## 3. MÉTODOS Y ALGORITMOS PARA EL CASO DE 1 EXPERTO

Calcular un vector de prioridad w a partir de una matriz M de comparación por pares, aplicando los tres métodos descritos en las diapositivas y analizar los resultados.

**3.1. Método autovector asociado al autovalor dominante (visto en clase):**
**-** Aplicar el método de la potencia para calcular el autovector (w) positivo normalizado (sum(w)=0), asociado al autovalor dominante (l), y el autovalor l dominante de M.
- Comparar los resultados obtenidos con los que proporciona el comando eig de Matlab.
- Calcular el índice de inconsistencia IC(M)=(l-n)/(n-1), nos ayudará a interpretar los resultados.

**3.2. Método de ajuste de datos mínimos cuadrados.** Se trata de calcular w tal que sus componentes reflejen los mejor posible los datos (siguiendo el modelo). Esto es lo mismo que "resolver lo mejor posible" el sistema de ecuaciones (no lineales) siguientes

$$\left.\begin{array}{l} m_{ij} = w_i / w_j \quad \text{i,j=1,...,n, i} \neq \text{j} \\ w_1 + \ldots + w_n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{(1) Sist. NO LINEAL Sobredeterminado}$$

En general este sistema no tiene solución exacta, salvo que la matriz M sea consistente. En general la matriz M no es consistente, por lo que en primer lugar nos centraremos en calcular la solución que mejor resuelve el sistema en el sentido mínimos cuadrados, que es la solución que minimiza la expresión siguiente (consistente en usar la métrica 2 o euclídea para agregar los residuos):

$$Min\left\{ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left| m_{ij} - w_i / w_i \right|}_{residuo_{ij}}^{2} \right\}$$

El sistema (1) es no lineal, se trata de "linealizarlo" y construir a partir de él un sistema lineal. A continuación veremos dos formas de llegar a sistemas lineales.

**3.2.1. MÉTODO MÍNIMOS CUADRADOS LOGARÍTMICO**:

- Aplicamos una transformación logarítmica a las ecuaciones iniciales (1), resultando un nuevo sistema LINEAL (2) en las variables vi (vi=log(wi)):

$$\left.\begin{array}{c} m_{ij} = w_i / w_j \\ \text{i,j=1,...,n, i} \neq \text{j} \end{array}\right\} (1) \xrightarrow[v_i = \log(w_i)]{} \left.\begin{array}{c} v_i - v_j = \log(m_{ij}), \\ \text{i,j=1,...,n, i} \neq j \end{array}\right\} \text{Sist. LINEAL Sobredeterminado (Hv=b) (2)}$$

Este es un sistema lineal, escrito matricialmente Hv=b, donde H es la matriz de coeficientes de las incógnitas y b el vector de términos independientes.

Por ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 & 4 \\ 0.75 & 1 & 1.5 & 3 \\ 0.5 & 0.75 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.3 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow L = \log(M) = (l_{ij} = \log(m_{ij}))$$

A partir del sistema no lineal (1), obtenemos el sistema lineal (2), eliminando las ecuaciones de la diagonal:

$$\left.\begin{array}{l} w_1/w_2 = 1.5 \\ w_1/w_3 = 2 \\ w_1/w_4 = 4 \\ w_2/w_1 = 0.75 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} v_1\text{-}v_2 = \log(1.5) \\ v_1\text{-}v_3 = \log(2) \\ v_1\text{-}v_4 = \log(4) \\ v_2\text{-}v_1 = \log(0.75) \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \rightarrow Hv = b$$

donde

$$H=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1.. \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} \log(1.5) \\ \log(2) \\ \log(4) \\ \log(0.75) \\ .. \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal Hv=b es sobredeterminado y en general no tiene solución exacta (salvo que M sea consistente). Por eso calculamos la solución que “mejor resuelve el sistema” en el sentido mínimos cuadrados (visto en Algorítmica Numérica), con Matlab: v=H\b.
- Deshacemos el cambio logarítmico para obtener w a partir de v: w=exp(v)
- Normalizamos la solución: w=w/sum(w)

### 3.2.2. MÉTODO MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADO:

- Multiplicamos las ecuaciones iniciales (1) por wi (según corresponda), resultando el sistema LINEAL (3):

$$\left.\begin{array}{l} m_{ij} = w_i / w_j \quad \text{i,j=1,...,n, i} \neq \text{j} \\ w_1 + \ldots + w_n = 1 \end{array}\right\}(1) \rightarrow \left.\begin{array}{l} m_{ij} w_j - w_i = 0, \ \text{i,j=1,...,n, i} \neq \text{j} \\ w_1 + \ldots + w_n = 1 \end{array}\right\}(3) \text{ Sist. LINEAL (Hw=b)}$$

Ejemplo: Para la matriz del ejemplo anterior sería:
A partir del sistema no lineal (1), obtenemos el sistema lineal (2), eliminando las ecuaciones de la diagonal:

$$\left.\begin{array}{l} w_1/w_2 = 1.5 \\ w_1/w_3 = 2 \\ w_1/w_4 = 4 \\ w_2/w_1 = 0.75 \\ \ldots\ldots \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} w_1 - 1.5w_2 = 0 \\ w_1 - 2w_3 = 0 \\ w_1 - 4w_4 = 0 \\ w_2 - 0.75w_1 = 0 \\ \ldots\ldots \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow Hw = b$$

donde

$$H=\begin{pmatrix} 1 & -1.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ -0.75 & 1 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.. \qquad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal Hw=b es sobredeterminado y en general no tiene solución exacta (salvo que M sea consistente). Por eso calculamos la solución que "mejor resuelve el sistema" en el sentido mínimos cuadrados (visto en Algorítmica Numérica), con Matlab: w=H\b.
- Normalizamos la solución: w=w/sum(w)

**OBJETIVO 1.**

- Implementar con Matlab los 3 métodos descritos (autovector principal, mínimos cuadrados logarítmico y mínimos cuadrados ponderado).
-- El método de la potencia para calcular el autovector asociado al autovalor dominante lo tenéis en el ejercicio computacional que iniciamos en clase.
-- Para implementar los otros dos métodos: En cada caso: 1º hay construir la correspondiente matriz H y vector b a partir de los datos de M. 2º hay que resolver los sistemas lineales correspondientes y a partir de las soluciones calcular el vector w normalizado.

- Para confirmar que lo entendéis bien y funcionan correctamente los procedimientos, os propongo empezar con un caso de prueba en el que conozcamos la solución final. Por ejemplo: partimos de la solución w=(0.4, 0.3, 0.2, 0.1)\`-> construimos M=(wi/wj) (consistente) -> Obtenemos w por los métodos implementados. La solución en todos los casos, salvo errores de redondeo debe ser el vector w inicial.

- Un vez entendido y programado deberíais crear funciones.m que sistematicen la aplicación de cada uno de los métodos con argumento de entrada M y argumento de salida w.