4. PROBLEMA DE DECISIÓN DE GRUPO

Dado un grupo de expertos que formulan sus preferencias individuales sobre el conjunto de alternativas X (atendiendo a su campo de conocimiento, …) mediante MCP se trata de calcular un vector w de preferencias de las alternativas que refleje lo mejor posible las preferencias del grupo.

$E_1 \longrightarrow$ $M^1 = \left(m_{ij}^1\right)_{i,j=1,..,n}$

$E_m \longrightarrow$ $M^m = \left(m_{ij}^k\right)_{i,j=1,..,n}$

$\longrightarrow$? $\longrightarrow$ $w = \left(w_1, \cdots, w_n\right)^t$

(Vector prioridad grupo o colectivo)

Información posiblemente
- incompatible (distintos campos conocimientos, intereses,.. de los expertos)
- Incompleta: cada experto formula sólo preferencias sobre alternativas sobre las que tiene conocimiento preciso o información no disponible.
- Información inconsistente atendiendo al nº de alternativas, a simplicidad del modelo, dificultad cuantificar preferencias no tangibles,…

Problema de grupo

- Datos entrada: M_1, ...,M_m matrices de comparación por pares dimensión nxn. Se pueden considerar recíprocas y datos en escala Saaty. Pueden ser incompletas.

- Calcular un vector de pesos del grupo (o colectivo) w (y el ranking correspondiente) que refleje lo major possible las preferencias expresadas en las matrices anteriores. APLICAR método de priorización y método de agregación. Diferentes estrategias.

- Analizar la solución (según coresponda):

    - Acuerdo de cada experto con la solución (M_k versus W, para cada k)
    - Acuerdo del grupo con la solución.
    - Comparar los resultados obtenidos por los distintos métodos.
    - Visualización resultados (según corresponda, diagramas barras, imágenes escala grises,..).

4. 1. MÉTODOS DE CALCULO DE UN VECTOR DE PREFERENCIAS DE GRUPO

Consideramos el caso ideal, en el que todos los expertos están de acuerdo (existe unanimidad) y las matrices son consistentes. Entonces sabemos que existe un vector w de preferencias tal que

$$\text{Existen} \quad w_1,\dots,w_n \text{ tal que } \begin{cases} m^k{}_{ij} - \dfrac{w_i}{w_J} = 0, \\ i,j = 1,..,n;\ \text{k=1,..,m} \end{cases} \qquad (1)$$

- El sistema anterior no tiene en general solución exacta (información incompatible, inconsistente,..).
- Por ello calcularemos un vector w de preferencias de las alternativas que refleje lo mejor posible las preferencias del grupo (en un sentido preciso). Se busca la solución $w_1,..,w_n$ que "mejor ajusta los datos", en el sentido que "mejor resuelve el sistema (1)", haciendo uso de distintas métricas (mérica 1 y métrica 2):

Solución $w_1,..,w_n$ que "mejor ajusta los datos" o "mejor resuelve el sistema (1)" usando métricas 2 y 1:

Métrica 2: Encontrar $w_1,..,w_n$: $Min\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(m_{ij}^k - {}^{w_i}\!/\!_{w_i}\right)^2\right\}$

Métrica 1: Encontrar $w_1,..,w_n$: $Min\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|m_{ij}^k - {}^{w_i}\!/\!_{w_i}\right|\right\}$

Problemas: No linealidad

Valor absoluto

Seguir estrategias (ponderada y transf. log) vistas para m=1

Como ilustración: Método min_sum con transformación logarítmica

· Se efectúa la transformación:

$$M^k = (m_{ij}) \quad \rightarrow \quad L^k = (l_{ij}), \quad l_{ij} = \log(m_{ij})$$
$$w = (w_i) \quad \rightarrow \quad v = (v_i), \quad v_i = \log(w_i)$$

· Resultando el problema de optimización:

$$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| l_{ij}^k - v_i + v_j \right|$$

· $l_{ij}^k = \log(m_{ij}^k), \quad i, j = 1,..,n, \ \mathrm{i} \neq \mathrm{j}, \quad k = 1,..m$

· $v_i = \log(w_i)$

Se introducen nuevas variables:

$$n_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[\left|v_i - v_j - l_{ij}^k\right| + \left(v_i - v_j - l_{ij}^k\right)\right]$$
$$p_{ij}^k = \frac{1}{2}\left[\left|v_i - v_j - l_{ij}^k\right| - \left(v_i - v_j - l_{ij}^k\right)\right]$$

Problema de optimización:

$$Min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(n_{ij}^k + p_{ij}^k\right)$$

con:

$$l_{ij}^k - v_i + v_j + n_{ij}^k - p_{ij}^k = 0, \quad i, j = 1,..,n, i \neq j, \quad k = 1,..,m$$
$$n_{ij}^k \geq 0, \quad n_{ij}^k \geq 0, \quad \forall i, j, k$$

NOTAS.

- Se pueden procesar sólo los datos con i<j.
- INFORMACIÓN INCOMPLETA: l_{ij}^k DATO NO CONOCIDO

4.2. ANÁLISIS SOLUCIONES. MEDIDAS ERROR

- Calcular errores globales (del grupo), entendiendo el grupo como entidad, adaptando los errors que vimos para m=1:

$$Acuerdo\_grupo_{Fr} = \left\{ \sum_{k=1:m_{ij}^k:dato}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(m_{ij}^k - {w_i}/{w_j} \right)^2 \right\}^{1/2} \text{ (relativizar a nº datos conocidos)}$$

$$Acuerdo\_grupo_{1} = \left\{ \sum_{k=1:m_{ij}^k:dato}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| m_{ij}^k - {w_i}/{w_j} \right| \right\} \text{ (relativizar a nº datos conocidos)}$$

$$Máximo\_desacuerdo\_grupo = \max \left\{ \left| m_{ij}^k - {w_i}/{w_j} \right| \right\}$$

$$\text{nº no aciertos} = \sum_{k=1:m_{ij}^k:dato}^{m} \sum_{1\le i<j\le n}^{n} \delta_{ij}^k \text{ con } \delta_{ij}^k = \begin{cases} 1 \text{ if } w_i > w_j \text{ y } m_{ij}^k < 1, \\ \frac{1}{2} \text{ if } w_i = w_j \text{ y } m_{ij}^k \neq 1 \text{ or if } w_i \neq w_j \text{ y } m_{ij}^k = 1, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Nota : En todos los caso, se calculan los residuos y la agregación de éstos para los datos conocidos. Posteriormente, habrá que relativizar al nº de datos dados, ésto es dividir por el nº de datos conocidos.

- Errores producidos por la salida (w) respecto de la información de preferencias de cada experto: M^k versus Wgrupo, para cada k, utilizando las métricas que vimos para el caso m=1 y relativizando los resultados al nº de datos disponibles en cada caso.

$$\begin{array}{ccccc} E^1 & \ldots & E^k & \ldots & E^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \|M^1 - W\| & \ldots & \|M^k - W\| & \ldots & \|M^m - W\| \end{array}$$

$Acuerdo\_\exp ertok\_con\_solucion_{fro}$ (relativizar a nº datos conocidos)

$Acuerdo\_\exp ertok\_con\_solucion_{1}$ (relativizar a nº datos conocidos)

$Máximo\_desacuerdo\_\exp ertok$ (relativizar a nº datos conocidos)

Tareas 4 y 5

- Extender los métodos de ajuste de datos vistos para m=1 para tratar los datos dados por todos los expertos. Considerar el caso de información incompleta (puede haber matrices con datos no dados).
- Probar funcionamiento correcto de los métodos con ejemplo prueba (unanimidad de los expertos: todos proporcionan la misma matriz consistente). Otro ejemplo: ver en referencias o crear uno (p. ej.: carga trabajo asignaturas de un semestre).
- Análisis soluciones y visualización. Suponemos w (w>0 y sum(w)=1) es la solución proporcionada por el método objeto de estudio. Se consideran los residuos puntuales (en k e (i,j))

$$res_{ij}^{k} = \left| m_{ij}^{k} - \frac{w_i}{w_j} \right|$$

A partir de ellos, se adaptan las medidas de error vistas en el caso de las MCP para analizar la solución para cada uno de los métodos estudiados versus k (para cada experto) y versus el grupo (tratado como una entidad). Visualizar (por ejemplo pie(vector de errores de los expertos para cada método),..).