Calcul Différentiel III

STEP, MINES ParisTech*

15 janvier 2020 (`#f1b98c7`)

Table des matières

TODO, à trier, idées en vrac:

— e.v.n fonctionnels (C^k, L^1, L^2, etc.), Hilbert, Banach.
— opérateurs linéaires continus (bornés), adjoint (appli calcul diff, par exemple pour calcul solution diff EDP sans recalcul ?)
— différentielle (Fréchet), cas général

En fait va plus loin que le scope du calcul diff, contient un mini "topo en dim infinie" (qu'est-ce qui change ? Compacité (en particulier ppté vraie sur les compacts ne donne plus le semi-global, ppté de type Ascoli-Arzela pour caractériser la compacité pour les fcts continues), non-équivalence des normes, dualité, topologie faible ?) et algèbre linéaire en dim infinie (opérateurs linéaires ne sont pas tous cont., pas de chance … Hilbert, Banach, etc).

Prérequis: Topo, Calcul Diff dim finie, sans doute l'intégrale (les critères intégraux sont une grande motivation pour enseigner le calcul diff en dim infinie), c'est aussi sans doute l'endroit ou on veut parler de la complétude des espaces comme L^1/L^2, etc.

Exemples à traiter: "interpolation" données non-paramétrique, calcul des variations, maximum entropie sous contrainte, diff. / chemin (ex: usage en analyse complexe), optimisation/gradient forme, etc. Autre exemple: quantif qui optimise le SNR ou l'entropie. Autre exemple: Pb de Dirichlet variationel ? On peut faire ça ? Et lier ça au Laplacien ? Ou il il faut un cadre compliqué (trace & co) ?

Articulation avec Physique Fonda. et Appliquée (calc var, Hilb, etc.). Volonté de permettre de comprendre des trucs comme la construction de Fourier (prolgt opé lin con à partir d'un ensemble dense avec majoration), ou typiquement, définition de la trace sur un bord régulier …

— Topo en dim infinie, Banach, Hilbert, opérateurs lin cont, analyse spectrale
— Calcul diff en dim infinie (acc. fini, cont df, inversion locale, point critique et multiplicateurs de lagrange, etc., tout ça revisité rapidement en se

basant sur la familiarité avec la dim finie, déjà vue).
— Equation de Poisson: intro Sobolev, pb “variationnel” en multivariable, trace, etc. Evocation schéma résolution numérique (élt finis) ?
— Cadre Méca Q, opérateurs (non bornés) hermitien, semi-groupes (unitaires) fortement continus, etc?

TODO – Espaces de Hilbert/Banach

Espace de Hilbert

On appelle *espace de Hilbert* tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui soit complet.

Espace de Banach

On appelle *espace de Banach* tout espace vectoriel normé qui soit complet.

Fonctions de class C^k

Soit K un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur V, supposé *régulier*, c'est-à-dire tel que $\overline{V} = K$. On note $C^k(K, \mathbb{R}^m)$ l'espace des fonctions f définies sur K, dont la restriction à V est k-fois continûment différentiable et dont les dérivées partielles $\partial^\alpha f$, $|\alpha| \leq k$ sont prolongeables en une fonction continue sur K (toujours notée $\partial^\alpha f$). Cet espace vectoriel est muni de la norme

$$\|f\|_\infty^k = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in K} \|\partial^\alpha f(x)\|_{\mathbb{R}^m}.$$

TODO

Alternative avec fct définies uniquement sur l'intérieur + continuité uniforme ? Bof (ou alors en exo, bon test pour la continuté uniforme). Mais on peut constater après coup que les objets dont on dispose sont uniformément continus (on a a besoin pour le calcul des variations).

L'espace C^k est complet

Soit K un ensemble compact régulier de $\mathbb{R}^n$; l'espace $C^k(K, \mathbb{R}^m)$ est complet.

TODO – Démonstration ■

Continuité uniforme

Une fonction $f : X \to Y$, où X et Y sont des espaces métriques est *uniformément continue* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $r > 0$ tel que, pour tous $x, y \in X$, si $d(x, y) \leq r$, alors $d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

De toute évidence, la continuité uniforme implique la continuité ; dans le cas de fonctions définies sur un ensemble compact, la réciproque est valable:

Continuité uniforme et compacité

Soient X et Y deux espaces métriques et $K \subset X$ un ensemble compact; toute fonction $f : K \subset X \to Y$ qui est continue est uniformément continue.

Démonstration

Supposons au contraire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe x_k et y_k dans K tels que $d(x_k, y_k) \leq 2^{-k}$, mais $d(f(x_k), f(y_k)) > \varepsilon$. Par compacité de K, la suite x_k admet une suite extraite qui converge vers un $\ell \in K$; la suite correspondante extraite de y_k converge également vers ℓ. Comme $d(f(x_k), f(y_k)) \leq d(f(x_k), f(\ell)) + d(f(y_k), f(\ell))$, la continuité de f en ℓ impose qu'il existe un k tel que $d(f(x_k), f(y_k)) \leq \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

TODO – Autres

L^1, L^2, L^∞ (L^p ?) Dans le cadre général ? (ens de départ ?)

C^0, C^k, etc. Hölder $C^{k,\alpha}$? Sur sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$?

Sobolev (sur $\mathbb{R}^n$) ? Sur Ω par densité ? (ouch)

Espaces d'opérateurs: $E \xrightarrow{\ell} F$.

Exemple d'opérateurs bornés (ici et en exercice): les identités ($C^0 \to L^1$, $L^2 \to L^1$), l'intégrale ($L^1 \to \mathbb{R}^n$)

Technique de définition d'un opérateur borné par densité.

Liste de sous-ensembles denses (en particulier, fcts lisses à support compact …)

Exemple techniques densité pour définir un truc ? et/ou étendre une relation (exemple: IPP pour fcts avec dérivées faibles ? Fourier ?)

TODO – Opérateurs Bornés

Opérateurs définis sur un domaine $D(A)$ dense (certains bornés, d'autres non). Applis méca Q ?

Opérateurs bornés, cas particulier des "inclusions" (fonction identité, différente norme au départ et à l'arrivée)

Différentielle

Différentielle de Fréchet

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et U un ouvert de E. La fonction $f : U \to F$ est *différentiable en* $x \in U$ s'il existe une application linéaire continue, notée $df(x)$ et appellée *différentielle de* f *en* x, telle que

$$f(x+h) = f(x) + df(x) \cdot h + o(\|h\|_E),$$

c'est-à-dire si

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - df(x) \cdot h\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

TODO

Reprendre les règles de calcul de la dimension finie

TODO – Règle de différentiation en chaîne

TODO – Pt critique et minimum

Théorème des Fonctions Implicites

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, F étant complet, et f une fonction définie sur un ouvert W de $E \times F$

$$f : (x, y) \in W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to f(x, y) \in \mathbb{R}^m$$

qui soit continûment différentiable et telle que la différentielle partielle $\partial_y f$ soit inversible et d'inverse continu en tout point de W. Si le point (x_0, y_0) de W vérifie $f(x_0, y_0) = 0$, alors il existe des voisinages ouverts U de x_0 et V de y_0 tels que $U \times V \subset W$ et une fonction implicite $\psi : U \to F$, continûment différentiable, telle que pour tous $x \in U$ et $y \in V$,

$$f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \psi(x).$$

De plus, la différentielle de ψ est donnée pour tout $x \in U$ par

$$d\psi(x) = -(\partial_y f(x,y))^{-1} \cdot \partial_x f(x,y) \text{ où } y = \psi(x).$$

Démonstration (esquisse) La démonstration est similaire au cas de la dimension finie: la construction de la solution $f(x,y) = 0$ en y est toujours basée sur la construction d'une suite d'approximations y_k par la méthode (modifiée) de Newton. L'existence d'un point fixe à cette méthode repose sur le point fixe de Banach – d'où l'hypothèse de complétude de F – et la caractère contractant de la fonction de Newton, qui exploite la norme d'opérateur $\|(\partial_y f(x_0, y_0))^{-1}\|$ et donc la continuité de cet inverse. ∎

Formulation alternative

On remarque que sous les hypothèses du théorème des fonctions implicites, l'espace vectoriel normé G est nécessairement complet. En effet, pour toute suite de Cauchy z_k dans G, comme $Q := \partial_y f(x_0, y_0)$ est inversible et d'inverse continu, $y_k := Q^{-1} \cdot z_k$ est de Cauchy dans F, complet par hypothèse; si ℓ désigne la limite de cette suite, $Q \cdot \ell$ fournit une limite à la suite des z_k dans G.

Si l'on ajoute cette hypothèse – inutile à ce stade, mais le plus souvent très simple à vérifier – au théorème, on peut en retirer une autre, en général plus technique. En effet, un théorème dû à Stefan Banach affirme que toute fonction linéaire continue entre deux espaces de Banach qui est inversible à un inverse continue. Compte tenu de ce résultat, on peut reformuler l'énoncé du théorème des fonctions implicites en omettant la vérification de l'inversibilité de $\partial_y f$:

Théorème des Fonctions Implicites

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, F et G étant complets, et f une fonction définie sur un ouvert W de $E \times F$

$$f : (x,y) \in W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to f(x,y) \in \mathbb{R}^m$$

qui soit continûment différentiable et dont la différentielle partielle $\partial_y f$ est inversible en tout point de W. Si le point (x_0, y_0) de W vérifie $f(x_0, y_0) = 0$, alors il existe des voisinages ouverts U de x_0 et V de y_0 tels que $U \times V \subset W$ et une fonction implicite $\psi : U \to F$, continûment différentiable, telle que pour tous $x \in U$ et $y \in V$,

$$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x).$$

De plus, la différentielle de ψ est donnée pour tout $x \in U$ par

$$d\psi(x) = -(\partial_y f(x,y))^{-1} \cdot \partial_x f(x,y) \text{ où } y = \psi(x).$$

TODO

Nouvelle définition de la différentielle d'ordre supérieur, compatibilité avec la dimension finie

TODO

Développement de Taylor, Taylor avec reste intégral, etc.

Calcul des variations

Différentiation d'une composition

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble ouvert. Soit $C^0(K, U) = \{f \in C^0(K, \mathbb{R}^m) \,|\, f(K) \subset U\}$. Si la fonction $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est continûment différentiable, alors l'application

$$G : f \in C^0(K, U) \mapsto g \circ f \in C^0(K, \mathbb{R}^p)$$

est différentiable et

$$dG(f) \cdot h = d(f \mapsto g \circ f)(f) \cdot h = (x \mapsto dg(f(x)) \cdot h(x)).$$

Expression de la différentielle

Si l'on admet (temporairement) que l'application G est différentiable, il est possible de deviner quelle sera nécessairement son expression en se ramenant à du calcul différentiel en dimension finie. Fixons pour cela un $x \in K$ arbitraire et définissons pour $k = m$ ou n l'opérateur linéaire continu

$$X : \phi \in C^0(K, \mathbb{R}^k) \to \phi(x) \in \mathbb{R}^k.$$

Par définition de G, pour toute fonction f on a $G(f)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, soit $X(G(f)) = g(X(f))$, ou encore $X \circ G = g \circ X$. Différencier cette dernière équation en f pour la variation h, fournit

$$d(X \circ G)(f) \cdot h = d(g \circ X)(f) \cdot h.$$

Par la règle de différentiation en chaîne, comme $dX(\phi) = X$, on a donc

$$X \cdot dG(f) \cdot h = dg(X(f)) \cdot X \cdot h,$$

soit $(dG(f) \cdot h)(x) = dg(f(x)) \cdot h(x)$, ce qui est bien le résultat cherché.

Démonstration Remarquons tout d'abord que le domaine de définition $C^1(K, U)$ de G est bien un sous-ensemble ouvert de l'espace vectoriel normé $C^1(K, \mathbb{R}^m)$, il est donc possible d'envisager sa différentiabilité. En effet, si $f \in C^1(K, U)$, l'image $f(K)$ est un sous-ensemble compact de U ; par conséquent, $\varepsilon := d(f(K), \mathbb{R}^m \setminus U) > 0$. Si $h \in C^1(K, \mathbb{R}^m)$ et que $\|h\|_\infty^1 < \varepsilon$, alors $\|h\|_\infty < \varepsilon$ et par conséquent pour tout $x \in K$, $\|h(x)\| < \varepsilon$. On a donc $(f+h)(x) \in U$ pour tout $x \in K$: la boule ouverte centrée en f et de rayon ε dans $C^1(K, \mathbb{R}^m)$ est incluse dans $C^1(K, U)$.

Notons ensuite que $dg(f(x)) \cdot h(x)$ appartient à $C^0(K, \mathbb{R}^p)$ et que l'application $h \in C^0(K, \mathbb{R}^m) \mapsto dg(f(x)) \cdot h(x)$ est linéaire et continue ; on a en effet

$$\begin{aligned}
\|dg(f(x)) \cdot h(x)\|_\infty &= \left\| \sum_i \partial_i g(f(x)) h_i(x) \right\| \\
&\leq \sum_i \|\partial_i g(f(x))\| \|h_i(x)\| \\
&\leq \left(\sum_i \|\partial_i g(f(x))\| \right) \|h(x)\| \\
&\leq \left(\max_{x \in K} \sum_i \|\partial_i g(f(x))\| \right) \|h\|_\infty .
\end{aligned}$$

Soit $x \in K$ et $r > 0$ (à déterminer) tel que $d(f(K), \mathbb{R}^m \setminus U) > r$. La fonction

$$h \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \mapsto g(f(x) + h) - g(f(x)) - dg(f(x)) \cdot h$$

est alors bien définie, de différentielle $dg(f(x) + h) - dg(f(x))$. Cette expression est une fonction continue de $x \in K$ et de $h \in \overline{B(0, r)}$; elle est donc uniformément continue. Pour tout $\varepsilon > 0$, si r est suffisamment petit, $x \in K$ et $h \in B(0, r)$,

$$\|dg(f(x) + h) - dg(f(x))\| \leq \varepsilon.$$

Par le théorème des accroissements finis, comme

$$g(f(x) + 0) - g(f(x)) - dg(f(x)) \cdot 0 = 0$$

on a donc

$$\|g(f(x) + h) - g(f(x)) - dg(f(x)) \cdot h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

ce qui donne en substituant $h(x)$ à h (où $h : K \to \mathbb{R}^m$ est désormais une fonction continue telle que $\|h\|_\infty < r$)

$$\|g \circ (f + h) - g \circ f + (x \mapsto dg(f(x)) \cdot h(x))\|_\infty =$$
$$\|x \mapsto g(f(x) + h(x)) - g(f(x)) + dg(f(x)) \cdot h(x)\|_\infty \leq \varepsilon \|h\|_\infty$$

ce qui prouve la différentiabilité de $f \mapsto g \circ f$ et la valeur de sa différentielle. ■

Lagrangien

On appelle *lagrangien* toute fonction continûment différentiable

$$L : (t, y, \dot{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

et *action* associée toute intégrale de la forme

$$A(y) = \int_a^b L(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt$$

où $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Différentielle de l'action

L'action $A : y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et

$$dA(y) \cdot h = \int_a^b \partial_y L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot h(t) + \partial_{\dot{y}} L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot \dot{h}(t)\, dt$$

Démonstration L'application

$$y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mapsto (t \mapsto t, y, \dot{y}) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{2n+1})$$

est différentiable (car affine et continue), de différentielle

$$h \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mapsto (0, h, \dot{h}) \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{2n+1}).$$

Le langrangien L étant continûment différentiable, par différentiation d'une composition, l'application

$$\phi \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{2n+1}) \mapsto L \circ \phi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$$

est différentiable, de différentielle

$$\psi \in C^0([a, b], \mathbb{R}^{2n+1}) \mapsto (t \mapsto dL(\phi(t)) \cdot \psi(t)) \in C^0([a, b], \mathbb{R}).$$

Par la règle de différentiation en chaîne, l'application $y \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) \mapsto L \circ (t \mapsto t, y, \dot{y}) \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ est donc différentiable, de différentielle

$$\partial_t L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot 0 + \partial_y L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot h(t) + \partial_{\dot{y}} L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot \dot{h}(t).$$

L'application

$$f \in C^0([a, b], \mathbb{R}) \mapsto \int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

étant linéaire continue, à nouveau par application de la règle de différentiation en chaîne, l'action est différentiable, de différentielle

$$dA(y) \cdot h = \int_a^b \partial_y L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot h(t) + \partial_{\dot{y}} L(t, y(t), \dot{y}(t)) \cdot \dot{h}(t)\, dt.$$

■

Points critiques de l'action

Supposons la fonction $\nabla_{\dot{y}} L$ continûment différentiable ; soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$. Si la trajectoire y minimise (localement) l'action

$$A(z) = \int_a^b L(t, z(t), \dot{z}(t))\, dt$$

parmi les fonctions $z \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ telles que $z(a) = \alpha$ et $z(b) = \beta$, alors elle satisfait pour tout $t \in [a,b]$ l'*équation d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\nabla_{\dot{y}} L(t, y(t), \dot{y}(t))\right) - \nabla_y L(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0.$$

Démonstration Soit y une fonction minimisant l'action localement, sur la boule ouverte $B(y, r)$ de rayon $r > 0$ (dans l'espace affine des fonctions z de $C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ telles que $z(a) = \alpha$ et $z(b) = \beta$). La fonction

$$h \in B(0, r) \mapsto A(y + h) \in \mathbb{R},$$

où $B(0, r)$ désigne le sous-ensemble ouvert des fonctions de l'espace vectoriel normé

$$E = \{h \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \,|\, h(a) = h(b) = 0\}$$

telles que $\|h\|_\infty^1 < r$, admet donc un minimum en $h = 0$; cela nécessite que $dA(y) \cdot h$ pour tout $h \in E$. Notons $\phi(t) = (t, y(t), \dot{y}(t))$; la différentielle de l'action peut être exprimée en fonction des gradients (partiels) de L comme

$$dA(y) \cdot h = \int_a^b \langle \nabla_y L(\phi(t)), h(t) \rangle + \left\langle \nabla_{\dot{y}} L(\phi(t)), \dot{h}(t) \right\rangle \, dt.$$

Sous l'hypothèse de régularité du théorème, si $h \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ est telle que $h(a) = h(b) = 0$, une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned} dA(y) \cdot h &= \int_a^b \langle \nabla_y L(\phi(t)), h(t) \rangle - \left\langle \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{y}} L(\phi(t)), h(t) \right\rangle dt \\ &= -\int_a^b \left\langle \frac{d}{dt} \nabla_{\dot{y}} L(\phi(t)) - \nabla_y L(\phi(t)), h(t) \right\rangle dt. \end{aligned}.$$

Compte tenu de la continuité en t de $\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{y}} L(\phi(t)) - \nabla_y L(\phi(t))$ et du caractère arbitraire de h, $dA(y) \cdot h = 0$ implique que pour tout t, l'équation d'Euler-Lagrange est satisfaite. ■

TODO – Exercices

TODO – Théorème de Banach

TODO – Complétude

Montrer que l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas complet pour la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Différentiation d'une composition

Soit J un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, $f \in C^0(J, \mathbb{R}^n)$ et K un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ contenant $f(J)$. On note F l'application

$$F : g \in C^0(K, \mathbb{R}^p) \mapsto g \circ f \in C^0(J, \mathbb{R}^p).$$

Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle. **(?)**

TODO – Gradient de Forme

TODO. Préciser cadre des perturbations, matcher avec ce qui vient avant (Calcul Intégral III) si nécessaire, adapter et rédiger les "détails techniques" du corrigé ensuite.

Soit K_0 un compact à bord C^1 de $\mathbb{R}^3$ et $T : K_0 \to \mathbb{R}^3$ une application continûment différentiable. On s'intéresse au volume de $K = T(K_0)$, vu comme une fonction de T.

$$V = \int_K dx.$$

Montrer que si $T est suffisamment proche de l'identité dans $C^1(K_0, \mathbb{R}^3)$, il admet une extension comme un C^1-diffeomorphisme (global) de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

Montrer que V est une fonction différentiable de T au point $T = I$ dans $C^1(K, \mathbb{R}^3)$ et calculer sa différentielle $dV(I) \cdot H$.

TODO: ajouter check dépendance en H uniquement sur le bord, et via la composante normale. **(?)**

Théorème de Cauchy Intégral

Montrer la version circulaire, sous l'hypothèse que f est de différentielle $\mathbb{C}$-linéaire et continue (en faisant une chain rule en dim infinie) ... mais est-ce vraiment nécessaire ? Ne peut-on pas calculer les dérivées par rapport au centre et au rayon sans ça, avec uniquement la dérivation "point par point" et les résultats de convergence dans les intégrales ?

Solutions

Différentiation d'une composition

Soit $g, h \in C^0(K, \mathbb{R}^p)$; on a $(g+h) \circ f - g \circ f = h \circ f$, soit

$$F(g+h) - F(g) - h \circ f = 0.$$

De plus, la fonction $h \in C^0(K, \mathbb{R}^p) \mapsto h \circ f \in C^0(J, \mathbb{R}^p)$ est linéaire (évident) et continue, car

$$\|h \circ f\|_\infty = \max_{x \in J} \|(h \circ f)(x)\| \leq \max_{y \in K} \|h(y)\| = \|h\|_\infty.$$

La fonction F est donc différentiable en g et $dF(g) \cdot h = h \circ f$.

TODO – Gradient de Forme

Par changement de variable, T étant un C^1-difféomorphisme,

$$V = \int_{T(K)} dx = \int_K |\det J_T(x)| \, dx.$$

Quand T est suffisamment proche de l'identé, $\det J_T(x) > 0$. L'application det est continûment différentable dans un voisinage de l'identité, de différentielle

$$d \det(I) \cdot H = \mathrm{tr}(H).$$

L'application

$$T \in C^1(K, \mathbb{R}^3) \mapsto J_T \in C^0(K, \mathbb{R}^{3\times 3})$$

est également continûment différentiable (car linéaire continue entre ces espaces). La fonction

$$T \in C^1(K, \mathbb{R}^3) \mapsto \det J_T \in C^0(K, \mathbb{R}^3)$$

est donc différentiable en I comme différentielle d'une composition et

$$d(T \mapsto \det J_T) \cdot H = \mathrm{tr}(J_H) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i H_i = \mathrm{div}\, H.$$

L'application
$$f \in C^0(K, \mathbb{R}^3) \mapsto \int_K f dx \in \mathbb{R}$$
étant linéaire continue, le volume est une fonction différentiable de T en l'identité et vérifie
$$dV(T) \cdot H = \int_K \operatorname{div} H(x)\, dx,$$
soit encore par le théorème de la divergence,
$$dV(T) \cdot H = \int_{\partial K} \langle H(x), n(x) \rangle \; \sigma(dx).$$