del control de sistema subyacente, en cuanto a su estructura.

Figura 1.1: Flujo temático en **?**



1.1. Sistema macroeconómico de determinación del ingreso y la teoría de la realización

El sistema de base contable que se emplea en **?** es extremadamente simple, pero tiene algunas características relevantes desde el punto de vista conjunto que representan los adjetivos dinámico, estructural y complejo.

Las relaciones del sistema son aquellas que sostienen, agrupados en dos sectores, los agentes residentes **r** (o internos) y los agentes no residentes **nr** (o externos). Estas relaciones se manifiestan en flujos corrientes, medidos en precios por cantidades y durante cada trimestre. Las transacciones entre ambos sectores se compilan en el siguiente cuadro que satisface los criterios contables del fluir de fondos, del primer principio de Say y de la ley de Walras.

Figura 1.2: Criterios contables de flujo de fondos

	r	**nr**	Ac.	Total
r	C_t	X_t	F_t	Y_t
nr	MC_t	0	MK_t	M_t
Ah.	Sr_t	Sn_t	0	S_t
	Y_t	M_t	I_t	

donde C_t es el consumo de mercancías intermedias; X_t exportaciones; F_t formación bruta de capital; Y_t ingreso interno bruto; MC_t consumo intermedio y final de mercancías importadas; MK_t formación bruta de capital de mercancías importadas; M_t importaciones, Sr_t ahorro de los residentes; Sn_t ahorro de los no residentes; S_t ahorro; e I_t inversión; el subíndice t indica el tiempo en que fue hecha la medición respectiva.

Las dos primeras filas del cuadro son las identidades:

$$\begin{aligned} Y_t &\equiv C_t + X_t + F_t \\ M_t &\equiv MC_t + MK_t \end{aligned}$$

que originan la identidad macroeconómica

$$S_t \equiv I_t$$

con la cuál es posible plantear la siguiente igualdad

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & X_t \\ MC_t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

Así, a partir de (**??**), se construye el siguiente modelo entrada-salida

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$$

Es más, podemos expresar esta igualdad como

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} |A| &= det \begin{pmatrix} 1 - c_t & -x_t \\ -m_t & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 - c_t - m_t x_t \end{aligned}$$

Este modelo cuenta con ciertas características sistémicas relevantes que se listan a continuación:

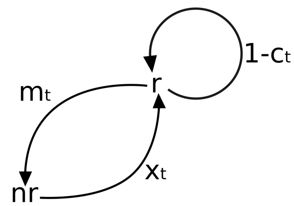
1. Interconecta en cada trimestre t a dos sectores **r** y **nr**, de forma tal que lo que se le vende a **nr** depende de lo que **nr** le compra a **n** y vice-versa;

2. La trayectoria de tres razones clave de las relaciones económicas internas y con el resto del mundo (o externas), son observables: c_t, la propensión marginal a consumir mercancías de consumo de producción interna; m_t, la propensión a importar mercancías para producir otras mercancías y para el consumo final; y x_t la razón del balance en cuenta corriente entre el ingreso por exportaciones y el gasto en importaciones;

3. Relaciona los flujos de entrada (o exógenos) de acumulación de capital $\begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix}$ con los de salida (o endógenos) mediante una descripción observable externa basada en $\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix}$, de periodicidad trimestral;

4. Goza de una correspondencia entre el grafo del modelo,

Figura 1.3: Grafo de intercambios entre residentes (r) y no residentes (nr)



y la matriz

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1-c_t \end{pmatrix}$$

que hace pensar que la retroalimentación entre **r** y **nr** hace emerger una representación que está determinada por una dinámica lineal del sistema subyacente.

El sistema que subyace a la sucesión de grafos, o de otra manera, a la sucesión de sus matrices, es el encargado de gestar la dinámica que existe en dichas sucesiones. Genera en cada tiempo una matriz que permite transformar entradas en salidas, es decir, produce en cada tiempo las condiciones de conversión de estimulos en respuestas.

El sistema tiene enlazado un conjunto de variables que lo identifican, asociadas a ciertos procesos clave. Ellas pueden resumir a todas las demás variables, en consonancia, resumen todos los procesos internos llevados a cabo por el sistema. Conociéndolas es posible saber el valor de las restantes en un tiempo dado. Es más, el sistema puede ser concebido como sinónimo de ellas; a las que aludiremos como **variables de estado**. Además, por circunstancias teórico-contables, la forma en que estas evolucionan se considera que cambia en proporción fija, por lo que el sistema se asume **invariante**.

No obstante, el sistema subyacente no abriga la posibilidad de ser identificado. No es posible establecer teórica o empíricamente reglas sobre su dinámica interna o, equivalentemente, no es posible determinar sus variables de estado, la interacción entre ellas y cómo es su evolución. Lo único con lo que se cuenta es con una **cantidad finita** de “fotografías externas” que condensan dicha operación, que en nuestro son 100 matrices definidas como

$$\mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1-c_t \end{pmatrix}$$

a las que nombraremos **Descripción Externa (DE)** del sistema, que en nuestro caso se forman trimestre a trimestre.

La Teoría de la Realización **TR** trata de identificar al sistema subyacente mediante la DE. Por consiguiente, su uso para la especificación del número de variables de estado, su interacción y evolución,[1] **no es un mecanismo de ajuste de datos como lo sería la econometría**; la TR identifica el sistema subyacente que los genera.

[1]La TR también se puede emplear en sistemas identificados, pero estos no son muy usuales en Economía, a diferencia de Física o Ingeniería.

La identificación del sistema invariante culmina al construir mediante la DE una terna de matrices (F, G, H), o **Descripción Interna DI**, independientes del tiempo, que puedan generar la DE; a esta construcción se le denominará **realización**. La matriz F identifica el número, interacción y evolución de las variables de estado. Por su parte, G es una matriz que codifica el estímulo, o entrada, en información legible para el sistema, mientras que H hace lo opuesto a G: decodifica el resultado de los procesos internos (y resumidos por F), generando una respuesta o salida legibles para el usuario. Así, por un lado tenemos que

$$HF^{t-1}G \approx \mathcal{W}_t = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1-c_t \end{pmatrix} \qquad t = 1, \ldots, 100$$

donde el símbolo de aproximación ($\approx$) se coloca ya que la DI no siempre será exacta.[2] Esto sustenta que la órbita[3] del sistema subyacente o DI, "empata" con la orbita observada del sistema, la DE. Además, mediante la construcción del sistema subyacente, en cada tiempo podemos analizar cualquier fase del siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccccccc} \underline{k} & \stackrel{*}{\to} & H & \stackrel{*}{\to} & FF\cdots F = F^{t-1} & \stackrel{*}{\to} & G & \stackrel{*}{\to} & \underline{y} \\ \text{Estimula} & & \text{Codifica} & & \text{Evoluciona} & & \text{Decodifica} & & \text{Responde} \end{array}$$

donde $\underline{k}_t = \begin{pmatrix} F_t & MK_t \end{pmatrix}^T$ e $\underline{y}_t = \begin{pmatrix} Y_t & M_t \end{pmatrix}^T$. Se está entonces ante la posibilidad de formular más interrogantes sobre el papel del modelo macroeconómico mediante las relaciones estáticas y dinámicas que existen entre $\mathcal{W}_t$ y (F, G, H), respecto a:

i) las conexiones registradas en $\mathcal{W}_t$,

ii) las estructuras reveladas por (F, G, H), y

iii) los cambios en esas conexiones y los correspondientes invariantes que muestran las matrices de parámetros.

En consecuencia, el cambio estructural está englobado en la construcción de la realización del sistema subyacente, así como la dinámica de ajuste que sigue la interacción interna del sistema ante los efectos instigados por cambios intensionales o shocks imprevistos. Esto se irá desvelado con más detenimiento en los siguientes apartados del trabajo.

1.2. Construcción de la realización

Para comprender como construir la DI a través de la DE, incialmente se explicará como elaborarla cuando los datos son finitos y "bien comportados", esto último se pormenoriza un poco más adelante.[4]

[2] Como se explica adelante, esto es debido a pérdida de información al construirla; por la finitud y calidad de de los datos de la DE; o debido a que el sistema no está bien especificado, por ejemplo, puede ser no lineal o variante temporal.

[3] La órbita se puede entender como la sucesión generada por una función f, un valor x_0 en su dominio y la composición iterada: $f(x_0) = f\circ^1(x_0), f(f(x_0)) = f\circ^2(x_0), \ldots, f\circ^n(x_0), \ldots$

[4] Existe otra versión cuando los datos son infinitos y "bien comportados". Sin embargo, en la aplicación económica los datos no satisfacen ninguna de estas dos condiciones, por ello se restringe el análisis a datos finitos y, eventualmente, a aquellos que no se "comportan bien".

a) Partimos al identificar el tipo de sistema subyacente a modelar. Por ejemplo, en el modelo macroeconómico que tratamos, se asumió un sistema discreto, lineal, invariante y multientrada-multisalida. Este debe ser expresado de la siguiente forma

$$\underline{y}_t = \mathcal{W}_t \underline{x}_t \qquad t = 1, \dots, k \tag{2}$$

con $\mathcal{W}_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matriz que condensa y "encubre" los procesos internos del sistema subyacente en el tiempo t; transformando el input o multientrada $\underline{x}_t$ en el output o multisalida $\underline{y}_t$;

b) A continuación, con las matrices $\mathcal{W}_t$ $t = 1, \dots, k$, que forman la DE del sistema subyacente, construimos la **Matriz de Hankel (MH)** $H_{p,q}(\mathcal{W}) \in \mathcal{M}^{pn \times qm}$. Esto se realiza como se ve a continuación:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 & \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_4 & \dots & \mathcal{W}_p \\ \mathcal{W}_2 & \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_4 & \mathcal{W}_5 & \dots & \mathcal{W}_{p+1} \\ \mathcal{W}_3 & \mathcal{W}_4 & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \dots & \mathcal{W}_{p+2} \\ \mathcal{W}_4 & \mathcal{W}_5 & \mathcal{W}_6 & \mathcal{W}_7 & \dots & \mathcal{W}_{p+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{W}_q & \mathcal{W}_{q+1} & \mathcal{W}_{q+2} & \mathcal{W}_{q+3} & \dots & \mathcal{W}_k \end{pmatrix}$$

Con esta representación explícita de $H_{p,q}(\mathcal{W})$ se puede ver que su construcción se realiza al colocar el elemento $\mathcal{W}_s$ en cada posición (i, j) tal que $(i + j) - 1 = s$. Para ejemplificar, observe que para las posiciones $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ y $(4, 1)$ se cumple que $i + j - 1 = 4$, es decir, $(1+4)-1 = (2+3)-1 = (3+2)-1 = (4+1)-1 = 4$. Así, decimos que el cuarto bloque antidiagonal (en rojo) es homogéneo y está formado por el cuarto elemento de la sucesión, $\mathcal{W}_4$. De esto se sigue que el k-ésimo bloque antidiagonal será homogéneo y estará dado por el k-ésimo elemento de la sucesión.

c) En este paso se debe elegir una de todas las matrices de Hankel generadas en el paso anterior. Para ello se selecciona la matriz que cumpla con las condiciones del **Teorema A.15** en **?**, p.50-54. Con este fin en mente, dentro de las matrices de Hankel $H_{u+1,\psi}(\mathcal{W})$ con $\psi = k - u$, que satisfacen $u + v < 100$ con $v \in \mathbb{N}$, y

$$rango(H_{u,v}(\mathcal{W})) = rango(H_{u,v+1}(\mathcal{W})) = rango(H_{u+1,\psi}(\mathcal{W})) = r \tag{3}$$

seleccionamos aquella con rango r' mínimo, digamos $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$. Cabe indicar que esta matriz no necesariamente es única, sin embargo, todas las matrices con este rango mínimo son equivalentes. Por otro lado, a r' se denomimna la dimensión de la realización mínima.

d) A partir de $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$ se construyen las matrices $P_{p+1} \in \mathbb{R}^{n(p+1)}$ y $Q_{p+1,\psi} \in \mathbb{R}^{n(p+1) \times m\psi}$, bajo el **Algoritmo de Factorización**:[5]

1. Definir $(Q_{n,m})_{1,:} = (H_{p+1,\psi}(\mathcal{W}))_{1,:}$;
2. Determinar la condición:
   2.1. Si $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$ tiene solo una fila, se define $P_{n,n} = [1]$, y $Q_{n,m} = (H_{p+1,\psi}(\mathcal{W}))_{1,:}$
      2.1.1 Fin.

[5]Este algoritmo fue expuesto en la **Definición B.1** de **?**, fundamentándose en lo expuesto en **?**, pp.134-138

2.2. Si $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$ tiene más de una fila, definimos $i = 1$;

3. Si $(Q_{n,m})_{i,:} \neq \underline{0}$, hallar la primer columna j_i de $(Q_{n,m})_{i,:}$ tal que $q_{i,j_i} \neq 0$ y definir $q_{s,j_i} = 0$, $\forall\ s \in \mathbb{N}_{i+1:n\mu}$;
4. Determinar $p_{u+i,i}$ como[6]

$$p_{u+i,i} = \frac{(H_{p+1,\psi}(\mathcal{W}))_{u+i,j_i} - \left(\sum_{s=1}^{i-1} p_{u+i,s} q_{s,j_i}\right)}{q_{i,j_i}}$$

para toda $u \in \mathbb{N}_{n\mu - i}$;

5. Determinar $q_{i+1,j}$ como[7]

$$q_{i+1,j} = (H_{p+1,\psi}(\mathcal{W}))_{i+1,j} - \textstyle\sum_{s=1}^{i-1} p_{i+1,s} q_{s,j}$$

para todo $j \in \mathbb{N}_{m\eta} / \{j_r : \forall\ r \in \mathbb{N}_i\}$,[8]

6. Determinar la condición:
   6.1. Si $(Q_{n,m})_{i+1,:} = \underline{0}$, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF, y haciendo $(Q_{n,m})_{i+1+k,:} = \underline{0}$, $\forall\ r \in \mathbb{N}_{n\mu-(i+1)}$, conformamos las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y terminamos.
   6.2. Si $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$ tiene sólo $i+1$ filas, entonces con los valores obtenidos en las i repeticiones precedentes del AF conformamos las matrices $P_{n,n}$ y $Q_{n,m}$, y terminamos.
   6.3. Si $H_{p+1,\psi}(\mathcal{W})$ tiene más de $i+1$ filas y $(Q_{n,m})_{i+1,:} \neq \underline{0}$, entonces definimos $i = i+1$, es decir, tomamos una nueva i igual a la i inmediatemente anterior, más 1, y repetimos el AF desde el inciso 3.

La primera matriz es triangular inferior con diagonal unitaria y la segunda una matriz con sus filas mayores a r' nulas.[9]

e) Por último, se genera la realización mínima (F, G, H). Construimos las matrices $P'_{r'} \in \mathbb{R}^{r'(p+1)}$, $P^*_{r'} \in \mathbb{R}^{r'(p+1)}$, definidas como

$$P'_{r'} = \left(P_{u+1}\right)_{1:r',1:r'} \quad P^*_{r'} = \left(P_{u+1}\right)_{n+1:n+r',1:r'}$$

Luego, se define la realización mínima como se muestra a continuación,

$$(F, G, H) = (F_{r'}, G_{r'}, H_{r'})$$

donde $F_{r'} = (P'_{r'})^{-1} P^*_{r'}$, $G_{r'} = \left(Q_{p+1,\psi}\right)_{1:r',1:m}$ y $H_{r'} = \left(P_{p+1}\right)_{1:n,1:r'}$

Explicado lo anterior, podemos evocar aquello de datos "bien comportados" para dilucidarlo. Dicha expresión denota que la DE (datos) puede constituir al menos una MH que satisfaga la condición (**??**) en el paso (**??**). Una DE que corrobore dicha condición se corresponde con que una parte consecutiva de ella pueda explicarla a toda, o equivalentemente, todo elemento de la DE es una combinación lineal de una subsucesión consecutiva de la DE.

[6] Esta expresión es equivalente a $(\mathscr{H}_{n,m})_{u+i,j_i} = (P_{n,m})_{u+i,:}(Q_{n,m})_{:,j_i} = \sum_{s=1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i}$. Para ello considere el paso 3, que implica $\sum_{s=i+1}^{n\mu} p_{u+i,s} q_{s,j_i} = 0$. Además, está bien definida, por el inciso **??**, $q_{i,j_i} \neq 0$.

[7] Esta expresión es equivalente a $(H_{p+1,\psi}(\mathcal{W}))_{i+1,j} = (P_{n,m})_{i+1,:}(Q_{n,m})_{:,j} = \sum_{s \in \mathbb{N}_{m\eta}} p_{i+1,s} q_{s,j}$ Para ello considere que $P_{n,n} \in \mathrm{It}_{n\mu}$, con unos en su diagonal principal. Lo que implica que $\sum_{s=i+2}^{n\mu} p_{i+1,s} q_{s,j_i} = 0$ y $p_{i+1,i+1} = 1$.

[8] Es decir, todo j en $\mathbb{N}_{m\eta}$ que no corresponda a la columna del primer elemento no nulo de la fila $1, \ldots, i$ de $Q_{n,m}$.

[9] Esto se sigue del Lema B.1 en **?**

Existen sistemas que al ser no lineales o poseer una dimensión infinita (requieren una cantidad infinita de variables de estado para representar la información interna) no permitirán que una parte consecutiva de su DE pueda representar a toda ella. Los cambios no lineales en la DE o la dimensión infinita requieren en este sentido una cantidad infinita para representar a la DE. Así mismo, la DE puede no estar "bien comportada" por algo ajeno al sistema subyacente: choques aleatorios o errores al generar la DE; o debido al tamaño de la DE, ya que si es insuficiente hace independientes a los elementos. Estas situaciones ponen un obstáculo a la realización que hasta ahora se ha explicado.

No obstante, realizar una DE franqueando el hecho de que no satisface la condición (**??**) para ninguna MH, es decir, que no es "bien comportada", es posible. Esto puede hacerse al rectificar el paso (**??**) mediante la siguiente secuencia de acciones:

1. Cada una de las matrices de Hankel $H_{p,q}$ generadas por medio de la DE de tamaño k, con $2 \leq p \leq k-1$, se factorizan mediante la Descomposición en Valores Singulares (SVD). Es decir, para cada $H_{p,q}$ se encuentran tres matrices: $U_{_{pq}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $V_{_{pq}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonales; y $\Sigma_{_{pq}}$ diagonal con $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{r_{pq}} \geq 0$ valores singulares de $H_{p,q}$ en su diagonal principal, tales que

$$H_{p,q} = U_{_{pq}}\Sigma_{_{pq}}V'_{_{pq}} = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i \underline{u}_i \underline{v}_i^T = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i \begin{pmatrix} u_{i1}v_{i1} & \cdots & u_{i1}v_{i(\alpha\eta)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i(\beta\mu)}v_{i1} & \cdots & u_{i(\beta\mu)}v_{i(\alpha\eta)} \end{pmatrix}$$

2. Debido a que el número de valores singulares de cada $H_{p,q}$ es igual a su rango $r_{_{pq}}$, para cada una creamos las aproximaciones H_s dadas como

$$H_{p,q} \approx H_s = U_s\Sigma_s V'_s$$

   donde s satisface $n \leq s \leq n(p-1)$, y expresa que en Σ solo he dejado los primero s valores singulares, volviendo el resto 0

   Se crea el conjunto índice definido como

$$S = \{s \in \mathbb{N} : s < r \wedge n|s\}$$

3. Para cada $s \in S$, hay que construir la matriz reducida H_s dada por

$$H_s = U_s\Sigma_s V'_s$$

   donde $\Sigma_s = (\Sigma)_{1:s,1:s}$, $U_s = (U)_{:,1:s}$ y $V_s = (V)_{:,1:s}$. Esta matriz, en general, pierde la estructura antidiagonal de hankel, es decir, ya no cuenta con bloques antidiagonales homogéneos de $\mathcal{W}$.

   En el paso (**??**) se hizo una elección de la MH con el mayor rango. La justificación de tal elección es debido al presente paso. Como la cantidad de valores singulares es igual al rango de la matriz, entonces, a mayor rango más valores singulares, lo cuál permite tener más matrices reducidas y, por tanto, un conjunto mayor de aproximaciones para optimizar la elección de una realización mínima, como se ve en los proximos pasos.

   La justificación, empero, no es teórica y por lo tanto, no necesariamente imbatible por otra condición. En una sección de este capitulo se hablará de ella con más rigurosidad y, en otra, se trabajará en su formalización.

4. Obtenemos la realización (F_s, G_s, H_s) de H_s, para cada $s \in S$. Esto se consigue al aplicar los pasos (**??**) y (**??**) a H_s.

5. Se construye la sucesión estimada

$$\widehat{\mathcal{W}_s} = \left\{ H_s(F_s)^{t-1} G_s|_{t \in \mathbb{N}_k} \right\}$$

para cada $s \in S$. El atributo "estimada" es debido a que posee un grado de proximidad a la representación externa $\mathcal{W}$.

Mediante la realización de la matriz reducida no se puede reconstruir los elementos que componen la matriz reducida, debido a que no cuenta con estructura de hankel. Así, dado lo que se dijo en (**??**), cada sucesión estimada $\widehat{\mathcal{W}_s}$ acumula dos distanciamientos de $\mathcal{W}$: el generado al crear la matriz reducida y el derivado de la realización. El primero es necesario para retirar el ruido en los datos, el segundo, sin embargo, aun queda abierto a ser investigado.[10]

6. La proximidad de $\widehat{\mathcal{W}_s}$ a $\mathcal{W}$, para cada $s \in S$, está definida como el promedio de la distancia entre el elemento i de $\widehat{\mathcal{W}_s}$ y el elemento i de $\mathcal{W}$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

Esta definición se logra expresar matemáticamente utilizando la distancia de Frobenius, es decir, la función $d(\cdot, \cdot)_F : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}$ inducida por la norma de Frobenius,

$$d(A, B)_F = \|B - A\|_F$$

A partir de ella, la proximidad entre $\widehat{\mathcal{W}_s}$ y $\mathcal{W}$, como fue definida, está dada por

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}_s})} = \frac{\sum_{i=1}^{k} d(W_i, \widehat{W}s_i)}{k}$$

Definimos el conjunto de proximidad M_p como

$$M_p = \left\{ \overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}_s})} : s \in S \wedge i = 1, \ldots, k \right\}$$

7. Por último, se elige la realización que induce el mejor ajuste $\widehat{\mathcal{W}_s}$ a $\mathcal{W}$. Es decir, se toma $(F_{s^*}, G_{s^*}, H_{s^*})$ tal que

$$\overline{d(\mathcal{W}, \widehat{\mathcal{W}_{s^*}})} = \text{mín}\, M_p$$

1.3. SVD, aleatoriedad y métodos de agrupación

El Teorema SVD es aplicado en varias metodológicas. Los resultados y características en diversos usos en los que queda urdido heredan propiedades a la TR; aunque no se puede decir que el trasbase se dé cabalmente. Sin embargo, aun de forma parcial puede generar la aparición incipiente de las cualidades de una metodología en otra. Esto justamente es lo que se explora en esta sección: la forma y grado en que metodologías para el tratamiento de aleatoriedad y agrupación mediante SVD transmiten características a la TR.

[10] Hay información en las antidiagonales de la matriz reducida que se pierden en el proceso de realización debido a que no son homogéneas. Esta información podría brindar un mejor ajuste a la matriz $\mathcal{W}$.

El Teorema SVD nos dice que para una matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, con rango r, existen las matrices $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonales, y Σ diagonal con $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq 0$, tales que

$$X = U\Sigma V'$$

A partir de las tres matrices de la factorización, podemos definir las siguientes matrices: $\Sigma_p = (\Sigma)_{1:p,1:p}$, $U_p = (U)_{:,1:p}$ y $V_p = (V)_{1:p,:}$, con $p \leq r$. Si multiplicamos cada una como sigue

$$X_p = U_p\Sigma_p V_p'$$

obtenemos la matriz SVD truncada en p valores singulares, X_p. Esta matriz tiene una relación con la matriz original X. Tomando E_p como la matriz de error generada al truncar la SVD completa, tenemos que

$$X = U_p\Sigma_p V_p + E_p = X_p + E_p \tag{4}$$

Considerando el caso particular donde $p = r$, entonces E_p sería identicamente nula, esto debido a que toda fila o columna mayor a r en Σ es nula. En este sentido, X sería igual a X_r y la factorización U_r, Σ_r V_r de X_r se pasa a llamar la SVD compacta de X.

Otro rasgo sobre la matriz SVD truncada en p, es que el error que induce E_p, es el mínimo entre todas las matrices en $\mathbb{R}^{n\times m}$ de rango menor o igual a p. En efecto, a partir de las demostraciones constructivas elaboradas por **?** y **?**, podemos afirmar que dada una matriz X, la minimización de $d_F(X, \widehat{X})$,[11] dentro del conjunto de matrices $\widehat{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ sujetas a $rango(\widehat{X}) \leq p$, es tal que

$$d_F(X, X_p) = \inf_{rango(X')\leq p} d_F(X', X) \tag{5}$$

Es decir, X_p es la matriz más proxima a X dentro de las matrices en $n \times m$ con rango menor o igual a p. Además, es única cuando y sólo cuando $\sigma_p \neq \sigma_{p+1}$. Esto permite asegurar que en el proceso de realización, las matrices de Hankel reducidas son las de mínima distancia y únicas, dentro de las matrices con igual o menor rango al de la matriz de Hankel original.

Por otro lado, el proceso de minimización afirmado en la desigualdad (**??**) cuenta con la siguiente expresión $\|X_p\|_F^2/\|X\|^2$ para medir su bondad de ajuste (**?**, p.2). Aunque, por causa del Teorema **??**, la norma de Frobenius $\|\cdot\|_F$ es equivalente a la suma cudrática de los valores singulares σ_i, o lo que es lo mismo, a la suma de los valores propios $\lambda_i = \sigma_i^2$ de la matriz $X'X$ (Definición **??**). Por lo que la bondad de ajuste puede ser vista como

$$\frac{\|X_p\|_F^2}{\|X\|_F^2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{r}\lambda_i} = \frac{1}{1 + \frac{\sum_{i=p+1}^{r}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}}$$

1.4. El mecanismo de agrupación en la TR: acercamiento al concepto de cambio estructural

El modelo contable visto con anterioridad tomando l

[11]La función $d_F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$ es la distancia de Frobenius, Definición **??**.

obtuvo el siguiente resultado para la descripción interna

$$\begin{aligned} HF^{t-1}G &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para cada $t = 1, \ldots, 100$, así tenemos que el sistema subyacente expresa que las 100 matrices, retirando el ruido, son muy parecidas y se pueden representar mediante una única matriz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lo cuál implica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} &= \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_t \\ MK_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} F_t + MK_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix} \\ &= 5 \begin{pmatrix} I_t \\ 0.2MK_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta relación indica que los trimestres entre 1993 y 2018 mantienen una relación de incremento de $5 = \frac{1}{0.2}$ por 1 entre inversión Y_t e I_t, respectivamente. Además, en este proceso multiplicador, cada unidad de incremento en la formación bruta de capital F_t pesa lo mismo que cada unidad de incremento en la formación bruta de capital de mercantivas importadas MK_t. Así mismo, el monto de importaciones M_t es uno a uno con respecto a la formación bruta de mercancías importadas MK_t, lo que implica que el consumo intermedio y final de mercancías importadas MC_t no tiene impacto sobre las importaciones totales M_t.

El análisis económico tradicional tiene su propia especificación de la matriz del modelo contable para el periodo, la cual se ve debajo

$$\begin{pmatrix} c_t & x_t \\ m_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 1 \\ 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

y si la expresamos como un modelo de entrada-salida tendriamos la siguiente forma

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1 - c_t \end{pmatrix} = \frac{1}{0.3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Observe que esta matriz y la obtenida mediante la TR, $\frac{1}{0.2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$, tienen una gran similitud estructural.

La estructura subyacente de un sistema lineal e invariante bajo la TR está dada por F, G y H, matrices invariantes. Entonces, el cambio estructural viene influenciado por la variación en los parámetros, la forma en que son transformados en la descripción externa, es decir, en la manera de ser asociados y dispuestos en cada entrada de

$$\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & x_t \\ m_t & 1-c_t \end{pmatrix}$$

y por la relación de igualdad entre esta sucesión de matrices y el sistema subyacente a través de

$$\begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) \end{pmatrix}^{t-1}\begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}$$

especificamente, por los valores de la matriz F, pues estos, en conjunto, al ser elevados a la potencia $t-1$, pueden mostrar un crecimiento que en ciertos cortes de tiempo genere un diferencial amplio.

El modelo contable especificado remite directamente al núcleo básico de una economía abierta y permite una extensión que en varios sentidos pone a prueba a la teoría de la realización mediante:

i) adicionar otros sectores institucionales como el gobierno y la autoridad monetaria;

ii) especificar el correspondiente modelo determinado por la oferta de ahorro en lugar de la demanda de inversión:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_t & MC_t \\ X_t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_t^{-1} & 0 \\ 0 & M_t^{-1} \end{pmatrix}$$

y con lo cuál se obtiene

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ M_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_t & mc_t \\ a_{xt} & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} Sr_t \\ Snr_t \end{pmatrix}$$

iii) aumentar la frecuencia de la información disponible en virtud de su consistencia contable y alta confiabilidad.

En este marco es interesante pensar de qué dependen los elementos de F y G, que pueden cambiar, por ejemplo, el multiplicador $\frac{1}{|A_t|}$.

Considerando que la matriz F tenga 2 valores propios distintos, podemos descomponerla como

$$F = PDP^{-1}$$

donde P tiene por columnas los vectores propios de F, es decir, $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \end{pmatrix}'$ y $v_2 = \begin{pmatrix} v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}'$; P^{-1} tiene por columnas los vectores $\frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} v_{22} & -v_{12} \end{pmatrix}'$ y $\frac{1}{\det(P)}\begin{pmatrix} -v_{21} & v_{11} \end{pmatrix}'$; y D es una matriz diagonal con d_1 y d_2 en su diagonal principal.

De esta forma, se sigue que

$$\frac{1}{|A_t|} = a_1 d_1^t + a_2 d_2^t$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{v_{11}v_{22}g_{11} - v_{11}v_{21}g_{21}}{\det(P)} \\ a_2 &= \frac{v_{11}v_{21}g_{21} - v_{12}v_{21}g_{21}}{\det(P)} \end{aligned}$$