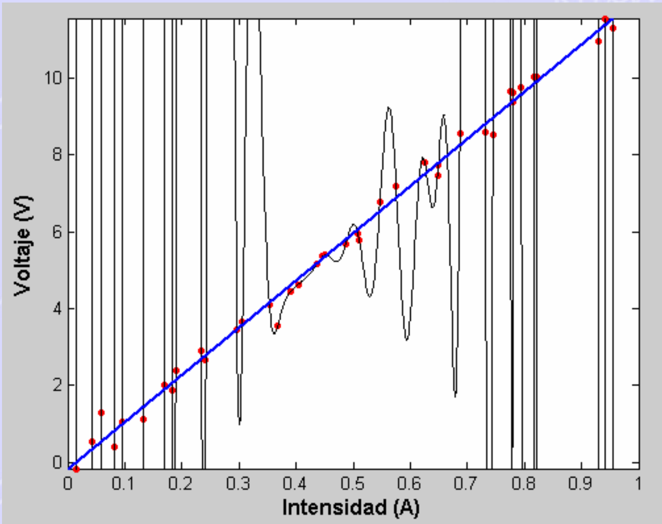
TEMA 3.

AJUSTE de DATOS



Ajuste de datos

En interpolación: nº coeficientes (incógnitas) = nº datos (ecuaciones)

En ajuste: permitimos que número de coeficientes < número de datos

nº incógnitas < nº ecuaciones ???

No se podrán verificar exactamente (=) las ecuaciones (=).
Nos conformaremos con que más o menos se cumplan (~).

Sistemas Lineales sobredeterminados:

N ecuaciones

$$\left(H \right) \cdot \left(c \right) \approx \left(v \right)$$

(n<N) incógnitas

Ajuste de datos

Tras resolver no pasaremos por los puntos sino cerca de ellos

Es un problema muy importante en la práctica:

- Reduzco ruido de las medidas, detecto patrón general.
- Describo muchos datos con menos parámetros (compresión)

La pega es que el problema no está bien definido:

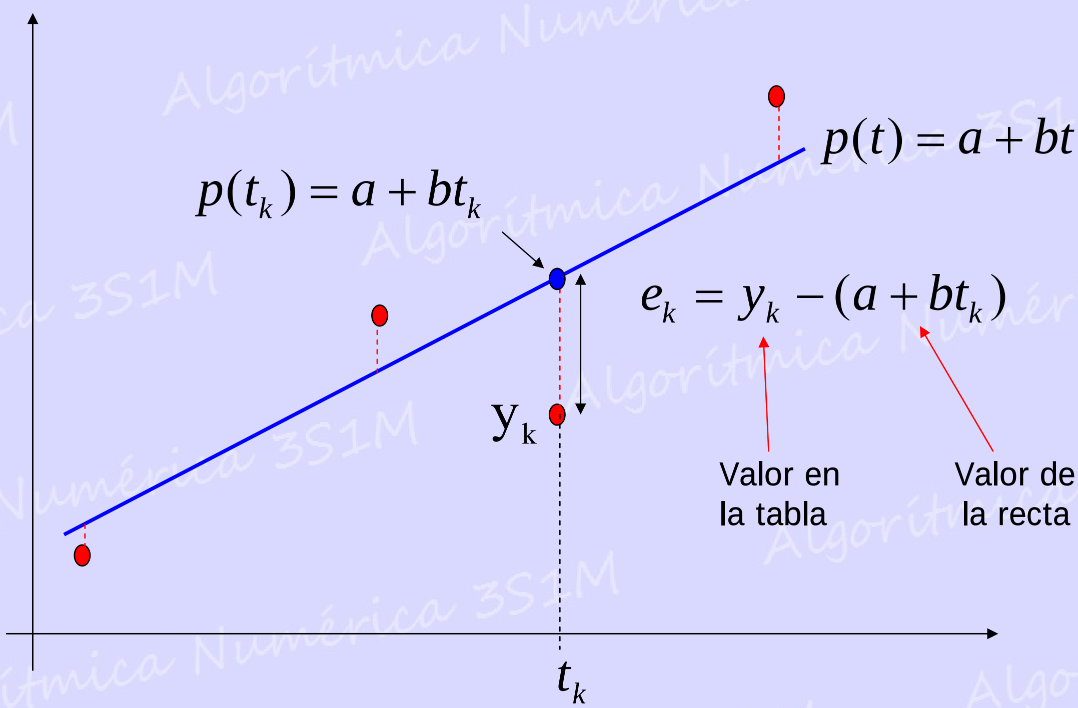
HAY UNANIMIDAD EN EL SIGNIFICADO = (PASAR POR ENCIMA)

PASAR CERCA ≈ PUEDE SIGNIFICAR DISTINTAS COSAS

Hay que definir un criterio de "semejanza"

Un problema clásico

"Mejor" ajuste de una recta a una nube (tabla) de puntos {tk, yk}:



Distancia a minimizar

$$E = \sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - p(t_k))^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - a - bt_k)^2$$

Hallar los coeficientes (a,b) que minimicen E, el error global del ajuste

¿Hallar un mínimo?

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{k=1}^{N} (y_k - a - bt_k)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{k=1}^{N} (y_k - a - bt_k)(-t_k) = 0$$

Distancia a minimizar

$$E = \sum_{k=1}^{N} e_k^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - p(t_k))^2 = \sum_{k=1}^{N} (y_k - a - bt_k)^2$$

Hallar los coeficientes (a,b) que minimicen E, el error global del ajuste

¿Hallar un mínimo?

$$\sum_{k=1}^{N} y_k = a\sum_{k=1}^{N} 1 + b\sum_{k=1}^{N} t_k$$

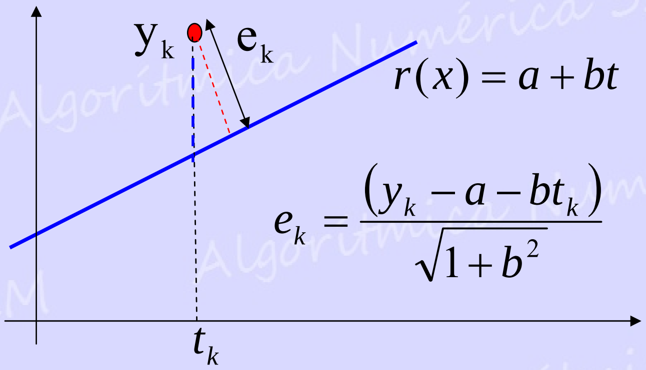
$$\sum_{k=1}^{N} t_k y_k = a\sum_{k=1}^{N} t_k + b\sum_{k=1}^{N} t_k^2$$

$$\begin{pmatrix} N & \sum_{k=1}^{N} t_k \\ \sum_{k=1}^{N} t_k & \sum_{k=1}^{N} t_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} y_k \\ \sum_{k=1}^{N} y_k t_k \end{pmatrix}$$

Los valores $\sum_{k=1}^{N} t_k, \sum_{k=1}^{N} t_k^2, \sum_{k=1}^{N} y_k, \sum_{k=1}^{N} y_k t_k$ salen de los datos de la tabla.

Objeciones a esta solución

¿No sería mejor definir los errores como distancias mínimas a la recta?



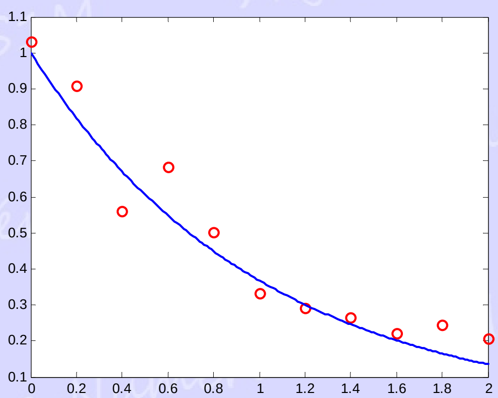
Además, el criterio a minimizar $E = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$ es bastante arbitrario.

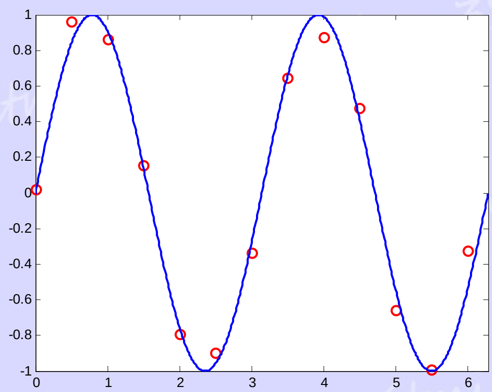
Otras posibilidades tan buenas (o mejores) $E = \sum_{k=1}^{N} |e_k|$ $E = \max\{|e_k|\}$

¿Por qué usamos mínimos cuadrados? Porque es (mucho) más fácil
Garantizamos que el problema se reduce a resolver un sistema lineal.

Ampliarlo a otros casos

¿Podríamos generalizar este ajuste de mínimos cuadrados a otras curvas?





Revisitar el problema de la recta

Planteamos el problema de la recta como si fuese una interpolación:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} a+bt_1 \approx y_1 \\ a+bt_2 \approx y_2 \end{array}} \\ a+bt_3 \approx y_3 \\ \dots \\ a+bt_N \approx y_N \end{array}}$$

Esto es lo que podemos hacer con interpolación.

Esto es imposible verificar con sólo 2 coeficientes.

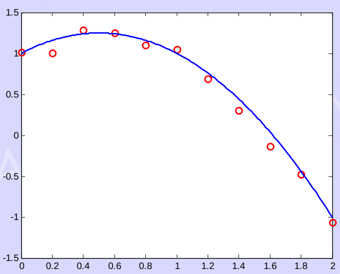
Pero si puedo plantearlo cambiando el = por un ~

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}$$

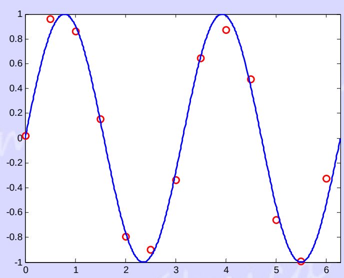
Base {1 , t}

Fácilmente generalizable a otros casos

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ 1 & t_3 & t_3^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_N & t_N^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & \sin(t_1) & \cos(t_1) \\ 1 & \sin(t_2) & \cos(t_2) \\ 1 & \sin(t_3) & \cos(t_3) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \sin(t_N) & \cos(t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix}$$



La matriz H se construye como en la interpolación, pero ahora es más alta (más condiciones / ecuaciones) que ancha (incógnitas / coefs.)

¿Cómo resolver el sistema sobredeterminado H·c ≈ v al que llegamos?

Resolver el sistema sobredeterminado

$$\begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}$$

Para resolver $H \cdot c \cong v$ hay que elegir un criterio.

Definimos el vector de residuos o errores como:

$$\bar{r} = \bar{v} - H \cdot \bar{c}$$

En interpolación conseguíamos hacer 0 todas sus componentes (pasabamos por todos los puntos)

En ajuste no vamos a conseguir anularlo (no pasamos por los puntos).

Se trata de hacerlo pequeño ¿en qué sentido?

<u>CRITERIO de MÍNIMOS CUADRADOS</u>

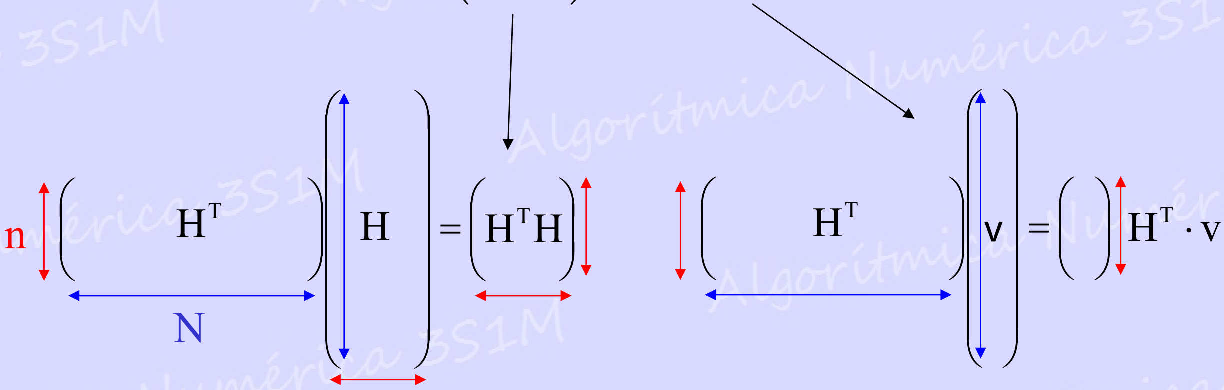
La solución <u>c</u> debe minimizar la norma al cuadrado del vector de residuos:

$$\|\bar{r}\|_2^2 = \|\bar{v} - H\bar{c}\|_2^2$$

Solución de un sistema sobredeterminado

La solución que minimiza la norma del vector de residuos $r = (v - H \cdot c)$ es la solución de las llamadas ecuaciones normales:

$$\left(\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{H}\right) \cdot \bar{\mathrm{c}} = \mathrm{H}^{\mathrm{T}} \cdot \bar{\mathrm{v}}$$

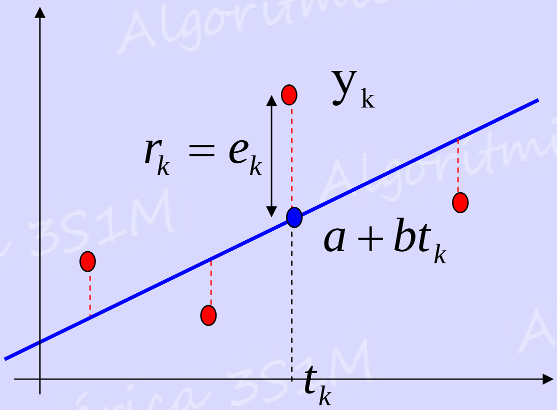


No importa el número (N) de puntos iniciales presentes en el ajuste.

Al final terminamos con un sistema cuyas dimensiones se corresponde con el número de coeficientes n (típicamente n << N)

Caso de la recta anterior: terminábamos con un sistema 2 x 2

Caso de la recta anterior



$$\bar{r} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - a - bt_1 \\ y_2 - a - bt_2 \\ \dots \\ y_k - a - bt_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_k \end{pmatrix}$$

La k-ésima componente de r es: $r_k = (\bar{v} - H\bar{c})_k = y_k - (a + bt_k) = e_k$

La norma de r al cuadrado es: $\|\bar{r}\|_2^2 = \|\bar{v} - H\bar{c}\|_2^2 = \sum_k (\bar{v} - H\bar{c})_k^2 = \sum_k e_k^2$

Minimizar ||r|| coincide con el criterio usado en el ajuste de la recta.

La solución del sistema sobredeterminado con el criterio de minimizar $\|\bar{r}\|_2^2$ debe coincidir con la solución clásica del ajuste a una recta.

Ecuaciones Normales para el ajuste a una recta

$$H^T H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum t_k \\ \sum t_k & \sum t_k^2 \end{pmatrix}$$

$$H^T \bar{v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \dots & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum t_k y_k \end{pmatrix}$$

$$(H^T H) \cdot \bar{c} = H^T \cdot \bar{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} N & \sum t_k \\ \sum t_k & \sum t_k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum t_k y_k \end{pmatrix}$$

Mismo sistema que salía antes.

Problema 1

Sea la tabla de datos:

ti	-1	0	1	2
fi	-2	-1	0	3

Plantear el sistema sobredeterminado obtenido al intentar ajustar los datos con:

$$f(t) = A + Bt + Ct^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = A + Bt^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$$

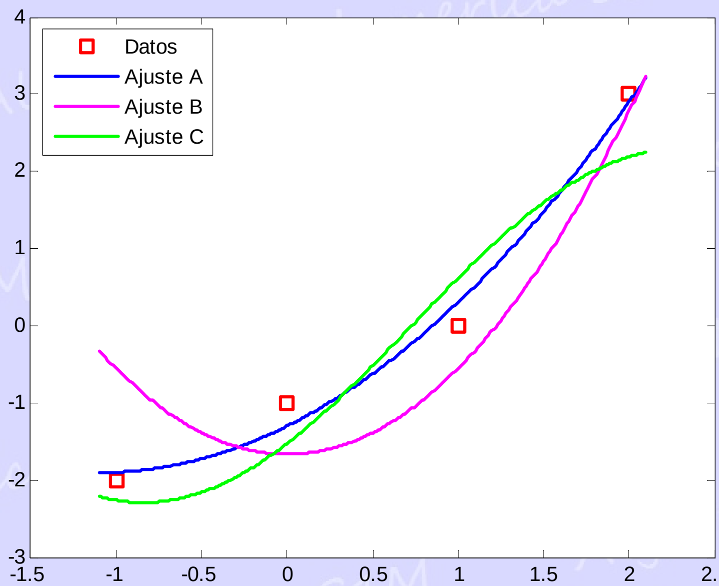
$$\begin{pmatrix} \cos(-1) & \sin(-1) \\ \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Problema 1 (soluciones y gráficas)

A) $f(t) = -1.3 + 1.1 \cdot t + 0.5 \cdot t^2$

B) $f(t) = -1.6667 + 1.1111 \cdot t^2$

C) $f(t) = -1.5266 \cdot \cos(t) + 1.7090 \cdot \sin(t)$



¿Cómo hacemos esto en MATLAB?

Construimos H y v como hacíamos con interpolación.

xk	-1	0	1	2
yk	-2	-1	0	3

```
xk =[-1  0 1 2]'; %Vector columna
yk =[-2 -1 0 3]';
H = [xk.^0 xk.^1 xk.^2];
```

Una vez que disponemos de H y v resolvemos las ecuaciones normales:

$$H^T H \cdot c = H^T y \quad \Rightarrow \quad c = \left(H^T H\right)^{-1} \cdot \left(H^T y\right)$$

```
Q = (H' * H); b = H'*yk;   % Operador ' transpone matriz
size(Q), ans = 3 x 3       % (H'*H) es de tamaño 3x3
c = inv(Q)*b;              % o c = Q\b
```

El vector c contiene los tres coeficientes A,B,C de la solución

TODAVÍA más fácil

Construimos H y v como hacíamos con interpolación.

xk	-1	0	1	2
yk	-2	-1	0	3

```
xk =[-1  0 1 2]'; %Vector columna
yk =[-2 -1 0 3]';
H = [xk.^0 xk.^1 xk.^2];
```

En MATLAB nos vale el mismo comando para resolver el caso exacto (interpolación) como el caso aproximado (ajuste):

```
c = H \ yk;  % Solución ajuste mínimos cuadrados
```

- Si H es cuadrada (invertible) corresponde a hacer: $c = H^{-1} y$
- Si H no es cuadrada, solución de mínimos cuadrados:

$$c = \left(H^T H\right)^{-1} H^T y$$

DIFERENCIAS INTERPOLACION-AJUSTE

Interpolación: se plantea un sistema lineal $H\overline{c} = \overline{v}$

H cuadrada (num. ecuaciones = num. incógnitas)

Solución: $\overline{c} = H^{-1}\overline{v}$

Ajuste : sistema lineal sobredeterminado $H\overline{c} \approx \overline{v}$

H más alta (más ecuaciones) que ancha (incógnitas)

Solución: $\overline{c} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \cdot \overline{v}$ que minimiza $\left\|\overline{v} - H\overline{c}\right\|_2$

- La construcción de la matriz H es similar en ambos casos.
- La resolución es totalmente similar en MATLAB:

\>> c = H \ v si H cuadrada invertible = $\overline{c} = H^{-1}\overline{v}$

si H sobredeterminada = $\overline{c} = \left(H^T H\right)^{-1} H^T \cdot \overline{v}$

¿Qué nos queda por ver en ajuste?

El caso básico lo tenemos cubierto (y desde el punto de vista de su resolución en MATLAB es prácticamente idéntico a lo que hicimos en la interpolación).

Estudiaremos algunas variantes del problema de ajuste básico:

A) El ajuste no se plantea con funciones del tipo $u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k b_k(t)$

¿Cómo resolver un mejor ajuste con una función del tipo $u(t) = Ae^{\beta t}$?

B) El problema puede tener una mezcla de condiciones estrictas (hay que cumplirlas de forma exacta) y otras aproximadas. Mezclamos aspectos de interpolación (estamos obligados a pasar por unos ciertos puntos) y de ajuste (nos basta con pasar cerca de los otros).

C) Solo para LAB: sin llegar al caso anterior de tener algunas condiciones exactas, es posible que ciertos datos sean más importantes que otros (p.e. han sido tomados por un observador más experimentado).
¿Cómo reflejar esa diferencia de calidades en el ajuste? (uso de pesos)

AJUSTE: hoja de problemas

A) El ajuste no se plantea con funciones expresables como $u(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k b_k(t)$

Problemas: 2 , 3a, 3b, 3c, 3d

SOLUCIÓN: desarrollar o modificar la expresión (despejar, invertir, aplicar logaritmos, ...) hasta llegar a un ajuste lineal que si sepamos resolver.
Hay que recordad que no se está resolviendo el problema original.

B) Algunas de las condiciones son estrictas y que otras son aproximadas.
"Mezcla" de interpolación (acertar en unos puntos) y ajuste (cerca de otros).

Problemas: 4, 5 , 6 , 7, 8, 9

SOLUCION: 1) Aplicar condiciones previas de forma exacta.
2) Reducir el número de parámetros
3) Resolver el problema de ajuste con los parámetros restantes.

A) Pasar a un problema lineal (prob. 2-3)

¿ Ajustar una tabla de datos {tk, yk} a exponencial $u(t) = Ae^{\beta t}$?

Tenemos 2 parámetros, A y β, pero no podemos escribir u(t) como $A \cdot (\ ) + \beta \cdot (\ )$

Nuestro objetivo es conseguir que $y_k \approx u(t_k) = Ae^{\beta t_k}$

Aplico logaritmos a la expresión: $\log(y_k) \approx \log(Ae^{\beta t_k}) = \log A + \beta t_k = \alpha + \beta t_k$

El problema es ahora ajustar unos nuevos datos $\{t_k, \log(y_k)\}$ con una recta

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ \dots & \dots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \log(y_1) \\ \log(y_2) \\ \log(y_3) \\ \dots \\ \log(y_N) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} A = e^{\alpha} \\ \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow u(t) = Ae^{\beta t}$$

Ventajas e Inconvenientes de este enfoque

VENTAJA: Podemos resolver el problema

DESVENTAJA: estamos resolviendo OTRO problema !!

Estoy minimizando $E = \sum_k \left(\log(y_k) - \alpha - \beta t_k\right)^2$,

no lo que me pedían en el problema original: $E = \sum_k \left(y_k - Ae^{\beta t_k}\right)^2$

¿Cómo es que lo aceptamos?

a) Mejor resolver algo similar de una forma fácil que quedarnos bloqueados alcanzar ninguna solución porque no sabemos hacer nada.

b) Si el criterio de mínimos cuadrados ya era un poco arbitrario, ¿por qué no modificar el criterio un poco más?

¿No se puede resolver el problema original? SI pero con bastante más trabajo

¿Cuáles son las consecuencias de este "compromiso"?

Problema 2

Ajustar la tabla

tk	0	1	2	3
yk	4.5	2.4	1.5	1

con la función $u(t) = Ae^{\beta t}$

a) Modificar el problema convirtiéndolo en un ajuste a una recta.
b) Determinar el sistema sobredeterminado a resolver.
c) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones normales.

a) Modificar el problema convirtiéndolo en un ajuste a una recta.

$$y_k \approx u(t_k) = Ae^{\beta t_k} \Rightarrow \log(y_k) \approx \log(A) + \beta \cdot t_k = a + bt_k$$

Equivalente a ajustar con una recta la tabla:

tk	0	1	2	3
log(yk)	1.5041	0.8755	0.4055	0.000

y pasar de los parámetros hallados (a,b) a los originales (a=log(A), b = β).

Problema 2

b) Determinar el sistema sobredeterminado a resolver.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \approx \log\begin{pmatrix}4.5\\2.4\\1.5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5041\\0.8755\\0.4055\\0.0000\end{pmatrix} = \mathrm{v}$$

c) Plantear el sistema de ecuaciones normales:

$$\mathrm{H}^T\mathrm{H} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 6\\6 & 14\end{pmatrix} \qquad \mathrm{H}^T\mathrm{v} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5041\\0.8755\\0.4055\\0.0000\end{pmatrix}$$

Solución $\bar{c} = \left(\mathrm{H}^T\mathrm{H}\right)^{-1}\mathrm{H}\cdot\bar{\mathrm{v}}$

Problema 2 (MATLAB)

```
% DATOS TABLA (VECTORES COLUMNA)
ti = [0 1 2 3]'       % abcisas {ti}
yi = [4.5 2.4 1.5 1]’ % ordenadas {yi}

H = [ti.^0 ti];    % MATRIZ H [1’s t’s]
v = log(yi);       % VECTOR v del problema lineal “equivalente”

% OPCION A (Comando \ de MATLAB)
c = H\v

% OPCION B (Sol a través de las ecuaciones normales)
N = H'*H; vv = H'*v; % Matriz y vector de las ecs normales
c=inv(N)*(vv),    % Solución ecs normales

A = exp(c(1)), beta=c(2),  % Parámetros iniciales del problema
```

Con ambas opciones el resultado es el mismo: c = [1.4436
-0.4982]

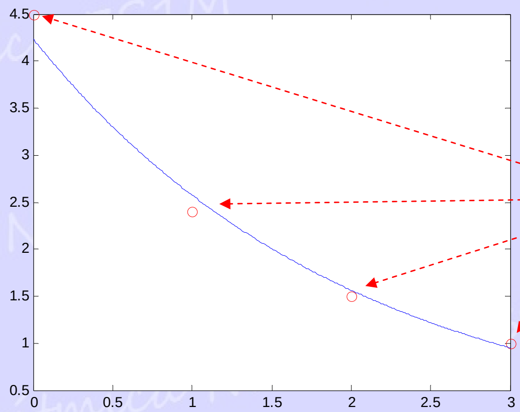
Y por lo tanto A =exp(1.4436) = 4.2359, beta = -0.4982

Problema 2 (gráficas en MATLAB)

```
% Gráficos
ti = [0 1 2 3]'         % abcisas {ti}
yi = [4.5 2.4 1.5 1]‘ % ordenadas {yi}

tt = [0:0.01:3];       % malla fina para pintar gráfica
uu = A*exp(beta*tt); % Evalúo función ajuste u(t) en tt para pintar

figure(1); plot(ti,yi,'ro',tt,uu,'b')
```



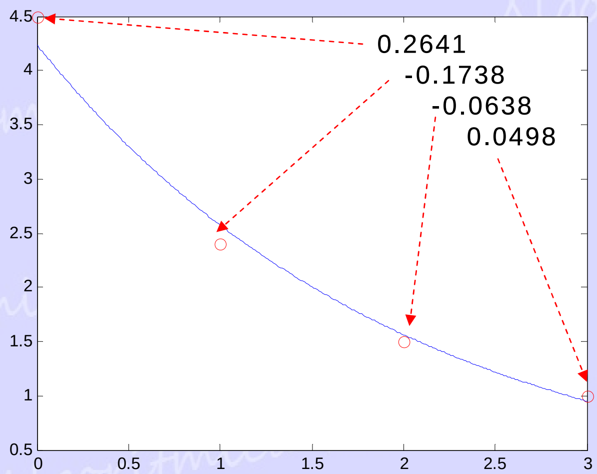
¿No crecen los errores al acercamos al origen?

Problema 2 (residuos)

Si en el problema resuelto el vector v no contiene los {yk} originales no podremos calcular los residuos simplemente como res = (v – H*c)

Tendremos que recurrir a la definición: $e_k = y_k - u(t_k) = \left(y_k - Ae^{\beta t_k}\right)$

```
res=yi-A*exp(beta*ti) % residuos = diferencias entre u(t) y los datos
```

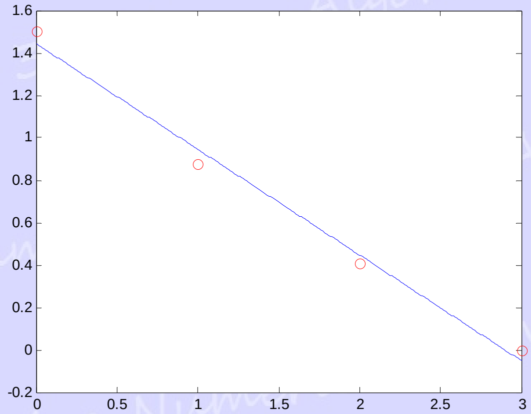


Efectivamente, los residuos (errores) van aumentando cuando nos acercamos al origen.

¿De donde viene esta tendencia?

Problema 2 (MATLAB)

```
% Gráfica del verdadero ajuste: una recta a {log(yi)}
figure(1); plot(ti,log(yi),'ro',tt,log(uu),'b')
```



¿Residuos? $e_k = \left(\log(y_k) - \alpha - \beta t_k\right)$

```
% residuos del prob. modificado
res=log(yi) – (c(1)*1 + c(2)*ti)
res=v-H*c,

 0.0605
-0.0699
-0.0417
 0.0511
```

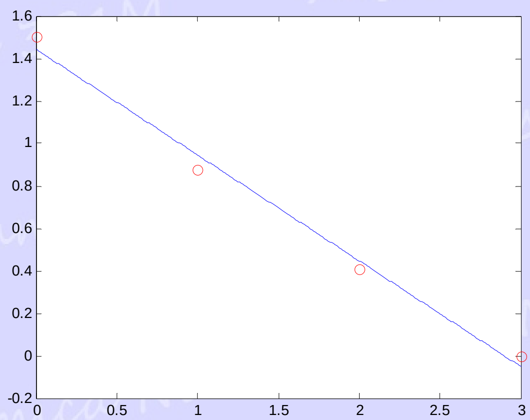
Ahora están mucho más equilibrados.

MORALEJA: Este tipo de “modificaciones” (linearizar el problema) pueden distorsionar los resultados (no serán óptimos)

Lo que hacemos y lo que nos gustaría hacer

Ajusto log(datos) a una recta

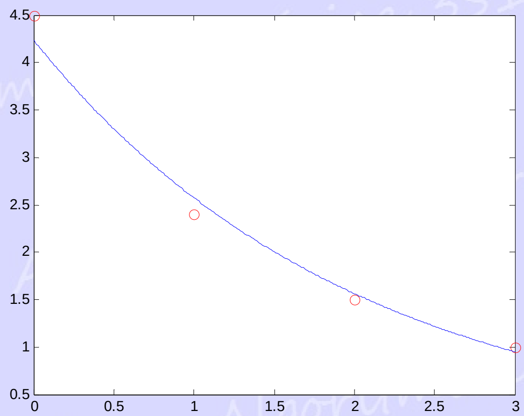
$$\log(datos) \approx recta$$



Estoy seguro de que esta recta es el mejor ajuste que existe (en el sentido de mínimos cuadrados) a los puntos dados por log(datos)

Espero que exp(recta_ajuste) pase cerca de los datos originales

$$datos \approx e^{recta}$$



Aunque el ajuste es RAZONABLE, estoy casi completamente seguro de que esta exponencial NO es el mejor ajuste a los datos originales

Problema 3

Se considera el problema de ajustar una serie de datos {tk,yk} usando curvas con la siguiente forma:

a) $y = Ate^{Bt}$ b) $y = \frac{A}{1 + B\cos(t)}$ c) $y = \frac{At^2}{B + t^2}$ d) $y = A\sin(\omega_0 t + B)$

- Modificar las expresiones anteriores para convertirlas en ajustes según un modelo lineal en sus coeficientes:

$$\begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ v \\ \\ \end{pmatrix}$$

- Dar la expresión de la matriz H y vector b en cada caso, indicando el posible cambio de parámetros entre (A, B) y (α, β)

Problema 3a

a) $y = Ate^{Bt}$ ¿Convertirlo en un ajuste lineal? Teniendo un parámetro dentro de una exponencial lo primero es tratar de aplicar logaritmos:

$$y_k \approx A \cdot t_k \cdot e^{Bt_k} \Rightarrow \log(y_k) \approx \log(A) + \log(t_k) + Bt_k$$

$$\log(y_k) - \log(t_k) = \log\left(\frac{y_k}{t_k}\right) \approx \alpha + \beta t_k$$

Otra forma de llegar a lo mismo: $y_k \approx A \cdot t_k \cdot e^{Bt_k} \Rightarrow \left(\frac{y_k}{t_k}\right) = A \cdot e^{Bt_k}$

$$\log\left(\frac{y_k}{t_k}\right) = \log(A) + Bt_k = \alpha + \beta t_k \qquad \begin{cases} \alpha = \log(A) \\ \beta = B \end{cases}$$

Problema 3a (cont)

b) Construir sistema sobredeterminado

$$\log\left(\frac{y_k}{t_k}\right) \approx \alpha + \beta t_k$$

$$\begin{pmatrix} \log(y_1/t_1) \\ \log(y_2/t_2) \\ \cdots \\ \cdots \\ \log(y_N/t_N) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & t_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \alpha = \log(A) \\ \beta = B \end{matrix}$$

Antes de dar la solución, volver a los parámetros iniciales: $\begin{cases} A = e^{\alpha} \\ B = \beta \end{cases}$

Problema 3b

$$y = \frac{A}{1 + B\cos(t)} \Rightarrow y_k + B \cdot y_k \cdot \cos(t_k) \approx A \Rightarrow y_k \approx A - B \cdot y_k \cdot \cos(t_k)$$

El ajuste se plantea usando sobre los mismos coeficientes A y B originales.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_N \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -y_1 \cdot \cos(t_1) \\ 1 & -y_2 \cdot \cos(t_2) \\ 1 & -y_3 \cdot \cos(t_3) \\ \cdots & \cdots \\ 1 & -y_N \cos(t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Problema 3b (otra forma)

$$y=\frac{A}{1+B\cos(t)} \Rightarrow \frac{1}{y_k} \approx \frac{1+B\cos(t_k)}{A} = \alpha\cdot 1+\beta\cos(t_k)$$

$$\alpha = 1/A$$
$$\beta = B/A$$

$$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ \dots \\ 1/y_N \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & \cos(t_1) \\ 1 & \cos(t_2) \\ 1 & \cos(t_3) \\ \dots & \dots \\ 1 & \cos(t_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Tras resolver α y β, volver a los coeficientes originales $\begin{cases} A = 1/\alpha \\ B = A\beta = \beta/\alpha \end{cases}$

Problema 3c

c) $$y=\frac{At^2}{B+t^2} \Rightarrow \frac{1}{y_k} \approx \frac{B+t_k^2}{At_k^2} = \alpha\left(\frac{1}{t_k^2}\right)+\beta\cdot 1$$

$$\begin{pmatrix} 1/y_1 \\ 1/y_2 \\ \dots \\ \dots \\ 1/y_N \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1/t_1^2 & 1 \\ 1/t_2^2 & 1 \\ 1/t_3^2 & 1 \\ \dots & \dots \\ 1/t_N^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha = B/A$$
$$\beta = 1/A$$

Tras resolver, volver a los parámetros iniciales:

$$A = 1/\beta$$
$$B = A\alpha = \alpha/\beta$$

Problema 3c (otra forma)

$$y = \frac{At^2}{B+t^2} \Rightarrow y_k \cdot \left(B + t_k^2\right) \approx At_k^2 \Rightarrow y_k \cdot t_k^2 \approx At_k^2 - B \cdot y_k$$

Este enfoque tiene la ventaja de que los parámetros sobre los que se resuelve el ajuste son los A y B originales.

No hay que convertir de α y β de vuelta a A y B como antes.

$$\begin{pmatrix} y_1 \cdot t_1^2 \\ y_2 \cdot t_2^2 \\ y_3 \cdot t_3^2 \\ \cdots \\ y_N \cdot t_N^2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} t_1^2 & -y_1 \\ t_2^2 & -y_2 \\ t_3^2 & -y_3 \\ \cdots & \cdots \\ t_N^2 & -y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Fijaros que ambos "métodos" van a dar soluciones distintas (ya que cada uno está minimizando errores distintos).

Y <u>probablemente ninguno de ellos sea la verdadera solución</u>.

Problema 3d

Ajustar los datos {tk,yk} a una sinusoide $A\sin(\omega_0 t + B)$ de frecuencia ω_0 conocida, pero con fase B y amplitud A por determinar.

- Modificar el problema para plantearlo como un problema de ajuste lineal.
- Indicar como construir el sistema sobredeterminado (H·c=v) a resolver.
- Relacionar la fase B y amplitud A con la solución del problema modificado.

$$y_k \approx A\sin(\omega_0 t_k + B) = A\cos(B)\sin(\omega_0 t_k) + A\sin(B)\cos(\omega_0 t_k)$$

$$y_k \approx \alpha \cdot \sin(\omega_0 t_k) + \beta \cdot \cos(\omega_0 t_k)$$

$$\alpha = A\cos(B)$$
$$\beta = A\sin(B)$$

Coeficientes del nuevo problema planteado.

Problema 3d

- Sistema sobredeterminado a resolver: $\alpha \cdot \sin(\omega_0 t_k) + \beta \cdot \cos(\omega_0 t_k) \approx y_k$

$$\begin{pmatrix} \\ & H & \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

Resolvemos sistema sobredeterminado y obtenemos solución [α β].

Deshacemos el cambio de variable para determinar A y B originales

$$\begin{aligned} \alpha &= A\cos(B) \\ \beta &= A\sin(B) \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} A &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ \tan(B) &= \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

B) Condiciones previas (problemas 4-9)

Algunos problemas vienen con condiciones de diferente “prioridad”:

- Hay condiciones “exactas” que hay que cumplir si o si (como en interpolación)
- Otras condiciones son “aproximadas” y nos conformamos con “pasar” cerca.

Método de resolución:

1. Imponer primero condiciones exactas (con igualdades).
2. Se reducirá el número de parámetros libres (si, por ejemplo, tenemos 2 condiciones exactas previas a cumplir, 2 de los coeficientes iniciales quedarán determinados o expresados en relación con los restantes).
3. Plantear el problema de aproximación en las condiciones “aproximadas” usando los coeficientes restantes, obteniendo el correspondiente sistema sobredeterminado.

Tras 1-2) deben quedar menos coeficientes que datos a ajustar.

Prob 4 (julio 2013): condiciones previas

Hallar la parábola que verifica que p(0)=0 , p'(0)=0

y que mejor ajusta, en el sentido de mínimos cuadrados, los datos de la tabla adjunta

xk	1	2	3
yk	1	5	10

Expresión de partida: $p(x) = a + bx + cx^2$

Imponemos condiciones previas:

$$\begin{array}{l} p(0) = a = 0 \\ p'(0) = b = 0 \end{array} \longrightarrow p(x) = cx^2$$

Como problema de interpolación sobra un coeficiente → solución múltiple.

Prob 4 (julio 2013): condiciones previas

Hallar la parábola que verifica que p(0)=0 , p'(0)=0

y que mejor ajusta, en el sentido de mínimos cuadrados, los datos de la tabla adjunta

xk	1	2	3
yk	1	5	10

Sistema sobredeterminado: $H \cdot \overline{c} = \overline{v} \Rightarrow \left(x_k^2 \right) c = \left(y_k \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot c = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Ecuaciones normales:

$$H^T H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 98 \qquad H^T \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 111$$

$$98 \cdot c = 111 \rightarrow c = \frac{111}{98} = 1.1327, \quad \boxed{p(x) = 1.1327 \cdot x^2}$$

Problema 5

Hallar polinomio de grado 3 que mejor ajusta la tabla:

y verifica que p'(0)=-1 y p''(1)=0.

tk	-1	1	2	3	4
fk	4	2	1	1	2

$$p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad \begin{cases} p'(t) = b + 2ct + 3dt^2 \\ p''(t) = 2c + 6dt \end{cases}$$

Condiciones a verificar de forma exacta (=)

$$p'(0) = b = -1 \qquad b = -1$$
$$p''(1) = 2c + 6d = 0 \qquad c = -3d$$

Dos parámetros menos (b tiene que ser -1 y c es dependiente de d), luego:

$$p(t) = a - t - 3dt^2 + dt^3$$

Sobre esta función (con {a, d} libres) planteamos el problema de ajuste a la tabla.

Problema 5

Problema de ajuste (≈) $\quad y_k \approx a - t_k - 3dt_k^2 + dt_k^3$

Hay algunas (pequeñas) diferencias con el caso habitual:

- Tenemos por ahí un par de términos con el parámetro d.

  SOLUCIÓN: agrupar todos los términos que lleven el parámetro d

- Tenemos un término tk suelto por ahí SIN coeficiente libre (su coeficiente era b y quedó fijado como b = -1 para cumplir las condiciones previas)

  SOLUCIÓN: el término tk es conocido, pasarlo al lado de los datos (izqda).

El problema de ajuste queda como: $\quad (y_k + t_k) \approx a + d\left(t_k^3 - 3t_k^2\right)$

NUEVOS "DATOS": $\{y_k + t_k\}$ $\qquad$ NUEVA BASE : $\begin{cases} 1 \\ t^3 - 3t^2 \end{cases}$

Problema 5: sistema a resolver

Matriz H **Vector b**

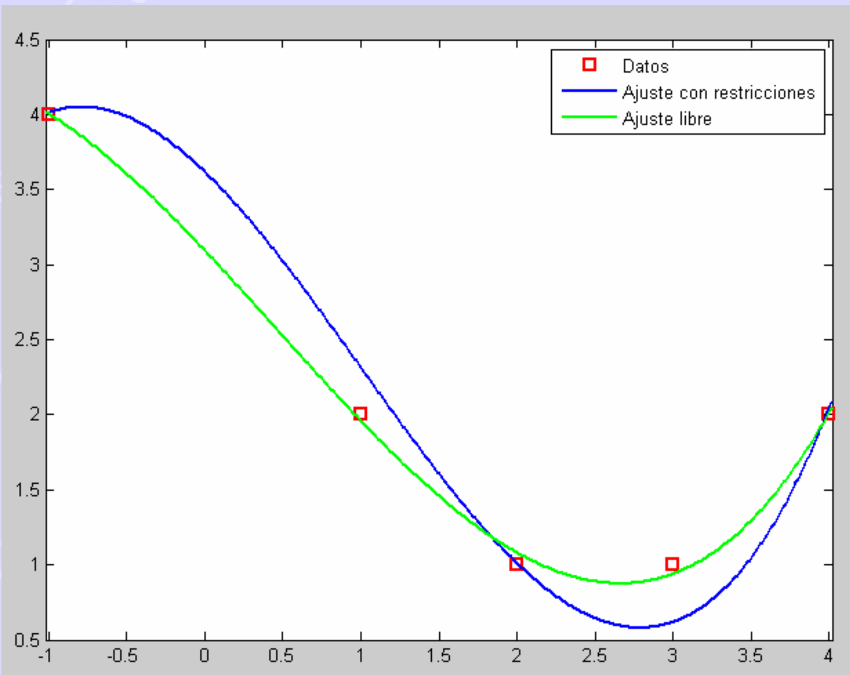
$$\begin{pmatrix} 1 & t_1^3-3t_1^2 \\ 1 & t_2^3-3t_2^2 \\ 1 & t_3^3-3t_3^2 \\ \dots & t_4^3-3t_4^2 \\ 1 & t_5^3-3t_5^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y_1+t_1 \\ y_2+t_2 \\ y_3+t_3 \\ y_4+t_4 \\ y_5+t_5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a = 3.6180 \\ d = 0.1517 \end{matrix}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$
$$1 \qquad t^3-3t^2$$

La solución es $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ con

$a = 3.6180$ $d = 0.1517$	Ajuste a tabla
$b = -1$ $c = -3d = -0.4551$	$p'(0) = -1$ $p''(1) = 0$

Problema 5: gráficas



res1 = -0.0112
-0.3146
-0.0112
0.3820
-0.0449
norm = 0.4972

res2 = -0.0040
0.0404
-0.0809
0.0606
-0.0162
norm = 0.1101

Problema 7 (ajuste con condiciones previas)

Se desea construir una autopista entre las ciudades A (0,0) y B(5,0).

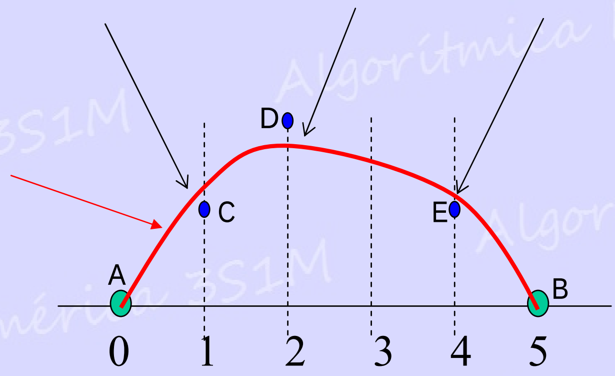
El trazado en planta de la vía debe ser una función de la forma:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

a) Se desea que la autopista pase cerca de los pueblos C(1,1), D(2,2) Y E (4,1), por lo que el trazado de la vía debe minimizar la cantidad:

$$S = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (f(1)-1)^2 + (f(2)-2)^2 + (f(4)-1)^2$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$



Problema 7

Condiciones “estrictas” a cumplir: pasar por A (0,0) y B(5,0).

$$f(0) = a = 0 \qquad \longrightarrow \qquad a = 0$$

$$f(5) = a + 5b + 25c + 125d = 0 \qquad\qquad b = -5c - 25d$$

La expresión más general de f(x) con las restricciones anteriores queda

$$f(x) = (-5c - 25d)x + cx^2 + dx^3 = c\cdot\left(x^2 - 5x\right) + d\left(x^3 - 25x\right)$$

¿Minimizar la distancia S? $S = (f(1)-1)^2 + (f(2)-2)^2 + (f(4)-1)^2$

OPCIÓN A) Escribir la expresión S(c,d) y derivar:

$$f(1) = -4c - 24d \longrightarrow S = (-4c - 24d - 1)^2 + (-6c - 42d - 2)^2 + (-4c - 36d - 1)^2$$

$$f(2) = -6c - 42d$$

$$f(4) = -4c - 36d \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = \ldots = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial d} = \ldots = 0$$

Problema 7

OPCION B)

Darse cuenta de que minimizar la distancia S es equivalente a ajustar la tabla adjunta con mínimos cuadrados

x	1	2	4
f	1	2	1

$$S = (f(1)-1)^2 + (f(2)-2)^2 + (f(4)-1)^2$$

usando una función del tipo: $f(x) = c\cdot\left(x^2-5x\right) + d\left(x^3-25x\right)$

Este es nuestro típico problema de mínimos cuadrados.

Problema 7

Hallar $f(x) = c\cdot\left(x^2-5x\right) + d\left(x^3-25x\right)$ que mejor ajuste la tabla

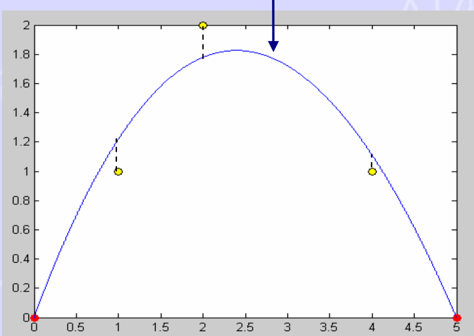
x	1	2	4
f	1	2	1

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -4 & -24 \\ -6 & -42 \\ -4 & -36 \end{pmatrix} \\ \uparrow\;\left(x^2-5x\right) \quad \uparrow\;\left(x^3-25x\right) \end{array} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} c = -0.3611 \\ d = 0.0093 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = -5c - 25d = 1.574 \end{array}}$$

Ajuste

Condiciones previas

$$f(x) = 1.574\cdot x - 0.3611\cdot x^2 + 0.0093\cdot x^3$$



H·c = 1.2222
1.7778
1.1111

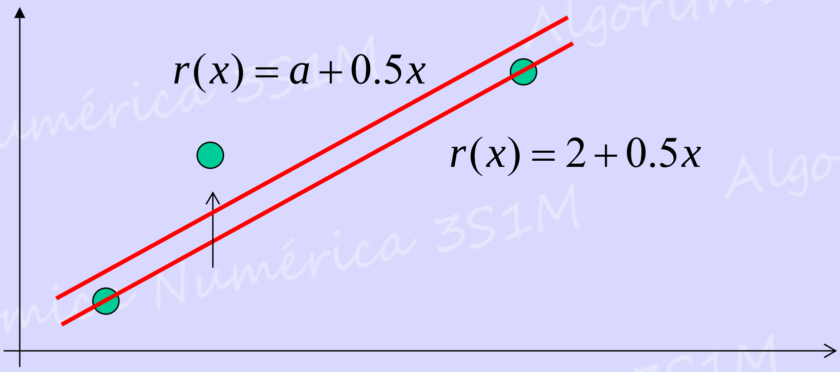
res = v – H·c = - 0.222
0.222
- 0.111

Problema 9 (examen)

Hallar la recta y=a+bx que pasa por (2,3) y (6,5) (prob. interpolación)

$$\begin{matrix} a+2b=3 \\ a+6b=5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a+1=3 \\ 4b=2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} a=2 \\ b=0.5 \end{matrix} \rightarrow r(x)=2+0.5x$$

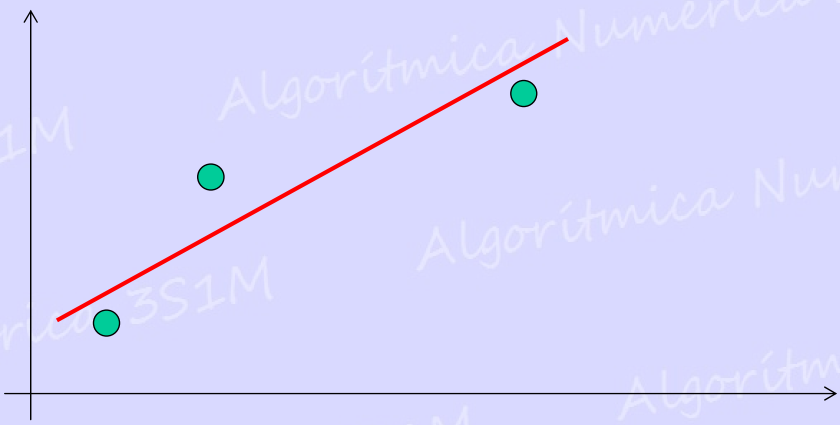
a) ¿Cuánto tiene que desplazarse (sin cambiar su pendiente) la recta anterior para obtener la que mejor se aproxima (mínimos cuadrados) a los puntos anteriores y al punto adicional (3,4)?
¿De qué dimensión es el sistema sobredeterminado planteado?



Problema 9

a) Hallar $r(x)=a+0.5x$ que mejor ajuste la tabla:

xk	2	3	6
yk	3	4	5



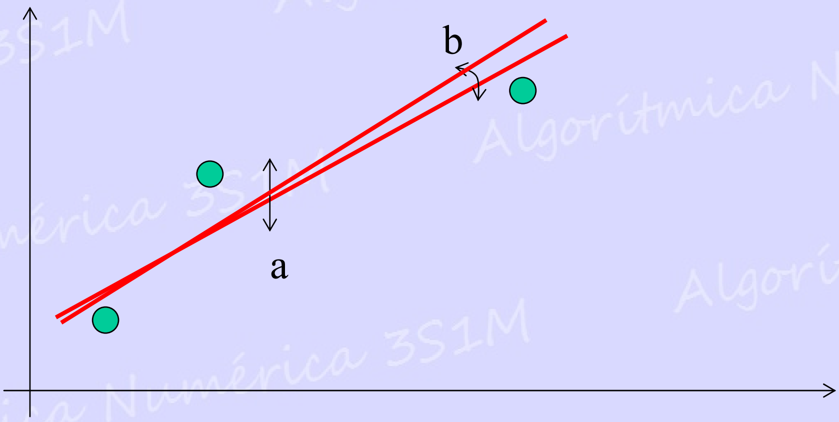
$$y_k \approx r(x_k) = a + 0.5x_k$$

$$y_k - 0.5x_k \approx a \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a = \begin{pmatrix} \\ y_k - 0.5x_k \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{6.5}{3} = 2.1666$$

Problema 9

b) ¿Coincide la recta del apartado anterior con la recta mejor aproximación a los tres puntos dados? Dar el sistema sobredeterminado que se plantea ahora y compararlo con el anterior.



$$a + bx_k = r(x_k) \approx y_k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$a = 2.3077$$

$$b = 0.4615$$

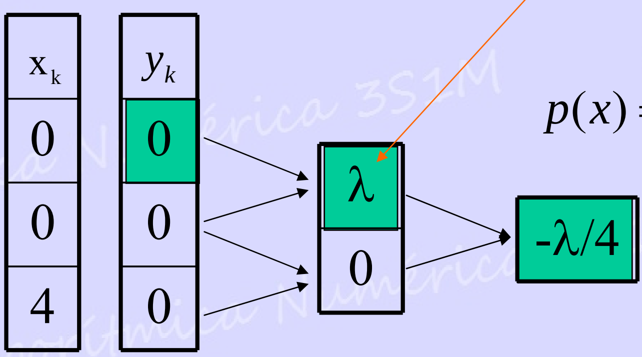
Problema 8 (condiciones previas)

Hallar el polinomio de grado 2 que pasa por los puntos (0,0) y (4,0) y cuya derivada en el origen es λ. Usar método de Newton

Determinar el miembro de la familia anterior (calcular el valor de λ) que mejor ajusta (por mínimos cuadrados) la tabla siguiente:

xk	1	2	3
yk	1	2	1

Polinomio grado 2 con p(0)=0, p'(0)= λ, p(4)=0 usando Newton:



$$p(x) = 0 + \lambda x - \frac{\lambda}{4}x^2 = \lambda \cdot \left(x - \frac{x^2}{4} \right)$$

Problema 8

Determinar el miembro de la familia anterior (calcular el valor de λ) que mejor ajusta (por mínimos cuadrados) la tabla siguiente:

xk	1	2	3
yk	1	2	1

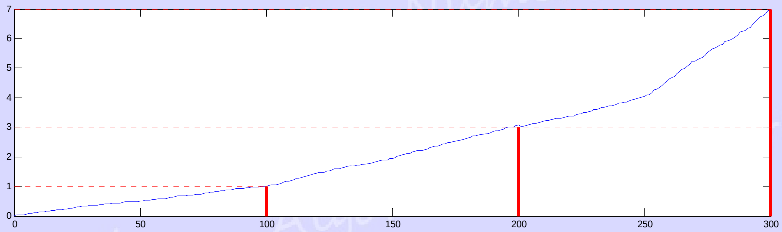
$$\lambda \cdot \left(x_k - \frac{x_k^2}{4} \right) \approx y_k \Rightarrow \begin{pmatrix} \\ H \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \lambda \approx \begin{pmatrix} \\ y_k \\ \\ \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \cdot \lambda \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H^T \cdot H = \frac{17}{8} \qquad H^T \cdot v = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.5$$

$$\lambda = \frac{3.5}{2.125} = 1.6471 \rightarrow p(x) = 1.6471 \cdot \left(x - \frac{x^2}{4} \right)$$

Problema 6 (ajuste con condiciones previas)

Una ladera tiene un desnivel referido al fondo del valle (x=0) de 1, 3 y 7 mt. en puntos distantes 100, 200 y 300 m de éste (ver figura adjunta).



Se desea modelar dicha ladera con un polinomio h(x) de 2º grado que se ajuste lo mejor posible (mínimos cuadrados) a los datos con la condición adicional de que arranque desde el fondo del valle, esto es, h(0)=0.

Identificación datos del problema:

- Función de ajuste h(x) = polinomio 2º grado, $h(x) = a + bx + cx^2$
- Condición previas h(0)=0
- Tabla de datos a ajustar:

x_k	100	200	300
h_k	1	3	7

o

x_k	1	2	3
h_k	1	3	7

(100 mt)

Problema 6 (resolución)

Condición previa: $h(0) = a = 0$. La función de ajuste queda $h(x) = bx + cx^2$

Usando los datos de la tabla, el sistema sobredeterminado a resolver queda:

$$H\bar{c} = \bar{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones normales:

$$H^T H = \begin{pmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 98 \end{pmatrix} \qquad H^T \bar{v} = \begin{pmatrix} 28 \\ 76 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 36 \\ 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 76 \end{pmatrix}$$

$$b = 0.1053, c = 0.7368 \quad \Rightarrow h(x) = 0.1053x + 0.7368x^2$$

Recordad que en esta fórmula x debe darse en unidades de 100 metros

Residuos: evaluar h(x) en {1,2,3} y comparar con 1,3,7 = 0.16, -0.16, 0.05 m

Alternativamente: calcular res = v – H*c

C) Uso de Pesos (LAB)

Algunos de los datos pueden ser mejores que otros y habrá que ajustarlos mejor.

¿Cómo se lo indicamos al algoritmo? Cambiando el error a minimizar:

$$E = \sum_k \left(y_k - u(t_k)\right)^2 = \sum_k e_k^2 \longrightarrow E = \sum_k \omega_k \left(y_k - u(t_k)\right)^2 = \sum_k \omega_k \cdot e_k^2$$

- El peso ω_k (siempre positivo) indica la calidad del dato {tk, yk}
- Valores altos de ω_k hacen que el residuo del k-ésimo dato tenga una mayor importancia en el error global.
- El algoritmo se esforzará en reducir más los errores de aquellos datos con un peso grande.
- Lo importante es la relación entre los pesos, no su valor absoluto (si todos los pesos son iguales volvemos al problema sin pesos)

Solución del problema con pesos

La solución viene dada por una sencilla modificación de las ecuaciones normales:

La solución que minimiza $E = \sum_k e_k^2$ corresponde a $\left(H^T H\right) \cdot \overline{c} = H^T \cdot \overline{v}$

La solución que minimiza $E = \sum_k \omega_k \cdot e_k^2$ es : $\left(H^T W H\right) \cdot \overline{c} = H^T W \cdot \overline{v}$

siendo W una matriz diagonal, cuya diagonal son los pesos {ω_k} del problema:

$$W = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_N \end{pmatrix}$$

En MATLAB si w es un vector de tamaño n:

W = diag(w)

es una matriz diagonal n x n cuya diagonal son los elementos del vector w.

Ejemplo

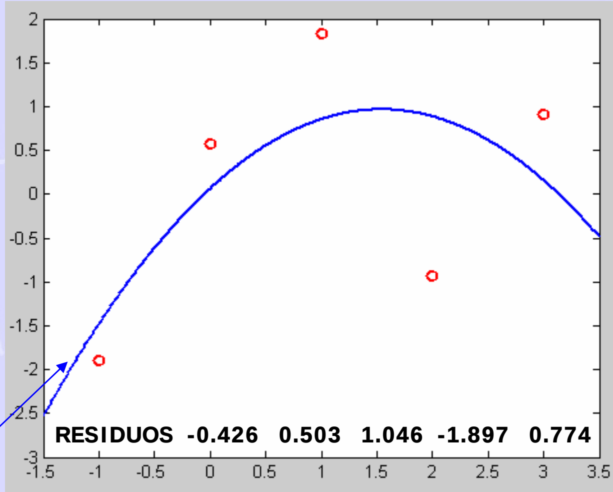
Ajuste con una parábola una tabla de 5 puntos:

tk	-1	0	1	2	3
yk	-2.1	0.6	1.8	-0.9	0.9

Resolución sin pesos: $p(t) = a + bt + ct^2$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & t_k & t_k^2 \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2.1 \\ +0.6 \\ +1.8 \\ -0.9 \\ +0.9 \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ y_k \end{array}$$

$$p(t) = 0.02 + 1.26 \cdot t - 0.41 \cdot t^2$$



PROBLEMA: puntos 1, 2, 3 y 5 son buenas “medidas” pero 4º punto tenía un gran error.

Solución con pesos

Si conozco el problema (¿cómo?) podría p.e. usar pesos:

1	1	1	0.01	1

Doy muy poca importancia a la veracidad del 4º dato

Misma matriz H y vector v, pero usando una matriz W de pesos y resolviendo:

$$\left(H^T W H\right) \cdot \overline{c} = H^T W \cdot \overline{v}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(t) = 0.50 + 1.96 \cdot t - 0.61 \cdot t^2$$