

# Løsningsforslag – Eksamen R2, høsten 2018

Laget av Markus

Sist oppdatert: 24. november 2018

Antall sider: 7

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på [https://github.com/matematikk/vgs\\_eksamener](https://github.com/matematikk/vgs_eksamener).

## 1 Del 1

### 1.1 Oppgave 1

a)

$$f'(x) = 6(-\sin(2x - 1)) \cdot \frac{d}{dx}[2x - 1] = -12 \sin(2x - 1)$$

b)

$$g'(x) = \frac{d}{dx} [\cos^2(x) + \sin^2(x)] = \frac{d}{dx}[1] = 0$$

### 1.2 Oppgave 2

a)

$$\int (2x^2 - 3x) \, dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$$

b) La  $u = x^2 + 2 \implies dx = \frac{1}{2x} du$ . Da fås

$$\int 4x \cdot \cos(x^2 + 2) \, dx = 2 \int \cos(u) = 2 \sin(u) + C = 2 \sin(x^2 + 2) + C$$

c) Observer at  $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$  og bruk delbrøksoppspalting. Det gir

$$\int \frac{4}{x^2 - 4} = \int \left( \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \ln|x - 2| - \ln|x + 2| + C = \ln \left| \frac{x - 2}{x + 2} \right| + C$$

### 1.3 Oppgave 3

a) For at rekka skal konvergere må  $|e^{-x}| < 1$ . Siden  $e^x > 0$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ , holder det med å sjekke når  $e^{-x} < 1 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

b) Vi ønsker å løse  $S(x) = 3$ . Siden  $S(x)$  er en geometrisk rekke er den for alle  $x > 0$  slik at

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Sett nå dette lik 3 så får vi likningen

$$2e^x = 3 \iff x = \ln \left( \frac{3}{2} \right)$$

## 1.4 Oppgave 4

b) Vi skal finne skjæringspunktene til  $\sin(x)$  og  $\cos(x)$ , altså løse  $\sin(x) - \cos(x) = 0 \iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 1 = 0$ , når  $\cos(x) \neq 0$ . Dette forenkles igjen til  $\tan(x) = 1$ , som skjer når  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Så skjæringspunktene er  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  og  $(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ .

c)

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin(x) - \cos(x)) \, dx = -\cos(x) - \sin(x) \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

## 1.5 Oppgave 5

a) Vi observerer at amplituden er 1.2 og at perioden er 8 sekunder. Jeg tolker likevektslinja til å være 1.2 m utifra oppgavebeskrivelsen. Siden  $f(t)$  er på sitt høyeste når  $t = 0$ , kan vi konkludere med at den er faseforskjøvet med  $\frac{\pi}{2}$ . Konklusjonen er

$$f(t) = 1.2 \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) + 1.2$$

b) Her skal vi løse  $f(t) = 1.2 + 0.6 = 1.8 \iff \sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ . Dette er ekvivalent med å løse

$$\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{og} \quad \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

der  $n \in \mathbb{Z}$  og  $t \in [0, 8]$ . Dette er igjen ekvivalent med å løse

$$t = -\frac{4}{3} + 8n \quad \text{og} \quad t = \frac{4}{3} + 8n$$

Herifra ser vi at løsningene på det ønskede intervallet er  $t \in \{\frac{4}{3}, \frac{20}{3}\}$ . Så bøyen er 0.6 m over likevektslinja etter 1.33 sekunder og etter 6.66 sekunder.

## 1.6 Oppgave 6

a) Observer at tangenten i  $(1, -1)$  peker nedover, så alternativ 1 ( $y' = x + y$ ) kan ikke være rett, fordi da hadde  $y' = 1 - 1 = 0$  i  $(1, -1)$ , altså skulle tangenten vært flat. Hvis alternativ 2 hadde vært korrekt skulle tangenten gått mot å stige mer og mer når  $y$  nærmet seg 0 og  $x$  er liten (og positiv i dette eksempelet), for når  $y' = \frac{x}{y}$ , og  $y \rightarrow 0$ , vokser helt klart  $y'$ . Men her går  $y'$  mot å være mer og mer flat". Eneste gjenstående alternativ er alternativ 3, så  $y' = x \cdot y$  må være korrekt.

b)  $y' = x \cdot y \iff \frac{y'}{y} = x$  Dette er en separabel diff.likning., vi får

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int x \, dx \iff \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C \iff y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

## 1.7 Oppgave 7

a)  $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$

b)  $A(-1, 1, 1)$  inn i planlikningen gir  $3(-1) + 2(1) + 2(1) - 1 = -3 + 2 + 2 - 1 = 0$  så  $A$  ligger i planet. Akkurat den samme prosessen kan brukes for å vise at  $B$  og  $C$  ligger i planet.

c) Vi er gitt  $D(s^2 - 1, 3s + 1, 10)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Vektorene  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  og  $\overrightarrow{AD}$  utspenner et tetraeder  $ABCD$  med volum

$$V = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$$

Vi regner ut at  $\overrightarrow{AD} = (s^2, 3s, 9)$ , og at  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, -2, -2)$ , så vi får at

$$V = \frac{1}{6} |(-3, -2, -2) \cdot (s^2, 3s, 9)| = \frac{1}{6} |-3s^2 - 6s - 18| = \frac{1}{6} |-3| |s^2 + 2s + 6| = \frac{1}{2} |s^2 + 2s + 6|$$

Observer at  $s^2 + 2s + 6 = (s + 1)^2 + 5$ , så  $s^2 + 2s + 6$  er aldri negativ, og vi kan se bort ifra absoluttverditegnet, så funksjonen for volumet av  $s$  er gitt ved

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 + s + 3$$

d) Deriverer vi  $V(s)$ , får vi at  $V'(s) = s + 1$  så  $V'(s) = 0$  når  $s = -1$ . Observer at  $V'(-2) = -1$  og  $V'(0) = 1$ , så  $(-1, V(-1))$  er et bunnpunkt. Det minste volumet tetraederet kan ha er altså  $V(-1) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = \frac{5}{2}$ .

## 1.8 Oppgave 8

Vi skal vise at  $P(n) : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$  ved induksjon.

**Basistilfellet**,  $n = 1$  gir venstre side lik  $1^3 = 1$  og høyre side  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ , så høyre side er lik venstre side og basistilfellet stemmer.

**Induksjonshypotesen**,  $n = k$ . Vi antar at formelen stemmer for  $n = k$ , altså at

$$1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

**Induksjonssteget**, vi ønsker nå å vise at  $P(k) \implies P(k+1)$ .

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &\stackrel{\text{i.h.}}{=} \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= (k+1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + (k+1) \right) \\ &= (k+1)^2 \left( \frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) \\ &= (k+1)^2 \left( \frac{(k+2)^2}{4} \right) \\ &= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

## 2 Del 2

### 2.1 Oppgave 1

b) Fra oppgave a) vet man allerede hvordan dette området ser ut. Skjæringspunktene fås ved å løse  $f(x) = g(x)$ . Vi får at skjæringspunktene er  $\{0, 2\}$ . Da er

$$M = \int_0^2 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_0^2 (-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x) \, dx = \frac{8}{5}$$

c)

1	$F(x) := x^4 - 4r^3x - 1$ $\rightarrow \mathbf{F(x) := -4r^3x + x^4 - 1}$
2	$G(x) := 4r^3x^3 - 6r^2x^2 - r^4$ $\rightarrow \mathbf{G(x) := 4r^3x^3 - 6r^2x^2 - r^4}$
3	Løs( $F=G$ ) $\rightarrow \mathbf{\{x = r - 1, x = r + 1\}}$
4	IntegralMellom( $G, F, r-1, r+1$ ) $\rightarrow \mathbf{\frac{8}{5}}$

Vi ser at arealet mellom grafene er uavhengig av  $r$ .

### 2.2 Oppgave 2

a) Sentrumet i kuleflaten  $K_1$  er gitt ved  $(2t, 1, 3)$  og kulen har radius 2. Formelen for en kuleflate med radius  $r$  og sentrum i  $(x_0, y_0, z_0)$  er gitt ved  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ . Så for vår del blir likningen

$$(x - 2t)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 2^2$$

b)  $K_1$  vil tangere  $yz$ -planet når avstanden fra sentrum i  $K_1$  til  $yz$ -planet er 2.  $yz$ -planet har likningen  $x = 0$ . Bruker vi nå avstandsformelen får vi at avstanden er

$$D = \frac{|ax_1 + d|}{\sqrt{a^2}} = \frac{1 \cdot 2t}{\sqrt{1^2}} = 2t$$

Så vi må løse  $2t = 2$ , altså tangerer  $K_1$   $yz$ -planet når  $t = 1$ .

c) Vi har en ny kuleflate gitt ved  $K_2 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Herifra er det lett å se at sentrum for  $K_2$  er  $(0, 0, 0)$ . Dersom  $r = 2$ , vil kulene tangere hverandre når avstanden mellom sentrumene til  $K_1$  og  $K_2$  er 4 (radius  $K_1$  + radius  $K_2$ ). Altså må vi finne når avstanden mellom  $(0, 0, 0)$  og  $(2t, 1, 3)$  er 4. Avstanden mellom disse punktene er  $S = \sqrt{(2t)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4t^2 + 10}$ . Løser vi  $\sqrt{4t^2 + 10} = 4$ , får vi  $t^2 = \frac{3}{2}$ , så  $t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ . Altså vil kulene tangere hverandre når  $t = \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$ .

d) Fra c) vet vi at avstanden mellom sentrumene, hvis  $K_2$  har radius  $r$ , er  $A(t) = \sqrt{4t^2 + 10}$ , og at kulene tangerer hverandre når  $A(t) = 2 + r$ . Setter vi  $A(t) = 2 + r$ , får vi likningen  $4t^2 + 10 = 4 + 4r + r^2 \iff t^2 = \frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2}$ . Siden  $t^2 \geq 0$  for alle  $t \in \mathbb{R}$ , må vi ha at  $\frac{1}{4}r^2 + r - \frac{3}{2} \geq 0$ . Denne likningen har to løsninger, der henholdsvis en er positiv, nemlig  $r = \sqrt{10} - 2$ . Altså er  $r = \sqrt{10} - 2$  den minste verdien som sørger for at de to kulene tangerer.

## 2.3 Oppgave 3

a) Hvis bedriften klarer å nå målet blir utslippet i 2018 lik 20 000 tonn, i 2019 lik  $20000 \cdot (0.85)$ , i 2020 vil den være  $(20000 \cdot 0.85) \cdot 0.85 = 20000 \cdot 0.85^2$ . Vi ser at mønsteret danner en geometrisk rekke, så fra 2018 til 2027 blir summen av utslippene lik

$$\sum_{n=0}^9 20000 \cdot 0.85^n \approx 107083.4 \text{ (tonn)}$$

b) Om en annen bedrift vet vi at utslippene deres over 2018 – 2027 er

$$S(r) = \sum_{n=0}^9 30000 \cdot r^n$$

Vi er bedt å finne  $r$  slik at bedriften i a) og denne bedriften slipper ut like mye. Formelen for summen av en geometrisk rekke lar oss omskrive  $S(r)$  til

$$S(r) = 30000 \left( \frac{1 - r^{10}}{1 - r} \right)$$

Settes  $S(r)$  lik svaret i a) (dette kan man for eksempel gjøre i CAS), fås  $r \approx 0.74$ , så bedriften må redusere utslippene hvert år med omtrent 74% for at bedriftene skal slippe ut det samme over samme periode.

## 2.4 Oppgave 4

a) 3.2 sier oss at det renner inn 3.2 liter vann i tanken per min, 0.14 sier oss at det renner ut 14% av innholdet i tanken per minutt og  $y(0) = 200$  sier oss at det var 200 liter vann i tanken til å starte med.

b) Dette er en lineær første ordens diff.likning

$$y' + 0.14y = 3.2$$

Integrerende faktor er  $e^{\int 0.14 dx} = e^{0.14x}$  Vi får

$$\begin{aligned} e^{0.14x} (y' + 0.14y) &= 3.2e^{0.14x} \\ (ye^{0.14x})' &= 3.2e^{0.14x} \\ \int (ye^{0.14x})' dx &= \int 3.2e^{0.14x} dx \\ ye^{0.14x} &= \frac{160}{7}e^{0.14x} + C \\ y &= \frac{160}{7} + Ce^{-0.14x} \end{aligned}$$

Med initialverdibetingelsen  $y(0) = 200$  fås  $C = 200 - \frac{160}{7} = \frac{1240}{7}$ , så

$$y = \frac{160}{7} + \frac{1240}{7}e^{-0.14x}$$

c)  $y(20) \approx 33.63$  (liter)

d) Utifra opplysningene danner vi oss diff.likningen  $y' = 1.5 - ky$  for en  $k \in \mathbb{R}$ , der  $y(0) = 0$ . Denne diff.likningen kan løses likt som i b) og vi får den generelle løsningen

$$y = \frac{1.5}{k} + Ce^{-kx}$$

Med initialverdibetingelsen  $y(0) = 0$  fås

$$y = \frac{1.5}{k} - \frac{1.5}{k}e^{-kx}$$

Videre vet vi at mengden vann i tanken vil stabilisere seg på 10L etterhvert, med andre ord er

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1.5}{k} - \frac{1.5}{k}e^{-kx} \right] = 10$$

Vi kan herifra konkludere at  $k = \frac{1.5}{10}$  Så funksjonen vår er gitt ved

$$y = 10 - 10e^{-0.15x}$$

Og etter 20 minutter vil da derfor være

$$y(20) \approx 9.50 \text{ (liter i tanken)}$$