metis PRIVATISTSKOLE AKADEMIET

Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2018

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 28. mai 2018 Antall sider: 7

> Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$, og må bruke regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Vi får $f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 4x^{1-1} + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 4}}$ som svar.

b) Vi skal derivere $g(x) = x/e^x$. Det er fullt mulig å bruke brøkregelen for derivasjon, men man kan også skrive om funksjonen til produktet $g(x) = xe^{-x}$ og bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$. Fordelen er at man slipper å huske brøkregelen. Utregningen blir

$$
\begin{aligned}
g'(x) =& (x)' \, e^{-x} + \left(e^{-x}\right)' \, x \\
=& 1e^{-x} + (-1)e^{-x}x \\
=& e^{-x} + -1e^{-x}x \\
=& \underline{\underline{e^{-x}(1-x)}}
\end{aligned}
$$

c) Vi skal derivere $h(x) = \ln\left(x^2 + 4x\right)$, og må bruke kjerneregeln $h'(x) = h'(u) \times u'(x)$, der u er en kjerne. Vi velger $u = x^2 + 4x$, da er $h(u) = \ln(u)$ og $h'(u) = 1/u$, slik at vi får

$$
\begin{aligned}
h'(x) =& h'(u) \times u'(x) \\
=& \left(\frac{1}{u}\right) \times (2x + 4) \\
=& \frac{2x+4}{u} = \underline{\underline{\frac{2x+4}{x^2+4x}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet nedenfor, og vi kan bruke to forskjellige metoder: innsetningsmetoden eller addisjonsmetoden. Vi velger addisjonsmetoden.

$$
\begin{aligned}
5x + y + 2z &= 0 \quad \text{(A)} \\
2x + 3y + z &= 3 \quad \text{(B)} \\
3x + 2y - z &= -3 \quad \text{(C)}
\end{aligned}
$$

For å kvitte oss med variabelen z regner vi ut to nye likninger (D) = (A) − 2 × (B) og (E) = (A) + 2 × (C) som følger.

$$\begin{aligned} x - 5y &= -6 \quad \text{(D)} \\ 11x + 5y &= -6 \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

Ved å legge disse sammen kvitter vi oss med y, får likningen $12x = -12$, og ser at $\underline{\underline{x = -1}}$. For å løse for y setter vi $x = -1$ inn i likning (D) eller (E) og ser at $\underline{\underline{y = 1}}$. Nå vet vi verdiene til x og y, og kan sette dette inn i (A), (B) eller (C) for å finne ut at $\underline{\underline{z = 2}}$. På eksamen bør du sette en prøve å svaret—det går fort og du vet umiddelbart om du har regnet riktig.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

a) Generelt er et polynom $P(x)$ delelig på $(x - a)$ dersom $P(a) = 0$. Her er $P(x)$ delelig på $(x - 1)$ ettersom

$$P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 1 - 3 - 13 + 15 = \underline{\underline{0}}.$$

b) For å løse $P(x) > 0$ må vi først faktorisere $P(x)$. Vi vet at $(x-1)$ er en faktor, så vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 3x^2 - 13x + 15\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 2x - 15 \\ \underline{-x^3 \;\; + x^2} \\ \qquad\; -2x^2 - 13x \\ \qquad\;\; \underline{2x^2 \;\; - 2x} \\ \qquad\qquad\quad -15x + 15 \\ \qquad\qquad\quad\;\; \underline{15x - 15} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0 \end{array}$$

Vi kan bruke ABC-formelen eller en annen metode for å finne ut at $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$. Med andre ord er $P(x) = (x-1)(x-5)(x+3)$, vi setter opp en fortegnslinje og kommer frem til at $\underline{\underline{P(X) > 0 \text{ når } -3 < x < 1 \text{ og når } x > 5}}$.

$$\begin{array}{r|l} & -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \hline (x-1) & \text{- - - - - - - - - - - - - - - -}\; 0 \;\text{———————} \\ (x-5) & \text{- -}\; 0 \;\text{———} \\ (x+3) & \text{- - - -}\; 0 \;\text{——————————————————} \\ f(x) & \text{- - - -}\; 0 \;\text{————————}\; 0 \;\text{- - - - - - - - - -}\; 0 \;\text{———} \end{array}$$

Oppgave 4

a) Vi bruker formelen $a_n = a_1 + d(n-1)$ og informasjonen fra oppgaven.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + d(3) \quad \Rightarrow \quad 14 = 2 + d(3) \quad \Rightarrow \quad d = 4$$

Nå vet vi at differansen $d = 4$ i den artimetiske rekken, vi setter inn og får

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_n = 2 + 4(n-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = 4n-2}}.$$

b) Vi bruker summeformelen for en aritmetisk rekke til å regne ut summen for en generell n, og løser deretter når $n = 100$. For en generell n har vi at

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \left(\frac{2 + 4n - 2}{2}\right) n = (2n)\, n = 2n^2.$$

Når $n = 100$, blir $S_n = S_{100} = 2(100)^2 = \underline{\underline{20000}}$.

Oppgave 5

a) En geometrisk rekke $a_1(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$ konvergerer dersom $-1 < k < 1$. Her er $a_1 = 3$, $a_2 = 3/4$ og $a_3 = 3/16$, og $k = 1/4$ fordi hvert ledd er lik $1/4$ ganget med det foregående leddet. $\underline{\underline{\text{Rekken konvergerer fordi } k = 1/4.}}$ Summen av den uendelige geometriske rekken regner vi ut som

$$S_\infty = a_1 \left(\frac{1}{1-k}\right) = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 3\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{4}}$$

b) Desimaltallet $0.242424\dots$ kan skrives som $\frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \dots$ fordi desimalene 24 gjentar seg, og å dele på 100 flytter desimalene to plasser til høyre. Første ledd blir 0.42, andre ledd blir 0.0042, tredje ledd blir 0.000042 og så videre—da blir summen $0.424242\dots$. For å skrive $0.242424\dots$ som en brøk bruker vi formelen for sum av en uendelig geometrisk rekke. Vi vet at

$$a_1(1 + k + k^2 + \dots) = a_1\left(\frac{1}{1-k}\right),$$

og ved å trekke fra a_1 på begge sider ser vi at

$$a_1(k + k^2 + \dots) = a_1\left(\frac{1}{1-k} - 1\right).$$

Venstresiden likner nå på summen. Vi setter inn $a_1 = 24$ og $k = 1/100$ og får

$$a_1\left(\frac{1}{1-k} - 1\right) = 24\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) = 24\left(\frac{1}{\frac{99}{100}} - 1\right) = 24\left(\frac{100}{99} - \frac{99}{99}\right) = \underline{\underline{\frac{24}{99}}}$$

Oppgave 6

I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x) = \frac{6}{1+e^{-x}} = 6\left(1+e^{-x}\right)^{-1}.$$

a) Grafen til $f(x)$ er alltid stigende dersom den deriverte er positiv for alle verdier av x. Vi deriverer funksjonen ved hjelp av kjerneregelen. Vi velger $u = 1+e^{-x}$ som kjerne, da er $f(u) = 6u^{-1}$, og vi får at

$$\begin{aligned} f'(x) =& f'(u) \times u'(x) \\ =& 6(-1)u^{-2} \times \left((-1)e^{-x}\right) \\ =& \frac{6e^{-x}}{u^2} = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

La os nå undersøke $f'(x)$. Telleren er alltid positiv fordi e^{-x} alltid er positiv, nevneren er alltid positiv fordi $(1+e^{-1})$ alltid er større enn 1, og å ta et tall som er større enn 1 i andre gir alltid i et positivt resultat. Både telleren og nevneren er positive for alle x, og da må $f'(x)$ alltid være positiv, og da stiger $f(x)$ alltid.

b) Vi ser på nevneren $(1+e^{-x})$. Funksjonen e^{-x} er alltid positiv, så da vet vi at

$$1 < 1+e^{-x} < \infty.$$

Når $1+e^{-x}$ blir stor, går $f(x)$ mot 0. Når $1+e^{-x}$ går mot 1, går $f(x)$ mot 6. Da vet vi at $\underline{\underline{0 < f(x) < 6}}$ for alle verdien av x.

c) En funksjon har ventepunkt når den dobbelderiverte skifter fortegn. Vi regner ut den dobbelderiverte fra $f'(x) = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2}$ ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen slik

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[6e^{-x}\right]'\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\right]' \\ &= -6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}(-2)\left(1+e^{-x}\right)^{-3}(-1)e^{-x} \\ &= \frac{-6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} = \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)}{(1+e^{-x})^3} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right) + 12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

Nevnerer er alltid positiv, så vi undersøker når telleren er lik null. Vi ser at

$$-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right) + 12\left(e^{-x}\right)^2 = -6e^{-x} - 6\left(e^{-x}\right)^2 + 12\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-x}\left(-6+6e^{-x}\right).$$

Med andre ord er $f''(x) = 0$ når $(-6+6e^{-x}) = 0$, og dette skjer når $x = 0$, da bytter også $f''(x)$ fortegn og vi har et vendepunkt. For å finne y-verdien regner vi ut at $y = f(3) = 6/(1+e^{-0}) = 3$, da er $\underline{\underline{(0,3) \text{ et vendepunkt}}}$.

d) TODO: SKISSE HER.

Oppgave 7

a) Den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med $p = \text{gunstige}/\text{mulige} = 6/10 = 0.6$ og $n = 10$ fordi å trekke kuler med tilbakelegging er en serie uavhengige deleksperimenter med konstant sannsynlighet p.

b) Gitt $p = 6/10 = 0.6$ og $n = 10$ regner vi slik

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np = 10\left(\frac{6}{10}\right) = \underline{\underline{6}} \\
\mathrm{Var}(X) &= np(1-p) = 10\left(\frac{6}{10}\right)\frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \underline{\underline{6}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 8

a) La X være vekten til et rugbrød. Da er X normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 1.00$ og standardavvik $\sigma = 0.05$. For å regne ut $P(0.9 < X < 1.1)$ må vi først gjøre om slik at vi får to "mindre enn" sannsynligheter (fordi det er dette som finnes i tabellen), og deretter standardisere ved formelen $Z = (X-\mu)/\sigma$. Vi regner slik

$$
\begin{aligned}
P(0.9 < X < 1.1) &= P(X < 1.1) - P(X < 0.90) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.1-1}{0.05}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0.9-1}{0.05}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{0.1}{0.05}\right) - P\left(Z < \frac{-0.1}{0.05}\right) \\
&= P\left(Z < 2\right) - P\left(Z < -2\right) \\
&= 0.9772 - 0.0228 \qquad \text{(fra tabell)} \\
&= \underline{\underline{0.9544 = 95.4\%}}
\end{aligned}
$$

b) La $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ være summen av 100 rugbrød. Når alle X'ene er normalfordelte vil summen være normalfordelt. Selv om X'ene ikke hadde vært normalfordelte, ville summen vært tilnærmet normalfordelt på grunn av sentralgrenseteoremet. For en sum av stokastiske variabler regner vi forventningen μ_S og standardavviket σ_S til summen S slik

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S) &= \mu_S = n\mu = 100(1) = 100 \\
\mathrm{SD}(S) &= \sigma_S = \sqrt{n}\sigma = \sqrt{100}(0.05) = 5
\end{aligned}
$$

Når regner vi ut på samme måte som i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned} P(99.5 < S < 100.5) &= P(X < 100.5) - P(X < 99.5) \\ &= P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < \frac{100.5-100}{0.5}\right) - P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < \frac{99.5-100}{0.5}\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) - P\left(Z < -1\right) \\ &= 0.8413 - 0.1587 \qquad \text{(fra tabell)} \\ &= \underline{\underline{0.6826 = 68.3\%}} \end{aligned}$$

Oppgave 9

La oss først se på noen generelle egenskaper til funksjonen $g(x) = af(x) + b$ før vi setter inn $a = -5$ og $b = 3$ og løser oppgaven. Den deriverte av $g(x)$ er gitt ved

$$g'(x) = [af(x) + b]' = af'(x),$$

og da er $g'(x) = 0$ når $f'(x) = 0$ og motsatt. Med andre ord har bunn- og toppunktene til $g(x)$ og $f(x)$ de samme x-verdiene. Dette gir mening, fordi å plusse på b flytter grafen opp langs y-aksen, mens å gange med a skalerer grafen—ingen av regneoperasjonene flytter grafen langs x-aksen.[1] Vi må derimot passe oss for $a < 0$, dersom a er negativ snur grafen seg om x-aksen slik at toppunkter blir til bunnpunkter og motsatt.

La oss gå bort fra generell teori og løse oppgaven.
I toppunktet $(2, 3)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et bunnpunkt når $x = 2$. Da er $y = -5f(2) + 3 = -5(3) + 3 = -12$. Da vet vi at $\underline{\underline{(2, -12) \text{ er et bunnpunkt}}}$ til $g(x)$.

I bunnpunkt $(3, -4)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et toppunkt når $x = 3$. Da er $y = -5f(3) + 3 = -5(-4) + 3 = 23$. Da har vi at $\underline{\underline{(3, 23) \text{ er et toppunkt}}}$ til $g(x)$.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf

[1] Transformasjonen som flytter en funksjon er $g(x) = f(x - a)$, som flytter f med a mot høyre.

Oppgave 2

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf

Oppgave 3

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf