Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2016

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 28. januar 2018 Antall sider: 13

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `github.com/tommyod/matte_eksamener_VGS`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = e^{-2x}$. Den generelle regelen er at $(e^{ax})' = ae^{ax}$, i vårt tilfelle er $a = -2$ og vi får $f'(x) = \underline{\underline{-2e^{-2x}}}$ som svar.

b) Vi skal derivere $g(x) = \frac{x-3}{x-4}$. Det er enklere å huske produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$ enn brøkregelen for derivasjon, så vi skriver funksjonen som $g(x) = \frac{x-3}{x-4} = (x-3)(x-4)^{-1}$ og deriverer ved hjelp av produktregelen. Utregningen ser slik ut:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-3)'(x-4)^{-1} + (x-3)\left((x-4)^{-1}\right)' \\ &= (x-4)^{-1} + (x-3)(-1)(x-4)^{-2} \\ &= \frac{x-4}{(x-4)^2} - \frac{x-3}{(x-4)^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{-1}{(x-4)^2}}} \end{aligned}$$

c) Vi skal derivere $h(x) = x(x-3)^6$, og må bruke både produktregelen og kjerneregelen. La oss derivere $f(x) = (x-3)^6$ ved hjelp av kjerneregelen først. Vi velger $u = x - 3$ som kjerne og får $f'(u) = 6u^5$, slik at $f'(x) = 6(x-3)^5$. Vi skriver $h(x) = x(x-3)^6 = xf(x)$ og deriverer ved hjelp av produktregelen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x)' f(x) + x(f(x))' \\ &= f(x) + xf'(x) \\ &= (x-3)^6 + x6(x-3)^5 \\ &= \underline{\underline{(x-3)^5(7x-3)}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

I denne oppgaven ser vi på et polynom $P(x)$ gitt ved:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

a) For å vise at et polynom $P(x)$ er delelig med $(x-a)$ uten å utføre polynomdivisjon må vi sjekke at $P(a) = 0$. Her er $a = -2$, så vi må sjekke at $P(-2) = 0$, noe vi gjør slik:

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 32 = -8 - 24 + 32 = 0$$

Da vet vi at ett nullpunkt er $x = -2$. For å finne de andre utfører vi polynomdivisjonen $P(x) : (x+2)$, da får vi at $P(x) : (x+2) = x^2 - 8x + 16$. Når man utfører denne polynomdivisjonen er det lurt å skrive $P(x) = x^3 - 6x^2 + 0x + 32$. Legg merke til at vi legger til et ledd med 0 som koeffisient, altså leddet $0x$. Nå kan vi bruke ABC-formelen til å faktorisere, og vi får $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.

$P(x)$ kan altså faktoriseres som $(x+2)(x-4)^2$, og nullpunktene er derfor $(-2, 0)$ og $(4, 0)$.

b) Dersom $P'(x) = 0$ har vi et bunnpunkt, toppunkt eller terrassepunkt (sadelpunkt). Vi regner ut $P'(x) = 3x^2 - 12x$, og mens vi er i gang regner vi ut $P''(x) = 6x - 12$. For hvilke x er $P'(x) = 0$? Vi regner slik:

$$\begin{aligned} P'(x) &= 3x^2 - 12x = 0 \\ &= 3x(x-4) = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$

1) I punktet $x = 0$ har vi $P(0) = 32$, og siden $P''(0) < 0$[1] er $(0, 32)$ et toppunkt.

2) I punktet $x = 4$ har vi $P(4) = 0$, og siden $P''(4) > 0$ er $(4, 0)$ et bunnpunkt.

c) Vendepunkt oppstår når $P''(x) = 6x - 12$ skifter fortegn (går fra negativ til positiv eller motsatt). Dette skjer når $x = 2$, da er $y = P(2) = 16$, slik at $(2, 16)$ er et vendepunkt.

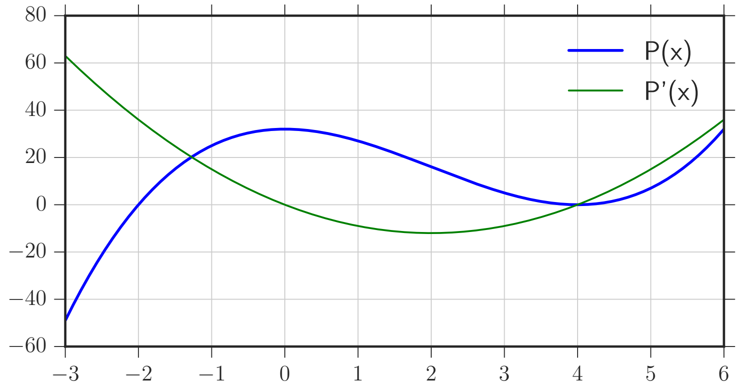
d) Polynomet er tegnet i figur (1). Her er PCen brukt, men med informasjon om nullpunkter, toppunkt, bunnpunkt og vendepunkt burde det være mulig å lage en god skisse for hånd også.

Oppgave 3

Hver kvittering gir oss én likning. La oss bruke variabelnavn som gir mening i forhold til oppgaveteksten: en skolebolle er s, en bolle er b og en muffin er m. Likningene våre blir seende slik ut:

$$\begin{aligned} &\text{Likning 1:} \quad && 4s + 4b + 2m = 176 \\ &\text{Likning 2:} \quad && 2s + 4b + 2m = 142 \\ &\text{Likning 3:} \quad && 3s + 5b + 4m = 222 \end{aligned}$$

[1] Det er også mulig å bruke fortegnslinjer til å karakterisere topp- og bunnpunkt.



Figur 1: Polynomet $P(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ og den deriverte $P'(x) = 3x^2 - 12x$.

Det er alltid lurt å kikke litt på likningene før man løser, da har man større sjanse for å velge en grei fremgangsmåte. Vi tar likning 1 minus liking 2. Da får vi $\underline{\underline{s = 17}}$. Vi setter så dette inn i likning 2 og 3 slik at vi får følgende system:

$$\begin{aligned} &\text{Likning A:} \quad && 4b + 2m = 108 \\ &\text{Likning B:} \quad && 5b + 4m = 171 \end{aligned}$$

Vi ganger så likning A med 2, deretter tar vi likning A minus likning B. Vi får da $\underline{\underline{b = 15}}$. Sett inn s og b i hvilken som helst likning for å finne $\underline{\underline{m = 24}}$. På eksamen er det stort sett alltid verdt tiden det tar å sette prøve på svaret.

Oppgave 4

a) Vi må regne ut følgende sum:

$$16 + 17 + \cdots + 19 + 30$$

Det er 15 ledd i denne summen. Vi bruker formelen for sum av en aritmetisk rekke, som er gitt av følgende formel:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{1}$$

I formelen ovenfor er a_1 den første verdien, a_n er den siste verdien og n er antall ledd. Vi fyller inn det som gjelder for vår oppgave og får:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{16 + 30}{2} \cdot 15 = \underline{\underline{345}}$$

b) Det er $7 - 4 = 3$ differanser mellom a_4 og a_7, slik at $3d = 20 - 11 = 9$. Med andre ord må differansen d være 3. Vi vet at $a_n = a_0 + dn$, så vi kan finne a_0 ved å fylle inn det vi vet for a_4, nemlig at $a_4 = 11 = a_0 + 3(4)$, da er $a_0 = -1$ og vi får:

$$a_n = a_0 + dn = -1 + 3n$$

Da er det bare å fylle inn for $n = 40$. Vi får $a_{40} = -1 + 3(40) = \underline{\underline{119}}$.

Oppgave 5

a) Definisjonen av geometrisk rekke og aritmetisk rekke er:

1) En rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \ldots$ er *geometrisk* dersom forholdet $f = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ er konstant for alle verdier av k. Kommentar: Geometriske rekker er en diskret variant av eksponentialfunksjoner $f(x) = Ce^{kx}$.

2) En rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \ldots$ er *aritmetisk* dersom differansen $d = a_{k+1} - a_k$ er konstant for alle verdier av k. Kommentar: aritmetiske rekker er en diskret variant av lineære funksjoner $f(x) = ax + b$.

b) Vi ser at det foregår en halvering for i hvert ledd, så vi "gjetter" at a_k må være på formen $a_k = C\left(\frac{1}{2}\right)^k$, der C er en ubestemt konstant. For å bestemme C løser vi denne likningen:[2]

$$a_2 = 5 = C\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Løsningen er at $C = 20$ slik at $a_k = 20\left(\frac{1}{2}\right)^k = \underline{\underline{20/2^k}}$.

c) Vi regner ut b_k fra definisjonen gitt i oppgaven:

$$b_k = \ln(a_k) = \ln\left(\frac{20}{2^k}\right) = \ln(20) - k\ln(2)$$

Rekken er aritmetisk dersom differansen $d = b_{k+1} - b_k$ er konstant(uavhengig av indeksen k), så vi regner ut d på følgende måte:

$$\begin{aligned} d = b_{k+1} - b_k &= [\ln(20) - (k+1)\ln(2)] - [\ln(20) - k\ln(2)] \\ &= -(k+1)\ln(2) + k\ln(2) \\ &= -k\ln(2) - \ln(2) + k\ln(2) \\ &= \underline{\underline{-\ln(2)}} \end{aligned}$$

<u>Differansen d er ikke avhengig av k, og da er rekken aritmetisk.</u>

Oppgave 6

I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right)$$

[2] Vi kunne brukt hvilket som helst ledd til å finne C, grunnen til at vi velger a_2 er helt tilfeldig.

a) En funksjon $f(x)$ stiger når $f'(x) > 0$ og synker når $f'(x) < 0$. Vi bruker kjernereglen med $u = x^2 + 4$ og regelen $\ln(u)' = u'/u$ for å regne ut den deriverte av $f(x)$:

$$f'(x) = \left(\ln\left(x^2+4\right)\right)' = \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} = \frac{2x}{x^2+4}$$

Nevneren $x^2 + 4$ er positiv for alle verdier av x, så vi trenger bare å se på telleren. Telleren er positiv når $x > 0$ og negativ når $x < 0$, så vi ser at funksjonen stiger når $x > 0$ og synker når $x < 0$.

b) Monotoniegenskapene (stigning og synking) passer ikke med figur A, så det må være B, C eller D. Vi ser på vendepunktene, altså når $f''(x)$ bytter fortegn, vi regner ut:

$$f''(x) = \left(2x\left(x^2+4\right)^{-1}\right)' = \ldots = \frac{2}{x^2+4} - \frac{4x^2}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{8-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Nevneren $\left(x^2+4\right)^2$ er alltid positiv, så vi ser på telleren. Den dobbelderiverte $f''(x)$ endrer fortegn når $x = \pm 2$. Dette stemmer best med figur C, ettersom vi ser vendepunkter i nærheten av ± 2.

Oppgave 7

a) Vi vet at summen av sannsynlighetene må være lik 1:

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = 1$$

I vårt tilfelle må $0,2 + 0,5 + a = 1$, og da må vi ha $\underline{\underline{a = 0,3}}$.

b) Forventningsverdien $\mu = \mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X} P(X = x)x$ blir her:

$$\sum_{x \in X} P(X = x)x = 0(0,2) + 10(0,5) + 20(0,3) = 5 + 6 = \underline{\underline{11}}$$

Standardavviket $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ er litt mer vrient å regne ut uten kalkulator, men utregningen av variansen kan se omtrent slik ut:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x \in X} P(X = x)(x - \mu)^2 \\
&= 0,2(0-11)^2 + 0,5(10-11)^2 + 0,3(20-11)^2 \\
&= 0,2(11)^2 + 0,5(-1)^2 + 0,3(9)^2 \\
&= \frac{242}{10} + \frac{5}{10} + \frac{3(81)}{10} \\
&= \frac{242 + 5 + 243}{10} = \frac{490}{10} = 49
\end{aligned}$$

Da blir $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{49} = \underline{\underline{7}}$.

Oppgave 8

a) $P(22 < X < 42)$ er området mellom 22 og 42. I en sannsynlighetsfordeling er summen av arealet alltid lik 1, så det hvite området pluss de to blå områdene må være lik 1. Vi løser for det hvite området i likningen nedenfor:

$$\begin{aligned}
\text{hvitt område} + 2 \times \text{blått område} &= 1 \\
\text{hvitt område} + 2 \times 0,106 &= 1 \\
\text{hvitt område} = 1 - 2 \times 0,106 = 1 - 0,212 &= \underline{\underline{0,788}}
\end{aligned}$$

b) En normalfordeling er symmetrisk rundt forventningsverdien μ, som er x verdien som samsvarer med "toppen av fjellet." Ettersom de blå områdene er like store må μ ligge midt mellom 22 og 42:

$$\mu = \frac{22 + 42}{2} = \underline{\underline{32}}$$

c) Fra tabellen "Standard normalfordeling" i vedlegg 1 kan vi lese at:

$$P(Z < -1,25) = 0,1056 \approx 0,106$$

Området mellom 22 og $\mu = 32$ inneholder altså omtrent $1,25$ standardavvik. Vi får likningen

$$(32 - 22) = 1,25\sigma$$

som har løsning $\underline{\underline{\sigma = 8}}$.[3]

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Det er lurt å lage et plot av datasettet i Geogebra for å se hvordan det ser ut. Skriv inn datasettet i regnearket, marker de to kolonnene, høyreklikk og trykk "Lag" → "Liste med punkt." Datasettet er plottet i figur (2).

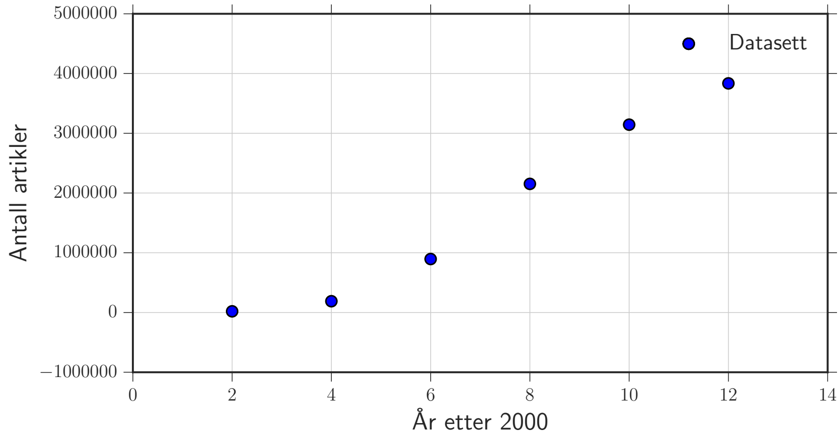
1) Vi kan forsøke med lineær regresjon først. Vi bruker[4]
`RegLin[ <Liste med punkt> ]`
kommandoen i Geogebra til å lage en lineær modell for datasettet:

$$f(x) = 417144x - 1214093 \tag{2}$$

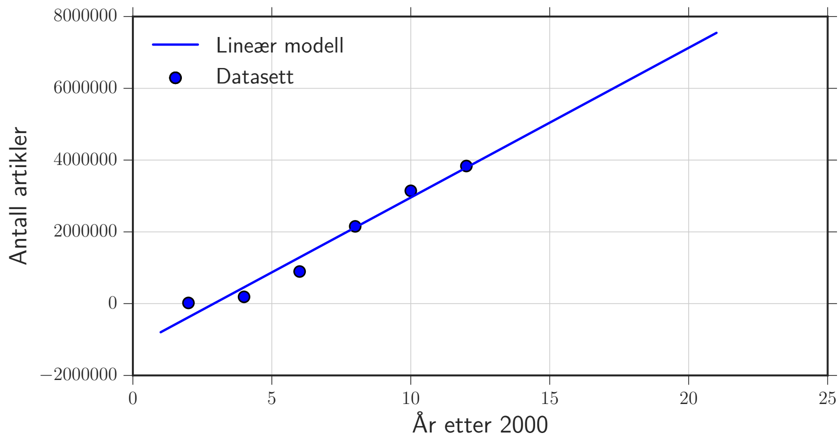
I figur (3) ser vi datasettet, samt den lineære modellen gitt av likning (2). Vi har at $f(20) = 7,13$ millioner, noe som samsvarer godt med journalis-

[3] Et litt mer nøyaktig svar er $P(Z < -1,2481) = 0,106$, som gir $\sigma \approx 8,0123$.

[4] Det er også mulig å markere data i regnearket og velge "Regresjonsanalyse", som er en knapp oppe til venstre på skjermen.



Figur 2: Datasettet i oppgave 1a, del 2.



Figur 3: Datasettet i oppgave 1a, del 2 og den lineære modellen.

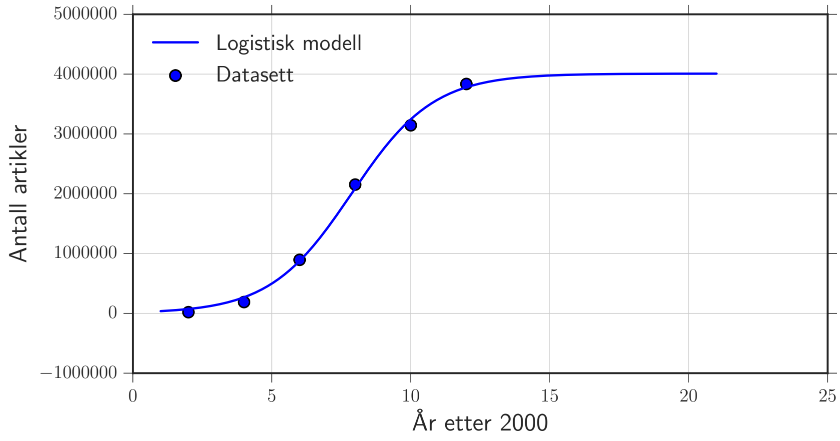
tens påstand om at det vil være rundt 7 millioner artikler på Wikipedia i år 2020. En av modellene er altså en lineær modell.

2) La oss undersøke en logistisk modell. Vi bruker
`RegLogist[ <Liste med punkt> ]`
kommandoen i Geogebra til å lage en logistisk modell for datasettet, og får dette som svar:

$$g(x) = \frac{4008254}{1 + 211,4052e^{-0,6801x}} \tag{3}$$

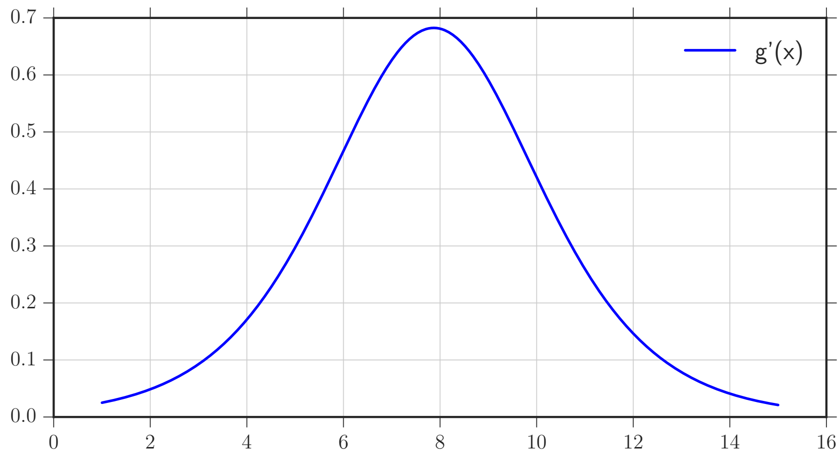
I figur (4) ser vi datasettet samt en logistisk modell gitt av likning (3). Legg merke til at når $x \to \infty$ så vil $g(x) \to 4008254 \approx 4000000$. Den andre journalisten har brukt en logistisk modell når han/hun har kommet frem til at antall artikler vil stabilisere seg på rundt 4 millioner.

b) Stor vekst skjer når den deriverte, $g'(x)$, er høy. Den største veksten skjer når $g'(x)$ er høyest. Vi må altså finne toppunktet til $g'(x)$. Dette gjør vi ved å



Figur 4: Datasettet i oppgave 1a, del 2 og den logistiske modellen.

tegne funksjonen i Geogebra og bruke
`Maks[ <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> ]`
Da får vi punktet $(7.87, 0.68)$, det vil si at året der antall artikler vokste raskest er $2007.87 \approx \underline{\underline{2007}}$. Funksjonen $g'(x)$ er plottet i figur (5).



Figur 5: Grafen til $g'(x)$ i oppgave 1b, del 2.

c) Vi bruker
`Integral[ <Funksjon>, <Start>, <Slutt> ]`
kommandoen til å regne ut integralet. Dersom funksjonen er definert som `g(x)` kan vi skrive:
`a = Integral[g, 0, 15]`
Da får vi vite at arealet $a \approx \underline{\underline{3,96}}$. Forholdet mellom den deriverte $g'(x)$ og et integral er gitt ved:[5]

$$\int_a^b g'(x)\ dx = g(b) - g(a)$$

[5] Dette er *fundamentalteoremet i kalkulus*.

I vårt tilfelle er tolkningen av $\int_0^{15} g'(x)\,dx = g(15) - g(0)$ den totale endringen i artikler fra 2000 til 2015.

Oppgave 2

a) Likningssettet er:

$$\begin{aligned} K(50) &= 3225 \\ K(100) &= 4900 \\ K'(100) &= 41 \end{aligned}$$

Følgende kommando i CAS i Geogebra løser likningssettet, her skrevet over flere linjer for å være lettere å lese:[6]

```
Løs[
{a(50)^2 + b(50) + c = 3225,
a(100)^2 + b(100) + c = 4900,
2a(100) + b = 41},
{a, b, c}
]
```

Løsningen er $\underline{\underline{a = 3/20}}$, $\underline{\underline{b = 11}}$ og $\underline{\underline{c = 2300}}$. Funksjonen $K(x)$ blir da:

$$K(x) = ax^2 + bx + c = \frac{3}{20}x^2 + 11x + 2300$$

Vi kan derivere $K(x)$ ovenfor for å bekrefte at $\underline{\underline{K'(x) = (3/10)x + 11}}$.

b) Vi kan derivere $I(x)$ og $K(x)$ for hånd eller med CAS, da får vi:

$$\begin{aligned} I'(x) &= 31,87 \\ K'(x) &= 41 \end{aligned}$$

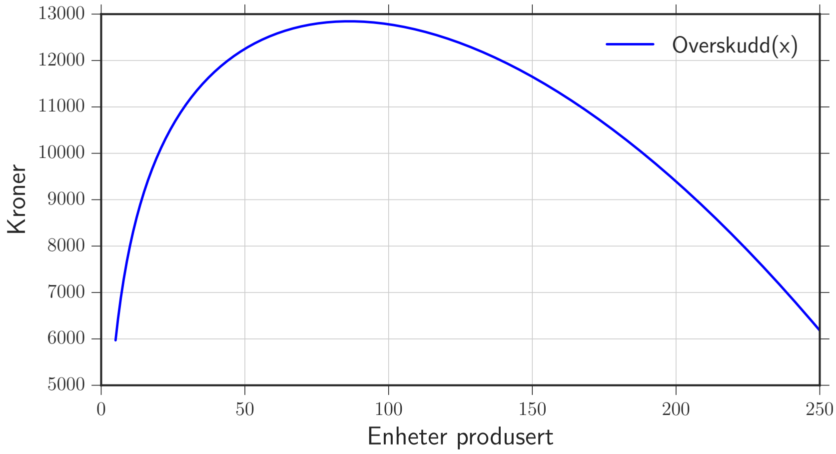
$I'(x)$ forteller oss hvor mye mer vi får i inntekt (per enhet x) dersom vi produserer én enhet mer. På samme måte forteller $K'(x)$ oss hvor mye mer kostnadene blir (per enhet x) dersom vi produserer én enhet mer. Bedriften bør produsere <u>færre enn 100 enheter</u>, ettersom grensekostnadene overstiger grenseinntektene når $x = 100$. Legg merke til at overskuddet er $O(x) = I(x) - K(x)$, slik at $O'(x) = I'(x) - K'(x)$. Dersom $K'(x) > I'(x)$ er $O'(x) < 0$, og overskuddet synker når vi øker x. Vi vil selvsagt ikke produsere mer i en slik situasjon.

c) Vi definerer overskuddet som inntekt minus kostnad $O(x) = I(x) - K(x)$. Overskuddet blir

$$O(x) = 3200 \ln(2,5x + 1) - \left(\frac{3}{20}x^2 + 11x + 2300\right)$$

[6] Det er kanskje lettest å skrive lange kommandoer i notepad og lime inn i CAS etterpå, i tilfelle du skriver feil eller trykker på noe i Geogebra slik at alt forsvinner.

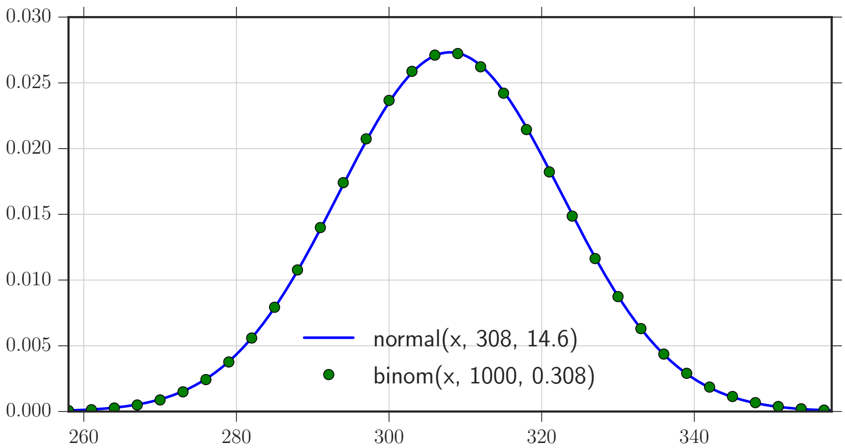
For å løse oppgaven plotter vi $O(x)$ i Geogebra og kjører følgende kommando:
`Maks[ <Funksjon>, <Start x-verdi>, <Slutt x-verdi> ]`
Svaret er at bedriften må produsere og selge $86,33 \approx$ 86 enheter per dag for å oppnå et maksimalt overskudd. Funksjonen $O(x)$ er plottet i figur (6).



Figur 6: Et plot av $O(x)$ fra oppgave 2c, del 2.

Oppgave 3

a) I utgangspunktet er den stokastiske variabelen x binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0,308$, men dersom $np > 5$ og $n(1-p) > 5$ kan vi approksimere den binomiske fordelingen med en normalfordeling. Ettersom $np = 308 > 5$ og $n(1-p) = 692 > 5$ vil normalfordelingen her være en god approksimasjon. Se figur (7) for et plot som viser hvor god denne approksimasjonen er (veldig god her, siden både np og $n(1-p)$ er mye større enn 5).



Figur 7: Binomisk fordeling og normalfordeling i oppgave 3a, del 2.

b) For en binomisk fordeling får vi følgende utregninger:

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{E}(X) = np = 1000(0,308) = \underline{\underline{308}} \\ \sigma &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} \\ &= \sqrt{1000(0,308)(1-0,308)} = \sqrt{213,136} \approx \underline{\underline{14,6}}\end{aligned}$$

c) La X være antall personer i spørreundersøkelsen som ville ha stemt på partiet. Vi setter opp følgende hypoteser:

$$\begin{aligned}H_0 : &\quad p = 0,308 \\ H_1 : &\quad p > 0,308\end{aligned}$$

Den observerte verdien er $x_{\text{obs}} = 334$. P-verdien er sannsynligheten for et så ekstremt resultat som den observerte verdien, eller endra mer ekstremt, gitt at H_0 er sann. Med andre ord er P-verdien sannsynligheten for å få $X \geq x_{\text{obs}}$ gitt at H_0 er sann. Vi kan regne ut P-verdien på 2 måter:

(a) Vi kan bruke binomisk fordeling. Sannsynligheten for at $X \geq x_{\text{obs}} = 334$ gitt at $p = 0,308$ er $0,0411$. Utregningen gjør vi i sannsynlighetskalkulatoren til Geogebra.

(b) Vi kan bruke normalfordelingen til å tilnærme den binomisk fordelingen. Når $p = 0,308$ og $n = 1000$ har vi allerede regnet ut $\mu = 308$ og $\sigma = 14,6$. Vi får at P-verdien blir $P(333,5 \leq X) = 0,0404$. Dette tallet er også fra sannsynlighetskalkulatoren. Legg også merke til heltallskorreksjonen når vi går fra en diskret til en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling.

Uansett hvilken metode vi velger får vi at P-verdien er mindre enn 0,05, så $\underline{\underline{\text{vi forkaster } H_0}}$, og vi har grunnlag for å si at oppslutningen til partiet har økt.

Oppgave 4

a) Vi løser likningen $b \times (1,025)^{18} = 100000$ for beløpet b, svaret blir:

$$b = \frac{100000}{(1,025)^{18}} = 64116,591 \approx \underline{\underline{64117}}$$

b) Vi må gjøre noen valg når vi tolker denne oppgaven. Jeg velger å tolke den med følgende antagelser:

1) Ole Magnus får første beløp på dagen han blir født.

2) På 18 årsdagen får han siste innbetaling fra foreldrene, pluss renter fra forrige år.

La oss se på litt generell teori. Pengene T etter n år kan skrives slik, der r er rente og b er årlig beløp:

$$\begin{aligned} T_0 &= b \\ T_1 &= br + b \\ T_2 &= br^2 + br + b \\ \dots &= \dots \\ T_n &= b\underbrace{\left(r^n + r^{n-1} + \dots + 1\right)}_{n+1 \text{ ledd i summen}} \\ T_n &= b\left(\frac{r^{n+1}-1}{r-1}\right) \end{aligned}$$

Fra nest siste til siste linje bruker vi summeformelen for geometriske rekker. Dersom Ole Magnus får en innbetaling og en renteavkastning på 18 årsdagen, setter vi $T_{18} = 100000$ og løser for b:

$$b = \frac{T_n\,(r-1)}{(r^{n+1}-1)} = \frac{100000\,(1,025-1)}{(1,025^{18+1}-1)} \approx \underline{\underline{4176}}$$

Denne oppgaven kan løses uten PC, men oppgaven ber oss om å løse i CAS i Geogebra. For å løse i CAS skriver vi inn følgende:

```
NLøs[Sum[b*1.025^x, x, 0, 18] = 100000]
```

Som løser følgende likning for oss:

$$100000 = b\sum_{x=0}^{18}(1,025)^x$$

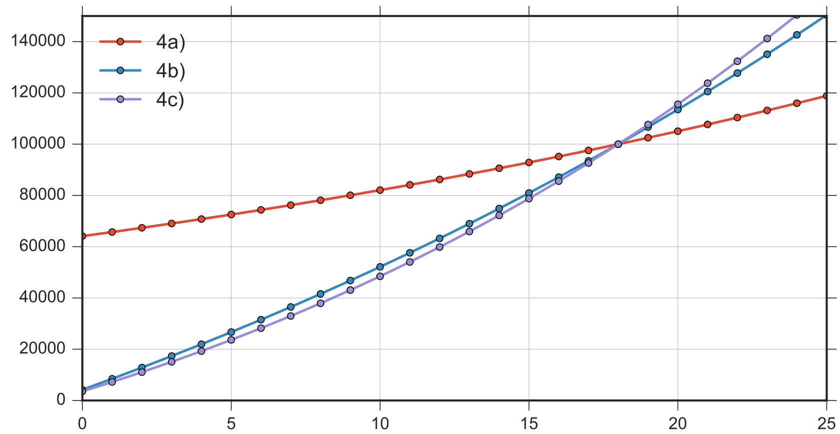
c) Igjen antar vi at første innbetaling b blir gjort når Ole Magnus blir født, samt at det blir gjort en innbetaling på 18 årsdagen. Vi begynner med år 0 og lager en tabell, der vi setter økningen i beløpet til $o = 1,02$. Den rekursive formelen er $T_n = T_{n-1}r + bo^n$, altså "forrige verdi ganget med rente, pluss et nytt beløp som øker hvert år." Vi kan sette opp en tabell og undersøke situasjonen slik:

År	**Uttrykk**	**Pent uttrykk**
0	b	b
1	$br + bo$	$b(r + o)$
2	$(br + bo)\,r + bo^2$	$b(r^2 + ro + o^2)$
3	$((br + bo)\,r + bo^2)\,r + bo^3$	$b(r^3 + r^2o + ro^2 + o^3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\dots$	$b\sum_{x=0}^{n} o^x r^{n-x}$

Vi ser mønsteret i høyre kolonne av tabellen. Igjen blir vi bedt om å løse problemet i CAS i Geogebra, så vi skriver inn:

```
o := 1.02
r := 1.025
Nløs[b*Sum[o^x*r^(18-x), x, 0, 18]=100000]
```

Løsningen blir $b = \underline{\underline{3525}}$. I figur (8) ser vi grafer for hele oppgave 4, legg merke til at etter 18 år har Ole Magnus 100000 kroner i alle tilfellene. Det er spennende å se hva som skjer videre også, så grafen fortsetter scenarioene til $x = 25$.



Figur 8: Scenarioer fra oppgave 4, del 2.