Capítulo 1

Desarrollo

1.1. Conocimientos previos y definiciones

En esta sección se mostrarán las principales nociones de Topología Computacional, que nos darán el contexto y conocimientos necesarios para poder comprender el Teorema de Estabilidad y ser capaces de abordar su demostración.

1.1.1. Motivación

La Topología se centra en en el estudio de las diversas propiedades de los espacios topológicos y las funciones continuas. Mientras que en el subcampo de la Topología Computacional veremos como podemos hacer uso de diversos algoritmos para poder estudiar las propiedades de los espacios topológicos y ser capaces de resolver problemas topológicos computacionalmente. Para ello lo primero que necesitamos es una manera de representación de nuestros espacios topológicos, manteniendo sus propiedades topológicas.

1.1.2. Complejos Simpliciales

Una de las formas de representar un espacio topológico es a través de la descomposición del mismo en piezas más sencillas. Una descomposición en un complejo si sus piezas son topológicamente simples y sus intersecciones son piezas de dimensión inferior del mismo tipo [**?**]. Dentro de los complejos se puede observar que hay una gran variedad de tipos, dándonos distintos grados de abstracción. Nosotros vamos a trabajar con los complejos simpliciales, ya que nos darán unas buenas capacidades de computación.

Los complejos simpliciales los podemos estudiar desde un enfoque geométrico y desde un enfoque combinatorio. Partiremos de la definición de complejo simplicial desde el punto de vista geométrico. Para ello recordaremos algunos conceptos de geometría afín.

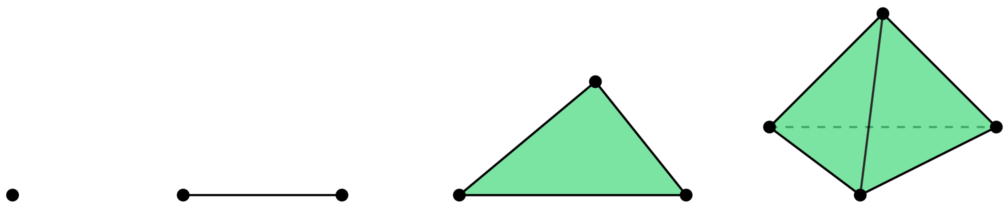
Definición 1.1.1. El conjunto de puntos $\{u_0, u_1, ..., u_k\}$ de $\mathbb{R}^d$ es *afínmente independiente* si los vectores $\{\overrightarrow{u_0u_1}, ..., \overrightarrow{u_0u_k}\}$ son linealmente independientes.

Definición 1.1.2. Diremos que $x \in \mathbb{R}^d$ es *combinación convexa* de los puntos $u_0, u_1, ..., u_k$ si $x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$ con $\lambda_i \geq 0$ $\forall i \in \{0, ..., k\}$ y $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

Llameremos *envolvente convexa* de $u_0, u_1, ..., u_k$, denotado por $conv\{u_0, u_1, ..., u_k\}$, al conjunto de todas las combinaciones convexas de dichos puntos. Y haciendo uso de este conjunto podremos definir nuestras piezas de la descomposición de la siguiente manera:

Definición 1.1.3. Un *k-símplice* σ en $\mathbb{R}^d$ con $d \geq k$ es la envolvente convexa de $k+1$ puntos afínmente independientes $u_0, u_1, ..., u_k \in \mathbb{R}^d$, es decir, $\sigma := conv\{u_0, u_1, ..., u_k\}$

Diremos que el k-símplice σ tiene dimensión k y llamaremos *vértices de* σ a los puntos $u_0, u_1, ..., u_k$.



(a) 0-símplice (b) 1-símplice (c) 2-símplice (d) 3-símplice

Figura 1.1: Representación de los símplices de dimensión 0, 1, 2 y 3

Se puede observar que cualquier subconjunto de los vértices de σ será afínmente independiente y por lo tanto definirá un símplice τ. De esta forma diremos que τ *es una cara de* σ si es una combinación convexa de un subconjunto no vacío de los vértices de σ, y lo denotaremos por $\tau \leq \sigma$. Si el subconjunto es propio, diremos que τ *es cara propia de* σ, y lo denotaremos por $\tau < \sigma$. Por otro lado, diremos que σ *es cocara (propia) de* τ si $\sigma \geq \tau$ ($\sigma > \tau$).

Haciendo uso de de la definición de caras de un símplice σ podemos definir *el borde y el interior* de σ.

Definición 1.1.4. Sea σ un símplice. Entonces

- Se define el *borde de* σ como
$$bd\ \sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \tau$$

- Se define el *interior de* σ como
$$int\ \sigma = \sigma - bd\ \sigma$$

Debido a la definición del símplice como la envolvente convexa de un conjunto de puntos afínmente independientes, un punto $x \in \sigma$ pertenece al interior de σ si y sólo si todos sus coeficientes λ_i de la combinación convexa son positivos. Se sigue que cada punto $x \in \sigma$ pertenece únicamente al interior de la cara generada por los puntos con coeficientes λ_i positivos.

Una vez que ya conocemos las piezas de nuestra descomposición vamos a ver como tenemos que unirlas y cuales son las principales propiedades de los complejos resultantes.
Como ya hemos visto al principio de la sección, para que una descomposición sea un complejo sus piezas tienen que ser topológicamente simples y sus intersecciones tienen que ser piezas de dimensión inferior del mismo tipo. Es por esto que la manera que tendremos que unir unos símplices con otros por sus caras.

Definición 1.1.5. Un *complejo simplicial* es una colección finita de símplices K que satisface las siguientes propiedades:

1. Si $\sigma \in K$ y $\tau \leq \sigma$ entonces $\tau \in K$.
2. Si $\sigma_0, \sigma_1 \in K$ y $\sigma_0 \cap \sigma_1 \neq \emptyset$ entonces $\sigma_0 \cap \sigma_1 \leq \sigma_i$ para $i = 1, 2$.

Se define la dimensión de como el máximo de las dimensiones de sus símplices.

Un ejemplo de complejo simplicial es lo que se muestra en la figura 1.2, mientras que en la figura 1.3 muestra un ejemplo que no es complejo simplicial.

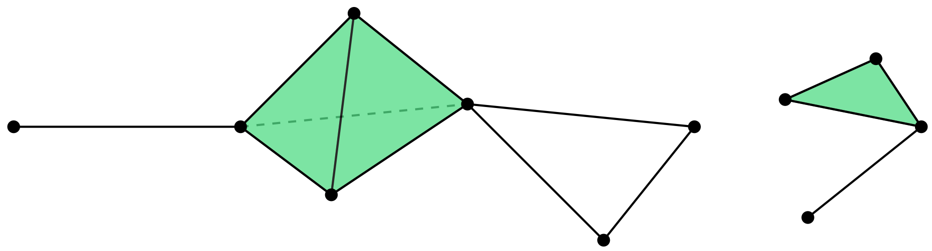


Figura 1.2: Ejemplo de complejo simplicial

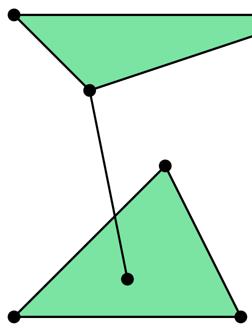


Figura 1.3: Ejemplo de conjunto de símplices que no cumplen las condiciones de complejo simplicial

El *espacio subyacente* de un complejo simplicial K, denotado $|K|$, es la unión de los símplices de K con la topología heredada del $\mathbb{R}^d$ donde viven sus símplices. Este espacio subyacente también es llamado *poliedro*. Como se puede observar, el espacio subyacente de un complejo simplicial es compacto, el cual es un resultado que nos será necesario para la demostración del Teorema de Estabilidad.

Dada esta definición del espacio subyacente de un complejo simplicial podemos conocer cuales son los subconjuntos abiertos y cerrados de $|K|$.

Proposición 1.1.1. *Sea K un complejo simplicial y $A \subset |K|$ un subconjunto. Entonces A es un abierto (cerrado) en K si y sólo si para cada $\sigma \in K$, $A \cap |\sigma|$ es un abierto (cerrado) de $|\sigma|$.*

Una vez que conocemos como se definen los complejos simpliciales y su correspondiente topología, vamos a ver como vincular un espacio topológico con un complejo simplicial. Para ello haremos uso de las triangulaciones:

Definición 1.1.6. Una *triangulación* de un espacio topológico X es un par (K, h) donde K es un complejo simplicial y $h : X \longrightarrow |K|$ es un homeomorfismo (h continua, biyectiva y h^{-1} continua).

Diremos que un espacio topológico es *triangulable* si admite una triangulación. Y por tanto, los espacios $|K|$ y X son iguales (topológicamente hablando).

También nos será de utilidad poder estudiar los complejos simpliciales contenidos en otro complejo simplicial.

Definición 1.1.7. Un *subcomplejo* L de un complejo simplicial K es un complejo simplicial $L \subseteq K$.

Un subcomplejo de gran interés son los j*-esqueletos*, definidos de la siguiente forma:

$$K^{(j)} = \{\sigma \in K \mid dim\ \sigma \ \leq j\}$$

Otro subconjunto de símplices que nos será de gran ayuda más adelante es la *estrella de un símplice* τ, la cual consiste de las cocaras de τ, denotado por St τ. Este conjunto no será siempre un complejo simplicial, así que se define la *estrella cerrada* $\overline{\text{St}}\ \tau$ como el menor subcomplejo de K que contiene a St τ. Adicionalmente, se define el *link* de τ como: Lk $\tau = \{v \in \overline{\text{St}}\ \tau \mid v \cap \tau = \emptyset\}$.

Complejos simpliciales abstractos

Una vez que ya conocemos los complejos simpliciales desde el punto de vista geométrico, vamos a abordarlos desde un enfoque combinatorio, el cual nos será de gran ayuda para poder programar los complejos simpliciales.

Definición 1.1.8. Un *complejo simplicial abstracto* A es una colección finita de conjuntos finitos tal que si $\alpha \in A$ y $\beta \subset \alpha$ entonces $\beta \in A$.

De esta forma se cumple que

- Los conjuntos en A no vacíos se denominan *símplices abstractos*.
- La *dimensión* de un símplice abstracto $\alpha \in A$ es $dim\ \alpha = card(\alpha) - 1$. Y la dimensión del complejo es el máximo de las dimensiones de sus símplices.
- Una *cara* de $\alpha \in A$ es cualquier subconjunto no vacío de $\beta \subset \alpha$.
- El *conjunto de vértices* de A es la unión de todos sus símplices.
- Un *subcomplejo* B de un complejo simplicial abstracto A es un complejo simplicial abstracto $B \subset A$.

Ejemplo
Un ejemplo de complejo simplicial abstracto es el siguiente conjunto

$$A = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{0,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{4,5\},$$
$$\{4,6\},\{5,6\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

Donde el conjunto de vértices es: $Vert\ A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Definición 1.1.9. Sean A y B dos complejos simpliciales abstractos. Diremos que A y B son *isomorfos* si existe una biyección

$$b : Vert\ A \longrightarrow Vert\ B$$

tal que $\alpha \in A \Leftrightarrow b(\alpha) \in B$.

De esta forma podremos ver si varios complejos simpliciales abstractos realmente representan el mismo complejo abstracto. Sin embargo, lo que más nos interesaría es ver si un complejo simplicial abstracto puede representar correctamente un complejo simplicial (definido geométricamente) y viceversa.

Siempre podremos generar complejos simpliciales abstractos a partir de un complejo simplicial (geométrico) de la siguiente forma:

Definición 1.1.10. Sea K un complejo simplicial y V el conjunto de vértices de K. Llamaremos *esquema de vértices* al complejo simplicial abstracto A formado por todos aquellos subconjuntos de V que generan símplices en K.

Y bajo ciertas cirscunstancias podremos hacer el paso opuesto de construir un complejo simplicial (geométrico) a partir de otro abstracto:

Definición 1.1.11. Sean A un complejo simplicial abstracto y K un complejo simplicial. Diremos que K es una *realización geométrica* de A, si A es isomorfo al esquema de vértices de K.

Teorema 1.1.1. *Todo complejo simplicial abstracto de dimensión d admite una realización geométrica en $\mathbb{R}^{2d+1}$.*

Así pues, garantizamos los complejos simpliciales abstractos como una representación fiel de un complejo simplicial (geométrico).

Aplicaciones simpliciales

Una vez que ya conocemos las principales propiedades de los complejos simpliciales, veremos como podemos definir aplicaciones continuas entre ellos. Como vimos anteriormente, para todo σ cada punto de un k-símplice pertenece al interior de exactamente una cara. Por lo tanto, todo punto $x \in |K|$, siendo K un complejo simplicial de vértices $u_0, u_1, ..., u_n$, pertenece al interior de uno de los símplices de K. Si $\sigma = conv\{u_0, u_1, ..., u_k\}$ es dicho símplice, entonces $x = \sum_{i=0}^{n} b_i(x)u_i$, donde

$$b_i(x) = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } 0 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k+1 \leq i \leq n \end{cases}, \text{ con } \lambda_i \text{ tal que } x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i u_i$$

son las *coordenadas baricéntricas* de x en K.

Haremos uso de estas coordenadas para construir una función continua, lineal a trozos inducida por una función entre los vértices de dos complejos simpliciales, denominada *aplicación de vértices*

Definición 1.1.12. Sean K y L complejos simpliciales y $\varphi : \text{Vert } K \longrightarrow \text{Vert } L$ una aplicación. Diremos que φ es una *aplicación de vértices* si satisface que para cada $\sigma \in K$ su imagen $\varphi(\sigma) \in L$.

Una aplicación de vértices $\varphi : \text{Vert } K \longrightarrow \text{Vert } L$ induce una aplicación continua, lineal a trozos $f : |K| \longrightarrow |L|$ dada por

$$f(x) = f\left(\sum_{i=0}^{n} b_i(x)u_i\right) = \sum_{i=0}^{n} b_i(x)u_i$$

a la que llamaremos *aplicación simplicial* asociada a φ. Para enfatizar que es una aplicación lineal en cada símplice del complejo, se suele notar la aplicación de la siguiente forma $f : K \longrightarrow L$.

Subdivisiones

Veremos que hay ocasiones que nos interesará poder ir haciendo los símplices de nuestro complejo simplicial más pequeños, pero conservando el espacio topológico. Por esta razón, definimos *subdivisión de un complejo simplicial* de la siguiente manera:

Definición 1.1.13. Sea K un complejo simplicial. Diremos que un complejo simplicial L es una *subdivisión* de K si:

- $|K| = |L|$.
- Cada símplice de L está contenido en un símplice de K.

Hay muchas maneras de obtener subdivisiones de un complejo simplicial, pero nosotros nos centraremos en la *subdivisión baricéntrica*, denotado por $L = \mathrm{Sd}K$. Para la construcción de esta subdivisión, tenemos que definir el *baricentro* de un símplice y el *cono* de un símplice de vértice v.

Definición 1.1.14. Sea σ un k-símplice, tal que $\sigma = conv\{v_0, v_1, ..., v_k\}$. Llamaremos *baricentro* de σ al punto

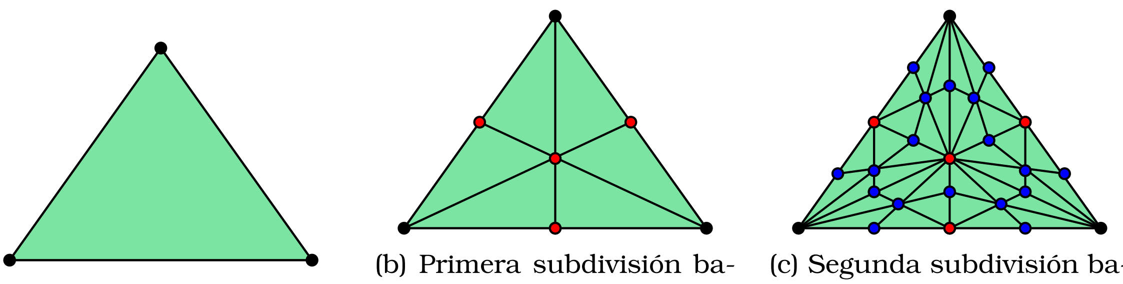
$$b_\sigma = \sum_{i=0}^{k} \frac{v_i}{k+1} \in int\ \sigma$$

Definición 1.1.15. Sea σ un k-símplice, tal que $\sigma = conv\{v_0, v_1, ..., v_k\}$ y v un punto no contenido en el subespacio afín generado por $\{v_0, v_1, ..., v_k\}$. Se define el *cono* de σ con vértice v y se denota por $\sigma * v$ como el $k+1$-símplice generado por $\{v, v_0, v_1, ..., v_k\}$.

Sea K un complejo simplicial. Se define la *subdivisión baricéntrica* de K como el complejo simplicial $\mathrm{Sd}K$ que se construye inductivamente sobre el j-esqueleto como sigue:

1. $\mathrm{Sd}K^{(0)} = K^{(0)}$.
2. $\mathrm{Sd}K^{(j)}$ es la unión de $\mathrm{Sd}K^{(j-1)}$ con el conjunto de todos los símplices de la forma $b_\sigma * \tau$, donde σ es un j-símplice y τ es cualquier símplice de $\mathrm{Sd}K^{(j-1)}$ contenido en una cara de σ.

En la figura 1.4 se muestra la primera y segunda subdivisión baricéntrica de un complejo simplicial.



(a) 2-símplice

(b) Primera subdivisión baricéntrica

(c) Segunda subdivisión baricéntrica

Figura 1.4: Primera y segunda subdivisión baricéntrica de un 2-símplice

Recordemos que el *diámetro* de un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ es el supremo sobre las distancias entre sus puntos.

Lema 1.1.2. *Si σ es un k-símplice, entonces el diámetro de cada símplice en la subdivisión baricéntrica de σ es como máximo $\frac{k}{k+1} diam\ \sigma$.*

De forma que gracias al lema anterior podremos hacer el diámetro de los símplices de los complejos simpliciales tanto como queramos, ya que el diámetro de los símplices de la n-ésima subdivisión baricéntrica del complejo simplicial K, denotado por $\mathrm{Sd}^n K = \mathrm{Sd}(\mathrm{Sd}^{n-1} K)$, es

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^n diam\ \sigma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ con\ \sigma \in K$$

Aproximaciones simpliciales

También nos es de interés poder aproximar funciones continuas entre los subespacios subyacentes de dos complejos simpliciales a partir de una aplicación simplicial entre dichos complejos. Para poder definir esta aproximación primero vamos a definir un tipo de entorno de los vértices de un complejo como se puede ver en la figura **??**.

Definición 1.1.16. Sea K un complejo simplicial y v un vértice de K. El conjunto

$$N(v) = \bigcup_{\sigma \in \mathrm{St}\ v} int\ \sigma$$

es un entorno abierto de v en $|K|$ al que llamaremos *entorno estrellado* de v.

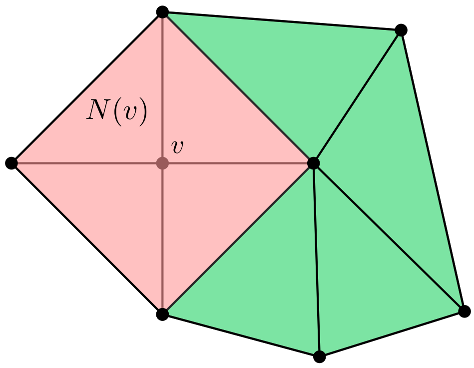


Figura 1.5: Entorno estrellado de v marcado en color rojo

Así pues, definimos una aproximación simplicial de la siguiente forma:

Definición 1.1.17. Sean K y L complejos simpliciales, $g : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicación continua y $f : K \longrightarrow L$ una aplicación simplicial. Diremos que f es una *aproximación simplicial* de g si verifica la *condición de estrella*, es decir, si para cada vértice $v \in K$ se tiene que $g(N(v)) \subset N(f(v))$.

Además la condición de estrella será una condición suficiente para garantizar la existencia de una aproximación simplicial:

Lema 1.1.3. *Sean K y L complejos simpliciales, $g : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicación continua que satisface la condición de estrella. Entonces g tiene una aproximación simplicial $f : K \longrightarrow L$.*

Teorema 1.1.4 (Aproximación simplicial)**.** *Sean K y L complejos simpliciales, $g : |K| \longrightarrow |L|$ una aplicación continua. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que g tiene una aproximación simplicial $f : \mathrm{Sd}^n\ K \longrightarrow L$.*

Complejos simpliciales de nubes de puntos

Desde el punto de vista computacional nos encontramos con el problema de que tenemos una representación de un espacio topológico a través de una discretización finita de los puntos de dicho espacio, y nuestro objetivo es poder recuperar las propiedades del espacio topológico original a partir de esta nube de puntos. Para ello usaremos complejos simpliciales asociados a dicha nube de puntos.

def complejo de Čech

def complejo de Vietoris-Rips

def diagrama de Voronoi + triangulación Delonay

def alpha complejo

1.1.3. Homología

Como se puede ver en [añadir cita] la homotopía es una gran herramienta algebraica para poder obtener propiedades de los espacios topológicos. Sin embargo, los métodos para el cálculo de la homotopía no son los mejores computacionalmente. Así pues, se propone la homología como formalismo algebraico, que aunque no es capaz de obtener tanta información topológica sobre el espacio como con otros formalismos, contiene algoritmos mucho más rápidos y eficientes.

grupos de cadenas

operador borde: complejos de cadenas, ciclos y bordes

grupos de homología simplicial: definición, números de betti, característica de euler, teorema de conexión y números de betti

aplicaciones inducidas para grupos de homología

Homología singular

Comentar existencia de la homología singular y el porqué se creó y que beneficios, pero debido a que el teorema de estabilidad parte de un espacio topológico triangulable no es necesario

HERBERT EDELSBRUNNER AND JOHN HARER: PERSISTENT HOMOLOGY — A SURVEY
"REMARK 2.1. There are a variety of other homology theories defined in topology. Most notably singular homology has the advantage that it exists for arbitrary topological spaces and it is easy to define concepts like induced maps, prove that homotopy equivalent maps induce isomorphisms on homology, etc. However, in singular homology the chain groups are infinite-dimensional and therefore not directly suited to computational methods. Nevertheless, the reader should be aware of this theory. It justifies the common practice of talking about homology for spaces without an explicit triangulation. Most of the time, and certainly in low dimensions, singular and simplicial homology are equivalent theories."

Crossley, Martin D., Essential Topology. Springer-Verlag, London, 2005.
"For simplicial homology we supposed that our space had already been expressed as

a simplicial complex, i.e., decomposed into a union of simplices. Some spaces cannot be expressed in such a way, and even those that can, can usually be expressed as a simplicial complex in many different ways. Choosing one way can obscure some details of the space. For these reasons "singular" homology was developed, which gets around this problem by, in a very loose sense, considering all possible simplicial decompositions."

1.1.4. Persistencia

funciones reales

poder ver gráficamente como a través de las contraimagenes se generan diferentes componentes al pasar por puntos críticos

funciones morse

def variedad diferenciable, definición de las funciones morse, ver como la homología cambia al pasar por los puntos críticos y ver las nociones de nacimiento y muerte

funciones tame

definición función tame, subniveles, grupos de persistencia a partir de funciones tame, critical value lema, números de betti de grupos de persistencia y su relación con las multiplicidades.

Definición de diagrama de persistencia, k-triangle lemma

persistencia en complejos simpliciales

particularizar lo visto en funciones tame pero con complejos simpliciales

funciones PL

definición de las funciones pl, generación de filtraciones a partir del lower star filtration y estudio de los puntos críticos de las funciones pl para comprobar que son funciones tame.