Decisión de Grupo

Diego José Abengózar Vilar, z17m063
Alejandro García Castellanos, z17m008
Modelización, G-MI UPM

Índice

Introducción

Problema de decisión de grupo

- Un problema que aparece en multitud de campos (teoría de la decisión, sistemas recomendadores...) es el denominado problema de decisión de grupo.

- El objetivo es ordenar un conjunto de alternativas $A_1, \ldots, A_n$ atendiendo a las preferencias de uno o varios expertos individuales ($E_1, \ldots, E_m$).

¿Qué es el problema de decisión de grupo?

- Atendiendo a la complejidad de evaluar simultáneamente un gran número de alternativas, consideramos que los expertos expresan sus preferencias mediante matrices de comparación por pares (M^i).
- Para resolver el problema, calcularemos un vector de pesos, w, que indique cómo de prioritaria es cada una de las opciones.

$$w = (w_1, .., w_n)^t$$

Vector de prioridad:

- w_i indica la prioridad de la alternativa A_i
- A mayor w_i mayor prioridad

Modelización del problema

Matrices de comparación por pares (MCP)

- Cada experto representa sus preferencias entre una alternativa y otra a través de una matriz de comparación por pares

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- El elemento m_{ij} de la matriz M es una estimación de la razón de importancia entre la alternativa A_i y A_j.

Escala de Saaty

- Para cuantificar la información de los expertos utilizaremos la Escala de Saaty: los expertos expresan la importancia de una opción frente a otra mediante un número del 1 al 9 (y sus recíprocos).

- Se basa en estudios psicológicos que muestran que un individuo no puede comparar simultáneamente más de 7 (±2) objetos.

Thomas L. Saaty

Escala de Saaty

Escala	Definición	Explicación
1	Igual importancia	Los dos elementos contribuyen igualmente al objetivo.
3	Importancia moderada	La experiencia y el juicio están ligeramente a favor de uno de los elementos.
5	Importancia fuerte	La experiencia y el juicio están fuertemente a favor de uno de los elementos.
7	Importancia muy fuerte o demostrable	Un elemento es preferido sobre el otro en un grado muy fuerte y esta preferencia puede demostrarse en la práctica.
9	Importancia absoluta	La evidencia favorece a una alternativa sobre la otra extremadamente.
2, 4, 6, 8	Valores intermedios	Algunas veces se necesita interpolar un juicio, porque no hay una palabra que describa la relación entre los elementos.

Propiedades de la MCP

- **Propiedades:**
  1. Matrices cuadradas de orden n, siendo n el el número de alternativas a comparar
  2. Todas sus componentes son positivas, $m_{ij} > 0 \ \forall \ i, j$.
  3. **Reciprocidad**: $m_{ij} * m_{ji} = 1 \ \forall \ i, j$.
  4. Los elementos de la diagonal son 1, $m_{ii} = 1 \ \forall \ i$.

- Si la matriz cumple la **propiedad de consistencia**, $m_{ij} * m_{jk} = m_{ik} \ \forall \ i, j, k$, decimos que la matriz es consistente.

Índice de consistencia

La matriz de comparación por pares puede no ser consistente y para medir cómo de consistente es la matriz se utiliza un **índice de consistencia**:

$$IC(M) = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

(n es la dimensión de M)

(λ_{max} autovalor dominante de M)

- El aumento del valor del índice de consistencia indica un mayor grado de inconsistencia de los juicios recogidos en la matriz.
- **Si M es consistente, su índice de consistencia es 0.**

Modelo analítico

Formulación del problema de grupo

Datos de entrada:

- $M^1, \ldots, M^m$ MCP de dimensión nxn.
- Recíprocas.
- Datos en escala Saaty.
- Pueden ser **incompletas.**
- Pueden ser **inconsistentes.**
- Pueden ser **discrepantes.**

Objetivo:

- Vector de pesos del grupo w.
- Inducir un ranking en las opciones A_i a partir de w.

$$\left\{ \begin{array}{c} E_1 \Rightarrow M^1 = (m^1_{ij})_{i,j=1..n} \\ \ldots \\ E_m \Rightarrow M^m = (m^m_{ij})_{i,j=1..n} \end{array} \right. \rightarrow METODOS \rightarrow w = (w_1, \ldots, w_n)^t$$

Primeros pasos hacia la solución

Teorema (Saaty): Si M es una matriz consistente, entonces:

- Autovalores de M: 0 y n.
- Existe un vector positivo $w = (w_1, \dots, w_n)^t$ tal que $m_{ij} = w_i / w_j$, vector de pesos que buscamos.

Además w^t es el único autovector asociado al autovalor dominante de M(n) tal que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

- Si M es recíproca,
  - Autovalor dominante de M $\lambda_{max} \geq n$
  - M consistente $\Leftrightarrow \lambda_{max} = n$

Primeros pasos hacia la solución

De forma que si la matriz es consistente se cumple que existe un vector w positivo tal que:

$$M^k = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{pmatrix}$$

Así que, si la matriz es consistente podemos obtener la solución a través del sistema no lineal de ecuaciones, para cada k:

$$\frac{w_i}{w_j} = m_{ij}^k \quad \forall i, j, k$$

Y si queremos que la solución sea única podemos normalizar el vector de forma que $\sum w_i = 1$

Matrices incompletas

Hay veces que los decisores no proporcionan un dato porque no tienen información precisa sobre alguna de las opciones.

En una MCP los elementos son mayores que cero.

$\Downarrow$

Usamos el valor 0 como indicador de que no se tiene esa información de dicho experto

$\Downarrow$

No añadimos su ecuación $\frac{w_i}{w_j} = m_{ij}^k$ al sistema

Métodos de ajuste de datos

¿Cómo obtenemos el vector de prioridad cuando no es consistente?

En los problemas reales, atendiendo a la complejidad del problema y la subjetividad inherente a los juicios humanos, las matrices de comparación por pares pueden no ser consistentes.

M^k inconsistente

$\Downarrow$

$m^k_{ij} \sim w_i / w_j$

$\Downarrow$

Minimizar la distancia entre los m^k_{ij} y w_i / w_j

$\swarrow \quad \searrow$

Métrica 2

Métrica 1

Modelo analítico de ajuste de datos

Se buscan $w_1, \ldots, w_n$ positivos que mejor ajustan los datos m^k_{ij} teniendo en cuenta todos los expertos, para la métrica p:

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i,j=1}^{n} \left| m_{ij}^{k} - \frac{w_i}{w_j} \right|^{p} \quad si\ 1 \leq p < \infty}$$

Estudiaremos el problema para las métricas más usuales, p = 1, 2

Modelo Computacional

Métrica 2

Método de mínimos cuadrados

Métrica 2

Se buscan los $w_1, \ldots, w_n$ positivos que mejor ajustan los datos m^k_{ij} teniendo en cuenta todos los expertos, en el sentido de mínimos cuadrados:

$$\boxed{Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(m_{ij}^{k} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2}$$

Para resolver la **no linealidad**, utilizaremos dos técnicas para linealizar el problema:

- Transformación logarítmica
- Problema ponderado

Métrica 2 - Transformación logarítmica

1. Partiendo de las ecuaciones **no lineales**: $m_{ij}^{k} - \frac{w_i}{w_j} = 0 \ \ \forall i, j = 1..n, k = 1..m$

2. **Tomamos logaritmos**: $log(w_i) - log(w_j) = log(m_{ij}^{k}) \ \ \forall i, j = 1..n, k = 1..m$

3. Resultando las ecuaciones **lineales**: $l_{ij}^{k} - v_i + v_j \ \ \forall i, j = 1..n, k = 1..m$

4. Se obtiene el sistema lineal sobredeterminado para cada experto:

$$B^k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -1 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & -1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_{12}^{k} \\ -l_{13}^{k} \\ ... \\ -l_{1n}^{k} \\ -l_{23}^{k} \\ ... \\ -l_{2n}^{k} \\ ... \\ -l_{n-1,n}^{k} \end{pmatrix} = b^k$$

Métrica 2 - Transformación logarítmica

Resolvemos el sistema lineal sobredeterminado mediante **mínimos cuadrados**:

$$\begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \dots \\ B^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}$$

1. Deshacemos la transformación logarítmica: $w_i = e^{v_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$

2. Normalizamos: $w_i = \dfrac{w_i}{\sum_1^n w_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$

3. En w obtenemos un vector con los pesos de prioridad de las alternativas.

Métrica 2 - Problema Ponderado

1. Partiendo de las ecuaciones **no lineales**: $m_{ij}^k - \dfrac{w_i}{w_j} = 0 \;\; \forall i, j = 1..n, k = 1..m$

2. Se multiplica por w_j para obtener la ecuación **lineal**: $m_{ij}^k \cdot w_j - w_i = 0 \;\; \forall i, j, k$

3. Obtenemos el siguiente sistema para cada experto:

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & -m_{12}^k & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -m_{13}^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -m_{1n}^k \\ -m_{21}^k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -m_{2n}^k \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b^k$$

Métrica 2 - Problema Ponderado

1. Calculamos la solución de mínimos cuadrados del sistema lineal sobredeterminado:

$$\begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \dots \\ B^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}$$

2. Normalizamos: $w_i = \dfrac{w_i}{\sum_1^n w_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$

3. En w obtenemos un vector con los pesos de prioridad de las alternativas

Métrica 1

Método que minimiza la métrica vectorial 1

Métrica 1

Se buscan los $w_1, \ldots, w_n$ positivos que mejor ajustan los datos m^k_{ij} en el sentido que minimicen la métrica vectorial 1:

$$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| m_{ij}^{k} - \frac{w_i}{w_j} \right|$$

Para resolver la **no linealidad**, utilizaremos dos técnicas para linealizar el problema:

- Transformación logarítmica
- Problema ponderado

No es diferenciable, así que lo transformaremos a un problema equivalente de programación lineal introduciendo nuevas variables.

Métrica 1 - Transformación logarítmica

1. Aplicando la transformación logarítmica obtenemos: $$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| l_{ij}^k - v_i + v_j \right|$$

2. Introducimos las variables n^k_{ij} y p^k_{ij}:

$$n_{ij}^k = \frac{1}{2}[|v_i - v_j - l_{ij}^k| + (v_i - v_j - l_{ij}^k)]$$ ***Desviación negativa***

$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}[|v_i - v_j - l_{ij}^k| - (v_i - v_j - l_{ij}^k)]$$ ***Desviación positiva***

Se observa que:

$$n_{ij}^k + p_{ij}^k = \left| l_{ij}^k - v_i + v_j \right|$$

$$n_{ij}^k - p_{ij}^k = v_i - v_j - l_{ij}^k$$

$$n_{ij}^k \geq 0,\ p_{ij}^k \geq 0,\ n_{ij}^k \cdot p_{ij}^k = 0$$ *(Si uno es distinto de cero el otro es cero)*

Métrica 1 - Transformación logarítmica

El problema de programación lineal por metas resultante es:

$$min\ D = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(n_{ij}^k + p_{ij}^k)$$

$$s.a$$

$$l_{ij}^k - v_i + v_j + n_{ij}^k - p_{ij}^k = 0$$

$$n_{ij}^k \geq 0, p_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

1. Tomamos v del vector solución obtenido a través del método del simplex.

2. Deshacemos la transformación logarítmica: $w_i = e^{v_i} \quad \forall i = 1, ..., n$

3. Normalizamos: $w_i = \dfrac{w_i}{\sum_1^n w_i} \quad \forall i = 1, ..., n$

Métrica 1 - Problema Ponderado

1. Multiplicando por w_j:

$$Min \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| m_{ij}^k \cdot w_j - w_i \right| + \sum_{i=1}^{n} |w_i - 1| \right)$$

2. Introducimos las variables n^k_{ij} y p^k_{ij}:

$$n_{ij}^k = \frac{1}{2}[\left| m_{ij}^k \cdot w_j - w_i \right| + (m_{ij}^k \cdot w_j - w_i)]$$ ***Desviación negativa***

$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}[\left| m_{ij}^k \cdot w_j - w_i \right| - (m_{ij}^k \cdot w_j - w_i)]$$ ***Desviación positiva***

Se observa que:

$$\left| m_{ij}^k \cdot w_j - w_i \right| = n_{ij}^k + p_{ij}^k$$

$$n_{ij}^k - p_{ij}^k = m_{ij}^k \cdot w_j - w_i$$

$$n_{ij}^k \geq 0, \quad p_{ij}^k \geq 0, \quad n_{ij}^k \cdot p_{ij}^k = 0$$

Métrica 1 - Problema Ponderado

El problema de programación lineal por metas resultante es:

$$min \ D = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (n_{ij}^k + p_{ij}^k)$$

$$s.a \qquad w_i - m_{ij}^k \cdot w_j + n_{ij}^k - p_{ij}^k = 0$$

$$n_{ij}^k \geq 0, \ p_{ij}^k \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

1. Tomamos w del vector solución obtenido a través del método del simplex.

2. Normalizamos: $w_i = \dfrac{w_i}{\sum_1^n w_i} \quad \forall i = 1, ..., n$

Medidas para analizar la solución

Errores de grupo

$$AcuerdoGrupo_{Fr} = \left\{ \sum_{k=1:m_{ij}^k:dato}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Métrica 2

$$AcuerdoGrupo_1 = \left\{ \sum_{k=1:m_{ij}^k:dato}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right| \right\}$$

Métrica 1

$$MaximoDesacuerdoGrupo = max \left\{ \left| m_{ij}^k - \frac{w_i}{w_j} \right| \right\}$$

Métrica Inf.

- Sólo se calculan los residuos y la agregación de éstos para los datos conocidos.
- Los errores se relativizan al nº de datos conocidos.

Errores de individuales

Errores producidos por la solución w respecto de la información de preferencias dada por cada experto:

$$
\begin{array}{ccccc}
E^1 & \ldots & E^k & \ldots & E^m \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\|M^1 - W\| & & \|M^k - W\| & & \|M^m - W\|
\end{array}
$$

Ejemplos

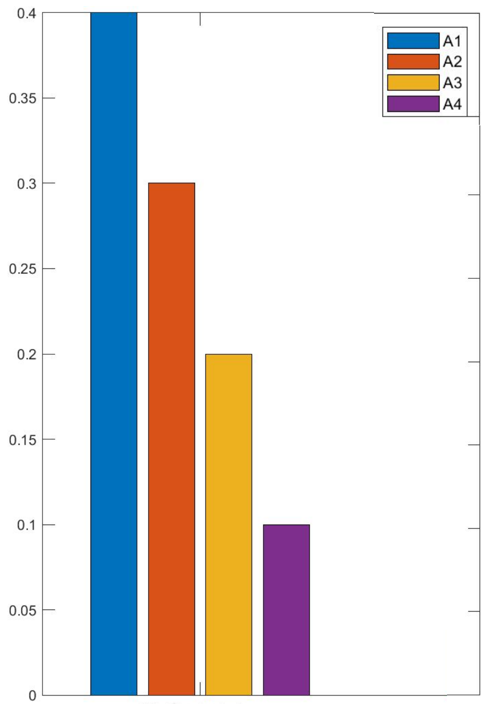
Consistente, mismas opiniones

$$E_1 \longrightarrow M^1 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.3333 & 2.0000 & 4.0000 \\ 0.7500 & 1.0000 & 1.5000 & 3.0000 \\ 0.5000 & 0.6667 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0.2500 & 0.3333 & 0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

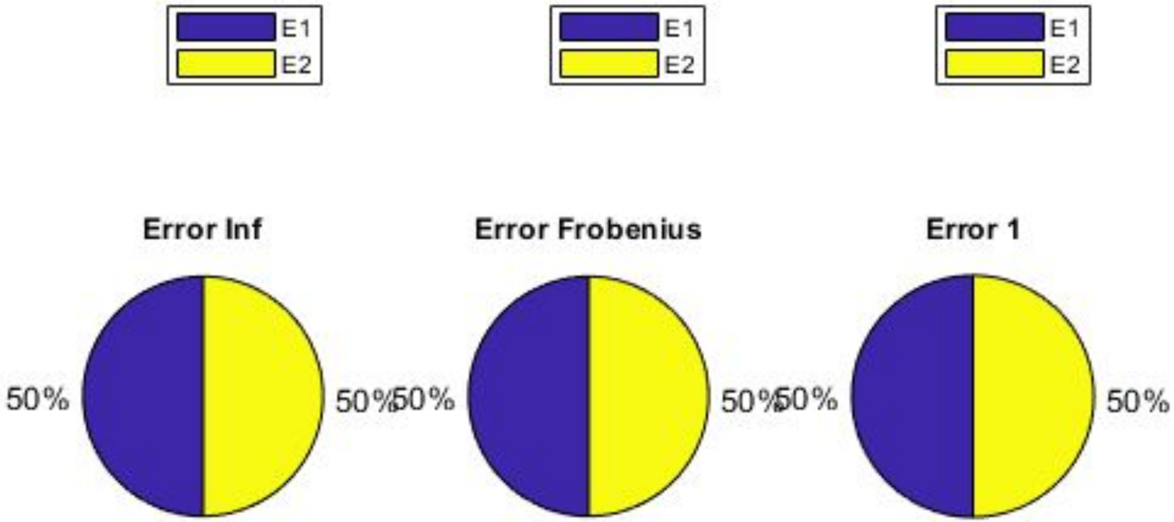
$$E_2 \longrightarrow M^2 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.3333 & 2.0000 & 4.0000 \\ 0.7500 & 1.0000 & 1.5000 & 3.0000 \\ 0.5000 & 0.6667 & 1.0000 & 2.0000 \\ 0.2500 & 0.3333 & 0.5000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Resultados

	w	Ranking
Min Cuad Log	(0.4000,0.3000,0.2000,0.1000)	A1 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A4
Min Cuad Pond	(0.4000,0.3000,0.2000,0.1000)	A1 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A4
Min Sum Des Log	(0.4000,0.3000,0.2000,0.1000)	A1 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A4
Min Sum Des Pond	(0.4000,0.3000,0.2000,0.1000)	A1 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A4



Comparación de los errores individuales

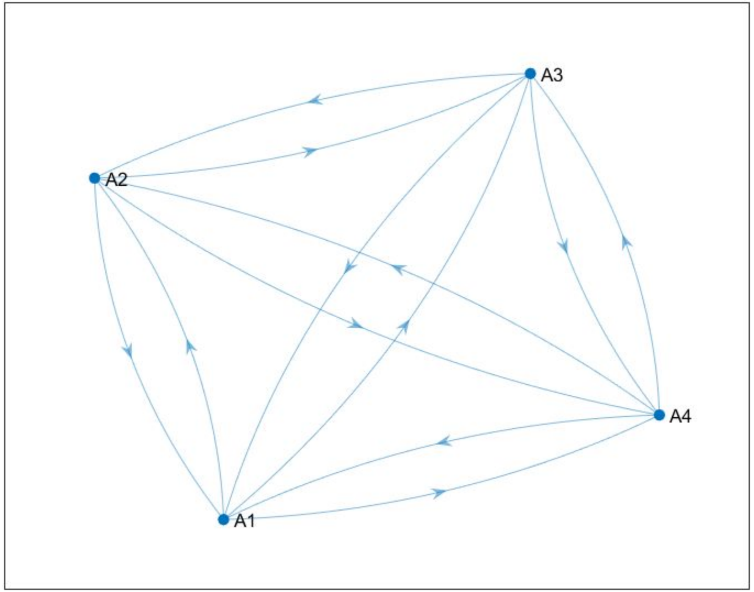


Inconsistente: varias opiniones e incompleta

$$E_1 \to M^1 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0.1429 & 0.2000 \\ 0 & 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 7.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 0.1111 \\ 5.0000 & 3.0000 & 9.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

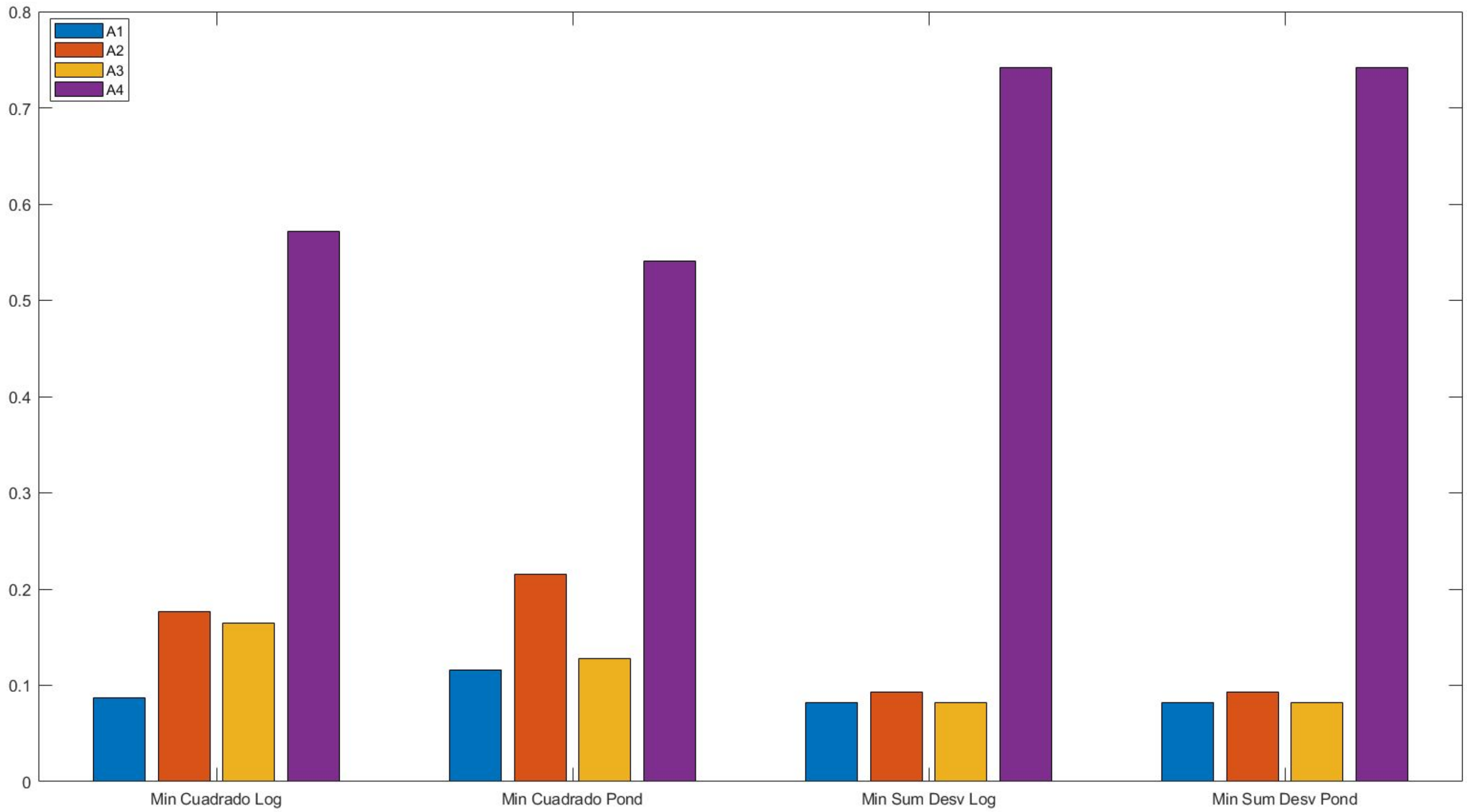
$$E_2 \to M^2 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0 & 0.3333 & 0.1111 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0.1250 \\ 3.0000 & 0 & 1.0000 & 0.1111 \\ 9.0000 & 8.0000 & 9.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \to M^3 = \begin{pmatrix} 1.0000 & 3.0000 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1.0000 & 2.0000 & 0.2000 \\ 0 & 0.5000 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 5.0000 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$



Resultados

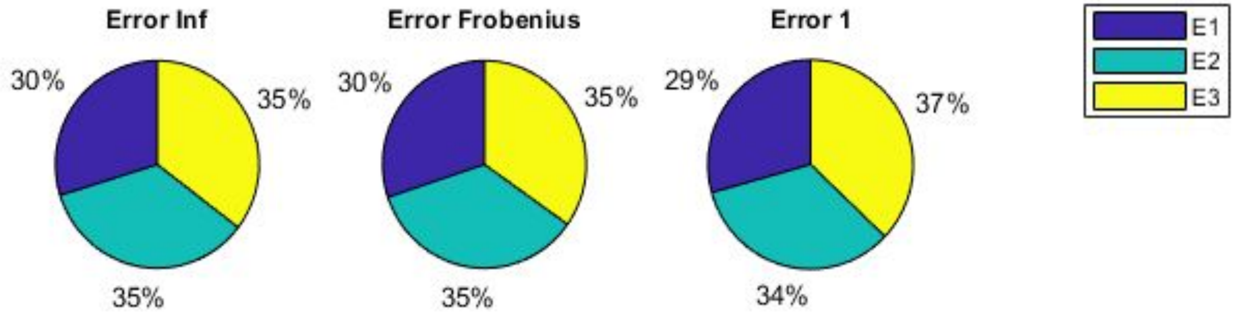
	w	Ranking	Max Residuo	Error Fr	Error Norm1
Min Cuad Log	(0.0870,0.1769,0.1648,0.5714)	A4 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A1	0.5533	1.2761	4.2437
Min Cuad Pond	(0.1161,0.2154,0.1276,0.5409)	A4 ≻ A2 ≻ A3 ≻ A1	0.5901	1.3135	4.3932
Min Sum Des Log	(0.0825,0.0928,0.0825,0.7423)	A4 ≻ A2 ≻ A3 = A1	0.7800	1.3208	3.7399
Min Sum Des Pond	(0.0825,0.0928,0.0825,0.7423)	A4 ≻ A2 ≻ A3 = A1	0.7800	1.3208	3.7399



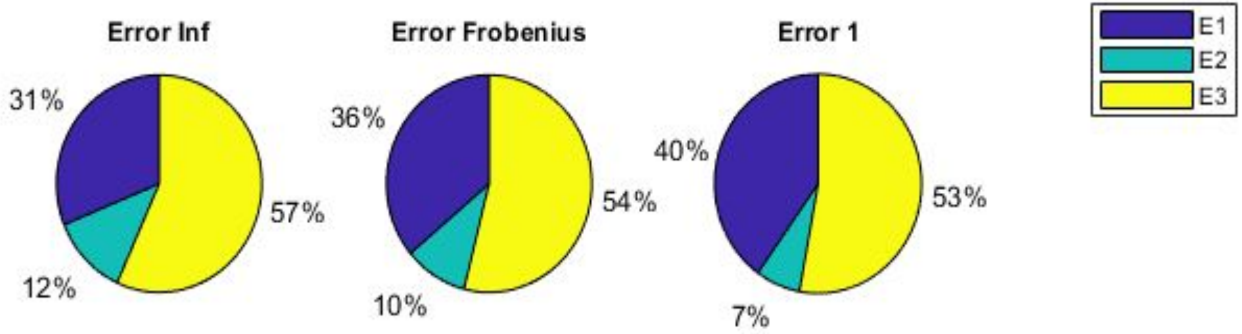
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
A1
A2
A3
A4
Min Cuadrado Log
Min Cuadrado Pond
Min Sum Desv Log
Min Sum Desv Pond

Comparación de los errores individuales

Min Cuad



Min Sum
Desv



Conclusiones

Problema

PREFERENCIAS

MÉTODOS

$$w = (w_1, .., w_n)^t$$

Obstáculos

Matrices inconsistentes

Matrices incompletas

Diferentes preferencias

MODELO ANALÍTICO

MÉTODOS COMPUTACIONALES

MATLAB

IMPLEMENTACIÓN

Referencias

Referencias

- Dopazo, E & González Pachón, J. (2003). Consistency-driven approximation of a pairwise comparison matrix. Kybernetika 39(5), 561-568.
- Dopazo, E & Ruiza-Tangle, M. (2011). A parametric GP model dealing with incomplete information for group decision-making. Applied Mathematics and Computation, 218(2), 514-519.
- Saaty, T. L. (2003). Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary. European Journal of Operational Research, 145(1), 85-91.
- Ueberhuber, C.W. Numerical Computation 1 Methods, Software, and Analysis. Springer.
- Peláez, J.I. & Lamata, M.T. (2003). A new measure of consistency for positive reciprocal matrices, Computers & Mathematics with Applications, Volume 46, Issue 12, 1839-1845.

Anexo