



Universidad Politécnica  
de Madrid

**Escuela Técnica Superior de  
Ingenieros Informáticos**



Grado en «título del grado»

Trabajo Fin de Grado

**Título del Trabajo, con Mayúscula en  
Todas las Palabras que no Sean  
Conectivas (Artículos, Preposiciones,  
Conjunciones)**

Autor: «nombre y apellidos»

Tutor(a): «nombre y apellidos»

Madrid, «Mes Año»

Este Trabajo Fin de Grado se ha depositado en la ETSI Informáticos de la Universidad Politécnica de Madrid para su defensa.

*Trabajo Fin de Grado*

*Grado en «título del grado»*

*Título:* Título del Trabajo, con Mayúscula en Todas las Palabras que no Sean Conectivas (Artículos, Preposiciones, Conjunciones)

«Mes Año»

*Autor:* «nombre y apellidos»

*Tutor:* «nombre y apellidos»

«departamento»

ETSI Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

# Resumen

«Aquí va el resumen del TFG. Extensión máxima 2 páginas.»



# **Abstract**

«Abstract of the Final Degree Project. Maximum length: 2 pages.»



# Tabla de contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.0.1. Motivación . . . . .	1
<b>2. Desarrollo</b>	<b>3</b>
2.1. Conocimientos previos y definiciones . . . . .	3
2.1.1. Complejos Simpliciales . . . . .	3
2.1.2. Homología . . . . .	10
2.1.3. Persistencia . . . . .	16
<b>3. Resultados y conclusiones</b>	<b>21</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>23</b>
<b>Anexo</b>	<b>24</b>
.1. Ejemplo de código en python . . . . .	25
.2. Ejemplo de fórmula matemática . . . . .	25





# Capítulo 1

## Introducción

LaSSSS introducción del TFG debe servir para que los profesores que evalúan el Trabajo puedan comprender el contexto en el que se realiza el mismo, y los objetivos que se plantean.

Esta plantilla muestra la estructura básica de la memoria final de TFG, así como algunas instrucciones de formato.

El esquema básico de una memoria final de TFG es el siguiente:

- Resumen en español y inglés (máximo 2 páginas cada uno)
- Tabla de contenidos
- Introducción (con los objetivos del TFG)
- Desarrollo
- Resultados y conclusiones
- Bibliografía (publicaciones utilizadas en el estudio y desarrollo del trabajo)
- Anexos (opcional)

### 1.0.1. Motivación

La Topología se centra en en el estudio de las diversas propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. Mientras que en el subcampo de la Topología Computacional veremos como podemos hacer uso de diversos algoritmos para poder estudiar las propiedades de los espacios topológicos y ser capaces de resolver problemas topológicos computacionalmente. Para ello lo primero que necesitamos es una manera de representación de nuestros espacios topológicos, manteniendo sus propiedades topológicas.



# Capítulo 2

## Desarrollo

### 2.1. Conocimientos previos y definiciones

En esta sección se introducirán las nociones topológicas básicas para hacer autocontenido este trabajo. Dichas nociones nos darán el contexto y conocimientos necesarios para poder profundizar en el *Teorema de Estabilidad* y ser capaces de abordar su demostración.

#### 2.1.1. Complejos Simpliciales

Una forma de representar algunos espacios topológicos es a través de su descomposición en piezas más sencillas. Una descomposición de estas características se denomina complejo si sus piezas son topológicamente simples y sus intersecciones son piezas del mismo tipo, pero de dimensión inferior [1]. Existe una gran variedad de complejos con distintos grados de abstracción. En este trabajo nos centraremos en los complejos simpliciales, que permiten representar una gran variedad de espacios y son especialmente adecuados para cuestiones computacionales.

Los complejos simpliciales pueden ser estudiados desde un enfoque geométrico y desde un enfoque combinatorio. Partiremos de la definición de complejo simplicial desde el punto de vista geométrico. Para ello recordaremos algunos conceptos de geometría afín.

**Definición 2.1.1.** El conjunto de puntos  $\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$  de  $\mathbb{R}^d$  es *afinmente independiente* si los vectores  $\{\overrightarrow{u_0 u_1}, \dots, \overrightarrow{u_0 u_k}\}$  son linealmente independientes.

**Definición 2.1.2.** Diremos que  $x \in \mathbb{R}^d$  es *combinación convexa* de los puntos  $u_0, u_1, \dots, u_k$  si  $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$  con  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $i \in \{0, \dots, k\}$  y  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$ .

**Definición 2.1.3.** Llamaremos *envolvente convexa* de  $u_0, u_1, \dots, u_k$ , denotado por  $\text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$ , al conjunto de todas las combinaciones convexas de dichos puntos.

Haciendo uso de este conjunto podremos definir nuestras piezas de la descomposición de la siguiente manera:

**Definición 2.1.4.** Un  $k$ -*simplex*  $\sigma$  en  $\mathbb{R}^d$  con  $d \geq k$  es la envolvente convexa de  $k + 1$  puntos afínmente independientes  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^d$ , es decir,  $\sigma := \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$

## 2.1. Conocimientos previos y definiciones

Diremos que el  $k$ -símplice  $\sigma$  tiene dimensión  $k$  y llamaremos *vértices de  $\sigma$*  a los puntos  $u_0, u_1, \dots, u_k$ .

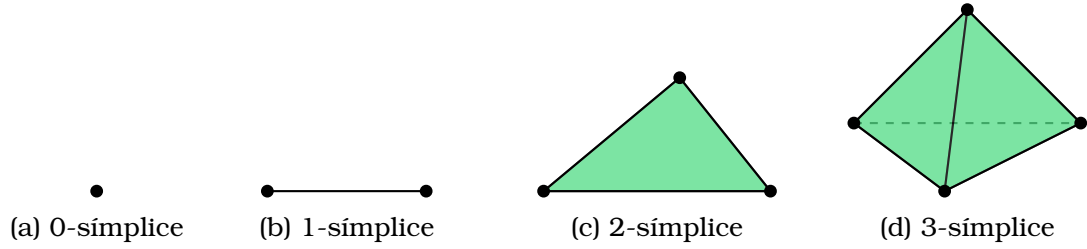


Figura 2.1: Representación de los símlices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Se puede observar que cualquier subconjunto de los vértices de  $\sigma$  será afinmente independiente y por lo tanto definirá un símplex  $\tau$  de dimensión inferior. De esta forma diremos que  $\tau$  es una cara de  $\sigma$  si es una combinación convexa de un subconjunto no vacío de los vértices de  $\sigma$ , y lo denotaremos por  $\tau \leq \sigma$ . Si el subconjunto es propio, diremos que  $\tau$  es cara propia de  $\sigma$ , y lo denotaremos por  $\tau < \sigma$ . Por otro lado, diremos que  $\sigma$  es cocara (propia) de  $\tau$  si  $\sigma \geq \tau$  ( $\sigma > \tau$ ).

Haciendo uso de la definición de caras de un símplex  $\sigma$  podemos definir el borde y el interior de  $\sigma$ .

**Definición 2.1.5.** Sea  $\sigma$  un símplex. Entonces

- Se define el borde de  $\sigma$  como

$$\text{bd } \sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \tau$$

- Se define el interior de  $\sigma$  como

$$\text{int } \sigma = \sigma - \text{bd } \sigma$$

*Observación.* Se sigue directamente de la definición que un punto  $x \in \sigma$  pertenece al interior de  $\sigma$  si y sólo si todos sus coeficientes  $\lambda_i$  de la combinación convexa son positivos. Se sigue que cada punto  $x \in \sigma$  pertenece únicamente al interior de la cara generada por los puntos con coeficientes  $\lambda_i$  positivos.

Una vez que ya conocemos las piezas de nuestra descomposición vamos a ver como tenemos que unir las y cuáles son las principales propiedades de los complejos resultantes.

Como ya hemos visto al principio de la sección, para que una descomposición sea un complejo sus piezas tienen que ser topológicamente simples y sus intersecciones tienen que ser piezas de dimensión inferior del mismo tipo. La manera natural de hacer esto es pegar unos símlices con otros por sus caras.

**Definición 2.1.6.** Un *complejo simplicial* es una colección finita de símlices  $K$  que satisface las siguientes propiedades:

- Si  $\sigma \in K$  y  $\tau \leq \sigma$  entonces  $\tau \in K$ .
- Si  $\sigma_0, \sigma_1 \in K$  y  $\sigma_0 \cap \sigma_1 \neq \emptyset$  entonces  $\sigma_0 \cap \sigma_1 \leq \sigma_i$  para  $i = 1, 2$ .

Se define la dimensión de como el máximo de las dimensiones de sus símlices.

Un ejemplo de complejo simplicial es lo que se muestra en la figura 2.2, mientras que en la figura 2.3 muestra un ejemplo que no es complejo simplicial.

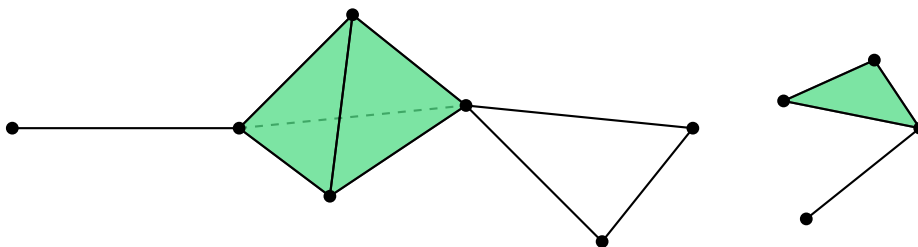


Figura 2.2: Ejemplo de complejo simplicial

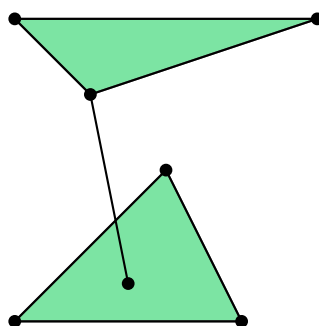


Figura 2.3: Ejemplo de conjunto de símplexes que no cumplen las condiciones de complejo simplicial

**Definición 2.1.7.** El *espacio subyacente* de un complejo simplicial  $K$ , denotado  $|K|$ , es la unión de los símplexes de  $K$  con la topología heredada del  $\mathbb{R}^d$  donde viven sus símplexes. Este espacio subyacente también es llamado *poliedro*.

Como se puede observar, el espacio subyacente de un complejo simplicial es compacto, siendo unión finita de símplexes. El siguiente resultado caracteriza los abiertos y cerrados del espacio subyacente  $|K|$  de un complejo simplicial  $K$ .

**Proposición 2.1.1.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $A \subset |K|$  un subconjunto. Entonces  $A$  es un abierto (cerrado) en  $K$  si y sólo si para cada  $\sigma \in K$ ,  $A \cap |\sigma|$  es un abierto (cerrado) de  $|\sigma|$  [1].

**Definición 2.1.8.** Una *triangulación* de un espacio topológico  $X$  es un par  $(K, h)$  donde  $K$  es un complejo simplicial y  $h : X \rightarrow |K|$  es un homeomorfismo ( $h$  continua, biyectiva y  $h^{-1}$  continua).

Diremos que un espacio topológico es *triangulable* si admite una triangulación.

También nos será de utilidad poder estudiar los complejos simpliciales contenidos en otro complejo simplicial.

**Definición 2.1.9.** Un *subcomplejo*  $L$  de un complejo simplicial  $K$  es un complejo simplicial  $L \subseteq K$ .

Un subcomplejo de gran interés son los *j-esqueletos*, definidos de la siguiente forma:

$$K^{(j)} = \{\sigma \in K \mid \dim \sigma \leq j\}$$

Otro subconjunto de símlices que nos será de gran ayuda más adelante es la *estrella de un símplex*  $\tau$ , la cual consiste de las cocaras de  $\tau$ , denotado por  $\text{St } \tau$ . Este conjunto no será siempre un complejo simplicial, así que se define la *estrella cerrada*  $\overline{\text{St } \tau}$  como el menor subcomplejo de  $K$  que contiene a  $\text{St } \tau$ . Adicionalmente, se define el *link* de  $\tau$  como:  $\text{Lk } \tau = \{v \in \overline{\text{St } \tau} \mid v \cap \tau = \emptyset\}$ .

### Complejos simpliciales abstractos

Una vez que ya conocemos los complejos simpliciales desde el punto de vista geométrico, vamos a abordarlos desde un enfoque combinatorio, el cual nos será de gran ayuda para poder programar los complejos simpliciales.

**Definición 2.1.10.** Un *complejo simplicial abstracto*  $A$  es una colección finita de conjuntos finitos tal que si  $\alpha \in A$  y  $\beta \subset \alpha$  entonces  $\beta \in A$ .

De esta forma se cumple que

- Los conjuntos en  $A$  no vacíos se denominan *símlices abstractos*.
- La *dimensión* de un símplex abstracto  $\alpha \in A$  es  $\dim \alpha = \text{card}(\alpha) - 1$ . Y la dimensión del complejo es el máximo de las dimensiones de sus símlices.
- Una *cara* de  $\alpha \in A$  es cualquier subconjunto no vacío de  $\beta \subset \alpha$ .
- El *conjunto de vértices* de  $A$ , denotado por  $\text{Vert } A$ , es la unión de todos sus símlices.
- Un *subcomplejo*  $B$  de un complejo simplicial abstracto  $A$  es un complejo simplicial abstracto  $B \subset A$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Un ejemplo de complejo simplicial abstracto es el siguiente conjunto

$$A = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Donde el conjunto de vértices es:  $\text{Vert } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Definición 2.1.11.** Sean  $A$  y  $B$  dos complejos simpliciales abstractos. Diremos que  $A$  y  $B$  son *isomorfos* si existe una biyección

$$b : \text{Vert } A \longrightarrow \text{Vert } B$$

tal que  $\alpha \in A$  si y sólo si  $b(\alpha) \in B$ .

Cada complejo geométrico induce de manera natural un complejo abstracto de la siguiente forma:

**Definición 2.1.12.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $V$  el conjunto de vértices de  $K$ . Llamaremos *esquema de vértices* al complejo simplicial abstracto  $A$  formado por todos aquellos subconjuntos de  $V$  que generan símlices en  $K$ .

Y bajo ciertas circunstancias podremos hacer el paso opuesto de construir un complejo simplicial (geométrico) a partir de otro abstracto:

**Definición 2.1.13.** Sean  $A$  un complejo simplicial abstracto y  $K$  un complejo simplicial. Diremos que  $K$  es una *realización geométrica* de  $A$ , si  $A$  es isomorfo al esquema de vértices de  $K$ .

**Teorema 2.1.1.** *Todo complejo simplicial abstracto de dimensión  $d$  admite una realización geométrica en  $\mathbb{R}^{2d+1}$  [1].*

Así pues, los complejos simpliciales abstractos son una representación fiel de un complejo simplicial (geométrico).

### Aplicaciones simpliciales

Una vez que ya conocemos las principales propiedades de los complejos simpliciales, veremos cuales son las aplicaciones que preservan la estructura de complejo simplicial. Como vimos anteriormente, cada punto de un  $k$ -símplice pertenece al interior de exactamente una cara. Por lo tanto, todo punto  $x \in |K|$ , siendo  $K$  un complejo simplicial de vértices  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , pertenece al interior de uno de los símlices de  $K$ . Si  $\sigma = \text{conv}\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$  es dicho símplex, entonces  $x = \sum_{i=0}^k b_i(x)u_i$ , donde

$$b_i(x) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}, \text{ con } \lambda_i \text{ tal que } x = \sum_{i=0}^k \lambda_i u_i$$

se denominan *coordenadas baricéntricas* de  $x$  en  $K$ .

Haremos uso de estas coordenadas para construir una función, lineal a trozos inducida por una función entre los vértices de dos complejos simpliciales, denominada *aplicación de vértices*

**Definición 2.1.14.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y  $\varphi : \text{Vert } K \rightarrow \text{Vert } L$  una aplicación. Diremos que  $\varphi$  es una *aplicación de vértices* si satisface que para cada  $\sigma \in K$  su imagen  $\varphi(\sigma) \in L$ .

Una aplicación de vértices  $\varphi : \text{Vert } K \rightarrow \text{Vert } L$  induce una aplicación, lineal a trozos  $f : |K| \rightarrow |L|$  dada por

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^n b_i(x)u_i\right) = \sum_{i=0}^n b_i(x)\varphi(u_i)$$

a la que llamaremos *aplicación simplicial* asociada a  $\varphi$ . Para enfatizar que es una aplicación lineal en cada símplex del complejo, se suele notar la aplicación de la siguiente forma  $f : K \rightarrow L$ .

### Subdivisiones

Veremos que hay ocasiones que nos interesará controlar el tamaño de los símlices de nuestro complejo simplicial conservando el espacio subyacente. Por esta razón, se introduce la noción de *subdivisión de un complejo simplicial*.

**Definición 2.1.15.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Diremos que un complejo simplicial  $L$  es una *subdivisión* de  $K$  si:

- $|K| = |L|$ .
- Cada símplex de  $L$  está contenido en un símplex de  $K$ .

## 2.1. Conocimientos previos y definiciones

Hay muchas maneras de obtener subdivisiones de un complejo simplicial, pero un tipo particular de subdivisión que es muy utilizada es la *subdivisión baricéntrica*, denotada por  $L = \text{Sd}K$ . Para la construcción de esta subdivisión, introducimos el *baricentro* de un símplece y el *cono* de un símplece de vértice  $v$ .

**Definición 2.1.16.** Sea  $\sigma$  un  $k$ -símplece, tal que  $\sigma = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Llamaremos *baricentro* de  $\sigma$  al punto

$$b_\sigma = \sum_{i=0}^k \frac{v_i}{k+1} \in \text{int } \sigma$$

**Definición 2.1.17.** Sea  $\sigma$  un  $k$ -símplece, tal que  $\sigma = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  y  $v$  un punto no contenido en el subespacio afín generado por  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ . Se define el *cono* de  $\sigma$  con vértice  $v$  y se denota por  $\sigma * v$  como el  $k+1$ -símplece generado por  $\{v, v_0, v_1, \dots, v_k\}$ .

**Definición 2.1.18.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Se define la *subdivisión baricéntrica* de  $K$  como el complejo simplicial  $\text{Sd}K$  que se construye inductivamente sobre el  $j$ -esqueleto como sigue:

- A.  $\text{Sd}K^{(0)} = K^{(0)}$ .
- B.  $\text{Sd}K^{(j)}$  es la unión de  $\text{Sd}K^{(j-1)}$  con el conjunto de todos los símlices de la forma  $b_\sigma * \tau$ , donde  $\sigma$  es un  $j$ -símplece y  $\tau$  es cualquier símplece de  $\text{Sd}K^{(j-1)}$  contenido en una cara de  $\sigma$ .

En la figura 2.4 se muestra la primera y segunda subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial.

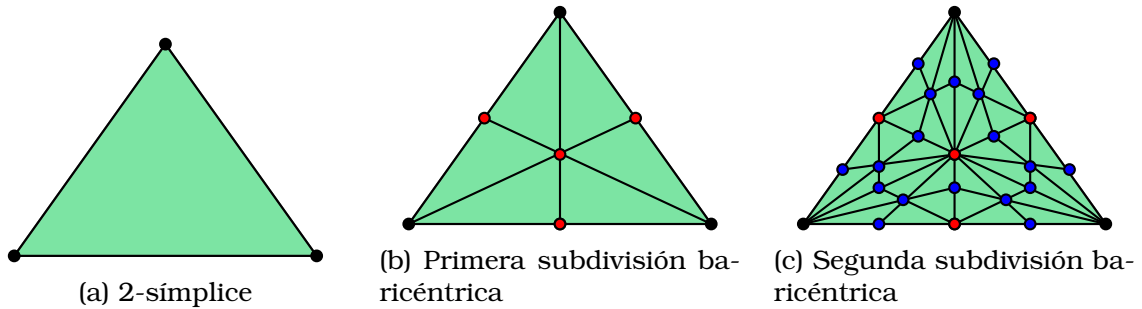


Figura 2.4: Primera y segunda subdivisión baricéntrica de un 2-símplece

Recordemos que el *diámetro* de un subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^d$  es el supremo sobre las distancias entre sus puntos.

**Lema 2.1.2.** Si  $\sigma$  es un  $k$ -símplece, entonces el diámetro de cada símplece en la subdivisión baricéntrica de  $\sigma$  es como máximo  $\frac{k}{k+1} \text{diam } \sigma$  [1].

De forma que gracias al lema anterior podremos hacer el diámetro de los símlices de los complejos simpliciales tan pequeño como queramos, ya que el diámetro de los símlices de la  $n$ -ésima subdivisión baricéntrica del complejo simplicial  $K$ , denotado por  $\text{Sd}^n K = \text{Sd}(\text{Sd}^{n-1} K)$ , es

$$\left( \frac{k}{k+1} \right)^n \text{diam } \sigma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ con } \sigma \in K \text{ y } k = \dim \sigma$$



## Aproximaciones simpliciales

Para estudiar la topología de los poliedros es fundamental aproximar funciones continuas por aplicaciones simpliciales. Para poder definir estas aproximaciones primero vamos a definir un tipo de entorno de los vértices de un complejo como se puede ver en la figura 2.5.

**Definición 2.1.19.** Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v$  un vértice de  $K$ . El conjunto

$$N(v) = \bigcup_{\sigma \in \text{St } v} \text{int } \sigma$$

es un entorno abierto de  $v$  en  $|K|$  al que llamaremos *entorno estrellado* de  $v$ .

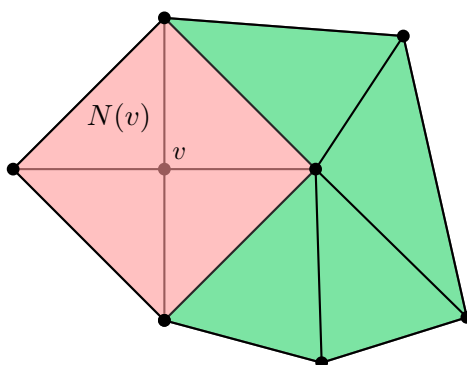


Figura 2.5: Entorno estrellado de  $v$  marcado en color rojo

Así pues, definimos una aproximación simplicial de la siguiente forma:

**Definición 2.1.20.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales,  $g : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua y  $f : K \rightarrow L$  una aplicación simplicial. Diremos que  $f$  es una *aproximación simplicial* de  $g$  si verifica la *condición de estrella*, es decir, si para cada vértice  $v \in K$  se tiene que  $g(N(v)) \subset N(f(v))$ .

Además, la condición de estrella será una condición suficiente para garantizar la existencia de una aproximación simplicial:

**Lema 2.1.3.** Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales,  $g : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua que satisface la condición de estrella. Entonces  $g$  tiene una aproximación simplicial  $f : K \rightarrow L$  [1].

En la figura 2.6 podemos ver un ejemplo de aproximación simplicial de una aplicación continua.

**Teorema 2.1.4** (Aproximación simplicial). Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales,  $g : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua. Entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $g$  tiene una aproximación simplicial  $f : \text{Sd}^n K \rightarrow L$  [1].

## Complejos simpliciales de nubes de puntos

Desde el punto de vista computacional nos encontramos con el problema de que tenemos una representación de un espacio topológico a través de una discretización finita de los puntos de dicho espacio, y nuestro objetivo es poder recuperar propiedades del espacio topológico original a partir de esta nube de puntos. Para ello asociaremos complejos simpliciales a dicha nube de puntos.

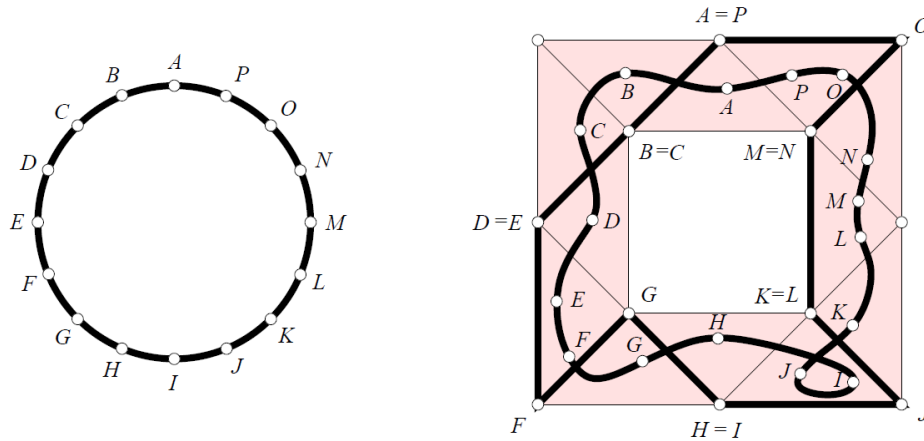


Figura 2.6: Aplicación continua del círculo en una corona circular y una aproximación simplicial de dicha aplicación. Fuente: [1]

**def complejo de Čech**

**def complejo de Vietoris-Rips**

**def diagrama de Voronoi + triangulación Delonay**

**def alpha complejo**

### 2.1.2. Homología

Como se puede ver en [añadir cita] la homotopía es una potente herramienta algebraica para poder obtener propiedades de los espacios topológicos. Sin embargo, los métodos para el cálculo de la homotopía no son manejables computacionalmente. Así pues, se propone la homología como formalismo algebraico, que, aunque no es capaz de obtener tanta información topológica sobre el espacio como con otros formalismos, es muy computable.

Comenzaremos estudiando los diversos grupos que están involucrados en la definición de la homología.

#### Grupos de cadenas

Sea  $K$  un complejo simplicial y  $p$  un número entero no negativo. Una  $p$ -cadena en  $K$  es una suma formal de  $p$ -símplices en  $K$ . Más concretamente,  $c$  es una  $p$ -cadena en  $K$  si

$$c = \sum a_i \sigma_i$$

con  $\sigma_i$  es un  $p$ -símplice para cada  $i$  y  $a_i$  son los *coeficientes*. Estos coeficientes pueden tomarse de cualquier anillo conmutativo, sin embargo, nosotros usaremos con coeficientes en el cuerpo de dos elementos, es decir,  $a_i \in \mathbb{Z}_2$ .

**Ejemplo 2.1.2.** Escribiremos los símplices como la lista de sus vértices,  $\sigma = [u_0, u_1, \dots, u_p]$ .

- En la figura 2.7 se muestra en rojo la 0-cadena  $c = [0] + [2] + [6] + [9]$ .
- En la figura 2.8 se muestra en rojo la 1-cadena  $c = [0, 1] + [1, 2] + [2, 4] + [8, 9]$ .
- En la figura 2.9 se muestra en rojo la 2-cadena  $c = [1, 2, 3] + [2, 3, 4] + [6, 7, 8]$ .

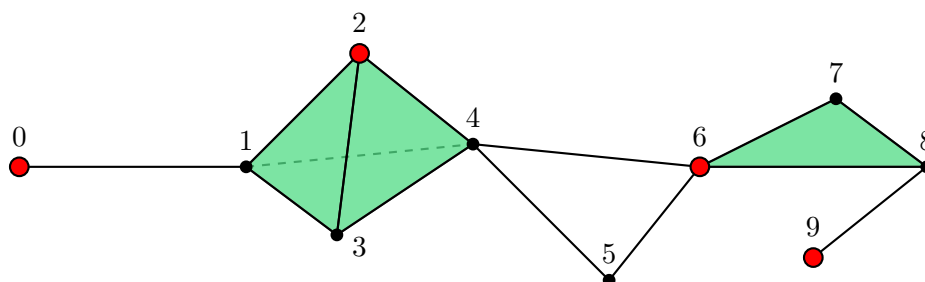


Figura 2.7: Ejemplo de 0-cadena

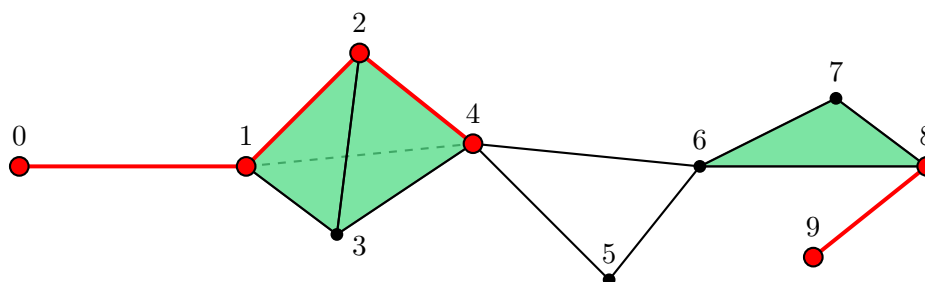


Figura 2.8: Ejemplo de 1-cadena

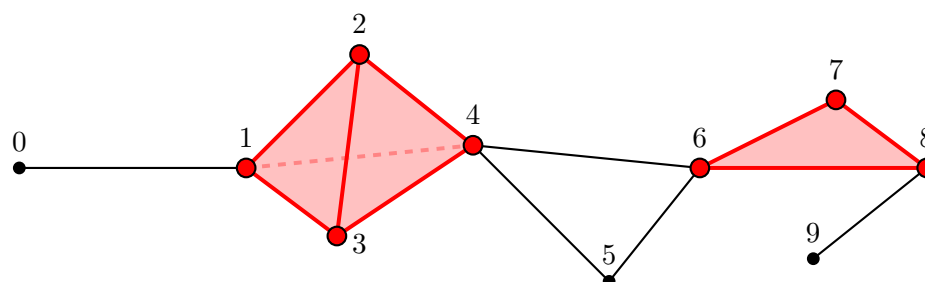


Figura 2.9: Ejemplo de 2-cadena

Dadas dos  $p$ -cadenas  $c = \sum a_i \sigma_i$  y  $c' = \sum b_i \sigma_i$ , se define su suma como

$$c + c' = \sum (a_i + b_i) \sigma_i$$

Las  $p$ -cadenas con la operación suma  $+$  forman el *grupo de  $p$ -cadenas* denotado por  $(C_p, +)$ , pero como la operación se sobrentiende, se suele nombrar como  $C_p = C_p(K)$ .

Este grupo es un grupo abeliano, y como en nuestro caso los coeficientes están tomados en el cuerpo  $\mathbb{Z}_2$ ,  $C_p(K)$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_2$ . Fijado  $p \in \mathbb{Z}$ , una base del espacio vectorial  $C_p(K)$  es el conjunto  $\{\sigma_i^p \mid i = 1, \dots, s_p\}$  formado por los simplices de dimensión  $p$  de  $K$ . Como consecuencia  $C_p(K) = \{0\}$ , siendo  $0 = \sum 0 \cdot \sigma_i$ , si  $p < 0$  ó  $p > \dim(K)$ .

### Operador borde

Para poder relacionar estos grupos definiremos el *operador borde*, así pues, partiremos con la definición del borde de un simplex.

**Definición 2.1.21.** Sea  $p$  un número entero y  $\sigma \in K$  un  $p$ -simplex  $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_p]$  se define su *borde*,  $\partial_p \sigma$ , como la suma formal de sus caras  $(p-1)$ -dimensionales, es

decir,

$$\partial_p \sigma = \sum_{j=0}^p [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$$

donde  $\hat{v}_j$  denota que  $v_j$  se omite.

En general, dada una  $p$ -cadena  $c = \sum a_i \sigma_i$ , se define su borde mediante la extensión lineal como  $\partial_p c = \sum_{j=0}^p a_i \partial_p \sigma_i$ . Como consecuencia, el borde define una aplicación lineal  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  entre espacios vectoriales de cadenas denominada *operador borde*. Para simplificar la notación suele omitirse el subíndice  $p$  del operador borde, ya que siempre coincide con la dimensión de la cadena a la que se le aplica.

**Ejemplo 2.1.3.** Sea la 2-cadena  $c = [0, 1] + [4, 5]$ , entonces el borde de  $c$  es:

$$\partial c = \partial[0, 1] + \partial[4, 5] = [0] + [1] + [4] + [5]$$

### Ciclos y bordes

Distinguiremos dos tipos de cadenas, las cuales usaremos para poder definir los grupos de homología.

**Definición 2.1.22.** Diremos que una  $p$ -cadena  $c$  es un  $p$ -ciclo si

$$\partial c = 0$$

o, equivalentemente, si  $c \in \ker \partial$ .

Debido a que  $\partial$  conmuta con la suma  $+$ , el conjunto de  $p$ -ciclos  $Z_p = \ker \partial_p$  es un subgrupo (subespacio vectorial en nuestro caso) de  $C_p$ .

**Ejemplo 2.1.4.** Veremos que geoméricamente los  $p$ -ciclos representan ciclos en el complejo simplicial. Estos a su vez pueden ser agujeros de dimensión  $p$ . En la figura 2.10 se muestra en rojo el 1-ciclo  $[4, 5] + [4, 6] + [5, 6]$ , el cual es un agujero. Mientras que en azul se representa el 1-ciclo  $[6, 7] + [6, 8] + [7, 8]$ , que no es un agujero.

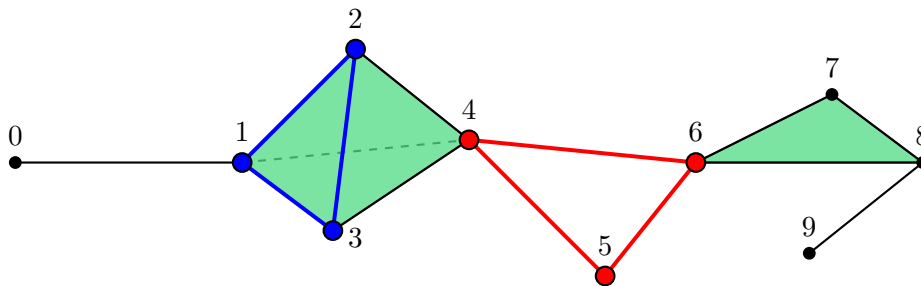


Figura 2.10: Ejemplos de 1-ciclos

**Definición 2.1.23.** Diremos que una  $p$ -cadena  $c$  es un  $p$ -borde si existe una  $(p+1)$ -cadena  $c'$  tal que

$$\partial c' = c$$

o, equivalentemente, si  $c \in \text{im } \partial_{p+1}$ .

Debido a que  $\partial$  conmuta con la suma  $+$ , el conjunto de  $p$ -bordes  $B_p = \text{im } \partial_{p+1}$  es un subespacio vectorial de  $C_p$ .

## Desarrollo

**Ejemplo 2.1.5.** El 1-ciclo que habíamos destacado en azul en la figura 2.10 es un 1-borde.

Probaremos que los  $p$ -bordes son  $p$ -ciclos, como ocurre en el ejemplo. Para ello enunciaremos el siguiente lema.

**Lema 2.1.5** (Lema fundamental de la homología).  $\partial_p \partial_{p+1} c = 0$  para todo entero  $p$  y toda  $(p+1)$ -cadena  $c$  [1].

Se sigue que  $B_p$  es un subespacio vectorial de  $Z_p$ , es decir  $B_p \subset Z_p$ . Además, podemos definir el *complejo de cadenas* asociado a un complejo simplicial  $K$  como la sucesión de grupos de cadenas conectados por los operadores borde

$$\dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots$$

La figura 2.11 muestra esta relación entre el grupo de cadenas  $C_p$ , el grupo de ciclos  $Z_p$  y el grupo de bordes  $B_p$ ; y sus conexiones generadas por el operador borde.

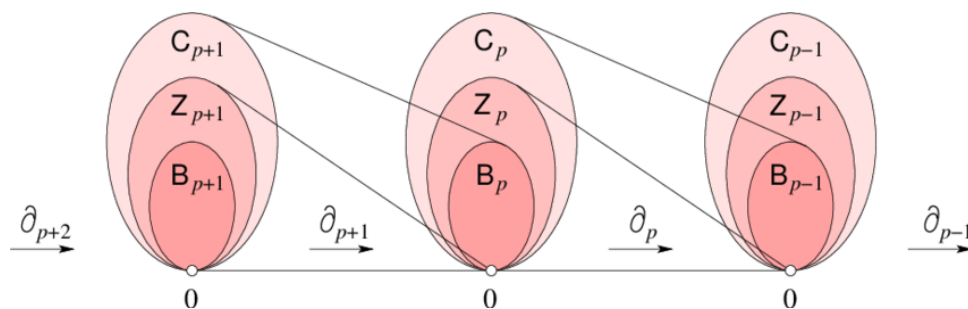


Figura 2.11: Complejo de cadenas representando el grupo de cadenas, el grupo de ciclos y el grupo de bordes. Fuente: [1]

## Grupos de homología simplicial

La idea general de los grupos de homología es poder encontrar los agujeros a partir de los ciclos. Para ello tendremos que “descartar” aquellos ciclos que son bordes. Es por esto que cocientaremos el grupo de los ciclos por el grupo de bordes, ya que así todos los bordes serán triviales en homología.

**Definición 2.1.24.** Dado un complejo simplicial  $K$  se define su *grupo de homología  $p$ -dimensional* como el cociente

$$H_p(K) = \frac{Z_p}{B_p}$$

El *número de Betti  $p$ -dimensional*  $\beta_p(K)$  como la dimensión de  $H_p(K)$ .

Luego los elementos  $z \in H_p = H_p(K)$  son de la forma  $z = c + B_p$  con  $c \in Z_p$ , donde  $c + B_p$  es la *clase lateral* de  $B_p$  en  $Z_p$ . Dos ciclos  $c_1, c_2 \in Z_p$  representan la misma *clase de homología*  $z \in H_p$  si y sólo si  $z = c_1 + B_p = c_2 + B_p$ ; lo que equivale a que  $(c_1 - c_2) \in B_p$ .

**Definición 2.1.25.** Diremos que dos ciclos  $c_1, c_2 \in Z_p$  son *homólogos* si existe  $b \in B_p$  tal que

$$c_1 = c_2 + b$$

## 2.1. Conocimientos previos y definiciones

Como  $H_p(K)$  es un grupo finito, por el *teorema de Lagrange* sabemos que el número de clases de homología es

$$\text{ord } H_p(K) = \frac{\text{ord } Z_p}{\text{ord } B_p}$$

Además, como  $Z_p$ ,  $B_p$  y  $H_p$  son espacios vectoriales sobre  $\mathbb{Z}_2$  se sigue que

$$\beta_p = \dim H_p = \dim Z_p - \dim B_p$$

### Aplicaciones inducidas

Veremos que una aplicación simplicial entre espacios subyacentes de dos complejos simpliciales lleva ciclos a ciclos y bordes a bordes. Luego, esta aplicación induce una aplicación entre grupos de homología.

Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y  $f : K \rightarrow L$  una aplicación simplicial. Para cada  $p$ -símplice  $\sigma^p$  se define

$$f_{\#}(\sigma^p) = \begin{cases} f(\sigma^p) & \text{si } \dim f(\sigma^p) = p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Puesto que los símlices forman una base de los espacios vectoriales  $C_p(K)$  y  $C_p(L)$ , mediante una extensión lineal se obtiene una aplicación lineal  $f_{\#} : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ .

**Propiedad 2.1.1.** Sean  $\partial_K$  y  $\partial_L$  los operadores borde de  $K$  y  $L$  respectivamente. Entonces  $f_{\#} \circ \partial_K = \partial_L \circ f_{\#}$  [1].

La propiedad anterior garantiza que  $f_{\#}(Z_p(K)) \subset Z_p(L)$  y  $f_{\#}(B_p(K)) \subset B_p(L)$ . Por tanto  $f_{\#}$  induce una aplicación lineal  $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$ , que denominaremos *homomorfismo inducido por  $f$* .

Utilizando aproximaciones simpliciales podemos ver que aplicaciones continuas entre poliedros inducen aplicaciones lineales en homología. Para ello definiremos el siguiente operador:

**Definición 2.1.26.** Sea  $K$  un complejo simplicial y consideremos la aplicación  $\lambda : C_p(K) \rightarrow C_p(\text{Sd}^n K)$  definida sobre los  $p$ -símlices como

$$\lambda_p(\sigma^p) = \sum_{\tau^p \in \text{Sd}^n \sigma^p} \tau^p$$

La aplicación  $\lambda_p$  se denomina *operador subdivisión*.

Sean  $K$  y  $L$  complejos simpliciales y  $f : |K| \rightarrow |L|$  una aplicación continua y  $g : \text{Sd}^n K \rightarrow L$  una aproximación simplicial de  $f$ . Se define el *homomorfismo inducido por la aplicación  $f$*  como la aplicación lineal  $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$  dada por

$$f_* = g_* \circ \lambda_{p*}$$

Donde  $g_*$  es el homomorfismo inducido por  $g$  y  $\lambda_{p*} : H_p(K) \rightarrow H_p(\text{Sd}^n K)$  es el isomorfismo inducido por  $\lambda_p$ .

**Teorema 2.1.6.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales y  $f : |K| \rightarrow |L|$  un homeomorfismo. Entonces  $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$  es un isomorfismo para todo  $p$ .

### Propiedades topológicas

En esta sección veremos algunas propiedades topológicas que podemos obtener del estudio de la homología de un complejo simplicial.

**Definición 2.1.27.** La característica de Euler de un complejo simplicial  $K$  es

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p s_p$$

donde  $s_p = \dim C_p(K)$ .

La podremos calcular a partir de los números de Betti:

**Teorema 2.1.7.**  $\chi(K) = \sum_{p=0}^{\dim K} (-1)^p \beta_p(K)$  [1].

Por el teorema 2.1.6 sabemos que si los espacios subyacentes de dos complejos simpliciales son homeomorfos, entonces sus grupos de homología son isomorfos, y por tanto tendrán la misma dimensión.

**Corolario.** Sean  $K$  y  $L$  dos complejos simpliciales tales que  $|K| \approx |L|$ . Entonces,  $\chi(K) = \chi(L)$ .

Uno de los valores más importantes que obtenemos al calcular los grupos de homología son sus correspondientes números de Betti, ya que estos nos darán mucha información sobre el espacio subyacente.

**Teorema 2.1.8.** Sea  $K$  un complejo simplicial. Entonces  $\beta_0(K)$  coincide con el número de componentes conexas de  $|K|$ .

**Corolario.**  $|K|$  es conexo si y sólo si  $\beta_0(K) = 1$ .

El Teorema de dualidad de Alexander [1] nos permite interpretar los números de Betti de un poliedro contenido en  $\mathbb{R}^3$ :

- $\beta_0(K)$  nos indica el número de componentes conexas.
- $\beta_1(K)$  nos indica el número de túneles.
- $\beta_2(K)$  nos indica el número de cavidades.

### Homología singular

Hay una gran variedad de teorías de homología en topología. La homología que hemos definido es la *homología simplicial*, la cual supone que nuestro espacio ya está expresado como el poliedro subyacente de un complejo simplicial. La *homología singular* generaliza la homología simplicial y permite estudiar otros espacios no triangulables [2]. Este tipo de homología tiene la ventaja que existe para cualquier espacio topológico y que facilita definir conceptos como las aplicaciones inducidas. Sin embargo, los grupos de cadenas singulares tienen dimensión infinita, lo que hace que no sea una buena opción desde el punto de vista computacional. Cabe destacar que, en la mayoría de los casos, sobre todo en dimensiones bajas, la homología singular y simplicial son teorías equivalentes [3].

Además, para el *teorema de estabilidad* no nos hará falta hacer uso de la homología singular, ya que se parte de la hipótesis de que el espacio es triangulable.

### 2.1.3. Persistencia

Introduciremos el concepto de persistencia primero para funciones de una variable. Después veremos en el caso de funciones morse, luego profundizaremos en el caso de los complejos simpliciales y por último para funciones tame. En esta sección seguiré [3] como referencia.

#### Funciones reales de una variable

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Recordemos que  $x$  es un *punto crítico* y  $f(x)$  un *valor crítico de  $f$*  si  $f'(x) = 0$ . Además, un punto crítico  $x$  es *no degenerado* si  $f''(x) \neq 0$ . Así pues, supongamos que  $f$  sólo contiene puntos críticos no degenerados con valores críticos distintos.

Si consideramos el *conjunto de subnivel*  $\mathbb{R}_t = f^{-1}(-\infty, t]$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , entonces veremos que a medida que incrementemos  $t$ , el número de componentes conexas de  $\mathbb{R}_t$  permanecerá constante hasta que pasemos por un  $t_0$  valor crítico de  $f$ . Como podemos ver en la figura 2.12, cuando pasamos por un mínimo local se crea una nueva componente conexa y cuando pasamos por un máximo local se combinan dos componentes conexas en una.

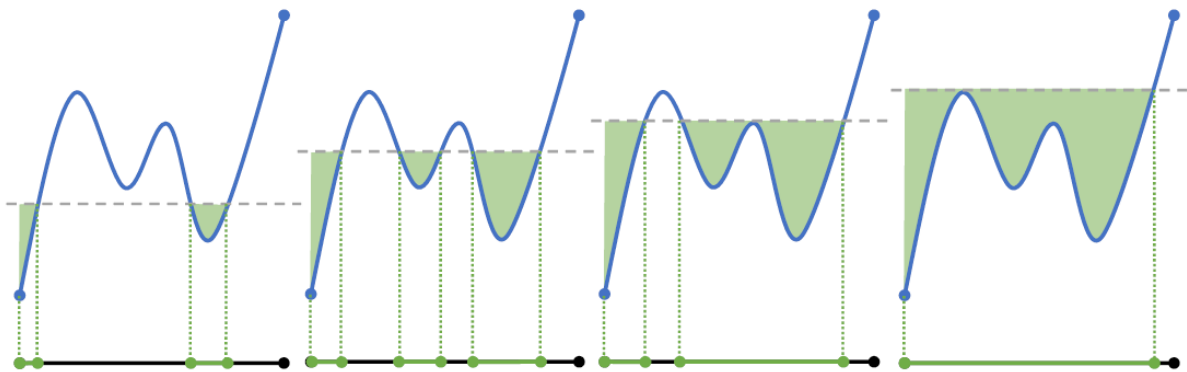


Figura 2.12: Componentes conexas en  $\mathbb{R}$  en las diferentes filtraciones. Fuente: [4]

Los puntos críticos de  $f$  se emparejan de la siguiente forma:

- A. Cuando aparece una nueva componente conexa, diremos que el mínimo local que lo crea *representa* esa componente.
- B. Cuando pasamos por un máximo local y se juntan dos componentes, emparejamos el máximo con el mayor (el más joven) de los dos mínimos locales que representan dichas componentes. El otro mínimo (el más antiguo) pasa a ser el representante de la nueva componente resultante de juntar las dos anteriores.

Cuando los puntos  $x_1$  y  $x_2$  se emparejan siguiendo este método, definimos la *persistencia* del par como  $f(x_2) - f(x_1)$ . Esta persistencia es codificada a través del *diagrama de persistencia*, representando cada par con el punto  $(f(x_1), f(x_2))$ , como se puede ver en la figura 2.13. Se puede observar que todos los puntos se encontrarán por encima de la diagonal  $y = x$ , y que la persistencia es la distancia vertical de un punto a la diagonal. Por razones que explicaremos después se añadirán los puntos de la diagonal al diagrama de persistencia.



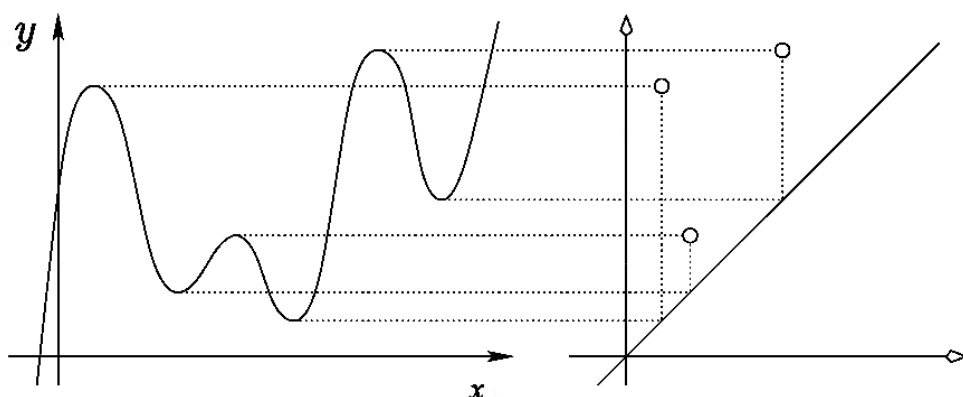


Figura 2.13: Emparejamiento de los puntos críticos de la función de la función de la izquierda representados como puntos en el diagrama de persistencia de la derecha. Fuente: [3]

### Funciones Morse

Vamos a generalizar lo visto con funciones de una variable en  $\mathbb{R}$  a funciones suaves sobre *variedades diferenciables* con ciertas propiedades que explicaremos más adelante. Primero recordaremos que son las variedades diferenciables.

**Definición 2.1.28.** Una *variedad diferenciable* un espacio topológico  $\mathbb{M}$  que satisface:

- A.  $\mathbb{M}$  es Hausdorff.
- B.  $\mathbb{M}$  es segundo numerable.
- C. Todo punto de  $\mathbb{M}$  posee un entorno homomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .
- D. Todo punto de  $\mathbb{M}$  posee un entorno abierto difeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación suave. En este caso, un *punto crítico* es un punto  $p \in \mathbb{M}$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$  para  $i = 1, \dots, n$ . Un punto crítico  $p$  es *no degenerado* si la matriz Hessiana de las segundas derivadas parciales,

$$(H_f)_{i,j} = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

es no singular. Si  $p$  es un punto crítico no degenerado se define su *índice* como el número de autovalores negativos de la matriz Hessiana en  $p$ .

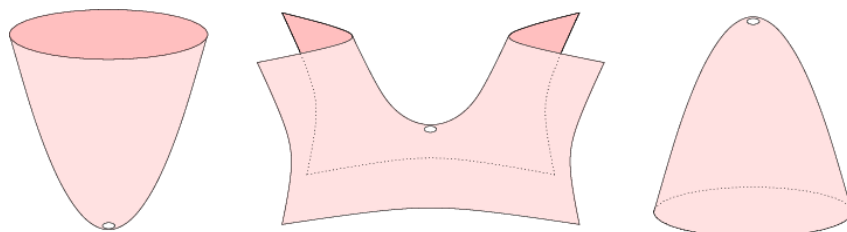


Figura 2.14: De izquierda a derecha tenemos: un punto crítico no degenerado de índice 0, 1 y 2. Fuente: [3]

## 2.1. Conocimientos previos y definiciones

**Definición 2.1.29.** Sea  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$  una aplicación diferenciable. Diremos que  $f$  es una *función Morse* si todos sus puntos críticos son no degenerados y tienen distintos valores críticos.

Se puede demostrar que las funciones Morse poseen un número finito de puntos críticos. Elegimos los valores regulares  $t_0 < t_1 < \dots < t_m$  tal que existe un único punto crítico  $p_i \in (t_i, t_{i+1})$  para todo  $i = 0, \dots, m-1$ . Sea  $\mathbb{M}_j = f^{-1}(-\infty, t_j]$  el *conjunto de subnivel* que contiene los primeros  $j$  puntos críticos.

Cuando pasamos de  $\mathbb{M}_{j-1}$  a  $\mathbb{M}_j$  la homología (singular) puede cambiar de dos formas distintas:

- A)  $H_p$  incrementa la dimensión en uno, es decir,  $\beta_p(\mathbb{M}_j) = \beta_p(\mathbb{M}_{j-1}) + 1$ .
- B)  $H_{p-1}$  disminuye la dimensión en uno, es decir,  $\beta_{p-1}(\mathbb{M}_j) = \beta_{p-1}(\mathbb{M}_{j-1}) - 1$ .

Donde  $p$  es el índice del  $j$ -ésimo punto crítico. En el primer caso denotaremos a ese punto crítico como *punto crítico positivo* y en el segundo como *punto crítico negativo*.

La persistencia nos dará un emparejamiento de algunos de los puntos críticos positivos de índice  $p$  con puntos críticos negativos de índice  $p+1$ . La idea es determinar el “momento” en el que nace una clase de homología y cuando muere, de forma que la persistencia será la diferencia de los tiempos. Para ello haremos uso de funciones entre grupos de homología inducidos por la inclusión de los conjuntos de subnivel  $\mathbb{M}_i \subseteq \mathbb{M}_j$  para  $i \leq j$ . Definiremos de forma más precisa los conceptos de nacimiento y muerte de una clase de homología de la siguiente forma:

- Una clase de homología  $\alpha$  *nace* en  $\mathbb{M}_i$  si no existe en  $\mathbb{M}_{i-1}$ .
- Una clase de homología  $\alpha$  nacida en  $\mathbb{M}_i$  *morirá al entrar en*  $\mathbb{M}_j$  si la imagen de la función inducida por  $\mathbb{M}_{i-1} \subseteq \mathbb{M}_{j-1}$  no contiene a la imagen de  $\alpha$  pero la imagen de la función inducida por  $\mathbb{M}_{i-1} \subseteq \mathbb{M}_j$  si. Siguiendo lo que vimos en funciones de una variable, lo que ocurre es que al entrar en  $\mathbb{M}_j$  se junta la clase  $\alpha$  con una clase que ya existía en  $\mathbb{M}_{i-1}$ .

Si  $\alpha$  nace en  $\mathbb{M}_i$  y muere al entrar  $\mathbb{M}_j$ , entonces emparejaremos sus puntos críticos correspondientes,  $x$  e  $y$ , y diremos que su persistencia es  $j - i$  ó  $f(y) - f(x)$  según convenga. Esta persistencia es codificada a través de los *diagramas de persistencia*,  $\text{Dgm}_p(f)$ , representando cada emparejamiento de un punto crítico positivo de índice  $p$  con un punto crítico negativo de índice  $p+1$  añadiendo el punto  $(f(x), f(y))$  al diagrama. Al igual que hicimos en el caso de funciones reales de una variable, añadiremos los puntos de la diagonal en el diagrama de persistencia.

### Funciones tame

Se puede comprobar que las funciones Morse sobre variedades diferenciables limitarán demasiado para algunas aplicaciones. Es por ello que consideraremos un tipo de función  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $f$  y  $\mathbb{X}$  cumplen una serie de propiedades menos restrictivas. Empezaremos extendiendo la noción de punto crítico de la siguiente forma:

**Definición 2.1.30.** Sea  $\mathbb{X}$  un espacio topológico,  $f$  una función real en  $\mathbb{X}$  y  $\mathbb{X}_t = f^{-1}(-\infty, t]$  el conjunto de subnivel definido para el valor  $t$ . Un *valor crítico de homología* de  $f$  es un número real  $a$  para el cual existe un entero  $k$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  lo suficientemente pequeño, la función  $H_k(\mathbb{X}_{a-\epsilon}) \rightarrow H_k(\mathbb{X}_{a+\epsilon})$  inducida por la inclusión,  $\mathbb{X}_{a-\epsilon} \subseteq \mathbb{X}_{a+\epsilon}$ , no es un isomorfismo.

## Desarrollo

---

En otras palabras, los valores críticos de homología son los niveles en los cuales cambia la homología de los conjuntos de subnivel. Como ya hemos visto, en el caso de las funciones Morse, estos puntos críticos de homología coinciden con los valores críticos de la función.

**Definición 2.1.31.** Una función  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es *tame* si los grupos de homología de cada subnivel son finito-dimensionales y tienen un número finito de valores críticos de homología.

En particular, las funciones morse sobre variedades compactas son funciones tame, porque poseen un número finito de puntos críticos. Para poder simplificar la notación, para cada entero  $k$  fijo, escribimos  $F_x = H_k(f^{-1}(-\infty, x])$ , y para  $x < y$ , denotamos como  $f_x^y : F_x \rightarrow F_y$  la aplicación lineal inducida por la inclusión  $\mathbb{X}_{a-\epsilon} \subseteq \mathbb{X}_{a+\epsilon}$ . Una vez definida la notación, observaremos el lema 2.1.9, el cual nos será de gran ayuda para la demostración del *teorema de estabilidad*.

**Lema 2.1.9** (Lema del valor crítico). *Si un intervalo cerrado  $[x, y]$  no contiene ningún valor crítico de homología de  $f$ , entonces  $f_x^y$  es un isomorfismo para todo entero  $k$ .*

*Demostración.* Sea  $m = \frac{x+y}{2}$ , tenemos que  $f_x^y = f_m^y \circ f_x^m$ . Supongamos que  $f_x^y$  no es un isomorfismo; por lo tanto, al menos una de las funciones  $f_m^y$  y  $f_x^m$  no es un isomorfismo.

Por inducción sobre las funciones no isomorfas de la composición, obtenemos una sucesión de intervalos encajados cerrados y acotados,  $I_n = [x_n, y_n]$ , tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y_n - x_n| = 0 \text{ y } f_{x_n}^{y_n} \text{ no es un isomorfismo para todo } n \in \mathbb{N}$$

por lo que, aplicando el principio de intervalos encajados en  $\mathbb{R}$ , sabemos que su intersección es un punto  $a \in \mathbb{R}$ , que verifica que  $f_{a-\epsilon}^{a+\epsilon}$  no es un isomorfismo para todo  $\epsilon > 0$ . Luego, el punto  $a$  es un valor crítico de homología en  $[x, y]$ , contradiciendo nuestra hipótesis inicial.  $\square$

definición función tame, subniveles, grupos de persistencia a partir de funciones tame, critical value lema, números de betti de grupos de persistencia y su relación con las multiplicidades.

Definición de diagrama de persistencia, k-triangle lemma

### **persistencia en complejos simpliciales**

particularizar lo visto en funciones tame pero con complejos simpliciales

### **funciones PL**

definición de las funciones pl, generación de filtraciones a partir del lower star filtration y estudio de los puntos críticos de las funciones pl para comprobar que son funciones tame.



## **Capítulo 3**

# **Resultados y conclusiones**

Resumen de resultados obtenidos en el TFG. Y conclusiones personales del estudiante sobre el trabajo realizado.



# Bibliografía

- [1] H. Edelsbrunner and J. Harer, *Computational Topology: An Introduction*, 01 2010.
- [2] M. D. Crossley, *Essential Topology*. Springer London, 2005.
- [3] H. Edelsbrunner and J. Harer, “Persistent homology—a survey,” *Discrete & Computational Geometry - DCG*, vol. 453, 01 2008.
- [4] J. M. Curry. Counting embedded spheres with the same persistence. University at Albany SUNY. [Online]. Available: <http://www.fields.utoronto.ca/talks/Counting-Embedded-Spheres-same-Persistence>





# Anexo

Este capítulo es opcional, y se escribirá de acuerdo con las indicaciones del Tutor.

## .1. Ejemplo de código en python

```
1 # -*- coding: utf-8 -*-  
2 import sympy as sy  
3 from sympy.abc import x
```

## .2. Ejemplo de fórmula matemática

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$