Método Simplex
Análisis Numérico I, 2015
FaMAF – UNC

1. Resumen de teoría dada en clase

Considere un problema de programación lineal en formato estándar:

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar}_{x\in\mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array}$$

donde $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Recuerde que el conjunto factible de este problema es $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\, x \geq 0\}$ y que tal conjunto es un poliedro formado por la intersección del hiperplano $\{x \mid Ax = b\}$ y el ortante no negativo $\{x \mid x \geq 0\}$. En este caso los puntos extremos de K son sus vértices.

La idea del método Simplex es ir visitando vértices que vayan disminuyendo el valor de la función objetivo f tal que $f(x) = c^T x$. Como se demostró en el teórico, si el problema de programación lineal tiene solución entonces al menos un vértice también debe ser solución del problema. Para trabajar matricialmente, considere $A = [a^1\ a^2\ \ldots\ a^n]$ con $a^j \in \mathbb{R}^m$ vectores columna de A y el conjunto de índices inactivos $I(x) = \{i \in \{1,\ldots,n\} \mid x_i > 0\}$. Según un Teorema (visto en el teórico) x es un vértice de K si y solo si $\{a^i \mid i \in I(x)\}$ tiene vectores linealmente independientes.

Consideraremos problemas no degenerados, o sea, problemas donde para cada vértice de K el conjunto $I(x)$ tiene exactamente m elementos. En este caso para cada vértice x el conjunto $\{a^i \mid i \in I(x)\}$ es una base del espacio generado por las columnas de A. Por esto, las variables x_i con $i \in I(x)$ son llamadas básicas y las variables x_i con $i \notin I(x)$ son llamadas no básicas .

Comencemos con el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{rc} \underset{x\in\mathbb{R}^2}{\text{minimizar}} & -6x_1 - 14x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ & x_1 + 7x_2 \leq 21, \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Para transformar el problema original en un formato estándar, agregamos las variables de holgura x_3, x_4, x_5 para obtener:

$$\begin{array}{rc} \underset{x\in\mathbb{R}^5}{\text{minimizar}} & -6x_1 - 14x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ & x_1 + 7x_2 + x_5 = 21, \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5. \end{array}$$

Ahora construiremos una tabla con la siguiente estructura:

$$\begin{array}{c|l} c^T & f(x) \\ \hline A & b \\ \hline x^T & \end{array}$$

donde x es un vértice de K. Para nuestro problema particular la tabla es

$$\begin{array}{rrrrr|l} -6 & -14 & 0 & 0 & 0 & f(x) \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ \hline 0 & 0 & 12 & 15 & 21 & \end{array}$$

donde $x^T = (0, 0, 12, 15, 21)$ es un vértice de K, pues $Ax = b$, $x \geq 0$ y $\{a^3, a^4, a^5\}$ tiene vectores linealmente independientes. Note además que $0 = f(x)$. La estructura de esta tabla inicial es la que siempre tomaremos. En caso que el problema no dé una tabla inicial con esta estructura, se realizarán las operaciones elementales por fila necesarias hasta obtener una tabla con esta estructura. Para ello debe tener en cuenta las siguientes reglas:

1. x debe cumplir $Ax = b$,
2. x debe cumplir $x \geq 0$,
3. x tiene m componentes no nulas (variables básicas) y $n - m$ componentes nulas (variables no básicas),
4. en la parte correspondiente a la matriz, solo puede haber una variable básica por fila,
5. en la parte correspondiente a la función objetivo, solo deben aparecer términos no nulos asociados a variables no básicas.

Ahora, debemos elegir otro vértice donde el valor de la función objetivo sea menor. Para ello, una de las variables no básicas pasará a ser básica. En este caso las variables no básicas son x_1 y x_2. Para cada unidad que aumentemos de x_1 vamos a disminuir f en 6 unidades y por cada unidad de x_2 vamos a disminuir f 14 unidades. Por lo tanto haremos $x_2 > 0$ (básica) lo mayor posible de manera que el nuevo punto sea un vértice, o sea, factible y con solo 3 variables básicas. Dejando $x_1 = 0$ y usando que $x_i \geq 0$, de las 3 ecuaciones de $Ax = b$ tenemos

$$\begin{aligned} x_2 \leq 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 &\quad\Rightarrow\quad x_2 \leq 12, \\ 3x_2 \leq 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 &\quad\Rightarrow\quad x_2 \leq 5, \\ 7x_2 \leq x_1 + 7x_2 + x_5 = 21 &\quad\Rightarrow\quad x_2 \leq 3. \end{aligned}$$

Para obtener un punto factible deberemos tomar $x_2 = 3$. En la tabla, esto sale de dividir los elementos de b por los correspondientes elementos de la segunda columna de A y tomar el mínimo de ellos, o sea $x_2 = b_3/a_{32} = \text{mín}\{b_k/a_{k2}\}$. Así, x_2 pasará a ser la variable básica de la fila 3 y por lo tanto x_5 deberá ser no básica ya que de la tercera ecuación sale que $x_5 = 0$. Además, de la primer ecuación se obtiene que $x_3 = 9$ y de la segunda ecuación que $x_4 = 6$.

Para obtener la nueva tabla para el vértice $x^T = (0, 3, 9, 6, 0)$ debemos modificar las ecuaciones y la función objetivos para que se cumplan las reglas descriptas. De la tercera ecuación se obtiene que

$$x_2 = 3 - \frac{1}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_5,$$

Reemplazando en la función objetivo y en las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}
-6x_1 - 14x_2 = f(x) \quad &\Rightarrow \quad -4x_1 + 2x_5 = f(x) + 42, \\
2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \quad &\Rightarrow \quad \frac{13}{7}x_1 + x_3 - \frac{1}{7}x_5 = 9, \\
2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \quad &\Rightarrow \quad \frac{11}{7}x_1 + x_4 - \frac{3}{7}x_5 = 6.
\end{aligned}$$

Desde el punto de vista matricial, lo anterior son simples operaciones elementales por filas. Como ya se dijo, elegiremos la columna 2 de la tabla (correspondiente al -14) y la fila 3. Por lo tanto usaremos como pivot el elemento a_{32} (con valor 7 en el ejemplo) y realizaremos operaciones elementales de manera de obtener un 1 (uno) en a_{32} y ceros en los otros elementos de la columna 2 (incluyendo la función objetivo). Luego de realizar las operaciones elementales, la tabla que se obtiene es:

-4	0	0	0	2	$f(x) + 42$
$^{13}/_7$	0	1	0	$-^1/_7$	9
$^{11}/_7$	0	0	1	$-^3/_7$	6
$^1/_7$	1	0	0	$^1/_7$	3
0	3	9	6	0	

El vértice obtenido fue $x^T = (0, 3, 9, 6, 0)$. Repitiendo el argumento anteriormente explicado, la variable no básica que pasará a ser básica será x_1, pues da la mayor disminución de la función objetivo. Como $\text{mín}_k\{b_k/a_{k1}\} = \text{mín}\{\frac{63}{13}, \frac{42}{11}, 21\} = \frac{42}{11}$, entonces el valor que se le asignará esta nueva variable básica es $x_1 = \text{mín}_k\{b_k/a_{k1}\} = b_2/a_{21} = \frac{42}{11}$. Tomando el elemento a_{21} como pivot, realizamos operaciones elementales por fila hasta obtener:

0	0	0	$^{28}/_{11}$	$^{10}/_{11}$	$f(x) + {}^{630}/_{11}$
0	0	1	$-^{13}/_{11}$	$^4/_{11}$	$^{21}/_{11}$
1	0	0	$^7/_{11}$	$-^3/_{11}$	$^{42}/_{11}$
0	1	0	$-^1/_{11}$	$^2/_{11}$	$^{27}/_{11}$
$^{42}/_{11}$	$^{27}/_{11}$	$^{21}/_{11}$	0	0	

El vértice obtenido fue $x^T = (\frac{42}{11}, \frac{27}{11}, \frac{21}{11}, 0, 0)$. Como todos los coeficientes son no negativos, ya no quedan variables no básicas que hagan disminuir el valor de la función objetivo. En este caso el último vértice encontrado es la solución del problema de optimización. Además, se tiene que $f(x) = -\frac{630}{11}$.

Este es el resumen de los pasos a realizar en cada tabla.

1. Si en la parte correspondiente a la función objetivo todos los coeficientes son no negativos, entonces x es solución del problema.

2. Elegir x_j variable no básica con coeficiente mas negativo en f.

3. Sea k tal que $b_k/a_{kj} = \text{mín}_{1 \le i \le m}\{b_i/a_{ij} \mid a_{ij} > 0\}$. Hacer $x_j = b_k/a_{kj}$.

4. Usando a_{kj} como pivot, hacer elimininación Gaussiana hasta obtener $a_{kj} = 1$, $c_k = 0$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq k$.

2. Algunos ejercicios del práctico 7

2.1. Problema de los camiones

La formulación matemática es:

$$\begin{array}{cc} \underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{minimizar}} & 200x_1 + 300x_2 + 400x_3 \\ \text{sujeto a} & 5000x_1 + 10000x_2 + 20000x_3 = 80000, \\ & 0 \leq x_1 \leq 4, \\ & 0 \leq x_2 \leq 4, \\ & 0 \leq x_3 \leq 2. \end{array}$$

Este problema tiene región factible no vacía, pues $(4, 4, 1)$ cumple las restricciones. Escalando el problema y transformándolo en formato estándar, queda

$$\begin{array}{cc} \underset{x\in\mathbb{R}^6}{\text{minimizar}} & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} & \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ & x_1 + x_4 = 4, \\ & x_2 + x_5 = 4, \\ & x_3 + x_6 = 2, \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6. \end{array}$$

En este caso, $x^T = (4, 4, 1, 0, 0, 1)$ es un punto factible que de hecho es un vértice (se verá luego). La tabla correspondiente a este problema es

$$\begin{array}{cccccc|l} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & f(x) \\ \hline {}^1\!/_2 & 1 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 8 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Como esta tabla no cumple con las reglas básicas, deberemos realizar operaciones elementales por fila para transformarla. Para que x sea un vértice, las columnas $\{1, 2, 3, 6\}$ de A (asociadas a las variables positivas) deben ser linealmente independientes. Comenzando con la columna 6, el pivote en esta columna tiene que ser a_{46}; como deben ser linealmente independientes, el pivote de la columna 3 tiene que ser a_{13}; para la columna 2 el pivote tiene que ser a_{32} y para la columna 1 tiene que ser a_{21}. Luego de poner 1's en estos pivotes y ceros en los otros elementos de sus respectivas columnas, obtenemos

$$\begin{array}{cccccc|l} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & f(x) - 24 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -{}^1\!/_4 & -{}^1\!/_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1\!/_4 & {}^1\!/_2 & 1 & 1 \\ \hline 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Ahora podemos proseguir con el método simplex. Los coeficientes negativos en f corresponden a x_4 y x_5, como son iguales en valor absoluto cualquiera de ellos puede ser elegido. Tomemos x_5. Entonces $x_5 = \min\{4, 2\} = 2$ se alcanza en la fila 4. Tome a_{45} como pivot, luego de operar por filas obtenemos

0	0	0	$-1/2$	0	2	$f(x) - 22$
0	0	1	0	0	1	2
1	0	0	1	0	0	4
0	1	0	$-1/2$	0	-2	2
0	0	0	$1/2$	1	2	2
4	2	2	0	2	0	

Ahora haremos básica a la variable x_4 y el elemento pivot puede ser a_{24} o a_{44}. Tomemos a_{44}. Entonces obtenemos

0	0	0	0	1	4	$f(x) - 20$
0	0	1	0	0	1	2
1	0	0	0	-2	-4	0
0	1	0	0	1	0	4
0	0	0	1	2	4	4
0	4	2	4	0	0	

Por lo tanto la solución es $x^T = (0, 4, 2, 4, 0, 0)$. La solución del problema original es: se usará ningún camión del primer tipo, 4 camiones del segundo tipo y 2 camiones del tercer tipo, el costo será de \$2000.

2.2. Problema de las inversiones

La formulación matemática es:

$$\begin{array}{cc} \underset{x\in\mathbb{R}^5}{\text{maximizar}} & 0{,}1x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}09x_5 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6000000, \\ & x_1 \leq x_3 + x_4 + x_5, \\ & x_3 \leq x_2 + x_5, \\ & x_2 \leq x_4, \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5. \end{array}$$

Escalando el problema y transformándolo en formato estándar, queda

$$\begin{array}{cc} \underset{x\in\mathbb{R}^8}{\text{minimizar}} & -10x_1 + -8x_2 + -6x_3 + -5x_4 + -9x_5 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6000000, \\ & x_1 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = 0, \\ & x_3 - x_2 - x_5 + x_7 = 0, \\ & x_2 - x_4 + x_8 = 0, \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 8. \end{array}$$

Tomando $d = 6000000$, la tabla correspondiente a este problema es

-10	-8	-6	-5	-9	0	0	0	$f(x)$
1	1	1	1	1	0	0	0	d
1	0	-1	-1	-1	1	0	0	0
0	-1	1	0	-1	0	1	0	0
0	1	0	-1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	$*$	$*$	$*$	$*$	

Las columnas marcadas con $*$ son linealmente independientes y serán las elegidas para operar de manera de obtener una tabla que cumpla con las reglas básicas. De esta manera obtendremos un vértice inicial. Realizando operaciones elementales por filas se obtiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
-1 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & f(x)+9d \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & d \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & d \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & d & d & d & \boxed{0} &
\end{array}
$$

La variable recuadrada también será considerada como si fuera una variable básica, este es el típico caso de un vértice degenerado. Aplicando el método Simplex, la variable que entrará a ser básica será x_1, el elemento que se usará como pivot será a_{21} (pues $\frac{1}{2}d < d$) y la variable que pasará a ser no básica será x_6. Realizando operaciones por fila se obtiene

$$
\begin{array}{rrrrrrrr|l}
0 & {}^3/_2 & 3 & 4 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & f(x)+{}^{19}/_2 d \\
\hline
0 & {}^1/_2 & 1 & 1 & 1 & -{}^1/_2 & 0 & 0 & {}^d/_2 \\
1 & {}^1/_2 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & {}^d/_2 \\
0 & -{}^1/_2 & 2 & 1 & 0 & -{}^1/_2 & 1 & 0 & {}^d/_2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
{}^d/_2 & 0 & 0 & 0 & {}^d/_2 & 0 & {}^d/_2 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

Por lo tanto la solución es $x^T = (\frac{d}{2}, 0, 0, 0, \frac{d}{2}, 0, \frac{d}{2}, 0)$. La distribución óptima de inversiones (solución del problema original) es poner \$3000000 en I1, \$0 en I2, \$0 en I3, \$0 en I4 y \$3000000 en I5; el retorno al final del año será de \$570000.