

Производная



Функции. Производная. Экстремумы функции. Выпуклость функции. Правила дифференцирования. Правила дифференцирования сложной функции. Chain-rule.

Даниил Корбут

Специалист по Анализу Данных



Даниил Корбут
DL Researcher
Insilico Medicine, Inc

Окончил бакалавриат ФИВТ
МФТИ (Анализ данных) в 2018г
Учусь на 2-м курсе
магистратуры ФИВТ МФТИ
Работал в Statsbot и Яндекс.
Алиса.
Сейчас в Insilico Medicine, Inc,
занимаюсь генерацией
активных молекул и
исследованиями старения с
помощью DL.

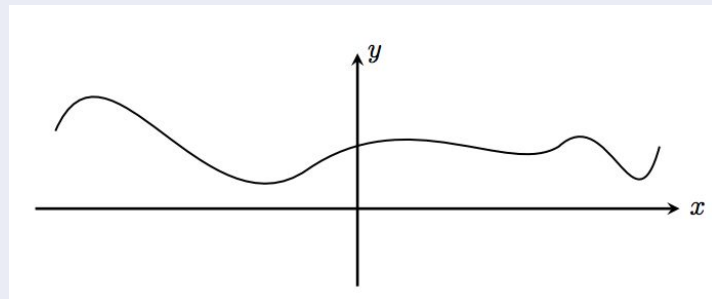
Функции и их свойства

Функция - это некоторое соответствие $x \rightarrow f(x)$, причём для каждого x определено единственное значение $f(x)$.

$D(f)$ - область определения функции

$E(f)$ - область значений функции

Будем работать только с функциями, у которых $D(f)$ и $E(f)$ - подмножество \mathbb{R} .



Функции и их свойства

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) $f(x) = 1 / (x-1)$

2) $f(x) = 2^x$

Функции и их свойства

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) $f(x) = 1 / (x-1)$

2) $f(x) = 2^x$

1) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}, E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $D(f) = \mathbb{R}, E(f) = (0, +\infty)$

Функции и их свойства

Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив её график. Функции бывают непрерывными и разрывными.

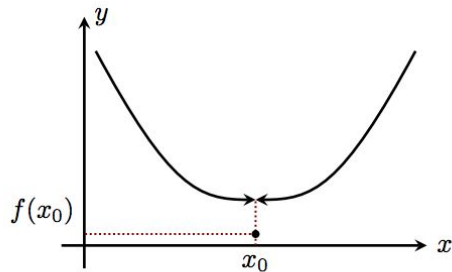


Рис. 2: Функция с устранимым разрывом

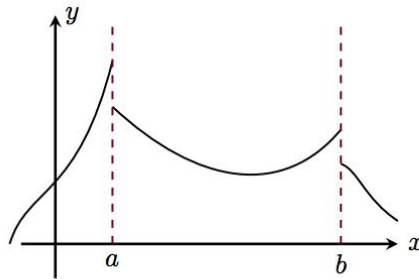


Рис. 3: Функция с разрывами в точках a и b .

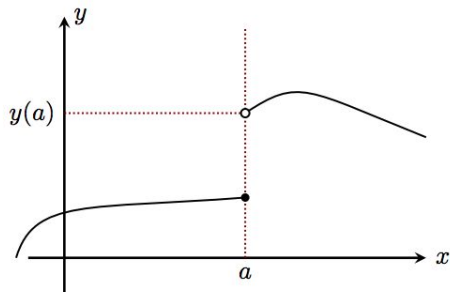


Рис. 4: Функция с разрывом типа «скачок».

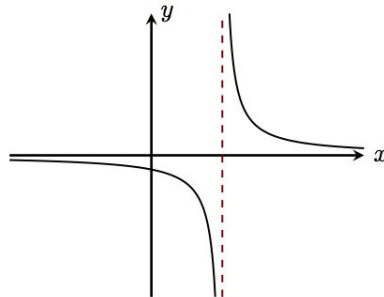


Рис. 5: Функция с бесконечным разрывом.

Предел функции

$$f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

Функция не определена в $x=0$, но её значение может быть вычислено в точках сколь угодно близких к ней

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Не у всех функций есть конечный предел

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Функция неограниченно растёт при приближении к $x = 0$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$



Предел функции

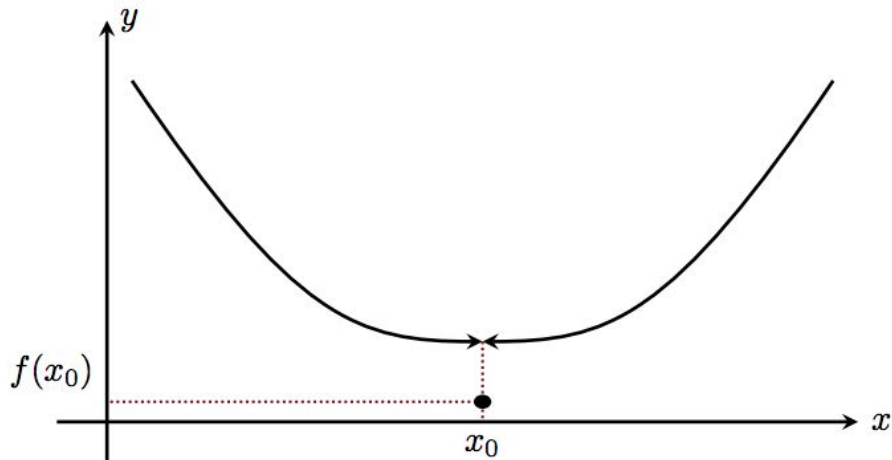
Понятие предела тесно связано с понятием непрерывности функции в точке.

Функция **непрерывна** в точке a , если:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a).$$

С помощью **понятия предела** определяется другое полезное понятие — **понятие производной**.



Производная функции

Производная - мгновенная скорость роста функции в заданной точке.

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k.$$

Давайте посмотрим на линейную функцию $y=kx+b$

Как понять скорость роста для произвольной функции? **Предел!**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Гладкие функции - функции, производная которых непрерывна.

Производная сложной функции

Пусть имеются 2 функции $f(x)$ и $h(x)$, и область значений $f(x)$ принадлежит области определения $h(x)$. Тогда, $h(f(x))$ - применение одной функции к результату другой, называется **сложной функцией**.

Пример: $f(x) = x+1$, $h(x) = \ln(x)$, $g(x) = h(f(x)) = \ln(x+1)$

$$df = f'(x_0)dx, \quad dx = \Delta x.$$

Дифференциал - линейная часть приращения функции

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Отсюда можно записать производную функцию через дифференциал

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dh(x)} \frac{dh(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx}$$



Производная сложной функции (пример)

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$f(x) = \sin(\ln(x)+5x)$$

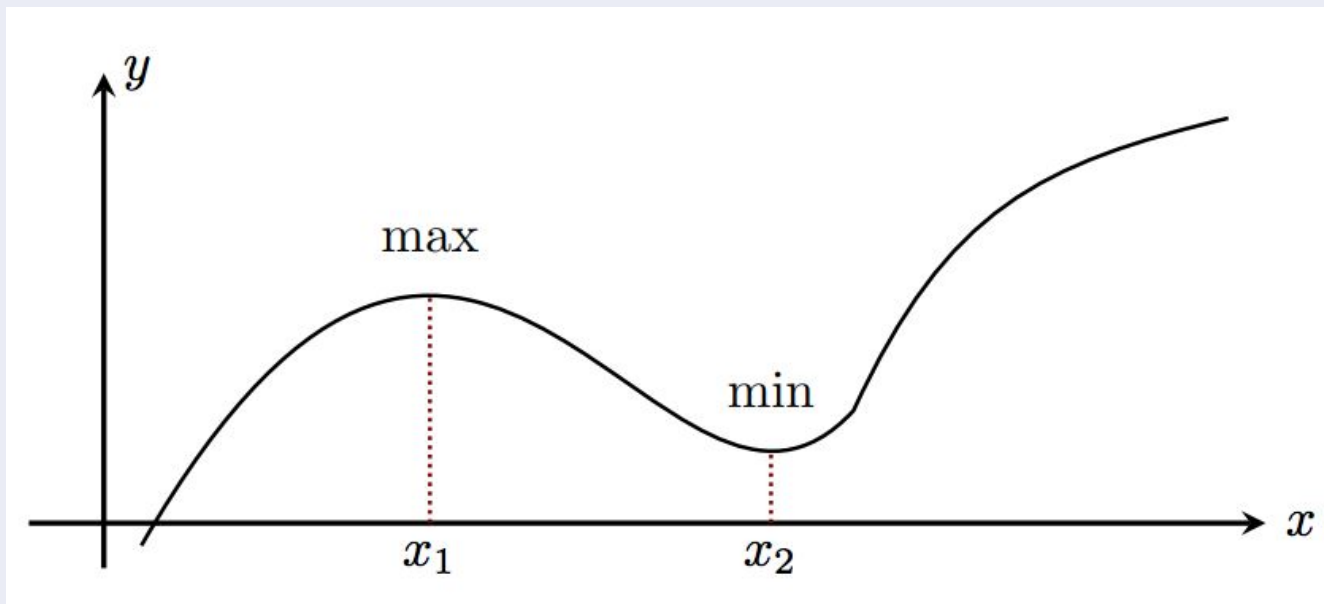
$$f'(x) = \cos(\ln(x)+5x) * (\ln(x)+5x)'$$

$$f'(x) = \cos(\ln(x)+5x) * (1/x + 5)$$

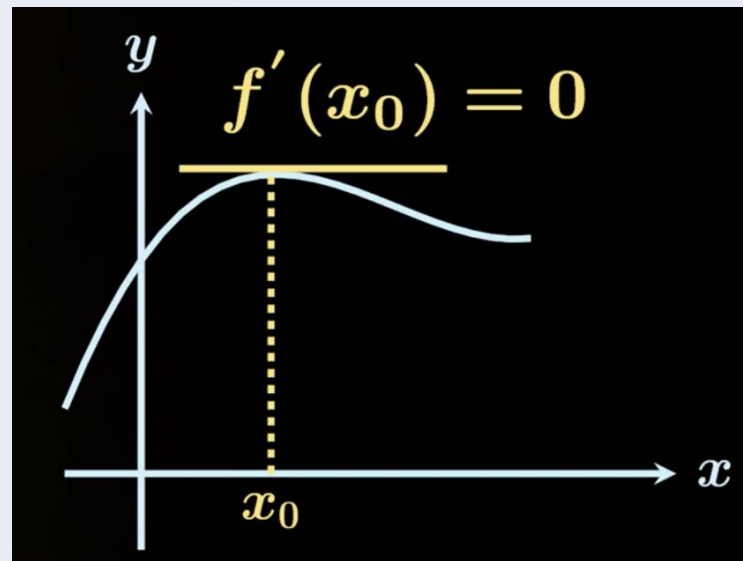
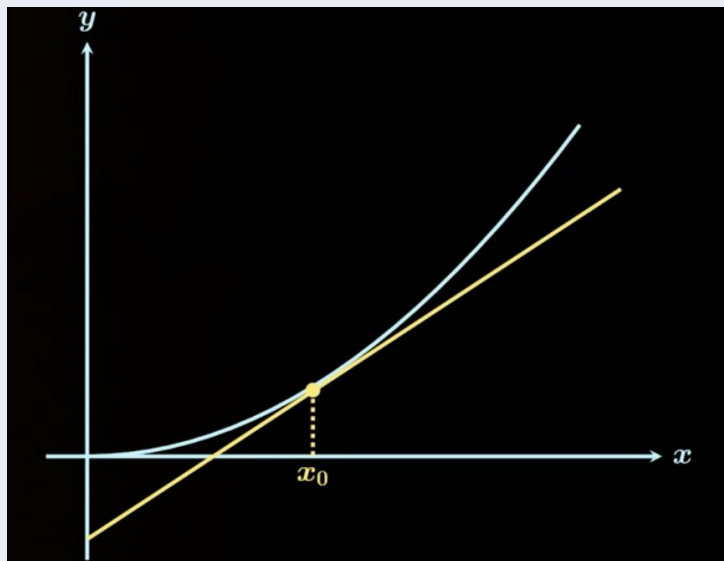
Экстремум функции



Точка x_0 - называется **локальным минимумом** функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$, для которой $f(x) > f(x_0)$, x из $U(x_0)$. Аналогично для максимума. В случае глобального минимума $U(x_0) = D(f)$.

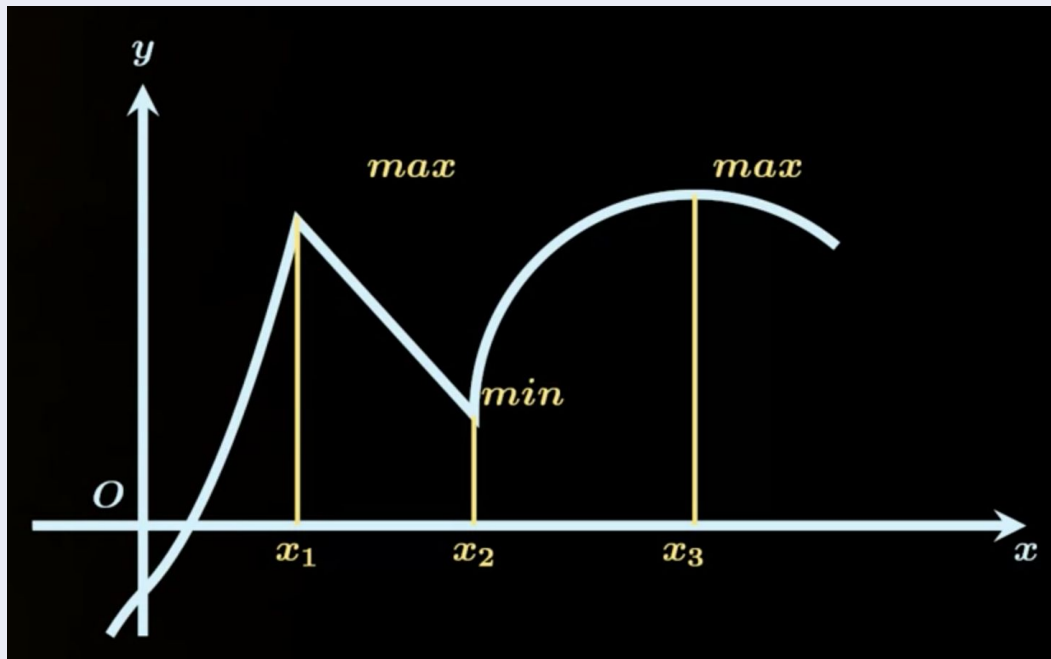
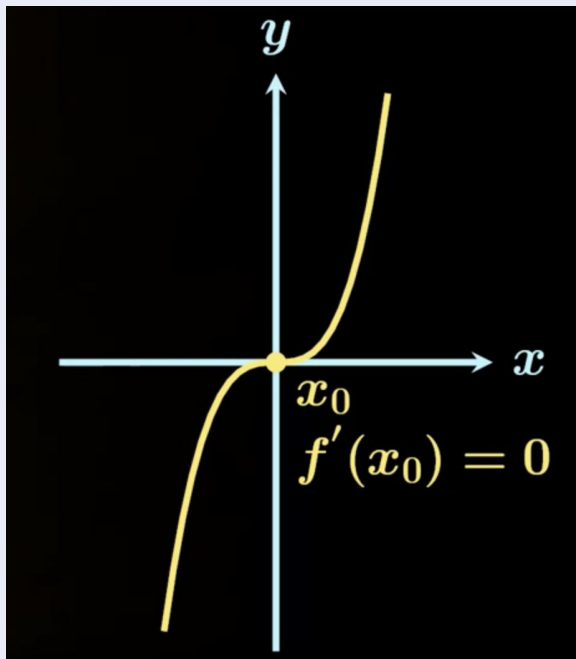


Экстремум функции и производная



В точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю.
Это **необходимое** условие.

Экстремум функции и производная

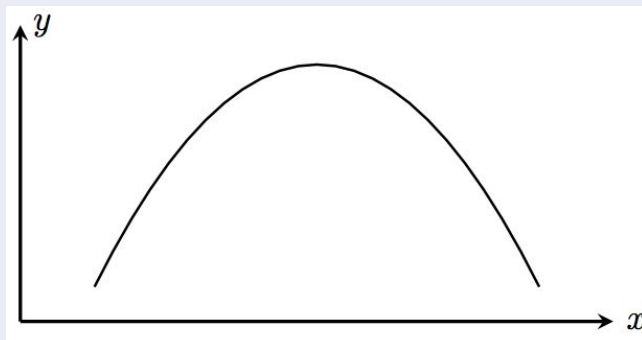
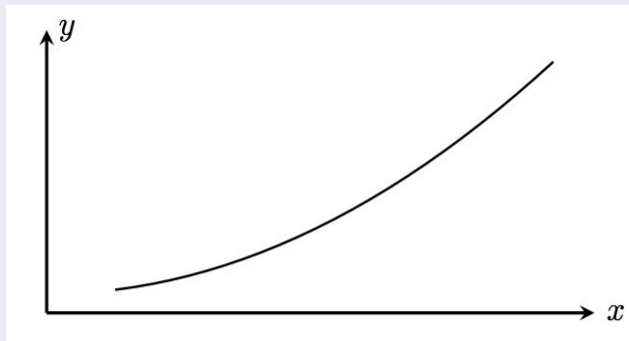


Однако равенство нулю производной **не является достаточным** условием локального экстремума. Также производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов.

Выпуклость функции и вторая производная

Как влияет знак производной на характер поведения функции?

1. $f'(x) \geq 0$ — функция возрастает,
2. $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает,
3. $f'(x) \leq 0$ — функция убывает,
4. $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.



Выпуклость функции и вторая производная

Давайте спустимся на уровень ниже: какому свойству функции соответствует монотонная производная?

1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.

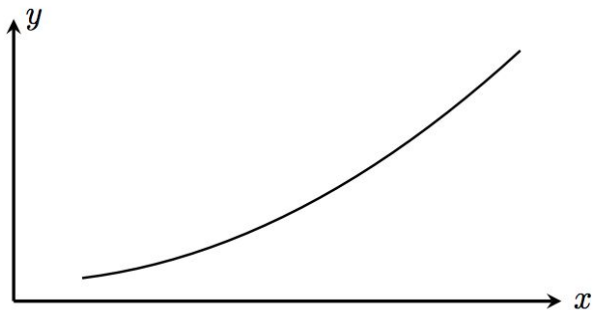


Рис. 11: Выпуклая функция

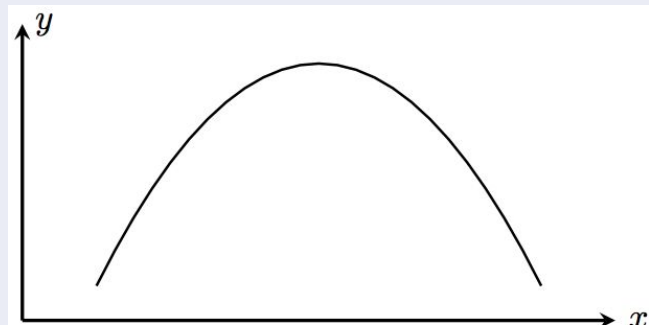


Рис. 12: Вогнутая функция

Выпуклость функции и вторая производная

Помните **необходимое** условие локального экстремума?



Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их **достаточными!**

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

Выпуклость функции и вторая производная

Посмотрим на графики выпуклой и вогнутой функций и проведём прямые, пересекающие их.

Что можно сказать о положении графика относительно прямой?

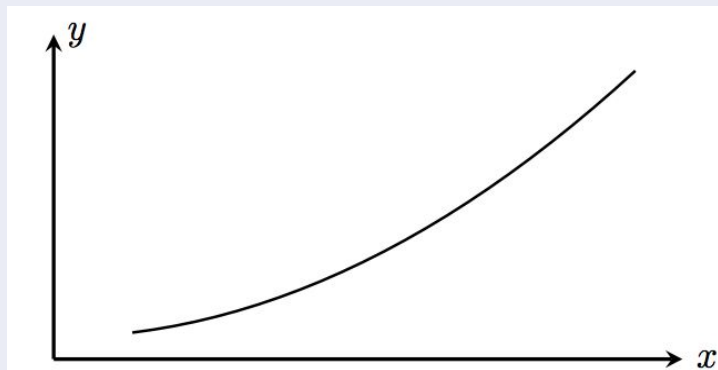


Рис. 11: Выпуклая функция

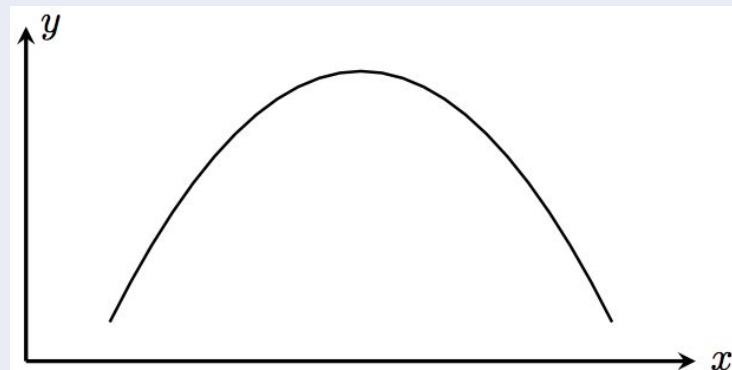


Рис. 12: Вогнутая функция

Выпуклость функции и вторая производная

Отсюда возникает более общее определение выпуклости/вогнутости функции.

Вещественнозначная функция, определённая на некотором интервале, **выпукла**, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $t \in [0, 1]$ выполняется:

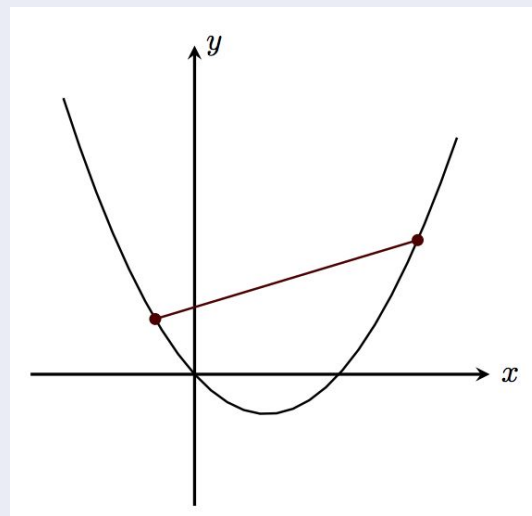
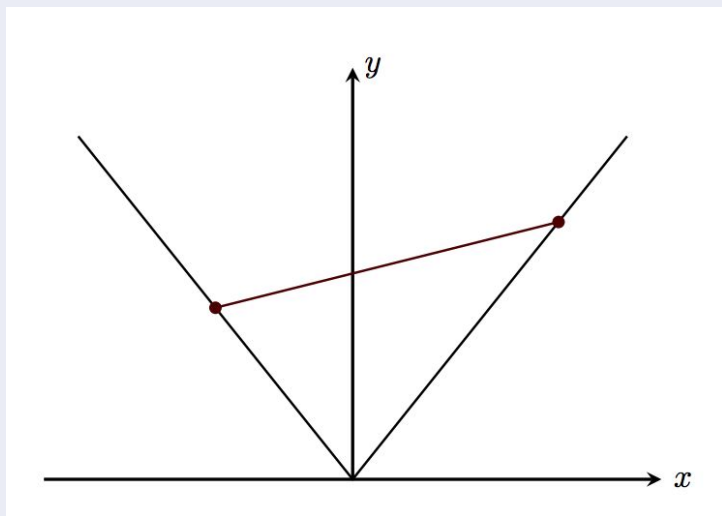
$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции $f(x)$.

Выпуклость функции и вторая производная

Почему это определение более общее?

Оно подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках.



Спасибо за внимание!