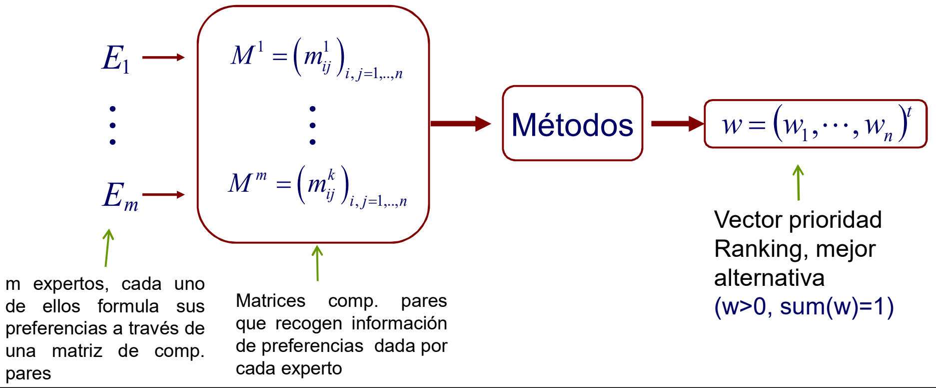
UN PROBLEMA DE DECISIÓN DE GRUPO A PARTIR DE MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES

1. Contexto del problema (Problema de Teoría de la Decisión)
2. Modelo matemático: Matrices de comparación por pares
3. Problema decisión caso 1 experto
4. Problema decisión de grupo (caso m(>1) expertos)
5. Análisis de las soluciones. Medidas de error

1

1. Contexto del problema

Problema de decisión de grupo: Dado un conjunto de alternativas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ $(n \geq 2)$, ordenarlas atendiendo a las preferencias expresadas por un grupo de varios expertos individuales (E1,…,Em) mediante matrices de comparación por pares M1,…,Mm -> Calcular un vector de pesos w de las alternativas, que sea el que "mejor refleje" las preferencias expresadas por los expertos.



2. MODELO MATEMÁTICO. MATRICES COMPARACIÓN PARES

- **Estructura de preferencias: MATRICES DE COMPARACIÓN POR PARES**

m_{ij} : estimación razón de importancia entre alternativa A_i y alternativa A_j

$$m_{ij} > 0$$

$$M \equiv \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

Entre A1 y A2:

¿cuál es mas importante y con qué razón?

M matriz nxn de comparación por pares

3

CUANTIFICAR INFORMACIÓN DE PREFERENCIAS

- Expresiones lingüísticas, cuestiones subjetivas, intangibles,..

Las comparaciones pareadas suelen cuantificarse utilizando una escala (por ejemplo: Escala de Saaty)

- Estudios experimentales de psicólogos han mostrado que un individuo no puede comparar simultáneamente mas allá de 7 objetos (mas/menos dos) $\longrightarrow$ Escala de Saaty: enteros 1-9

- Las matrices de comparación por pares son la base del AHP (Analytical Hierarchy Proccess), método de decisión multicriterio de uso ampliamente extendido. Software comercial: Expert Choice.

4

• Escala de Saaty:

Intensity of Importance	Definition	Description
1	Equal importance	Two criteria contribute equally to the objective in the immediate higher level
3	Weak importance of one over another	Experience and judgement slightly favor one criterion over another
5	Essential or strong importance	Experience and judgement strongly favor one criterion over another
7	Very strong or demonstrated importance	A criterion is favored very strongly; its dominance demonstrated in practice
9	Absolute importance	The evidence favoring one criterion over another is of the highest possible order of affirmation
2,4,6,8	Intermediate values between adjacent scale values	

Reciprocals of the above judgements: If i has one of the above judgements compared to j, then j has the reciprocal value when is compared to i.

EJEMPLO (Saaty, 1977): Overall satisfaction with job

	Researh	Growth	Benefits	Colleagues	Location	Reputation
Researh	1	1	1	4	1	1/2
Growth	1	1	2	4	1	1/2
Benefits	1	1/2	1	5	3	1/2
Colleagues	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
Location	1	1	1/3	3	1	1
Reputation	2	2	2	3	1	1

- **Propiedades**

1) Reciprocidad : $m_{ij} \times m_{ji} = 1 \quad \forall i, j$

2) **C**onsistencia: $m_{ij} \times m_{jk} = m_{ik} \quad \forall i, j, k$

Observación: consistencia $\longrightarrow$ reciprocidad

- **¿Cómo de consistente es la matriz M? Índice consistencia**

$$CI(M) = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} \qquad (\lambda_{\max}: \text{autovalor dominante de M})$$

- Si M consistente CI(M)=0
- Si M recíproca e inconsistente CI(M)>0

- **¿Qué relación tiene M con el vector de pesos buscado w?**

Teorema (Saaty)

- Si ***M*** es una matriz consistente, entonces:
  - Autovalores de M: 0 y n
  - Existe un vector positivo w=$(w_1, \ldots, w_n)^t$ tal que $m_{ij} = w_i / w_j \quad \forall i, j$.
  Además w es un autovector asociado al autovector dominante de M (n) y es único si $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

- Si M es recíproca,
  - Autovalor dominante de M $\lambda_{\max} \geq n$.
  - M consistente $\Leftrightarrow \lambda_{\max} = n$.

- Problema: ¿Cómo calcular w a partir de M si M no consistente? ->
  - Método autovector asociado a autovalor dominante de M
  - Métodos basados en distancias

3. PROBLEMA DECISIÓN PARA EL CASO DE 1 EXPERTO

Problema: Dado un conjunto $\{A_1,\ldots,A_n\}$ $(n \geq 2)$ de alternativas de decisión, ordenarlas atendiendo a las preferencias expresadas por un expert mediante una matriz M de comparación por pares -> Calcular un vector de pesos w de las alternativas, que sea el que "mejor refleje" las preferencias expresadas por el experto.

M → MÉTODO? → w (con wi>0 y sum(wi)=1)

↓

Ranking, mejor alternativa,..

Objetivo:

- Estudiar métodos y algoritmos para calcular w a partir de M.
- Proporcionar medidas para analizar y comparar las soluciones obtenidas.

9

Para desarrollar métodos de cálculo tomamos como punto de partida el caso ideal, en el que la matriz M es consistente:

MODELO vs **REALIDAD**

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \ldots\ldots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} \ldots\ldots & w_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{n1} & w_{n2} \ldots\ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \ldots\ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \ldots\ldots & m_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ m_{n1} & m_{n2} \ldots\ldots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

CONSISTENTE

- CONSISTENTE?
- RECIPROCA ?

↓

$$\boxed{\exists\, (w_1,..,w_n): w_{ij} = w_i / w_j}$$

↓

Vector de prioridad?

10

MÉTODOS Y ALGORITMOS DE CÁLCULO SOLUCIÓN

Consideraremos dos tipos de métodos:

3.1. MÉTODO DEL AUTOVECTOR PRINCIPAL. MÉTODO DE LA POTENCIA (visto en clase)

3.2. MÉTODOS BASADOS EN DISTANCIAS. MÉTODOS DE AJUSTE DE DATOS:

El problema se puede ver cómo encontrar un vector w, tal que la matriz de ratios W=(wi/wj) sea la que mejor aproxime a la matriz M (minimice la distancia a M) usando una norma o distancia: matriz W=(wi/wj) "mas próxima" a M: **Min || M-W ||**

Esto también se puede plantear como calcular w (positivo) tal que sus componentes wi ajusten lo mejor posible los datos mij

mij~wi/wj

en alguna distancia (para medir la proximidad).
Empezaremos trabajando con la distancia 2, que conduce a un problema mínimos cuadrados del tipo que estudiasteis en el curso de Algorítmica Numérica y es lo que se desarrolla a partir de la diapositiva 13 y en el documento word.

11

3.1. MÉTODO DEL AUTOVECTOR PRINCIPAL. MÉTODO DE LA POTENCIA

CASO IDEAL M consistente $\rightarrow$ w autovector positivo (sum(w)=1) asociado al autovalor dominante de M (n en caso consistente)

EN GENERAL: Buscaremos el autovector positivo (sum(w)=1) asociado al autovalor dominante de M

MÉTODO DE AUTOVECTOR PRINCIPAL PARA CALCULAR VECTOR DE PESOS :

1. Cálculo w autovector positivo normalizado asociado al autovalor $\lambda_{\max}$ (con MATLAB).
2. Aplicar método potencia

$$\begin{cases} \mathrm{w}^{k+1} = M\mathrm{w}^{k+1} \\ \text{Normalizar} \end{cases}$$

12

3.2. AJUSTE DATOS. RESOLUCIÓN MÍNIMOS CUADRADOS

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots\cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{21} & \cdots\cdots & m_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & m_{ij} & \cdots\cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots\cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\;?\;} \longrightarrow \boxed{(w_1,..,w_n)}$$

$$\uparrow$$

$$m_{ij} \approx w_i / w_j$$

Comentario :

- M consistente: $\exists\,(w_1,..,w_n): m_{ij} = w_i / w_j$
- M no consistente: no existen $w_1,..,w_n : m_{ij} = w_i / w_j$

Cálculo de $w_1,..,w_n$ que mejor ajustan los datos m_{ij} en el sentido mínimos cuadrados

13

3.2. AJUSTE DATOS. RESOLUCIÓN MÍNIMOS CUADRADOS

Cálculo de $w_1,..,w_n$ que mejor ajustan los datos m_{ij} en el sentido mínimos cuadrados

SOLUCIÓN MÍNIMOS CUADRADOS:

Encontrar $w_1,..,w_n$: $Min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(m_{ij} - {}^{w_i}\!/_{w_j} \right)^2 \right\}$

PROBLEMA NO LINEAL!!! Qué hacer?

14

Ajustamos los datos de la matriz M por un vector de pesos w (positivo y normalizado)

$$\boxed{m_{ij} - \frac{w_i}{w_j} = 0, \quad i, j = 1,..,n} \quad (1) \qquad \text{(sistema de ecs. NO lineales)}$$

Dos opciones para "linealizar" las ecuaciones anteriores:

1. Sistema sobredeterminado lineal (transformación logarítmica de (1)):

$$\begin{cases} \boxed{\underbrace{\log(w_i)}_{v_i} - \underbrace{\log(w_j)}_{v_j} = \log(m_{ij}),} \\ i, j = 1,..,n \end{cases} \qquad (2) \text{ (ec. lineal en v)}$$

2. Sistema sobredeterminado lineal:

$$\begin{cases} \boxed{m_{ij} w_j - w_i = 0,} \\ i, j = 1,..,n \\ \sum w_i = 1 \end{cases} \qquad (3) \text{ (ec. lineal en } w_i)$$

Calcularemos:

1. Las soluciones mín. cuad. de los sistemas lineales (2) y (3) anteriores.
2. Una vez obtenidas las soluciones, normalizaremos para que vector final w sea w>0 y sum(w)=1.

Desarrollado en documento word

15

3.2.1 AJUSTE DE DATOS. RESOLUCIÓN MÍNIMOS CUADRADOS LOGARÍTMICA

PROBLEMA: Calcular $w_1,...,w_n$ que "resuelvan lo mejor posible" el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} m_{ij} - \dfrac{w_i}{w_J} = 0, \\ i, j = 1,..,n \end{cases} \qquad \text{EC. NO LINEAL}$$

Transformación logarítmica

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} l_{ij} - v_i + v_j = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \\ 1 \le i < j \le n \end{cases} \qquad \text{EC. LINEAL}$$

Observación: $i, j = 1,..,n \leftrightarrow 1 \le i < j \le n$

16

1. Transformación logarítmica: $l_{ij} = \log(m_{ij}), \quad i, j = 1,..,n$ (datos conocidos)

$v_i = \log(w_i), \quad i = 1,..,n$ (incognitas)

2. Resolución mínimos cuadrados del sistema LINEAL sobredeterminado:

$$(2)\begin{cases} l_{ij} - v_i + v_j = 0 \\ 1 \le i < j \le n \end{cases}$$

Escrito matricialmente:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ -1 & 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & -1 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & -1 & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ .. \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -l_{12} \\ -l_{13} \\ .. \\ -l_{1n} \\ -l_{23} \\ .. \\ -l_{2n} \\ .. \\ -l_{n-1n} \end{pmatrix}}_{b}$$

Resolución mínimos cuadrados $\quad Min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(l_{ij} - v_i + v_j\right)^2\right\}$

MATLAB resolución min. cuad. del sistema lineal Hv=b → v=H\b

3. Deshacer transformación logarítmica y normalizar:

$$v_i,\ \text{i=1,..,n} \rightarrow w_i = e^{v_i},\ \text{i=1,..,n} \rightarrow \boxed{w_i = \frac{e^{v_i}}{\sum_1^n e^{v_i}},\ \text{i=1,..,n}}$$

Observaciones:
1. En el desarrollo anterior se han procesado sólo las ecuaciones relativas a los datos situados sobre la diagonal, ecuaciones con 1<=i<j<=n, atendiendo a que en el caso de la matriz sea recíproca los elementos de la matriz situados sobre la diagonal llevan toda la información de preferencias.
Se puede trabajar considerando los datos para i,j con i distinto de j, o bien sólo considerar i<j.
2. En el documento Word se describe más detalladamente este método y el método 3.2.2, ilustrándolos con un ejemplo.