

# Equations Différentielles I


STEP, MINES ParisTech\*

15 janvier 2020 (#f1b98c7)

## Table des matières

<b>Un peu d’histoire</b>	<b>3</b>
<b>Objectifs du cours</b>	<b>4</b>
<b>Cadre de l’étude</b>	<b>5</b>
Quelques exemples . . . . .	5
Equation différentielle d’ordre $p$ . . . . .	5
Réduction à l’ordre 1 . . . . .	6
Exemples . . . . .	7
Problème de Cauchy ( <i>Initial Value Problem</i> ) . . . . .	7
Représentation intégrale des solutions . . . . .	8
Classe plus générale de solutions . . . . .	8
Portrait de phase . . . . .	8
<b>Etude du problème de Cauchy</b>	<b>10</b>
Existence de solutions locales . . . . .	10
Théorème de Peano-Arzelà . . . . .	10
Solution maximale . . . . .	10
Classe plus générale de solutions (pour la culture) . . . . .	10
Unicité des solutions . . . . .	11
Exemple de non-unicité des solutions . . . . .	11
Théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf) . . . . .	11
Relâchement à $f$ Lipschitzienne . . . . .	13
Approximations successives . . . . .	14
Exemples . . . . .	14
Solutions globales . . . . .	14

---

\*Ce document est un des produits du projet  boisgera/CDIS, initié par la collaboration de (S)ébastien Boisgérault (CAOR), (T)homas Romary et (E)milie Chautru (GEOSCIENCES), (P)auline Bernard (CAS), avec la contribution de Gabriel Stoltz (Ecole des Ponts ParisTech, CERMICS). Il est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons “attribution – pas d’utilisation commerciale – partage dans les mêmes conditions” 4.0 internationale.

Exemple d'explosion en temps fini . . . . .	15
Théorème des bouts . . . . .	16
Critère d'existence globale . . . . .	16
Exemples . . . . .	16
<b>Régularité et stabilité des solutions</b>	<b>17</b>
Sensibilité aux conditions initiales et erreurs de modèle . . . . .	18
Régularité en temps fini . . . . .	18
Exemples . . . . .	18
Chaos déterministe et horizon de Lyapunov . . . . .	19
Exemples . . . . .	20
Propriétés asymptotiques . . . . .	21
Point d'équilibre . . . . .	22
Exemple d'un pendule . . . . .	22
Attractivité . . . . .	22
Stabilité, stabilité asymptotique . . . . .	23
Exemples . . . . .	23
Robustesse vis-à-vis des perturbations (pour la culture) . . . . .	23
Cas d'un système linéaire . . . . .	24
Lien entre stabilité et stabilité du linéarisé tangent . . . . .	25
Exemple . . . . .	25
Caractérisation par Lyapunov . . . . .	26
Exemple . . . . .	27
<b>Exercices</b>	<b>28</b>
Ecoulement dans un réservoir (+) . . . . .	28
Solutions globales (+) . . . . .	29
Autour du Lemme de Grönwall . . . . .	29
Critère de stabilité d'un système plan . . . . .	30
Oscillateur (+) . . . . .	30
Stabilité asymptotique globale (+) . . . . .	30
Cycle limite . . . . .	31
Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire . . . . .	31
Contrôle d'un système linéaire . . . . .	31
<b>Correction des exercices</b>	<b>32</b>
Ecoulement dans un réservoir . . . . .	32
Solutions globales . . . . .	33
Autour du Lemme de Grönwall . . . . .	34
Critère de stabilité en dimension 2 . . . . .	36
Oscillateur . . . . .	36
Stabilité asymptotique globale . . . . .	37
Cycle limite . . . . .	38
Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire . . . . .	39

Contrôle d'un système linéaire . . . . .	41
<b>Annexes</b>	<b>42</b>
Preuve du théorème de Peano-Arzelà (Hors-programme) . . . . .	42
Preuve du théorème des bouts . . . . .	43
Stabilité et linéarisé tangent . . . . .	44
<b>Références</b>	<b>45</b>

## Un peu d'histoire

L'étude des équations différentielles remonte au XVII<sup>e</sup> siècle lors de la découverte du calcul infinitésimal et de la modélisation du mouvement par Kepler et Newton. Avec Leibniz, leur premier réflexe est alors de chercher des solutions exactes, par exemple par des primitives de fonctions connues ou bien sous forme de série, mais ces méthodes atteignent vite leurs limites, mis à part dans des cas très particuliers.

Alors que l'idée d'approximer les solutions apparaît au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle avec Euler, on cherche à caractériser leurs propriétés sans les connaître explicitement. Cauchy, et parallèlement Lipschitz, démontrent les premiers, au milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, l'existence et l'unicité des solutions sous des hypothèses de régularités de l'équation différentielle. Laplace, qui s'intéresse alors à la mécanique céleste, s'émerveille devant la capacité de l'Homme à prédire l'évolution du monde physique. C'est l'avènement du *déterminisme* c'est-à-dire la certitude que l'état du monde futur (ou passé) peut être prédit de manière unique par la connaissance de l'état initial.

Cependant, à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, les travaux de Poincaré et de ses contemporains mettent en évidence les limites de ce déterminisme. Le constat que le modèle physique n'est jamais exactement connu, ni sa condition initiale, amène les scientifiques à étudier la sensibilité des solutions à ces erreurs. Une sensibilité extrême chez certains systèmes rend leur simulation impossible sur des temps longs et mène à la théorie du *chaos* qui occupera les scientifiques durant une grande partie du XX<sup>e</sup> siècle.

En parallèle, l'étude de la stabilité et du comportement asymptotique des solutions intéresse dès le XIX<sup>e</sup> siècle, d'abord dans le cas des systèmes linéaires avec des mathématiciens comme Ruth, Hurwitz, etc. Mais c'est finalement la thèse de Lyapunov à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle qui lance la théorie générale de la stabilité des systèmes non linéaires qui sera ensuite étayée tout au long des XX<sup>e</sup> et XXI<sup>e</sup> siècles.

## Objectifs du cours

Ce cours est une introduction à l'étude non linéaire des équations différentielles. Pour une étude plus complète voir par exemple (Hale 2009). En première lecture, les objectifs "opérationnels" sont les suivants :

- savoir réduire une équation différentielle à l'ordre 1.
- savoir justifier l'existence de solutions par le théorème de Peano lorsque " $f$  est continue", et l'unicité des solutions maximales par le théorème de Cauchy-Lipschitz lorsque " $f$  est  $C^1$  par rapport à  $x$ ".
- comprendre que les solutions ne sont pas toujours définies globalement si elles "explosent en temps fini" où atteignent le bord du domaine où l'équation différentielle est définie. Savoir faire appel au critère "linéairement borné" pour justifier la globalité des solutions.
- comprendre (qualitativement) dans quelle mesure une erreur sur la condition initiale se répercute sur les solutions en temps fini.
- savoir trouver les points d'équilibre.
- savoir déterminer si un système linéaire est globalement asymptotiquement stable en regardant le signe de la partie réelle de ses valeurs propres.
- savoir déterminer si un point d'équilibre est localement asymptotiquement stable/instable par les valeurs propres de la matrice Jacobienne associée.
- savoir calculer la dérivée d'une fonction de Lyapunov le long des trajectoires et en déduire qu'un point d'équilibre est stable ou localement/globalement asymptotiquement stable.

En deuxième lecture :

- comprendre la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz en voyant la solution comme un point fixe de la représentation intégrale des solutions.
- savoir que l'on peut relâcher l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz à " $f$  Lipschitzienne par rapport à  $x$ ".
- comprendre ce que représente l'exposant de Lyapunov d'un système chaotique.
- comprendre ce que la notion de stabilité apporte en plus de l'attractivité dans la notion de stabilité asymptotique.

### Notations

- $C(U, V)$  : ensemble des fonctions continues  $f : U \rightarrow V$
- $C^k(U, V)$  : ensemble des fonctions  $f : U \rightarrow V$  continûment différentiables d'ordre  $k \geq 1$ .
- $B_r(x)$  : boule ouverte centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .
- $\overline{B}_r(x)$  : boule fermée centrée en  $x$  et de rayon  $r$ .
- Pour  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$  et  $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ .

## Cadre de l'étude

Les équations différentielles apparaissent couramment en physique pour décrire l'évolution des grandeurs décrivant le système.

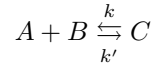
### Quelques exemples

- La tension  $u_c$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en série évolue selon

$$\ddot{u}_c = -\frac{R}{L}\dot{u}_c - \frac{1}{LC}u_c + u(t)$$

où  $R$ ,  $L$ ,  $C$  notent la résistance, inductance et capacité respectivement, et  $u$  la tension appliquée par le générateur. Cette équation différentielle implique les dérivées de  $u_c$  jusqu'à l'ordre 2, donc on parle d'équation différentielle d'ordre 2.

- En cinétique chimique, les concentrations des espèces chimiques intervenant dans une réaction



sont régies par une équation différentielle d'ordre 1 donnée par

$$\begin{aligned}\dot{c}_A &= -k c_A c_B + k' c_C \\ \dot{c}_B &= -k c_A c_B + k' c_C \\ \dot{c}_C &= k c_A c_B - k' c_C\end{aligned}$$

avec  $k, k'$  les constantes de réaction. Cette équation différentielle n'a pas de terme extérieur variant avec le temps. On dit qu'elle est *autonome*.

- La mécanique Newtonienne ou Lagrangienne amène typiquement à des équations du type

$$M\ddot{q} = \sum_k F_k(t, q, \dot{q})$$

où  $q \in \mathbb{R}^n$  modélise la position du système (spatiale, angulaire, etc),  $\dot{q}$  sa vitesse et  $\ddot{q}$  son accélération, avec  $M$  la matrice d'inertie, et  $F_k$  les forces/couples agissant sur le système. Ici il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2.

Dans tous ces cas, on s'intéresse aux signaux du temps  $t$  qui vérifient ces équations. Ceci est formalisé dans la définition suivante.

### Equation différentielle d'ordre $p$

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $Y$  ouvert de  $\mathbb{R}^{np}$  et  $\psi : J \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. Une fonction  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur un intervalle de temps  $I \subseteq \mathbb{R}$

non réduit<sup>1</sup> à un point, est dite *solution*<sup>2</sup> de l'équation différentielle d'ordre  $p$

$$y^{(p)} = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})$$

si  $y$  est de classe  $C^p$  sur  $I$  et pour tout  $t \in \overset{\circ}{I}$ ,

- $(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(p-1)}(t)) \in J \times Y$
- $y^{(p)}(t) = \psi(t, y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(p-1)}(t))$ .

On dira que l'équation différentielle est *autonome* si l'application  $\psi$  ne dépend pas de  $t$ . Dans ce cas, on peut définir directement  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Lorsque l'intervalle de temps  $I$  de définition de la solution est  $J$  entier, on dira que la solution est globale. Mais l'on verra qu'il peut parfois arriver qu'une solution n'existe que sur un intervalle de temps fini, plus *petit* que  $J$ , par exemple si elle explose avant, ou si elle s'apprête à quitter  $Y$ .

Notons que  $f$  sera souvent définie globalement avec  $J = \mathbb{R}$  et  $Y = \mathbb{R}^{np}$ . Cependant, il peut arriver que cela ne soit pas le cas, comme par exemple pour deux corps de position  $y_a, y_b$  dont la force d'interaction gravitationnelle  $\frac{Gm_a m_b}{\|y_a - y_b\|^2}$  n'est définie que pour  $y_a \neq y_b$ .

Même si la physique nous donne souvent des équations différentielles d'ordre supérieur, il est toujours possible de se ramener à l'ordre 1. Cette réduction doit être systématique et sera cruciale dans la suite pour l'étude des propriétés des solutions.

### Réduction à l'ordre 1

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $Y$  ouvert de  $\mathbb{R}^{np}$  et  $\psi : J \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue. Alors  $y$  est solution de l'équation différentielle d'ordre  $p$

$$y^{(p)} = \psi(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})$$

si et seulement si  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)})$  est solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$\dot{x} = f(t, x) ,$$

où  $f \in C(J \times Y, \mathbb{R}^{np})$  est définie par

$$f(t, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) = (y_1, y_2, \dots, y_{p-1}, \psi(t, y_0, \dots, y_{p-1})) .$$

---

1. Certaines références autorisent les solutions définies sur un intervalle d'intérieur vide, c'est-à-dire réduit à un point, qui sont dites "triviales". Mais cela n'a pas grand intérêt ici et nous supposons donc que les solutions sont définies au moins "pendant un certain temps" autour de  $t_0$ .

2. On omet de préciser l'intervalle  $I$  sur lequel  $x$  est solution lorsque  $I$  est l'ensemble de définition naturel (ou clairement défini) de  $x$ . Lorsque celui-ci est ambigu ou bien lorsque l'on veut insister sur l'intervalle de définition, on dira *solution sur  $I$* .

Nous déduisons que résoudre une équation différentielle d'ordre  $p$  est en fait équivalent à résoudre une équation différentielle d'ordre 1, quitte à considérer comme inconnue la suite des dérivées  $x = (y, \dot{y}, \dots, y^{(p-1)}) \in C^1(I, \mathbb{R}^{np})$ , au lieu de  $y \in C^p(I, \mathbb{R}^n)$ . Dans la suite de ce cours, nous nous restreignons donc à  $p = 1$ .  $x$  est appelé l'*état* du système.

## Exemples

Reprenons les exemples plus haut :

- pour un circuit RLC, on prend  $x = (u_c, \dot{u}_c) \in \mathbb{R}^2$ , et

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{R}{L}x_2 - \frac{1}{LC}x_1 + u(t) \end{bmatrix} .$$

- en cinétique chimique,  $x = (c_A, c_B, c_C) \in \mathbb{R}^3$  et

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -k x_1 x_2 + k' x_3 \\ -k x_1 x_2 + k' x_3 \\ k x_1 x_2 - k' x_3 \end{bmatrix}$$

- en mécanique,  $x = (q, \dot{q})$  et

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ M^{-1} \sum_k F_k(t, x_1, x_2) \end{bmatrix} .$$

En physique, on s'intéresse souvent aux solutions partant d'une *condition initiale* donnée. La recherche et l'étude de ces solutions particulières est due à Cauchy et porte le nom de *Problème de Cauchy* :

Dans mes leçons données à l'École Polytechnique, comme dans la plupart des ouvrages ou mémoires que j'ai publiés sur le calcul intégral, j'ai cru devoir placer en premier lieu la recherche, non pas des intégrales générales, mais des particulières ; en sorte que la détermination des constantes ou des fonctions arbitraires ne fût plus séparée de la recherche des intégrales.

## Problème de Cauchy (*Initial Value Problem*)

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $(t_0, x_0) \in J \times X$  et  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$ . Le *problème de Cauchy* associé fait référence au système

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad x(t_0) = x_0 .$$

On dira donc que  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est solution du problème de Cauchy défini par  $f$  et  $(t_0, x_0)$  si

- $t_0 \in I$  et  $x(t_0) = x_0$

—  $x$  est solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(t, x)$  sur  $I$ .

On notera alors  $x \in S_f(t_0, x_0)$ .

Avant d'étudier les solutions d'un problème de Cauchy, il est crucial de remarquer la caractérisation qui suit.

### Représentation intégrale des solutions

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$ ,  $I \subset J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point,  $t_0 \in I$ ,  $x_0 \in X$ , et  $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$  telle que  $x(t) \in X$  pour tout  $t \in I$ . Alors,  $x \in S_f(t_0, x_0)$  si et seulement si  $x$  est solution de l'équation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I .$$

Notons que cette caractérisation n'aurait pas été possible si l'on avait gardé une équation différentielle d'ordre  $p > 1$ .

**Démonstration** Supposons  $x \in S_f(t_0, x_0)$ . Alors  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ , et pour tout  $t \in I$ ,

$$x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x(t) .$$

Réciproquement, si  $x$  vérifie l'équation intégrale,  $x(t_0) = x_0$ , et puisque  $f$  est continue sur  $I \times X$ , on a  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  et par dérivation,  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  pour tout  $t \in I$ . ■

### Classe plus générale de solutions

La définition sous forme intégrale des solutions montre que la recherche de solutions  $C^1$  et l'hypothèse de continuité de  $f$  pourraient être relâchées : il suffirait de pouvoir définir l'objet  $\int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ . Mais il est souhaitable tout de même d'assurer un minimum de propriétés telles que l'existence de solutions, comme nous allons le voir dans la section suivante.

### Portrait de phase

En dimension 2 (ou 3), il est possible de visualiser géométriquement le comportement des solutions en traçant les courbes paramétriques  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  dans le plan (ou  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  dans l'espace) pour différentes conditions initiales. C'est ce que l'on appelle un *portrait de phase*. Voir Figure ci-dessous dans le cas d'un pendule.



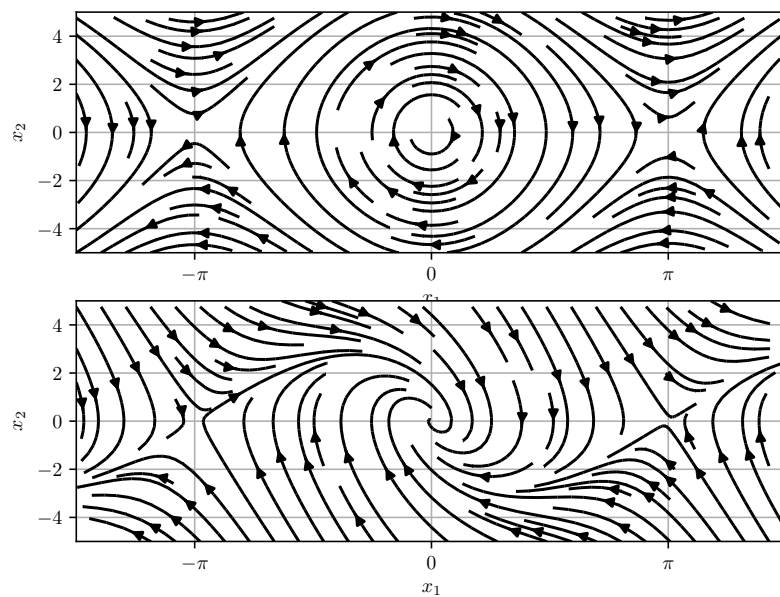


FIGURE 1 – Portraits de phase d'un pendule non amorti à gauche et amorti à droite.  $x_1$  représente l'angle du pendule en abscisse et  $x_2$  sa vitesse de rotation en ordonnée. Le pendule sera décrit et étudié plus en détail dans la suite du cours.

# Etude du problème de Cauchy

## Existence de solutions locales

Notre point de départ est le théorème suivant établi à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, qui assure l'existence locale de solutions au problème de Cauchy sous une simple hypothèse de continuité de  $f$ . En d'autres termes, dans le cadre de ce cours où  $f$  est supposée continue, il existe toujours des solutions pour toute condition initiale, définies au moins pour un certain temps.

### Théorème de Peano-Arzelà

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , il existe  $\tau_m > 0$  et  $x \in C^1([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \mathbb{R}^n)$  tels que  $x \in S_f(t_0, x_0)$ .

**Démonstration** La démonstration de ce résultat est hors-programme et fait appel au théorème d'Ascoli(-Arzelà). Seule la connaissance et la compréhension du résultat est exigible. Pour les curieux, la preuve est donnée en annexe. ■

### Solution maximale

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$ . On dit que  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  est une solution *maximale* de l'équation différentielle

$$\dot{x} = f(t, x)$$

si elle n'est pas *prolongeable*, c'est-à-dire, pour toute autre solution  $x' \in C^1(I', \mathbb{R}^n)$  telle que  $I' \subseteq I$  et  $x|_{I'} \equiv x'|_{I'}$ , on a nécessairement  $I = I'$  et  $x \equiv x'$ .

### Classe plus générale de solutions (pour la culture)

L'existence de solutions  $C^1$  est garantie lorsque  $f$  est continue. Il s'avère que l'existence de solutions *absolument continues*, est garantie sous les hypothèses plus faibles suivantes dans un voisinage de  $(t_0, x_0)$  :

- pour tout  $t$ ,  $x \mapsto f(t, x)$  est continue ;
- pour tout  $x$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est mesurable ;
- il existe une fonction intégrable  $t \mapsto b(t)$  telle que  $|f(t, x)| \leq b(t)$  pour tout  $(t, x)$ .

Ce sont les conditions de *Carathéodory*. Un cadre encore plus général consisterait à autoriser des discontinuités de  $f$  en  $x$  mais l'étude des solutions passerait alors par celle des *inclusions différentielles* du type  $\dot{x} \in F(t, x)$ , ce qui nous amènerait bien trop loin de ce cours.

## Unicité des solutions

Nous venons de voir que des solutions locales au problème de Cauchy existent toujours si  $f$  est continue. Par contre, elles ne sont pas toujours uniques.

### Exemple de non-unicité des solutions

Considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = -\sqrt{|x|} \quad , \quad (t_0, x_0) = (0, 0) \text{ .}$$

Ce système permet en particulier de modéliser l'écoulement d'un fluide dans un réservoir, selon la loi de *Torricelli* (voir exercice correspondant). La fonction  $f : (t, x) \mapsto -\sqrt{|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , donc ce problème de Cauchy admet au moins une solution. Mais on montrera en exercice qu'il existe une infinité de solutions maximales. Plus de détails sont donnés dans le notebook `Equations Différentielles.ipynb`.

Le théorème suivant, dit de *Cauchy-Lipschitz*, montre que l'unicité des solutions est garantie si  $f$  est de plus de classe  $C^1$  par rapport à la variable  $x$ . On voit que ce n'est pas le cas de  $x \mapsto -\sqrt{|x|}$  en 0. Le théorème et la preuve de l'époque est disponible en ligne dans des notes de cours (l'Abbé Moigno 1844).

### Théorème de Cauchy-Lipschitz (ou de Picard-Lindelöf)

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$  telle que sa dérivée partielle  $(t, x) \mapsto \partial_x f(t, x)$  existe et est continue sur  $J \times X$  (on dira que  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ ). Alors pour tout  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , il existe une unique solution maximale  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans  $S_f(t_0, x_0)$ . De plus, l'intervalle  $I$  est ouvert et contient un voisinage de  $t_0$ .

**Démonstration** Nous donnons ici le principe de la preuve qui peut être passée en première lecture, mais qu'il est intéressant de comprendre d'un point de vue scientifique. L'essentiel est en fait de montrer que sous l'hypothèse de régularité de  $f$  par rapport à  $x$ , il existe une unique solution locale au problème de Cauchy. De là on peut ensuite déduire qu'elle se prolonge en une unique solution maximale. L'ouverture de son intervalle de définition vient du fait qu'elle serait sinon de nouveau prolongeable *au bord* de l'intervalle puisque  $J \times X$  est ouvert, ce qui contredirait sa maximalité. La partie cruciale est donc le résultat local suivant qui constitue en fait le théorème initial de Cauchy-Lipschitz (sa généralisation aux solutions globales étant plutôt due à Picard et Lindelöf).

**Théorème de Cauchy-Lipschitz local** Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$  de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ , et  $(t_0, x_0) \in J \times X$ . Soient

$\tau > 0$  et  $r > 0$  tels que

$$\mathcal{C} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}_r(x_0) \subset J \times X .$$

Pour tout  $\tau_m \in [0, \tau]$  tel que  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ , il existe une unique fonction  $x \in S_f(t_0, x_0)$  définie sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ .

### Démonstration

La preuve consiste à voir les solutions comme des points fixes d'un certain opérateur intégral, obtenu par la représentation intégrale des solutions. Le théorème du point fixe de Banach permet ensuite de montrer l'existence et l'unicité de ce point fixe.

Tout d'abord,  $\mathcal{C}$  étant fermé et borné en dimension finie,  $\mathcal{C}$  est compact et par continuité de  $f$ ,  $\max_{\mathcal{C}} \|f\|$  existe bien. Rappelons nous du cours de Topologie que  $E := C([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$ , et définissons

$$F = \{x \in E : x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subseteq \overline{B}_r(x_0)\} .$$

On peut montrer que<sup>3</sup>  $F$  est un sous-ensemble fermé de  $E$ .  $F$  est donc complet (toujours pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$ ). Pour tout  $x \in F$ , par définition,  $(s, x(s)) \in \mathcal{C} \subset J \times X$  pour tout  $s \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  ; on peut donc définir l'opérateur  $\Gamma : F \rightarrow E$  par

$$\Gamma(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m] .$$

Or d'après la représentation intégrale des solutions, on sait qu'une fonction  $x \in F$  est solution du problème de Cauchy sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  si et seulement si elle vérifie

$$\Gamma(x) = x$$

c'est-à-dire  $x$  est un point fixe de  $\Gamma$ . Par ailleurs, on peut prouver<sup>4</sup> que pour tout  $x \in S_f(t_0, x_0)$  définie sur  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,  $x$  est dans  $F$  : c'est donc un point fixe  $x^*$  de  $\Gamma$  sur  $F$ . L'idée de la preuve est donc de montrer que  $\Gamma$  (ou une de ses itérées) est contractante pour utiliser le théorème de point fixe sur un espace de Banach et en déduire l'existence et l'unicité de ce point fixe.

---

3. Pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $F$  convergeant vers  $x^*$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$|x_n(t) - x^*(t)| \leq |x_n - x^*|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc la suite  $(x_n(t))$  d'éléments du fermé  $\overline{B}_{x_0}(r)$  converge dans  $\mathbb{R}^n$  vers  $x^*(t)$  qui est donc dans  $\overline{B}_{x_0}(r)$ . Ceci implique  $x^* \in F$ .

4. Il suffit de montrer que  $x([t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]) \subseteq \overline{B}_r(x_0)$ . Supposons le contraire et sans perdre en généralité supposons que  $S := \{t \in [t_0, t_0 + \tau_m] : |x(t) - x_0| > r\}$  est non vide. Soit  $t^* = \inf S$ . Nécessairement  $t_0 < t^* < t_0 + \tau_m$ . Donc par la représentation intégrale,

$$|x(t^*) - x_0| \leq (t^* - t_0) \max_{s \in [t_0, t^*]} f(s, x(s)) < \tau_m \max_{\mathcal{C}} |f| < r .$$

Par continuité de  $x$ ,  $|x(t) - x_0| \leq r$  pour un temps après  $t^*$ , ce qui contredit sa définition.

D'abord, pour tout  $x \in F$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma(x)(t) - x_0\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \right| \leq \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$$

de sorte que  $\Gamma(x) \in F$ , i.e.  $\Gamma : F \rightarrow F$ . Ensuite, pour tout  $(x_a, x_b) \in F \times F$ , pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_a(s)) - f(s, x_b(s))\| ds \right|.$$

Soit  $k = \max_{\mathcal{C}} \|\partial_x f\|$  (bien défini car  $\mathcal{C}$  est compact et  $\partial_x f$  est continue par hypothèse). Alors l'application du théorème des accroissements finis, nous donne

$$\|\Gamma(x_a)(t) - \Gamma(x_b)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t k \|x_a(s) - x_b(s)\| ds \right| \leq |t - t_0| k \|x_a - x_b\|_{\infty}$$

et donc  $\|\Gamma(x_a) - \Gamma(x_b)\|_{\infty} \leq \tau_m k \|x_a - x_b\|_{\infty}$ . A ce stade, sauf si  $\tau_m k < 1$ ,  $\Gamma$  n'est pas contractante. Cependant, on peut montrer par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , et pour tout  $t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$ ,

$$\|\Gamma^p(x_a)(t) - \Gamma^p(x_b)(t)\|_{\infty} \leq \frac{(|t - t_0| k)^p}{p!} \|x_a - x_b\|_{\infty}$$

en notant  $\Gamma^p = \underbrace{\Gamma \circ \Gamma \circ \dots \circ \Gamma}_{p \text{ fois}}$ . Donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\|\Gamma^p(x_a) - \Gamma^p(x_b)\|_{\infty} \leq$

$\frac{(\tau_m k)^p}{p!} \|x_a - x_b\|_{\infty}$ . Il existe donc  $m$  tel que  $\Gamma^m$  est contractante. D'après le théorème de point fixe de Banach,  $\Gamma$  admet un unique point fixe  $x^*$  dans  $F$ . ■

### Relâchement à $f$ Lipschitzienne

La première preuve d'existence et unicité locale de solutions sous l'hypothèse que  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $x$  est due à Augustin Louis Cauchy (1820) et repose sur l'utilisation du théorème d'accroissements finis<sup>5</sup>. Mais on remarque dans notre preuve qu'il suffirait qu'il existe  $k > 0$  tel que

$$\|f(t, x_a) - f(t, x_b)\| \leq k \|x_a - x_b\| \quad \forall t \in [t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m], \forall (x_a, x_b) \in \overline{B}_r(x_0),$$

c'est-à-dire que la fonction  $f$  soit *lipschitzienne* par rapport à  $x$  au voisinage de  $(t_0, x_0)$ . Cette propriété fut introduite par le mathématicien allemand Rudolf Lipschitz quelques années plus tard (1868) pour prouver le même résultat de façon indépendante : d'où le nom de *théorème de Cauchy-Lipschitz*. Notons que cette dernière hypothèse est plus faible que celle de Cauchy car elle impose seulement que  $x \mapsto f(t, x)$  soit lipschitzienne au voisinage de  $(t_0, x_0)$ , au lieu de différentiable. Par exemple,  $x \mapsto \|x\|$  est lipschitzienne (mais pas  $C^1$ ) et  $\dot{x} = \|x\|$  admet donc une unique solution maximale quelque soit la condition initiale.

5. En l'absence d'outils d'analyse fonctionnelle à cette époque, la preuve de Cauchy consistait plutôt à discrétiser en temps l'intégrale de plus en plus finement et montrer la convergence vers une solution.

## Approximations successives

Mise à part quelques formes particulières de  $f$ , il est très rare de savoir résoudre explicitement une équation différentielle. Cependant, la preuve (dans sa forme moderne donnée plus haut) caractérise la solution comme le point fixe de l'opérateur  $\Gamma$ . Or, on sait par la preuve du théorème du point fixe de Banach que ce point fixe est la limite uniforme de la suite des itérées de  $\Gamma$ . En pratique, on peut donc s'approcher arbitrairement proche de la solution sur l'intervalle  $[t_0 - \tau_m, t_0 + \tau_m]$  (au sens de la norme uniforme), en calculant la suite  $x_{p+1} = \Gamma(x_p)$  définie par

$$x_{p+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_p(s)) ds,$$

en notant ici de manière abusive  $x_0$  la fonction constante égale à  $x_0$ . Cette méthode de recherche de point fixe porte le nom d'*approximations successives* et est introduite pour la première fois par le mathématicien français Emile Picard à la fin du XIXème siècle grâce aux progrès de l'analyse fonctionnelle. C'est finalement le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf qui donne à la preuve sa forme moderne en utilisant en 1894 la théorie des espaces de Banach. Pour les anglophones, ce théorème s'appelle d'ailleurs le *théorème de Picard-Lindelöf*.

## Exemples

- Une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe  $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telles que

$$f(t, x) = A(t)x + b(t),$$

admet une unique solution maximale quelque-soit sa condition initiale  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , car  $\partial_x f(t, x) = A(t)$  (en identifiant abusivement ici différentielle et matrice Jacobienne).

- Les équations décrivant l'évolution de la tension dans un circuit RLC ou la cinétique chimique données au début de ce cours admettent une unique solution au voisinage de toute condition initiale  $(t_0, x_0)$ . C'est aussi le cas des équations de la mécanique Newtonnienne ou Lagrangienne si les forces/couples  $F_k(t, q, \dot{q})$  sont  $C^1$  par rapport à la position et la vitesse  $(q, \dot{q})$ .

## Solutions globales

Dans la section précédente, nous avons vu que lorsque  $f$  est  $C^1$  par rapport à  $x$ , la solution maximale au problème de Cauchy (qui est alors unique) est définie sur un intervalle ouvert. Mais cet intervalle n'est pas nécessairement  $\mathbb{R}$  entier même si  $f$  est définie globalement sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et  $f$  est de classe  $C^\infty$ . On dit dans ce cas que la solution n'est pas *globale*.

### Exemple d'explosion en temps fini

Par exemple, considérons le problème de Cauchy

$$\dot{x} = x^2, \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2.$$

La fonction  $f : (t, x) \mapsto x^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc il existe une unique solution maximale. On peut vérifier par le calcul que celle-ci s'écrit

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(t - t_0)} \quad , \quad I = \left] -\infty, t_0 + \frac{1}{x_0} \right[.$$

Cette solution diverge au temps  $t_0 + \frac{1}{x_0}$ , on dit qu'elle *explose en temps fini*.

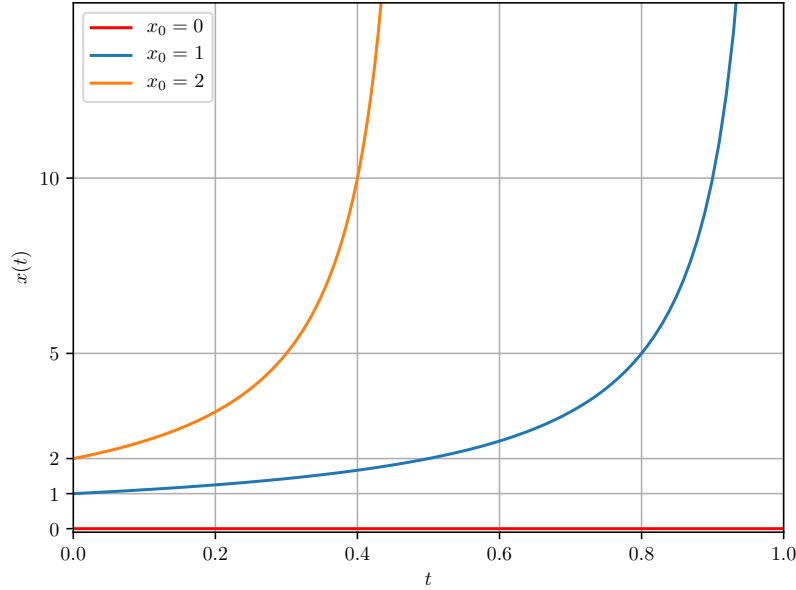


FIGURE 2 – Solutions à  $\dot{x} = x^2$  pour  $t_0 = 0$  et différentes valeurs de  $x_0$

En fait, le théorème suivant montre que pour toute solution maximale, la paire  $(t, x(t))$  quitte nécessairement n'importe quel compact de  $J \times X$  au bout d'un certain temps. Dans le cas usuel où  $J \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , ceci implique donc que toute solution maximale non globale, i.e. définie sur  $[0, \bar{t}[$  avec  $\bar{t} < +\infty$ , explose en temps fini, c'est-à-dire

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \|x(t)\| = +\infty,$$

Dans le cas où  $J \times X$  ne serait pas l'espace entier, une solution non globale pourrait aussi tendre en temps fini vers le "bord" de  $J \times X$  sans nécessairement diverger. C'est ce qui est formalisé dans le théorème suivant.

### Théorème des bouts

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$  de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ . Soient  $(t_0, x_0) \in J \times X$  et  $x : ]\underline{t}, \bar{t}[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution maximale au problème de Cauchy correspondant. Alors pour tout compact  $K \subset J \times X$ , il existe  $t_K^+ \in [t_0, \bar{t}[$  and  $t_K^- \in ]\underline{t}, t_0]$  tels que

$$(t, x(t)) \notin K \quad \forall t \in ]\underline{t}, t_K^-] \cup [t_K^+, \bar{t}[$$

**Démonstration** Voir en annexe. ■

### Critère d'existence globale

Soient  $J$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$  et  $f \in C(J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . S'il existe  $a, b \in C(J, \mathbb{R})$  telles que

$$\|f(t, x)\| \leq a(t)\|x\| + b(t) \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n ,$$

alors toute<sup>6</sup> solution maximale au problème de Cauchy associé est définie sur  $J$  entier. On dit alors que  $f$  a une *croissance au plus affine*.

**Démonstration** Prouvé dans l'exercice *Autour du Lemme de Grönwall*. ■

### Exemples

- Reprenons l'exemple d'une équation différentielle *linéaire*, c'est-à-dire pour laquelle il existe  $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$  et  $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$  telles que

$$f(t, x) = A(t)x + b(t) .$$

D'après le théorème précédent, quelque-soit sa condition initiale  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , sa solution maximale est définie sur  $I$  entier. Dans le cas où  $A$  est constant, on en a même une formule explicite (obtenue par la méthode de *variation de la constante*)

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)ds ,$$

où  $e^{A(t-s)}$  est l'exponentielle de matrice définie par

$$e^{A(t-s)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p(t-s)^p}{p!} .$$

Attention, cette formule ne fonctionne que si  $A$  est constant.

---

6. Si  $f$  est de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ , cette solution est unique. Mais ce théorème est aussi valable pour  $f$  seulement continue.



- Un autre cas important d'une croissance au plus affine est lorsque  $f$  est globalement bornée en  $x$ . Par exemple,

$$f(t, x) = c(t) \arctan(x) \quad \text{ou} \quad f(t, x) = \frac{c(t)}{1 + x^2}$$

engendrent des problèmes de Cauchy aux solutions uniques et globales.

## Régularité et stabilité des solutions

Depuis l'apparition de la mécanique Newtonienne au XVII<sup>ème</sup> siècle, l'étude des équations différentielles a toujours été motivée par l'espoir de compréhension et de prédiction du comportement futur ou passé de systèmes physiques. En particulier, une question ayant taraudé et divisé les scientifiques au cours des siècles est celle de la stabilité du système à trois corps (Terre-Lune-Soleil), ou plus généralement du système solaire. Enchanté devant les avancées de la mécanique céleste, Pierre-Simon Laplace écrit en 1814 :

Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ses données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait présent à ses yeux.

Cette conviction *déterministe*, c'est-à-dire que les phénomènes physiques passés ou futurs sont entièrement déterminés par leur condition initiale, fut confirmée par le théorème de Cauchy-Lipschitz quelques années plus tard. Ce dernier suggère en effet que l'on peut prévoir l'évolution des systèmes physiques par la seule connaissance de leur condition initiale et de leur modèle physique.

Cependant, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, on se rend vite compte que la réalité est en fait toute autre :

- d'une part, la condition initiale et le modèle ne sont jamais parfaitement connus : quelle est alors la qualité de notre prédiction ?
- d'autre part, ne pouvant généralement pas calculer explicitement la solution, comment anticiper son comportement sur des temps longs, voire son comportement asymptotique ?

## Sensibilité aux conditions initiales et erreurs de modèle

La première question fut soulevée par Henri Poincaré à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle alors qu’il s’attelle à la question de la stabilité du système solaire.

Le théorème suivant nous montre que pour un horizon de temps fini donné, on peut obtenir une solution arbitrairement précise si le système est initialisé suffisamment précisément et si les perturbations (ou erreurs de modèle) sont suffisamment faibles. En d’autres termes, la solution est *continue* par rapport aux perturbations en temps fini. Ceci est crucial en physique puisque l’on ne peut jamais modéliser tous les phénomènes parfaitement.

### Régularité en temps fini

Soient  $J$  ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $X$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(J \times X, \mathbb{R}^n)$  de classe  $C^1$  par rapport à  $x$ ,  $(t_0, x_0) \in J \times X$ , et  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  la solution maximale dans  $S_f(t_0, x_0)$ . Pour tout  $\underline{t}, \bar{t}$  tel que  $t_0 \in [\underline{t}, \bar{t}] \subset I$ , il existe  $\delta_m > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tels que pour  $\delta \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|\delta| \leq \delta_m$ , la solution maximale  $x_\delta$  dans  $S_f(t_0, x_0 + \delta)$  est définie sur  $[\underline{t}, \bar{t}]$  et vérifie

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq e^{\lambda(t-t_0)} |\delta| \quad \forall t \in [\underline{t}, \bar{t}] .$$

La présence du facteur exponentiel n’est pas crucial ici, et servira dans la suite. Ce qui est important, c’est que plus l’erreur de condition initiale  $\delta$  est faible, plus l’erreur sur la trajectoire à horizon de temps fini  $\bar{t}$  est faible. On dit alors que la solution du problème de Cauchy est continue par rapport à la condition initiale à horizon de temps fini. Attention, l’hypothèse “ $C^1$  par rapport à  $x$ ” est importante encore ici, comme illustré dans l’exercice *Écoulement dans un réservoir*. Elle peut toutefois être relâchée à “ $f$  lipschitzienne par rapport à  $x$ ” comme dans le cas du Théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Démonstration** Prouvé dans l’exercice *Autour du Lemme de Grönwall*. ■

### Exemples

- Si  $\lambda < 0$ , l’erreur commise sur la condition initiale disparaît au cours du temps dans les solutions : on dit qu’elles “oublient” leur condition initiales et que le système est *contractant*.
- On peut aussi déduire de ce résultat la continuité des solutions par rapport à des paramètres  $p$  intervenant dans la fonction  $f$ . En effet, il suffit de considérer le système étendu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t, y, p) \\ \dot{p} &= 0 \end{aligned}$$

pour lequel l'incertitude de paramètre se ramène à une incertitude de condition initiale.

- Considérons un système linéaire à paramètre et/ou condition initiale incertains

$$\dot{x} = (a + \delta_a)x \quad , \quad x_0 = c + \delta_c$$

Pour  $\delta_a = 0 = \delta_c$ , la solution est  $x(t) = ce^{at}$ , et sinon

$$x_\delta(t) = (c + \delta_c)e^{(a+\delta_a)t} .$$

On a donc pour tout  $t$ ,

$$\|x(t) - x_\delta(t)\| = \|c - (c + \delta_c)e^{\delta_a t}\|e^{at} \leq (|\delta_c|e^{\delta_a t} + |1 - e^{\delta_a t}||c|)e^{at}$$

et pour tout  $\bar{t} > 0$  et  $|\delta_a| \leq \frac{1}{\bar{t}}$

$$\sup_{t \in [0, \bar{t}]} \|x(t) - x_\delta(t)\| \leq \left( |\delta_c|e^{\delta_a \bar{t}} + |\delta_a||c|\bar{t} \right) e^{a\bar{t}}$$

qui peut être rendu aussi faible que voulu si  $\delta_a$  et  $\delta_c$  sont suffisamment petits. On voit bien ici que cette différence est bornée en temps fini, mais pas forcément asymptotiquement en particulier si  $a > 0$ .

- L'outil Fibre<sup>7</sup> permet d'observer en dimension 3 cette continuité des solutions par rapport aux conditions initiales, en affichant les trajectoires pour un ensemble de conditions initiales dont la taille est contrôlée à la souris: à "Integration Time" fixé, plus on réduit la *boîte* de condition initiales, plus les solutions se rapprochent les unes des autres. Par contre, lorsque l'on augmente le "Integration Time" les solutions s'écartent.

## Chaos déterministe et horizon de Lyapunov

Même si la continuité des solutions par rapport aux paramètres/conditions initiales donne à espérer de pouvoir simuler et prédire l'évolution de systèmes physiques, elle est malheureusement parfois insuffisante. Henri Poincaré écrit :

Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible.

---

7. <https://portsmouth.github.io/fibre/>

En effet, le précédent théorème nous prouve seulement que des perturbations suffisamment petites donnent des solutions arbitrairement proches en temps fini. Mais, en pratique, il est rarement possible de choisir l'amplitude des perturbations (erreurs de capteurs, erreurs numériques etc.) et il se pourrait que l'ordre de grandeur des perturbations produisant des erreurs *acceptables* sur les solutions ne soit pas réalisable. Plus précisément, le théorème suggère qu'à perturbation  $|\delta|$  donnée, l'écart entre les solutions pourrait croître exponentiellement vite. C'est le cas bien sûr des systèmes qui divergent exponentiellement (tels que  $\dot{x} = x$ ), mais aussi de certains systèmes à trajectoires bornées, pour lesquels il existe  $\bar{t} > 0$  tel que

$$\frac{|x(t) - x_\delta(t)|}{|\delta|} \approx e^{\lambda t} \quad \forall t \leq \bar{t}.$$

Dans ce cas,  $\frac{1}{\lambda}$  représente l'ordre de grandeur du temps maximal jusqu'auquel l'erreur sur les solutions reste du même ordre de grandeur que l'erreur initiale : on parle d'*horizon de Lyapunov*. Toute prédiction au delà de cet horizon est illusoire et le système est alors dit *chaotique*.

Il est important d'insister sur le caractère *déterministe* de ce chaos : chaque cause entraîne un effet bien déterminé mais deux causes très proches peuvent avoir des effets très différents.

## Exemples

- Henri Poincaré met en évidence le premier un comportement chaotique des solutions du problème à 3 corps. Ses livres sont disponibles en ligne (Poincaré 1892).
- En 1963, Edward Lorenz met en évidence pour la première fois le comportement possiblement chaotique de la météorologie à travers un modèle simplifié à trois dimensions de convection donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}$$

où  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\beta$  sont des paramètres strictement positifs. Pour  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$  et  $\rho = 28$ , ce système présente un attracteur en forme de papillon, où les trajectoires *sautent* de manière *chaotique* d'une aile à l'autre, comme représenté sur la figure ci-dessous. La croissance exponentielle de l'erreur se visualise en simulation : voir pour cela le notebook `Equations Différentielles.ipynb`.

- En 1989, l'astrologue français Jacques Laskar met en évidence numériquement le caractère chaotique des orbites des planètes de notre système solaire, en particulier celle de Mercure, dont les variations d'excentricité pourraient entraîner des collisions ou éjections de planètes dans certains scénarios long-termes. Ces travaux sont confirmés en 1992 par Gerald

Jay Sussman et Jack Wisdom, qui démontrent que le système solaire est chaotique avec un horizon de Lyapunov de l'ordre de 4 million d'années (Sussman and Wisdom 1992).

- Plus généralement, les systèmes chaotiques apparaissent dans des domaines très divers, comprenant l'économie, l'électricité, la mécanique. Parfois, le comportement chaotique apparaît seulement lorsque le système est soumis à certaines excitations, par exemple une excitation sinusoïdale du pendule ou de oscillateur de Van der Pol (Holmes and Rand 1978).

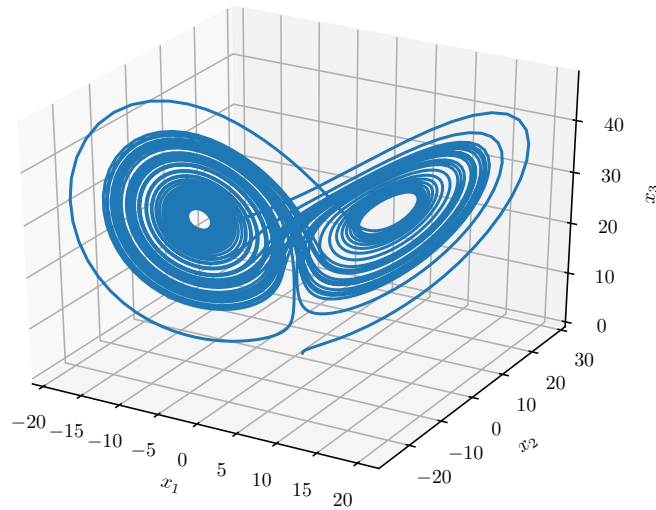


FIGURE 3 – Trajectoire de l'oscillateur de Lorenz

## Propriétés asymptotiques

Dans la section précédente nous avons répondu à la première question qui était la sensibilité des solutions aux erreurs de condition initiale et de modèle. Mais cette étude était en temps fini et nous nous intéressons maintenant à la seconde question qui est le comportement asymptotique des solutions. L'étude théorique asymptotique des solutions prend ses origines dans la thèse de Lyapunov (Lyapunov 1892). Le but est de rechercher des critères sur la fonction  $f$  qui nous permettent de prédire ce comportement : est-ce que les solutions divergent ? est-ce qu'elles tendent vers un point en particulier ? vers un cycle limite ?

Dans la suite, pour simplifier, nous étudions les équations différentielles dites *autonomes*, c'est-à-dire dont la fonction  $f$  est indépendante du temps. On se donne donc une fonction continue  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et on prend par défaut  $t_0 = 0$ .

### Point d'équilibre

On appelle *point d'équilibre* un point  $a \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$f(a) = 0 .$$

En d'autres termes, la fonction constante  $x \equiv a$  est alors solution de  $\dot{x} = f(x)$ .

### Exemple d'un pendule

L'évolution d'un pendule de longueur  $\ell$  et de masse  $m$  dans le champ de l'apesanteur  $g$  peut être décrit par une dynamique du type

$$\ddot{\theta} = -\frac{\rho}{m}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\sin\theta$$

avec  $\rho \geq 0$  un coefficient de frottement. En prenant  $x = (\theta, \dot{\theta})$ , on obtient le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\rho}{m}x_2 - \frac{g}{\ell}\sin x_1\end{aligned}$$

Ce système a pour points d'équilibre  $(k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , qui correspondent soit à la position *basse* du pendule  $\theta = 0$  ou la position *haute*  $\theta = \pi$ , toutes deux à vitesse nulle  $\dot{\theta} = 0$ . Si le pendule est initialisé exactement à sa position haute ou basse à vitesse nulle alors il y reste indéfiniment.

### Attractivité

Un point d'équilibre  $a$  est dit *localement attractif* si *toutes les solutions initialisées suffisamment proche de  $a$  sont globales et convergent vers  $a$* , c'est-à-dire s'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_0$  vérifiant  $|x_0 - a| \leq \eta$ , toute solution maximale  $x \in S_f(x_0)$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et vérifie

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a .$$

De plus,  $a$  est dit *globalement attractif* si *toutes les solutions sont globales et convergent vers  $a$* .

Cette notion intuitive ne dit rien sur le comportement des solutions pendant le transitoire, c'est-à-dire avant de converger vers  $a$ . Des solutions initialisées proche de  $a$  pourraient s'en éloigner arbitrairement loin avant de converger, ou mettre un temps arbitrairement long pour revenir dans un voisinage de  $a$ . Pour garantir une certaine uniformité et robustesse de cette attractivité par rapport à la condition initiale, on a recours à une notion plus forte qui est la *stabilité asymptotique*.

## Stabilité, stabilité asymptotique

Un point d'équilibre  $a$  est dit:

- *stable* si les solutions restent arbitrairement proche de  $a$  quand elles sont initialisées suffisamment proche de  $a$ , c'est-à-dire pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_0$  vérifiant  $|x_0 - a| \leq \eta$ , toute solution maximale  $x \in S_f(x_0)$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  et vérifie

$$|x(t) - a| \leq \varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} .$$

- *instable* s'il n'est pas stable.
- *localement (resp. globalement) asymptotiquement stable* s'il est à la fois stable en plus d'être localement (resp. globalement) attractif.

## Exemples

- Lorsqu'un pendule est initialisé arbitrairement proche de sa position haute ou dans sa position haute mais à vitesse arbitrairement faible, il se met à osciller en passant par sa position basse : l'équilibre haut est donc instable, puisqu'on ne peut pas garder les trajectoires dans son voisinage. Par contre, lorsqu'il est initialisé proche de sa position basse, il oscille de façon amortie en tendant vers l'équilibre bas, qui est donc localement asymptotiquement stable. Ceci se voit sur le portrait de phase du pendule amorti donné plus haut.
- Si l'on avait pris un pendule non amorti, c'est-à-dire avec  $\rho = 0$ , on aurait des oscillations indéfiniment à énergie constante : la position basse serait alors toujours stable mais plus attractive, et donc plus asymptotiquement stable. Ceci se voit sur le portrait de phase du pendule non amorti donné plus haut.

## Robustesse vis-à-vis des perturbations (pour la culture)

L'avantage de la propriété de *stabilité asymptotique* par rapport à la simple *attractivité* est qu'elle apporte de la robustesse par rapport aux perturbations. En effet, lorsque qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, on peut montrer qu'en présence d'une perturbation de la dynamique, les solutions restent asymptotiquement arbitrairement proche de ce point d'équilibre si la perturbation est suffisamment petite. Il y a donc une sorte de continuité des solutions par rapport aux perturbations en temps infini (contrairement au résultat général de continuité par rapport aux conditions initiales qui n'est qu'en temps fini). Cette propriété n'est pas garantie lorsque le point d'équilibre n'est qu'attractif et c'est la raison pour laquelle en pratique, on essaye toujours d'assurer la stabilité asymptotique d'un système : on sait alors que même en présence de perturbations (inévitables en physique), le comportement du système sera proche du comportement voulu.

### Cas d'un système linéaire

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Le point d'équilibre 0 est globalement asymptotiquement stable pour le système

$$\dot{x} = Ax$$

si et seulement si les valeurs propres de  $A$  sont toutes à partie réelle strictement négative. On dit alors que la matrice est *Hurwitz*, du nom du mathématicien allemand Adolf Hurwitz.

**Démonstration** La notion de *globalement asymptotiquement stable* contient deux propriétés : la stabilité et l'attractivité globale. On montrera en exercice que pour un système linéaire, elles sont équivalentes à l'attractivité (locale), c'est-à-dire que la stabilité et la globalité viennent gratuitement. C'est une propriété propre aux systèmes linéaires. Il suffit donc de trouver un critère caractérisant l'attractivité de 0. On a vu que les solutions s'écrivent

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Si  $A$  était diagonale, on aurait  $x_i(t) = e^{\lambda_i t}x_{0,i}$ , où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres et l'on voit bien que la convergence des solutions vers 0 est équivalente à avoir  $\lambda_i < 0$ . Maintenant, si  $A$  est diagonalisable, i.e., il existe  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible telle que  $P^{-1}AP$  est diagonale, on a  $P^{-1}x(t)P = e^{P^{-1}APt}P^{-1}x_0P$ , et reproduisant le même argument,  $P^{-1}xP$  (et donc  $x$ ) converge vers 0 si et seulement si les entrées diagonales de  $P^{-1}AP$ , qui sont les valeurs propres de  $A$ , sont à partie réelle strictement négative. Ceci dit, toute matrice  $A$  n'est pas diagonalisable. Par contre, il existe toujours  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible telle que

$$P^{-1}AP = D + N$$

où  $D$  est diagonale contenant les valeurs propres de  $A$ ,  $N$  est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $N^k = 0$ , et  $D$  et  $N$  commutent. C'est la forme dite *de Jordan*. Il s'ensuit que

$$e^{Jt} = e^{Dt}e^{Nt} = e^{Dt} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} N^i t^i$$

converge vers zero si et seulement si, encore, les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative.

Attention ce critère n'est valable que pour  $A$  constant. Le fait que  $A(t)$  soit Hurwitz pour tout  $t$  n'implique pas que le système

$$\dot{x} = A(t)x$$

soit localement asymptotiquement stable, où même stable. Par exemple, la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 1.5 \cos^2 t & 1 - 1.5 \sin t \cos t \\ -1 - 1.5 \sin t \cos t & -1 + \sin^2 t \end{pmatrix}$$



a des valeurs propres constantes égales à  $-0.25 \pm 0.25\sqrt{7}j$ . Pourtant,  $\dot{x} = A(t)x$  admet des solutions non bornées pour  $x(0)$  arbitrairement proche de 0. ■

### Lien entre stabilité et stabilité du linéarisé tangent

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ .

Si la matrice jacobienne  $J_f(a)$  est Hurwitz alors  $a$  est localement asymptotiquement stable.

Si  $J_f(a)$  a au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, alors  $a$  est instable.

**Démonstration** Voir l'annexe *Stabilité locale et linéarisé tangent*. ■

Notons cependant que rien ne peut être conclu quant à la stabilité (ou stabilité asymptotique) de  $a$  si les parties réelles de  $J_f(a)$  sont négatives ou nulles : on peut avoir asymptotiquement stable, seulement stable ou instable. Par exemple, 0 est globalement asymptotiquement stable pour

$$\dot{x} = -x^3$$

dont le linéarisé est pourtant nul en zéro.

### Exemple

Reprenons l'exemple du pendule amorti. On a

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix}, \quad J_f(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas,  $\text{tr}(J_f(0,0)) < 0$  et  $\det(J_f(0,0)) > 0$ . Comme prouvé en exercice, ceci implique que  $J_f(0,0)$  est Hurwitz. Donc la position basse  $(0,0)$  est bien un équilibre asymptotiquement stable. Dans le deuxième cas par contre, le produit des valeurs propres  $\lambda_1 \lambda_2 = \det(J_f(0,0)) < 0$ . Elles ne peuvent donc pas être complexes conjuguées et sont nécessairement réelles de signes opposés. Il s'ensuit que l'une est strictement positive et la position haute  $(\pi,0)$  est donc bien instable.

Notons que si  $\rho = 0$ , c'est-à-dire que le pendule n'est pas amorti, les valeurs propres  $J_f(0,0)$  sont imaginaires pures, et l'on ne peut donc rien conclure quant à la stabilité des points d'équilibre. Une étude plus approfondie est nécessaire.

Lorsque le linéarisé ne permet pas de conclure sur la stabilité asymptotique locale, ou que l'on veut un résultat global, on a recours à la caractérisation non linéaire suivante.

### Caractérisation par Lyapunov

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ ,  $a$  un point d'équilibre de  $f$ , et  $W$  un voisinage de  $a$ . Soit  $V \in C^1(W, \mathbb{R}_{\geq 0})$  telle que

$$V(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = a .$$

- Si  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in W$  alors  $a$  est stable.
- Si  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{a\}$  alors  $a$  est localement asymptotiquement stable.
- Si  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ ,  $W = \mathbb{R}^n$ , et  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \neq a$  alors  $a$  est globalement asymptotiquement stable.

$V$  est alors appelée *fonction de Lyapunov*. En fait,

$$\langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \frac{d}{dt} V(x(t))$$

le long d'une trajectoire  $t \mapsto x(t)$  de l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ .  $V$  représente donc une grandeur positive qui décroît ou est conservée le long des trajectoires. Pour des systèmes physiques, elle est souvent reliée à l'énergie.

Le fait que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  sert à montrer que toutes les trajectoires sont bornées et donc définies pour tout  $t$ . Sans cette hypothèse, et même si  $V$  décroît strictement le long de toutes les trajectoires, on pourrait avoir des trajectoires qui explosent en temps fini.

**Démonstration** Supposons d'abord que  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$  pour tout  $x \in W$ . On a donc pour toute solution  $t \mapsto x(t)$  initialisée dans  $W$ ,  $V(x(t)) \leq V(x(0))$  tant que  $x(t) \in W$ . Prenons  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit tel que  $\overline{B}_{2\varepsilon}(a) \subset W$ . On veut montrer qu'il existe  $\eta$  tel que toute trajectoire initialisée dans  $B_\eta(a)$  reste dans  $B_\varepsilon(a) \subset W$ . Tout d'abord, il existe  $\varepsilon_V > 0$  tel que

$$\forall x \in \overline{B}_{2\varepsilon}(a) : V(x) \leq \varepsilon_V \implies x \in B_\varepsilon(a) .$$

En effet, sinon, il existerait une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\overline{B}_{2\varepsilon}(a)$  telle que pour tout  $k > 0$ ,  $V(x_k) \leq \frac{1}{k}$  et  $\|x_k - a\| \geq \varepsilon$ . L'ensemble  $\overline{B}_{2\varepsilon}(a)$  étant compact, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers  $x^*$  qui vérifie nécessairement  $V(x^*) = 0$  par continuité de  $V$  et  $\|x^* - a\| \geq \varepsilon$ , i.e.  $x^* \neq a$ . Ceci est impossible par hypothèse. On a donc l'existence de  $\varepsilon_V$ . Maintenant, par continuité de  $V$  en  $a$  et puisque  $V(a) = 0$ , il existe aussi  $\eta > 0$  tel que

$$x \in B_\eta(a) \implies V(x) \leq \varepsilon_V .$$

Alors si  $x(0) \in B_\eta(a)$ ,  $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \varepsilon_V$  donc  $x(t) \in B_\varepsilon(a) \subset W$  pour tout  $t$  tant qu'elle est définie. Par le théorème des bouts,  $x$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Ceci prouve la stabilité de  $a$ .

Supposons maintenant  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in W \setminus \{a\}$ . Alors par le point précédent  $a$  est stable. Il suffit de montrer l'attractivité locale. Par stabilité, si  $x(0) \in B_\eta(a)$ ,  $x(t) \in B_\varepsilon(a) \subset W$  pour tout  $t$  et  $t \rightarrow V(x(t))$  est donc strictement décroissante. Comme elle est aussi bornée inférieurement par 0, elle converge vers  $\ell \geq 0$ . Supposons  $\ell > 0$ . Alors, par continuité de  $V$ , il existe  $0 < \nu < \varepsilon$  et  $\bar{t} > 0$  tel que pour tout  $t \geq \bar{t}$ ,  $\|x(t) - a\| \geq \nu$ . Soit

$$\gamma = \max_{\nu \leq \max \|x(t) - a\| \leq \varepsilon} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$$

qui existe par continuité de  $V$  sur un compact. Puisque  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  sur  $W \setminus \{a\}$ ,  $\gamma < 0$ . Alors, pour tout  $t \geq \bar{t}$ ,

$$V(x(t)) = V(x(\bar{t})) + \int_0^t \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq V(x(\bar{t})) + \gamma(t - \bar{t}) .$$

Mais comme  $\gamma < 0$  cette quantité devient strictement négative au bout d'un certain temps, ce qui est impossible. Donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = 0$ . Finalement, reproduisant le même raisonnement que pour l'existence de  $\varepsilon_V$ , on peut garantir que  $\|x - a\|$  est arbitrairement petit en prenant  $V(x)$  suffisamment petit. Donc on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - a\| = 0$ .

Supposons enfin que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  et  $W = \mathbb{R}^n$ . Alors  $V(x(t)) < V(x(0))$  pour tout  $t \in I$  donc  $x(t) \in V^{-1}([0, V(x(0))])$  pour tout  $t$ . Le fait que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$  est équivalent au fait que l'image réciproque de tout compact est compact (on dit que  $V$  est propre). Donc  $V^{-1}([0, V(x(0))])$  est compact et par le théorème des bouts, nécessairement  $x(t)$  est défini pour tout  $t \geq 0$ , et reste dans ce compact. Alors on peut reproduire le même raisonnement que plus haut et obtenir la convergence de  $x$  vers  $a$ . ■

### Exemple

Reprenons le pendule mais cette fois-ci, non amorti, c'est-à-dire avec  $\rho = 0$ . Nous n'avons pas pu prouver la stabilité du point d'équilibre  $(0, 0)$  par l'étude de la matrice Jacobienne car ses valeurs propres sont imaginaires pures. Essayons par analyse de Lyapunov. Inspirés par la physique, considérons  $V : ]-\pi, \pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  définie par

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} m \ell^2 x_2^2 + m g \ell (1 - \cos(x_1)) .$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique du pendule, et le deuxième son énergie potentielle.  $V$  est  $C^1$ , à valeurs positives et telle que

$$V(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 .$$

De plus,

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle = m \ell^2 x_2 \left( -\frac{g}{\ell} \sin x_1 \right) + m g \ell \sin x_1 x_2 = 0$$

ce qui traduit la conservation de l'énergie en l'absence de frottement. On en déduit donc la stabilité du point d'équilibre  $(0, 0)$ .

On peut se demander s'il existe toujours une fonction de Lyapunov autour d'un point d'équilibre stable/asymptotiquement stable. C'est une question délicate étudiée en détail dans (Bacciotti and Rosier 2005).

## Exercices

Les exercices à maîtriser sont marqués d'un (+).

### Ecoulement dans un réservoir (+)

Considérons un réservoir cylindrique de section  $S$  qui se vide par une ouverture de section  $s$  située à sa base. On note  $x$  la hauteur de liquide dans le réservoir. D'après la *loi de Torricelli*<sup>8</sup>, l'équation d'évolution de  $x$  est donnée par

$$\dot{x} = -k\sqrt{x} \quad k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}$$

où  $g$  est la pesanteur.

**Question 1** Etant donné un temps initial  $t_0$  et une hauteur initiale  $x_0 \geq 0$ , justifier sans calcul que le problème de Cauchy associé admet des solutions et que les solutions maximales sont globales. Pour quelles valeurs de  $x_0$  pouvons-nous dire qu'elles sont uniques ? (?)

**Question 2** Pour  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , résoudre le problème de Cauchy associé en se restreignant aux solutions  $x(t) \geq 0$ . (?)

**Question 3** Comment s'interprète physiquement la multitude de solutions trouvées ? (?)

---

8. Sous l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, la loi de Bernoulli dit que

$$p_s + \rho gh_s + \rho \frac{v_s^2}{2} = p_o + \rho gh_o + \rho \frac{v_o^2}{2}$$

où  $s$  fait référence aux quantités à la surface et  $o$  à l'ouverture. On a  $p_s = p_o$  égales à la pression atmosphérique,  $h_s - h_o = x$ ,  $v_s = \frac{s}{S}v_o$  par conservation du débit, et  $\dot{x} = -v_s$ . On obtient donc

$$\dot{x} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{S}{s}\right)^2 - 1}}\sqrt{2gx} \approx -\frac{s}{S}\sqrt{2gx}$$

en supposant que  $s \ll S$ .

**Question 4 (plus dur)** Les solutions sont-elles continues par rapport aux conditions initiales au sens du théorème de régularité des solutions donné plus haut ? Pourquoi ? (?)

## Solutions globales (+)

Justifier que pour toute condition initiale, le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sin x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{1 + x_1^2}\end{aligned}$$

admet une unique solution maximale définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . (?)

## Autour du Lemme de Grönwall

**Question 1 (Lemme de Grönwall)** Soient  $t^-, t^+ \in \mathbb{R}$ ,  $u, \alpha, \beta \in C([t^-, t^+], \mathbb{R}_{\geq 0})$ , tels que

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds \quad \forall t \in [t^-, t^+].$$

Montrer qu'alors

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds \quad \forall t \in [t^-, t^+].$$

En déduire que si  $\alpha$  est constant,

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \quad \forall t \in [t^-, t^+].$$

*Indice : poser  $v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$  et étudier la dérivée de  $v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right)$ .*  
(?)

**Question 2** Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème d'existence globale de solutions. (?)

**Question 3** Utiliser le Lemme de Grönwall pour montrer le théorème de continuité par rapport aux conditions initiales dans le cas où les solutions sont globales. (?)

## Critère de stabilité d'un système plan

Montrer que  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est Hurwitz si et seulement si

$$\operatorname{tr} A < 0 \quad \text{et} \quad \det A > 0 .$$

(?)

## Oscillateur (+)

Considérons une masse  $m$  évoluant sur un support horizontal et accrochée à un mur via un ressort de raideur  $k$ . L'évolution de sa position par rapport à sa position d'équilibre est décrite par

$$m\ddot{y} = -\lambda\dot{y} - ky ,$$

où  $\lambda$  est un coefficient de frottement.

**Question 1** Réduire l'équation différentielle à l'ordre 1 et déterminer les points d'équilibre. (?)

**Question 2** Justifier que les solutions sont uniques et globales quelque soit la condition initiale  $(y(0), \dot{y}(0))$ . (?)

**Question 3** Etudier la stabilité des points d'équilibre et le comportement des solutions pour  $\lambda > 0$  et  $\lambda = 0$ . Les dessiner sur un portrait de phase.

*Indice : pour  $\lambda = 0$ , on pourra étudier l'évolution de l'énergie  $V(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$*  (?)

## Stabilité asymptotique globale (+)

**Question 1** Montrer que le point d'équilibre  $(0, 0)$  est localement asymptotiquement stable pour le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(1 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2) \end{aligned}$$

L'est-il globalement ? (?)

**Question 2** Même question pour le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

(?)

## Cycle limite

Considérons le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

**Question 1** Montrer que ce système admet un seul point d'équilibre. Etudier sa stabilité. (?)

**Question 2** Posons  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ . Etudier le signe de  $\frac{d}{dt}V(x(t))$  le long des trajectoires du système. (?)

**Question 3** En déduire le comportement des solutions en fonction de la condition initiale. (?)

## Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Montrer que si 0 est localement attractif pour

$$\dot{x} = Ax$$

alors il l'est globalement et 0 est stable. (?)

## Contrôle d'un système linéaire

Soit le système décrit par

$$\dot{x} = x + u(t)$$

où  $t \mapsto u(t)$  est une entrée à choisir.

**Question 1** Comment se comporte le système si  $u \equiv 0$  ? (?)

**Question 2** Si on mesure  $t \mapsto x(t)$ , comment choisir  $u$  pour le rendre globalement asymptotiquement stable ?

Plus généralement, considérons un système du type

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \phi(x) + u(t)\end{aligned}$$

avec  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  à choisir. (?)

**Question 3** Si on mesure  $t \mapsto x(t)$ , montrer que l'on peut toujours choisir  $t \mapsto u(t)$  pour rendre 0 globalement asymptotiquement stable. (?)

## Correction des exercices

### Ecoulement dans un réservoir

**Question 1**  $f : (t, x) \mapsto -k\sqrt{|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  donc le théorème de Peano nous garantit l'existence de solutions au problème de Cauchy pour toute condition initiale.

De plus,  $\sqrt{|x|} \leq 1 + |x|$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f$  est linéairement bornée et toute solution maximale est globale, donc ici définie sur  $\mathbb{R}$ .

Enfin,  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$  donc lorsque  $x_0 \neq 0$ , il existe une unique solution maximale dans  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Lorsque  $x_0 = 0$  par contre,  $f$  n'est pas  $C^1$  en 0 (ni même lipschitzienne) donc le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas.

**Question 2** Soit d'abord  $x_0 > 0$ . Tant que  $x(t) > 0$ , on a

$$\dot{x} = -k\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{\sqrt{x}} = -k \Leftrightarrow x(t) = \left( \sqrt{x_0} - \frac{k}{2}(t - t_0) \right)^2$$

Donc tant que  $x(t) > 0$ , la solution est unique (comme prévu dans la question précédente) et par continuité, elle atteint 0 en  $t = t_0 + 2\sqrt{x_0}/k$ . A partir de là, vu que  $\dot{x} \leq 0$ , la seule solution possible qui reste positive est la solution constamment égale à 0 : le réservoir est vide et le reste. Donc pour  $(t_0, x_0)$  avec



$x_0 > 0$ , il existe une unique solution maximale positive au problème de Cauchy définie par

$$x(t) = \begin{cases} (\sqrt{x_0} - \frac{k}{2}(t - t_0))^2 & \forall t \in ]-\infty, t_0 + 2\sqrt{x_0}/k] \\ 0 & \forall t \in [t_0 + 2\sqrt{x_0}/k, +\infty[ \end{cases}$$

Maintenant si  $x_0 = 0$ . Pour  $t \geq t_0$ , la seule possibilité est de rester à 0. En temps rétrograde, soit  $x$  reste à 0 soit il existe  $t_1 < t_0$  tel que  $x(t_1) > 0$ . Alors la solution correspondante est unique et donnée par la formule ci-dessus en remplaçant  $(t_0, x_0)$  par  $(t_1, x(t_1))$ . Après réécriture, les solutions maximales s'écrivent en fait

$$x(t) = \begin{cases} \frac{k^2}{4}(t - t^-)^2 & \forall t \in ]-\infty, t^-] \\ 0 & \forall t \in [t^-, +\infty[ \end{cases}$$

pour chaque  $t^- \leq t_0$ . Il y a donc une infinité de solutions.

*Remarque:* si l'on s'était intéressé aux solutions négatives, on aurait trouvé une infinité de solutions au problème de Cauchy pour  $x_0 > 0$ . En effet, à partir de  $x_0 = 0$ , on a aussi de manière symétrique, les solutions

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [t_0, t^+[ \\ -\frac{k^2}{4}(t - t^+)^2 & \forall t \in [t^+, +\infty[ \end{cases}$$

pour tout  $t^+ \geq t_0$ . Ceci ne contredit pas le théorème de Cauchy Lipschitz. En effet, celui-ci ne garantit l'unicité de la solution maximale que dans le domaine où  $f$  est  $C^1$  par rapport à  $x$ , c'est-à-dire ici tant qu'elle est non nulle, plus précisément sur l'intervalle ouvert  $] -\infty, t_0 + 2\sqrt{x_0}/k[$ .

**Question 3** La multiplicité des solutions vient du fait que lorsqu'on voit le réservoir vide à  $t_0$  on ne sait pas depuis quand il est vide.

**Question 4** Lorsque  $x_0 > 0$ , les solutions sont continues par rapport à la condition initiale tant qu'elles restent positives. Par contre, si  $x_0 = 0$ , une solution possible est  $x \equiv 0$  alors que pour tout  $\delta > 0$ , la solution partant de  $x_0 + \delta$  est donnée par  $x_\delta(t) = (\sqrt{x_0 + \delta} - \frac{k}{2}(t - t_0))^2$  pour  $t \leq t_0$ . Donc sur un horizon de temps fixé (rétrograde)  $[t, t_0]$ , la différence  $\|x - x_\delta\|$  ne peut être rendue arbitrairement petite en faisant tendre  $\delta$  vers 0. Le même phénomène apparaît en temps positif lorsque l'on considère les solutions négatives (voir remarque plus haut). En ce sens, on n'a pas la continuité des solutions par rapport à la condition initiale. Cela ne contredit pas le théorème car  $f(x) = -\sqrt{|x|}$  n'est pas  $C^1$ , ni lipschitzienne en 0.

## Solutions globales

Fixons une condition initiale dans  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $f : (x_1, x_2) \mapsto (\sin x_1 - x_2, \sqrt{1 + x_1^2})$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Donc d'après le théorème de Cauchy-

Lipschitz, le problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle de temps  $I$  ouvert.

Par ailleurs, on peut vérifier que pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{1+y^2} \leq 1+y$ , donc

$$|f_1(x)| \leq 1 + |x_2| \quad , \quad |f_2(x)| \leq 1 + |x_1|$$

et  $f$  est bornée par une fonction affine en  $\|x\|$ . Toutes les solutions sont donc globales, i.e.  $I = \mathbb{R}$ .

## Autour du Lemme de Grönwall

**Question 1 (Lemme de Grönwall)** Soit  $v$  l'application définie par  $v(t) = \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds$  sur  $[t^-, t^+]$ . Elle vérifie

$$\dot{v}(t) = \beta(t)u(t) \quad , \quad u(t) \leq \alpha(t) + v(t) \quad ,$$

et donc puisque  $\beta$  est à valeurs positives,

$$\dot{v}(t) \leq \alpha(t)\beta(t) + \beta(t)v(t) \quad .$$

Soit maintenant  $w$  l'application définie par  $w(t) = v(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right)$ .  $w$  est dérivable sur  $[t^-, t^+]$  et

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (\dot{v}(t) - \beta(t)v(t)) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \\ &\leq \alpha(t)\beta(t) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

En intégrant des deux côté entre  $t_0$  et  $t$ , on obtient

$$w(t) - w(t_0) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(-\int_{t_0}^s \beta(r)dr\right) ds$$

et en remplaçant  $w$  par son expression,

$$v(t) \leq \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) ds \quad ,$$

ce qui donne le résultat. Finalement, si  $\alpha$  est constant alors

$$\begin{aligned} u(t) &\leq \alpha + \alpha \left[ -\exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) \right]_{t_0}^t \\ &\leq \alpha - \alpha + \alpha \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(r)dr\right) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.

**Question 2** Soit  $x : I \subseteq J \rightarrow \mathbb{R}^n$  une solution maximale au problème de Cauchy. Par le théorème de représentation intégrale des solutions,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds ,$$

et donc, utilisant l'hypothèse de borne au plus affine de  $f$ ,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t |b(s)| + |a(s)| \|x(s)\| ds .$$

Sur tout segment  $[t^-, t^+] \subset I$ , on peut donc appliquer le Lemme de Grönwall, ce qui donne

$$\|x(t)\| \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \alpha(s) \beta(s) \exp \left( \int_s^t \beta(r) dr \right)$$

avec  $\alpha(t) = \|x_0\| + \int_{t_0}^t |b(s)|$  et  $\beta(t) = |a(t)|$  qui sont continues sur  $J$ . Donc  $x$  ne peut pas exploser pour  $t \in J$ , donc d'après le théorème des bouts, vu que  $f$  est définie sur  $J \times \mathbb{R}^n$ , nécessairement  $I = J$ .

**Question 3** Supposons que les solutions soient globales. Soient  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $x_\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  les solutions maximales associées à  $(t_0, x_0)$  et  $(t_0, x_0 + \delta)$  respectivement, et  $\bar{t} > 0$  tel que  $[t_0, \bar{t}] \subset J$ . On sait que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds & \forall t \in I \\ x_\delta(t) &= x_0 + \delta + \int_{t_0}^t f(s, x_\delta(s)) ds & \forall t \in I \end{aligned}$$

ce qui donne

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s)) - f(s, x_\delta(s))| ds \quad \forall t \in I$$

Définissons le compact  $\mathcal{C} := x([t_0, \bar{t}]) \cup x_\delta([t_0, \bar{t}])$ . Puisque  $\partial_x f$  est continue sur  $J \times X$  par hypothèse,  $M = \max_{[t_0, \bar{t}] \times \mathcal{C}} \partial_x f$  est bien défini. On a donc par le théorème des accroissements finis

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| + \int_{t_0}^t M |x(s) - x_\delta(s)| ds \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}] .$$

Donc par le Lemme de Grönwall,

$$|x(t) - x_\delta(t)| \leq |\delta| e^{M(t-t_0)} \quad \forall t \in [t_0, \bar{t}] .$$

## Critère de stabilité en dimension 2

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres d'une matrice  $A$  de dimension 2. Son polynôme caractéristique est donné par

$$s^2 - \operatorname{tr} A s + \det A = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) = s^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 .$$

Donc  $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$  et  $\det A = \lambda_1 \lambda_2$ . Il y a deux cas: soit les valeurs propres sont complexes conjuguées, soit elles sont réelles.

Si  $\lambda_i = \lambda_0 \pm j\omega$ , alors  $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_0^2 + \omega^2$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda_0$ . Donc  $\lambda_0 < 0$  si et seulement si  $\operatorname{tr} A < 0$  (et on a alors toujours  $\det A > 0$ ).

Si les valeurs propres sont réelles, les avoir toutes deux strictement négatives implique que  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$  et  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ . Réciproquement, si  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ , elles sont non nulles et du même signe, et si de plus  $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ , ce signe est nécessairement négatif.

Donc dans tous les cas,  $\lambda_i$  à parties réelles strictement négatives équivaut à  $\operatorname{tr} A < 0$  et  $\det A > 0$ .

## Oscillateur

**Question 1** Prenons  $x = (y, \dot{y})$  qui vérifie

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\lambda}{m}x_2 \end{pmatrix} = Ax$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\lambda}{m} \end{pmatrix}$ . Puisque  $A$  est inversible ( $\det A = \frac{k}{m} \neq 0$ ), le seul point d'équilibre est  $x = (0, 0)$ .

**Question 2**  $x \mapsto Ax$  est  $C^1$  donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions sont uniques. De plus, la dynamique est linéaire (donc a fortiori linéairement bornée) donc les solutions sont définies pour tout  $t$ . Les solutions sont données par  $x(t) = e^{At}x_0$ .

**Question 3** Si  $\lambda > 0$ , on a  $\operatorname{tr} A = -\frac{\lambda}{m} < 0$  et  $\det A = \frac{k}{m} > 0$  donc d'après l'exercice Critère de stabilité en dimension 2,  $A$  est Hurwitz et il s'ensuit que 0 est globalement asymptotiquement stable. On pourrait aussi calculer explicitement les valeurs propres et vérifier qu'elles sont à partie réelle strictement négative.

Lorsque  $\lambda = 0$ , les frottements sont absents et les valeurs propres sont  $\pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Donc 0 n'est plus asymptotiquement stable. Dans ce cas, l'énergie du système

$$V(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

est conservée le long des trajectoires, c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt}V(x) = kx_1x_2 - kx_1x_2 = 0 .$$

D'après le théorème de Lyapunov, puisque  $V$  est à valeurs positives,  $C^1$  et telle que  $V(x) = 0$  est équivalent à  $x = 0$ , la position d'équilibre 0 est donc stable. En fait, la masse oscille autour de sa position d'équilibre à énergie constante et à la pulsation  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Les portraits de phase de ces deux scénarios sont donnés sur la Figure ci-dessous.

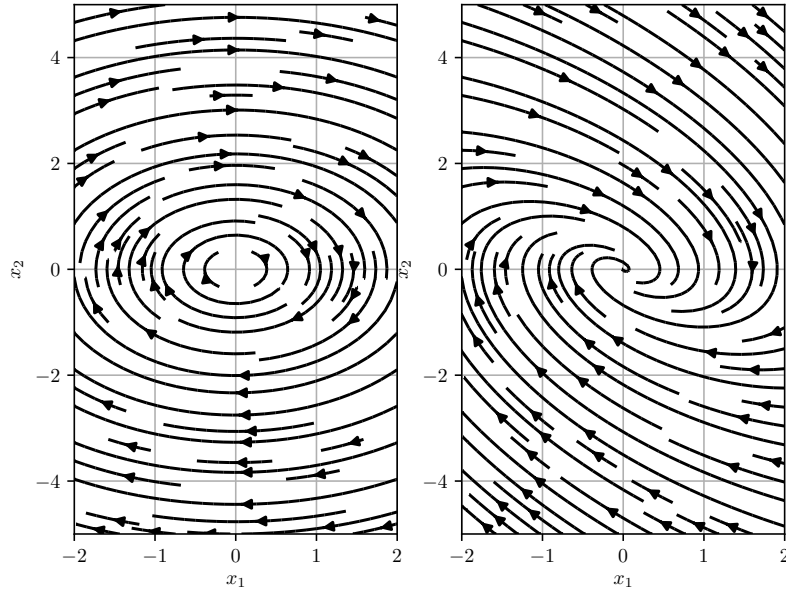


FIGURE 4 – Plan de phase d'un oscillateur amorti à droite et non amorti à gauche

## Stabilité asymptotique globale

**Question 1** La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 - 3x_2^2 \\ -1 + 3x_1^2 & -(1 - x_1^2) \end{pmatrix}$$

soit

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est Hurwitz (valeurs propres  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ) Donc  $(0,0)$  est bien localement asymptotiquement stable. Cependant, il ne l'est pas globalement car  $(1,1)$  est aussi un point d'équilibre : la fonction constante égale à  $(1,1)$  est solution (et ne tend pas vers 0).

**Question 2** La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui admet 0 et -1 comme valeurs propres. Nous ne pouvons donc rien conclure sur la stabilité de 0 par le linéarisé.

Considérons plutôt la fonction  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  définie par

$$V(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2$$

$V$  est  $C^1$ , positive et ne s'annule qu'en  $x = 0$ . De plus, elle vérifie

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= 4x_1^3x_2 - 2x_1^3x_2 - 2x_2^2 + 2(x_1 + x_2)(x_2 - x_1^3 - x_2) \\ &= -2x_2^2 - 2x_1^4 < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

Ceci implique la stabilité asymptotique locale. De plus,  $V$  est propre, i.e.,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ , donc la stabilité asymptotique est globale.

## Cycle limite

On étudie le comportement des solutions de  $\dot{x} = f(x)$  pour

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}$$

**Question 1** Chercher les points d'équilibre du système revient à résoudre

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ 0 &= -x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Multiplier la première ligne par  $x_2$ , la deuxième par  $x_1$  et soustraire, donne  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ , soit  $x_1 = x_2 = 0$ . Il n'y a donc qu'un point d'équilibre  $(0,0)$ . La jacobienne de la dynamique est donnée par

$$J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_1^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & 1 - (x_1^2 + x_2^2) - 2x_2^2 \end{pmatrix}$$

soit

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres  $1 \pm i$ . La partie réelle étant positive, le point d'équilibre est instable.

### Question 2

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t)) &= \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \\ &= x_1^2 + x_1x_2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -(x_1^2 + x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

Donc  $\frac{d}{dt}V(x(t))$  est négatif à l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon 1, zero sur la frontière, et positif à l'intérieur si  $x \neq 0$  et zero sinon.

**Question 3** Si  $V(x(0)) = x_1(0)^2 + x_2(0)^2 = 1$ , alors  $V$  est constant donc les trajectoires initialisées sur le cercle de rayon 1 y restent. Sur le cercle, la dynamique suit celle d'un oscillateur

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned}$$

donc les trajectoires “tournent” sur le cercle.

Si  $V(x(0)) = x_1(0)^2 + x_2(0)^2 > 1$  alors  $V$  décroît strictement tant qu'il reste plus grand que 1. Donc les trajectoires initialisées à l'extérieur du cercle s'en approchent. En fait, on peut montrer qu'elles ne l'atteignent jamais. Car sinon on aurait une solution initialisée sur le cercle qui le quitterait en temps rétrograde. Or il existe une autre solution qui reste sur le cercle en temps rétrograde, ce qui est impossible par le théorème de Cauchy Lipschitz ( $f$  est  $C^1$ )

Si  $0 < V(x(0)) = x_1(0)^2 + x_2(0)^2 < 1$  alors  $V$  croît strictement tant qu'il reste plus petit que 1.

Enfin, la trajectoire initialisée à zéro reste à zéro.

Le portrait de phase est donné ci-dessous.

### Attractivité locale implique stabilité asymptotique globale pour un système linéaire

Tout d'abord, montrons que l'attractivité locale de 0 implique l'attractivité globale. Ceci est dû à la propriété d'*homogénéité* des systèmes linéaires: si  $x$  une solution initialisée à  $x_0 \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda x$  est solution initialisée à  $\lambda x_0$  puisque

$$\lambda x(t) = \lambda e^{At}x_0 = e^{At}(\lambda x_0) .$$

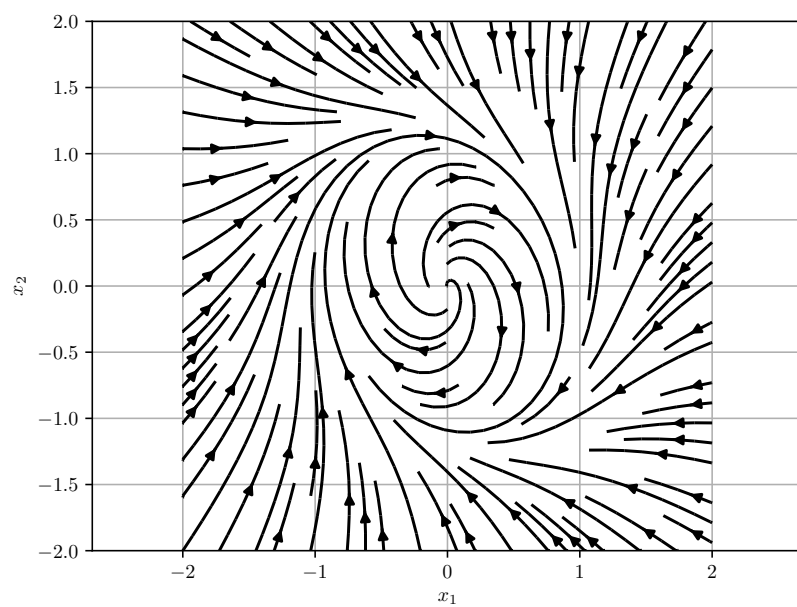


FIGURE 5 – Portrait de phase de l'exercice Cycle Limite



Donc soit  $\eta > 0$  tel que toute solution initialisée dans  $B_\eta(0)$  converge vers 0. Soit  $x$  une solution initialisée à  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lambda x$  avec  $\lambda < \eta/|x_0|$  est solution initialisée dans  $B_\eta(0)$  et converge vers 0. Donc  $x$  converge vers 0.

Maintenant, montrons la stabilité. Soit  $\varepsilon > 0$ . Notons  $(x_i)_{i=1\dots n}$  une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$ . Soit alors  $M > 0$  tel que

$$|e^{At}x_i| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

qui existe bien puisque toutes les solutions convergent vers 0 et  $n$  est fini. Soit maintenant  $\eta > 0$ . Pour tout  $x_0 \in B_\eta(0)$  dont la décomposition dans la base s'écrit

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

on a  $|\alpha_i| \leq \eta$  et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,

$$|e^{At}x_0| \leq \left| \sum_{i=1}^n e^{At}\alpha_i x_i \right| \leq n\eta M$$

On conclut que pour des conditions initiales suffisamment petites ( $\eta < \frac{\varepsilon}{nM}$ ), les solutions restent inférieures à  $\varepsilon$  en norme. Donc le système est stable.

## Contrôle d'un système linéaire

**Question 1** Si  $u \equiv 0$ , les solutions sont  $x(t) = e^t x_0$  donc le point d'équilibre 0 est instable et les solutions divergent.

**Question 2** Si l'on mesure  $x(t)$ , on peut prendre  $u(t) = -kx(t)$ , ce qui donne

$$\dot{x} = -(k-1)x$$

pour lequel 0 est globalement asymptotiquement stable si  $k > 1$ .

**Question 3** Prenons  $u(t) = -k_1 x_1(t) - k_2 x_2(t) - \dots - k_n x_n(t)$ . Alors le système devient

$$\dot{x} = Ax$$

avec  $A$  de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \dots & \dots & -k_n \end{pmatrix}$$

qui admet pour polynôme caractéristique

$$s^n + k_1 s^{n-1} + \dots + k_n s + k_1 .$$

Il suffit donc de choisir les coefficients  $k_i$  tels que ce polynôme ait ses racines à partie réelle strictement négative. Ces dernières peuvent d'ailleurs être choisies à souhait.

## Annexes

### Preuve du théorème de Peano-Arzelà (Hors-programme)

Cette preuve repose sur le théorème d'Ascoli :

Soient  $X$  un espace métrique compact,  $Y$  un espace métrique complet, et  $S \subset C(X, Y)$ . Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $S$  est *relativement compact* dans  $C(X, Y)$
2.  $S$  est *équicontinu* et pour tout  $x \in X$ ,  $\{f(x) , f \in S\}$  est *relativement compact* dans  $Y$ .

On dit qu'un ensemble est *relativement compact* si son adhérence est compacte. En dimension finie, vue que "compact" est équivalent à "fermé-borné" et que l'adhérence est fermée par définition, "relativement compact" est équivalent à "borné". Mais ce n'est pas le cas en dimension infinie (en particulier  $C(X, Y)$ ) où "relativement compact" est alors équivalent au fait de pouvoir extraire des suites convergentes dans l'adhérence de l'ensemble.

Ici, puisque  $X$  est compact et  $Y$  complet, on peut montrer que  $C(X, Y)$  muni de la norme uniforme  $\| \cdot \|_\infty$  est complet, donc fermé. Il s'ensuit que " $S$  est relativement compact dans  $C(X, Y)$ " implique pouvoir extraire de toute suite de  $S$  une sous-suite convergente dans  $C(X, Y)$  (au sens de  $\| \cdot \|_\infty$ ). C'est ce que nous allons utiliser pour prouver l'existence d'une solution au problème de Cauchy.

Maintenant, le deuxième terme nécessitant des explications est l'*équicontinuité* de  $S$ . Cette notion veut simplement dire que les fonctions dans  $S$  sont toutes continues *au même rythme*, i.e., plus précisément,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta , \quad d_X(x_a, x_b) \leq \delta \implies \forall f \in S , \quad d_Y(f(x_a), f(x_b)) \leq \varepsilon ,$$

où  $d_X$  et  $d_Y$  sont les distances sur  $X$  et  $Y$  respectivement.

Revenons maintenant à nos moutons. On suppose donc  $f$  continue sur  $J \times X$  et on veut montrer que  $S_f(t_0, x_0) \neq \emptyset$ . Soient d'abord  $\tau > 0$  et  $r > 0$ , tels que  $\mathcal{C} := [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \overline{B}_r(x_0) \subset J \times X$ . Soit  $\tau_m \in ]0, \tau]$  tel que  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ . On va montrer l'existence d'une solution définie par sa forme intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

sur  $[t_0, t_0 + \tau_m]$  et la preuve sur  $[t_0 - \tau_m, t_0]$  se fait de la même façon.

L'idée est d'approximer de plus en plus finement la forme intégrale et montrer ce procédé converge. On définit donc pour  $\epsilon \in ]0, 1[$  la fonction

$$\begin{aligned} x_\epsilon(t) &= x_0 & \forall t \in [t_0 - 1, t_0] \\ &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_\epsilon(s - \epsilon)) ds & \forall t \in [t_0, t_0 + \tau_m] \end{aligned}$$

Ces fonctions sont clairement définies et continues sur  $[t_0 - 1, t_0]$ . Puis sur  $[t_0, t_0 + \epsilon] \cap [t_0, t_0 + \tau_m]$ , on voit que l'intégrale ne dépend que de  $x_\epsilon$  sur  $[t_0 - 1, t_0]$ , donc elle est toujours bien définie et continue. De proche en proche,  $x_\epsilon$  est donc bien définie et continue sur  $[t_0 - 1, t_0 + \tau_m]$ . En fait,  $\epsilon$  représente un petit retard introduit dans l'intégrale pour la rendre explicite. Si l'on arrive à montrer que ces fonctions converge vers une fonction continues lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, cette limite sera solution de l'équation intégrale sur  $[t_0, t_0 + \tau_m]$  et sera donc solution.

La première étape est de montrer de proche en proche, grâce au retard, que  $x_\epsilon(t) \in \overline{B}_r(x_0)$  pour tout  $t \in [t_0 - 1, t_0 + \tau_m]$  puisque  $\tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r$ . Donc

$$\forall \epsilon \in ]0, 1[ , x_\epsilon \in E := C([t_0 - 1, t_0 + \tau_m], \overline{B}_r(x_0)) .$$

De plus, pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$  et pour tout  $(t, t') \in [t_0 - 1, t_0 + \tau_m]^2$ ,

$$\|x_\epsilon(t) - x_\epsilon(t')\| \leq \max_{\mathcal{C}} \|f\| |t - t'|$$

donc la famille  $S := \{x_\epsilon, \epsilon \in ]0, 1[\}$  est équicontinue. De plus, vu que leur image est bornée dans  $\overline{B}_r(x_0)$  de dimension finie, elle est bien bien relativement compacte. Le théorème d'Ascoli nous dit alors que  $S$  est relativement compacte dans  $E$ . Il existe donc une sous suite  $x_{\epsilon_k}$  telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \epsilon_k = 0$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{\epsilon_k} = x^* \in E$  au sens de la norme uniforme  $\|\cdot\|$ . Par uniforme continuité de  $f$  sur le compact  $\mathcal{C}$ , on en déduit alors que pour tout  $s \in [t_0, t_0 + \tau_m]$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(s, x_{\epsilon_k}(s - \epsilon_k)) = f(s, x^*(s))$  et donc que  $x^*$  est bien solution de l'équation intégrale, ce qui donne le résultat.

## Preuve du théorème des bouts

Prouvons l'existence de  $t_K^+$  (l'existence de  $t_K^-$  se prouvant de la même façon). Pour cela, supposons le contraire c'est-à-dire qu'il existe un compact  $K \subset J \times X$  tel que

$$\forall t_K \in [t_0, \bar{t}[ , \exists t \in [t_K, \bar{t}[ : x(t) \in K$$

En d'autres termes, on suppose que la solution revient de manière persistente dans  $K$ . Alors il existe une suite  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\bar{t} - \frac{1}{p} \leq t_p < \bar{t} \quad \text{et} \quad (t_p, x(t_p)) \in K \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

On a donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} t_p = \bar{t}$ , et par compacité de  $K$ , on peut extraire de  $(t_p, (x(t_p))_{p \in \mathbb{N}})$  une sous-suite qui converge vers  $(\bar{t}, \bar{x}) \in K$ . Pour simplifier les notations, on suppose donc directement  $\lim_{p \rightarrow +\infty} x(t_p) = \bar{x}$ .

Soient  $\tau > 0$ ,  $r > 0$  et  $\tau_m \in (0, \tau]$  tels que

$$\mathcal{C} := [\bar{t} - 2\tau, \bar{t} + 2\tau] \times \overline{B}_{2r}(\bar{x}) \subset J \times X \quad , \quad \tau_m \max_{\mathcal{C}} \|f\| \leq r \quad .$$

Soit  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $|t_p - \bar{t}| < \tau_m$  et  $\|x(t_p) - \bar{t}\| < r$ . Alors  $[t_p - \tau, t_p + \tau] \times \overline{B}_r(x(t_p)) \subset J \times X$  et le théorème de Cauchy Lipschitz nous dit qu'il existe une solution  $y : [t_p - \tau_m, t_p + \tau_m] \rightarrow \mathbb{R}^n$  au problème de Cauchy  $\dot{y} = f(t, y)$ ,  $y(t_n) = x(t_n)$ . On a alors  $t_p + \tau_m > \bar{t}$ , et par unicité,  $x \equiv y$  sur  $[t_p, \bar{t})$ . Donc  $x$  peut être prolongée, ce qui contredit sa maximalité.

## Stabilité et linéarisé tangent

Soit  $a$  un point d'équilibre de  $f$ . Définissons

$$\Delta(x) = f(x) - f(a) - J_f(a)(x - a) = f(x) - J_f(a)(x - a) \quad ,$$

puisque  $f(a) = 0$ . Par la définition de la différentiabilité de  $f$ , on sait que  $\Delta(x) = o(\|x - a\|)$ , i.e.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta(x)}{\|x - a\|} = 0$ . Donc il existe  $\varepsilon > 0$  et  $a > 0$  tels que

$$\|\Delta(x)\| \leq a\|x - a\|^2 \quad \forall x \in B_\varepsilon(a) \quad .$$

La preuve repose ensuite sur le lemme suivant dû à Lyapunov :

Pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  à valeurs propres à parties réelles strictement négatives, et pour toute matrice symétrique définie positive  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , il existe une (unique) matrice symétrique définie positive  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que

$$A^\top P + PA = -Q \quad .$$

En effet, la solution est alors donnée par  $P = \int_0^{+\infty} (e^{As})^\top Q e^{As} ds$ .

Supposons donc que  $J_f(a)$  ait ses valeurs propres à partie réelle strictement négative. Il existe alors  $P = P^\top > 0$  telle que

$$J_f(a)^\top P + PJ_f(a) = -I \quad .$$

Considérons alors  $V(x) = (x - a)^\top P(x - a)$  qui est bien positive, et nulle seulement pour  $x = a$ . Pour tout  $x \in B_\varepsilon(a)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), f(x) \rangle &= (x - a)^\top Pf(x) + f(x)^\top P(x - a) \\ &= (x - a)^\top (J_f(a)^\top P + PJ_f(a)) (x - a) + 2(x - a)^\top P\Delta(x) \\ &\leq -\|x - a\|^2 + 2\|x - a\| \|P\| \|\Delta(x)\| \\ &\leq -\|x - a\|^2 (1 - 2a\|P\| \|x - a\|) \end{aligned}$$

Donc  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0$  pour tout  $x \in B_{\epsilon'}(a)$  avec

$$\epsilon' = \min \left\{ \epsilon, \frac{1}{2a\|P\|} \right\}$$

D'après le théorème de Lyapunov,  $a$  est donc localement asymptotiquement stable.

## Références

Bacciotti, A., and L. Rosier. 2005. *Lyapunov Functions and Stability in Control Theory*. 2nd ed. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin.

Hale, J. K. 2009. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publication Inc.

Holmes, P., and D. Rand. 1978. “Bifurcations of the Forced van Der Pol Oscillator.” *Quarterly of Applied Mathematics* 35: 495–509.

l'Abbé Moigno. 1844. “26ème Leçon.” In *Leçons de Calcul Différentiel et Intégral, Rédigées Principalement d'après Les Méthodes de M. A.-L. Cauchy, et étendues Aux Travaux Les Plus Récents Des Géomètres*, pages 385–96. Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'Ecole Polytechnique. <https://books.google.fr/books?id=booAAAAAAAJ&pg=PA385#v=onepage&q&f=false>.

Lyapunov, A. 1892. “The general problem of the stability of motion.” Kharkov Mathematical Society.

Poincaré, H. 1892. *Les Méthodes Nouvelles de La Mécanique Céleste*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire de l'Ecole Polytechnique. <https://iris.univ-lille.fr/handle/1908/3851>.

Sussman, G. J., and J. Wisdom. 1992. “Chaotic Evolution of the Solar System.” *Science*, 1992.