Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2014

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 28. april 2018 Antall sider: 10

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 3/x^2$. Vi skriver om til $f(x) = 3x^{-2}$ og deriverer slik

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(x^{-2}\right)' \\ &= 3(-2)x^{-3} \\ &= \underline{\underline{-\frac{6}{x^3}}}. \end{aligned}$$

b) Vi skal derivere $g(x) = xe^{-4x}$, og bruker produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$ slik

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)'\,e^{-4x} + x\left(e^{-4x}\right)' \\ &= 1e^{-4x} + x(-4)e^{-4x} \\ &= e^{-4x} - 4xe^{-4x} \\ &= \underline{\underline{e^{-4x}(1-4x)}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi ser på funksjonen

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4, \qquad D_P = \mathbb{R}$$

a) Vi får $P(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = \underline{0}$.

b) Ettersom $P(2) = 0$, vet vi at $(x-2)$ må være en faktor i $P(x)$. Vi utfører polynomdivisjon og får

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 3x^2 \qquad\;\; + 4\big) : \big(x-2\big) = x^2 - x - 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ \qquad\;\; -x^2 \\ \qquad\;\; \underline{x^2 - 2x} \\ \qquad\qquad\;\; -2x + 4 \\ \qquad\qquad\;\; \underline{2x - 4} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Nå vet vi at $P(x) = (x-2)(x^2-x-2)$, og ved hjelp av ABC formelen finner vi ut at $(x^2-x-2) = (x-2)(x+1)$, altså kan vi faktorisere $P(x)$ som

$$\underline{\underline{P(x) = (x-2)^2(x+1)}}.$$

En enkel metode for å sjekke om dette svaret er riktig er å gange sammen disse faktorene og se at du får $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tilbake.

Oppgave 3

a) Dette er en aritmetisk rekke med $a_1 = 3$, differanse $d = 3$ og siste ledd $a_n = 300$. For å finne ut antall ledd n kan vi bruke formelen $a_n = a_1 + d(n-1)$, vi får da

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1) \qquad (1)\\ 300 &= 3 + 3(n-1) \\ 99 &= n-1 \\ n &= 100. \end{aligned}$$

Vi bruker deretter summeformelen for en aritmetisk rekke, og får

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \left(\frac{3+300}{2}\right) 100 = 303(50) = \frac{30300}{2} = \underline{\underline{15150}}.$$

b) Vi bruker $a_1 = 4$ og formelen fra oppgaven til å finne ut at $a_3 = a_1 + 8 = 4 + 8 = 12$. Vi setter så dette inn i formel (1) fra forrige oppgave, og får at

$$a_3 = a_1 + d(3-1) \quad \Rightarrow \quad 12 = 4 + d2 \quad \Rightarrow \quad d = 4,$$

og da må vi ha at $a_2 = a_1 + d(2-1) = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$.

Oppgave 4

Vi bruker følgende variabler: v er antall voksne, b er antall barn og p er antall pensjonister som møtte på konserten. Hver setning gir oss én likning:

- "Det ble solgt 80 billetter."
  $\Rightarrow \quad v + b + p = 80 \quad \text{(A)}$

- "Billettinntektene var 5000 kroner."
  $\Rightarrow \quad 100v + 50b + 60p = 5000 \quad \text{(B)}$

- "Like mange til barn som til voksne og pensjonister til sammen."
  $\Rightarrow \quad -v + b - p = 0 \quad \text{(C)}$

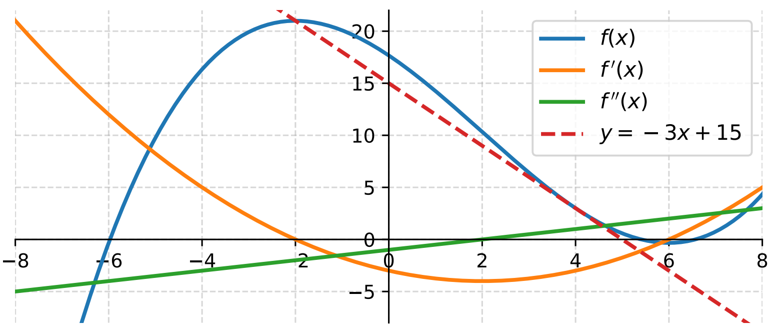
Både innsettingsmetoden og addisjonsmetoden kan brukes, vi bruker her addisjonsmetoden. Først legger vi sammen likning (A) og likning (C), og får at $2b = 80$, altså er $\underline{\underline{b = 40}}$. Deretter setter vi $b = 40$ inn i likning (A) og (B), og får

$$\begin{aligned} v + p &= 40 \quad \text{(D)} \\ 100v + 60p &= 3000 \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

Vi regner ut $100 \times$ (D) – (E), og finner ut at $40p = 1000$. Da er $\underline{\underline{p = 25}}$, og setter vi inn dette i likning (D) finner vi også ut at $\underline{\underline{v = 15}}$.

Oppgave 5

a) Generelt så har $f'(x)$ topp- og bunnpunkt når $f'(x) = 0$. Her er $f'(x) = 0$ når $x = -2$ og når $x = 6$. Vi ser at $\underline{\underline{x = -2 \text{ er et toppunkt}}}$ og $\underline{\underline{x = 6 \text{ er et bunnpunkt}}}$. Grafen vokser når $f'(x) > 0$, og minker når $f'(x) < 0$. Vi ser også at $\underline{\underline{\text{funksjonen vokser når } x < -2 \text{ og når } x > 6}}$, og $\underline{\underline{\text{minker når } -2 < x < 6}}$.



Figur 1: Funksjonene fra oppgave 5, del 1.

b) Likningen for tangenten til $f(x)$ i et punkt x_0 er gitt ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vi får oppgitt punktet $(x_0, f(x_0)) = (4, 3)$, og fra grafen til $f'(x)$ ser vi at $f'(x_0) = f'(4) = -3$. Vi får altså følgende tangentlinje:

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ y &= f(4) + f'(4)(x - 4) \\ y &= 3 + -3(x - 4) \\ &\underline{\underline{y = -3x + 15}} \end{aligned}$$

c) Funksjonen $f''(x)$ er positiv når $f'(x)$ stiger, og negativ når $f'(x)$ synker. Med andre ord er $f''(x) < 0$ når $x < 2$, og $f''(x) > 0$ når $x > 2$. Vendepunktet oppstår når $f''(x)$ endrer fortegn, altså når $\underline{\underline{x = 2}}$.

d) Basert på den deriverte, samt kjennskap til bunnpunkt og toppunkt, burde du klare å lage en skisse som ligner på $f'(x)$ vist i Figur 1.

Oppgave 6

a) Her må vi bruke forventningsverdier og utfallsrom. Både X_2 og X_4 har $n > 10$, så disse må samsvare med figurene (1) og (3), ettersom disse har positive sannsynligheter når $X > 10$. Ettersom $\text{E}(X_2) = np = 100(0.06) = 6$ og $\text{E}(X_4) = 5$, så velger vi $\underline{\underline{X_2 = (3)}}$ og $\underline{\underline{X_4 = (1)}}$, fordi dette samsvarer best med høyeste stolpe på figurene. Basert på forventningsverdiene til X_1 og X_3 så velger vi $\underline{\underline{X_1 = (2)}}$ og $\underline{\underline{X_3 = (4)}}$.

b) Det må være $\underline{\underline{X_2}}$ (figur (3)), fordi alle andre arealer er for små. Ettersom det er satt tall på aksene er det mulig å gjøre en grov utregning av arealet ved å lese av søylene, og da ser man at de andre er for små.

c) Variabelen med størst standardavvik er den som har størst varians, ettersom $\text{SD}(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$, og $a > b$ impliserer at $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Når X er binomisk fordelt er $\text{Var}(X) = np(1-p)$, vi regner ut alle variansene (det er Del 1, så vi trenger ikke å regne nøye—vi har ikke kalkulator tilgjengelig):

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_1) &= np(1-p) = 10(0.6)0.4 = 2.4 \\
\text{Var}(X_2) &= np(1-p) = 100(0.06)0.94 \approx 6 \\
\text{Var}(X_3) &= np(1-p) = 10(0.4)0.6 = 2.4 \\
\text{Var}(X_4) &= np(1-p) = 50(0.1)0.9 = 4.5
\end{aligned}$$

Vi ser at $\underline{\underline{X_2}}$ har størst varians, og derfor også størst standardavvik.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Omkretsen til en sirkel er $O = 2\pi r$, så halve omkretsen bli πr. Vi ser at

$$\begin{aligned}
O_1 &= \frac{(2r)}{2}\pi = r\pi \\
O_2 &= \frac{(r)}{2}\pi = r\pi/2 \\
O_3 &= \frac{(r/2)}{2}\pi = r\pi/2^2 \\
\vdots &= \vdots \\
O_n &= \frac{(r/2^{n-2})}{2}\pi = r\pi/2^{n-1},
\end{aligned}$$

og dette blir en uendelig geometrisk rekke fordi

$$S = O_1 + O_2 + \cdots = r\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) \tag{2}$$

b) Vi vet at $1+k+k^2+k^3+\cdots = 1/(1-k)$, dette er summeformelen for en uendelig geometrisk rekke, og den konvergerer (går ikke mot evig) når $-1 < k < 1$. I denne oppgaven er $k = 1/2$, vi setter formelen inn i likning (2) og får

$$S = r\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) = r\pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = r\pi\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

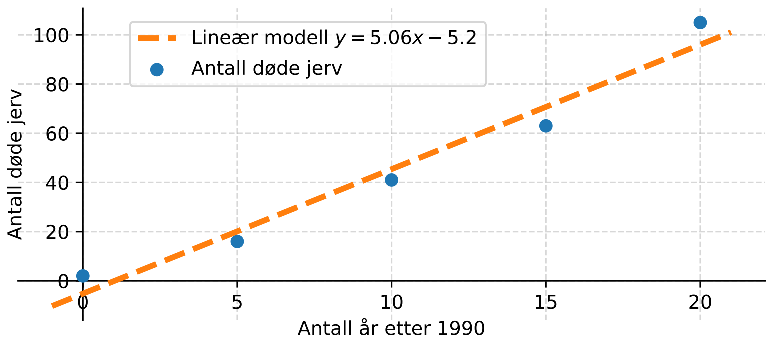
I Geogebra kan vi skrive `S := r * (pi) * Sum(1/2^i, i, 0, ∞)`.

Oppgave 2

Årstall	1990	1995	2000	2005	2010
Antall døde jerv	2	16	41	63	105

a) Basert på plottet i Figur 2 velger vi en lineær modell.[1]

b) Evaluer funksjonen $y(x) = 5.06x - 5.2$ i punktet $x = 24$. Vi får $y(24) = 5.06(24) - 5.2 = 116.24$. Ifølge modellen kan vi forvente $\underline{\underline{116}}$ døde jerv registrert i 2014.



Figur 2:

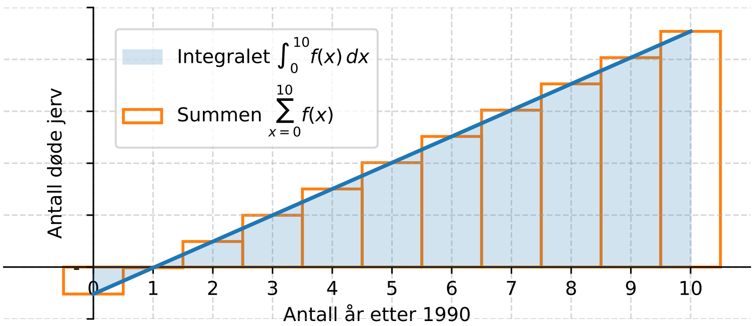
c) Vi kan løse på 2 forskjellige måter.

1) Vi kan finne summen ved å regne den ut som en sum. Da skriver vi først `f(x) := 5.06*x - 5.2` i CAS, og regner deretter summen med

[1]Et annet løsningsforslag bruker et andregradspolynom $y = ax^2 + bx + c$ istedet for en lineær modell $y = ax + b$. I pensum er fokuset på lineære, eksponentielle og logistiske modeller. Jeg er ikke villig til å anta et andregradspolynom basert på bare 5 datapunkter—det enkleste er det beste, dette er *Ockhams barberkniv*. Et 4. gradspolynom vil passe perfekt til dataene, men er ikke riktig.

Sum(f(x), x, 0, 24), som gir $\underline{\underline{1388}}$. Det er uheldig at $f(0)$ er negativ, ettersom det ikke gir mening å ha negativt antall døde jerv.

2) Vi kan finne summen ved å approksimere den som et integral. For å korrigere for at vi går fra en sum til et integral, bør vi legge til 1/2 på hver ende, se Figur 3 for en grafisk forklaring. Vi skriver Integral(f(x), x, -0.5, 24.5) inn i Geogebra, som gir $\underline{\underline{1388}}$ som svar.



Figur 3: En illustrasjon av at vi må utvide endepunktene når vi approksimerer en sum ved hjelp av et integral. For et mindre antall stolper viser vi $x = 0$ til $x = 10$.

Oppgave 3

a) Vi legger dataene inn i regnearket i Geogebra, og velger en lineær regresjonsmodell. Vi får $p(x) = -0.224x+2219.17$. Inntekten er prisen ganget med antall varger solgt, så vi får

$$\underline{\underline{I(x) = p(x) \times x = -0.224x^2 + 2219.17x}}.$$

b) Vi definerer $I(x)$ og $K(x)$ i CAS ved å skrive inn `I(x) := -0.22421189 * x^2 + 2219.1684 * x` (mange desimaler[2]) og `K(x) := 0.03 * x^2 + 15 * x + 605000`. Bruker deretter CAS til å regne ut:

$$I'(3000) = 873.9$$
$$K'(3000) = 195$$

Ettersom overskuddet $O(x) = I(x)-K(x)$, vil overskuddet øke dersom $I'(x) > K'(x)$ og vi produserer da mer. $\underline{\underline{\text{Vi bør øke produksjonen}}}$.

c) Skriv inn `Løs[I'(x) > K'(x), x]` i CAS, svaret blir $\underline{\underline{x < 4335.3}}$. Vi bør produsere mer dersom vi produserer mindre enn 4335 varer.

[2]Her er det viktig å ta med rikelig med desimaler. Tar du med for få desimaler vil svarene i de neste oppgavene ikke bli like nøyaktige. Generelt bør vi ta med mange desimaler i mellomregninger.

d) Overskuddet $O(x)$ er størst når $O'(x) = 0$. Da er $I'(x) = K'(x)$, så vi skriver `Løs[I'(x) = K'(x), x]` og får $x = 4335.3$ som svar. Bedriften må produsere og selge $\underline{\underline{\text{4335 enheter}}}$ for at overskuddet skal være størst[3].

Oppgave 4

a) Vi bruker formelen for volum, og løser for h slik:

$$\begin{aligned}\text{Volum} &= (\text{Høyde}) \times (\text{Bredde}) \times (\text{Lengde})\\ 10 &= h \times x \times 2x\\ h &= \frac{5}{x^2}\end{aligned}$$

b) Den totale kostnaden er summen av kostnad per kvadratmeter, ganget med areal i kvadratmeter, for alle sidene. Her er en detaljert utledning.

$$\begin{aligned}\text{Total kostnad} &= \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Sider}} + \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Bunn}}\\ \text{Total kostnad} &= \underbrace{60 \times (2(2x \times h + x \times h))}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}\\ K(x) &= \underbrace{60 \times \left(2\left(2x \times \frac{5}{x^2} + x \times \frac{5}{x^2}\right)\right)}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}\\ K(x) &= 120 \times \left(\frac{10}{x} + \frac{5}{x}\right) + 200x^2\\ K(x) &= \frac{1800}{x} + 200x^2\end{aligned}$$

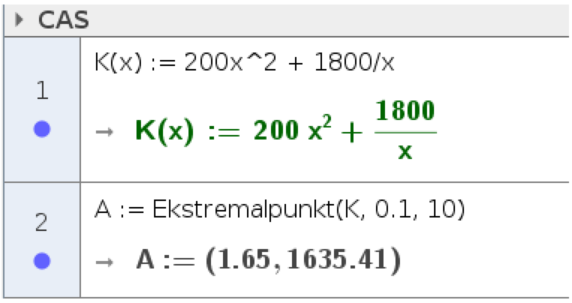
c) Definer funksjon med `K(x) := 200 * x^2 + 1800/x` i CAS i Geogebra. Bruk deretter `Ekstremalpunkt(K, 0.1, 10)` til å finne den minimale prisen. Vi finner at $\underline{\underline{x = \text{bredde} = 1.64 \text{ m}}}$, $\underline{\underline{2x = \text{lengde} = 3.3 \text{ m}}}$ og $\underline{\underline{h = 5/x^2 = \text{høyde} = 1.83 \text{ m}}}$. Den minste kostnaden ved å produsere containeren er $\underline{\underline{\text{1635 kr}}}$. Se Figur 4 for et skjembilde av CAS-utregningen.

Oppgave 5

a) La X være antallet som blir trukket ut av $n = 3$ personer. Da er X binomisk fordelt med $n = 3$ og $p = 0.1$, og $P(X = 3)$ er gitt ved

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-p} = \binom{3}{3} 0.1^3 (1 - 0.1)^{3-3} = 0.1^3 = \underline{\underline{0.001 = 0.1\%}}.$$

[3]Det er ingen garanti for at å runde av 4335.3 til 4335 gir beste overskudd. Du kan sammenligne $O(4334)$, $O(4335)$ og $O(4336)$ og velge den største for å være sikker på at du har rett svar.



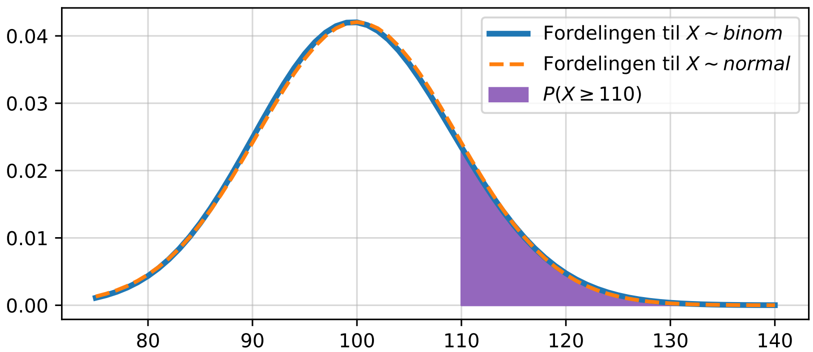
Figur 4: Skjembilde av CAS for oppgave 4, del 2.

Det er kanskje enklere å tenke at tre personer må trekkes på rad, og at sannsynligheten for at én blir trukket er $p = 0.1$, så da er sannsynligheten for at tre blir trukket på rad lik $p^3 = 0.1^3 = 0.001 = 0.1\%$.

b) Den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0.1$. Vi bruker formlene for forventning og standardavvik for binomisk fordeling.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= np = 1000(0.1) = \underline{\underline{100}} \\ \mathrm{SD}(X) &= \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \underline{\underline{\sqrt{90} \approx 9.49}} \end{aligned}$$

Fordelingen til X er vist i Figur 5.



Figur 5: Fordelingen til $X \sim \mathrm{Binom}(n = 1000, p = 0.1)$, normalapproksimasjonen $X \sim \mathrm{Normal}\left(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)}\right)$ og arealet under grafen når $X \geq 110$.

c) Vi setter opp hypotesene

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad p = 0.1 \\ H_1 &: \quad p > 0.1 \end{aligned}$$

og bruker signifikansnivå $5\,\%$. Vi forkaster nullhypotesen dersom sannsynligheten for å få x_{obs} er mindre enn $5\,\%$, gitt at $p = 0.1$. I vårt tilfelle er $x_{\text{obs}} = 110$. Vi må finne sannsynligheten for at $X \geq x_{\text{obs}}$, gitt at $p = 0.1$. Med andre ord må vi finne $P(X \geq 110 \mid p = 0.1)$. Vi kan gjøre det på to måter.

1) Det enkleste er å se på X som binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0.1$, da gir sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra oss at $P(X \geq 110) = 0.1583 = 15.5\,\%$. Vi kan med andre ord ikke forkaste H_0.

2) Her er også både np og $n(p-1)$ større enn 5, så vi kan alternativt bruke normalapproksimasjon med $\mu = np = 100$ og $\sigma = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \sqrt{90}$. Normalapproksimasjonen er plottet i Figur 5, og som du ser stemmer den veldig godt overens med den binomiske fordelingen. På eksamen ville jeg svart med binomisk fordeling, men jeg viser normalapproksimasjonen her.

   Vi regner ut $P(X \geq 110) \cong P(X_{\text{norm}} \geq 109.5) = 0.1583 = 15.5\,\%$ i Geogebra. Legg merke til "halvkorreksjon", som brukes når vi går fra en diskret fordeling med søyler til en glatt, kontinuerlig fordeling. De første 4 desimalene er helt like, og konklusjonen er den samme—vi forkaster H_0.

Oppgave 6

a) Vi beregner nåverdi for begge alternativene og setter de lik hverandre.

Måned	Innbetaling	Nåverdi av innbetalingen
1	x	$\frac{x}{1.016}$
2	x	$\frac{x}{1.016^2}$
3	x	$\frac{x}{1.016^3}$
$\vdots$	$\vdots$	
36	x	$\frac{x}{1.016^{36}}$

Vi setter nåverdiene av innbetalingene lik dagens betaling, og får likningen

$$7995 + 30 = \frac{x}{1.016} + \frac{x}{1.016^2} + \cdots + \frac{x}{1.016^{36}}.$$

For å løse likningen på papir kan vi gange begge sider med 1.016^{36} og bruke summeformelen for en geometrisk rekke. På eksamen er det nok enklere å bruke CAS, skriv `NLøs({8025 = Sum(x/1.016^i, i, 1, 36)}, {x})`, da får du at $x = 294.98$ kr.

b) Dette er samme problem som i forrige oppgave, men nå er terminbeløpet kjent og renten er ukjent. Vi må løse

$$7995 = \frac{289}{r} + \frac{289}{r^2} + \cdots + \frac{289}{r^{36}},$$

der r er den månedlige renten. Vi bruker CAS i Geogebra også her, og taster inn `NLøs({7995 = Sum(289/r^i, i, 1, 36)}, {r})` og finner at $r = 1.015$, slik at den månedlige renten er 1.5 %.

c) Dette er også en geometrisk rekke. Vi setter opp en tabell, der r er den ukjente, månedlige renten. Hver måned får man rente på den eksisterende verdien, og nye 650 kr blir satt inn. Dersom V_n er verdien i år n, er $V_n = V_{n-1}r + 650$.

Innbetaling	Verdi
1	650
2	$650r + 650$
3	$(650r + 650)r + 650 = 650r^2 + 650r + 650$
$\vdots$	$\vdots$
12	$650r^{11} + 650r^{10} + \cdots + 650r^2 + 650r + 650$

Like etter den 12. månedlige innbetalingen har hun 8107 kr, da får vi likningen

$$8107 = 650r^{11} + 650r^{10} + \cdots + 650r^2 + 650r + 650.$$

> Det er også mulig å løse denne med summeformelen for en geometrisk rekke, men det er enklere å skrive `NLøs({8107 = Sum(650*r^i, i, 0, 11)}, {r})` inn i CAS. Da finner vi ut at den månedlige renten er 0.7 %.

Oppgave 7

Halveringstiden er 6 timer, men pasienten får én tablett hver 12. time. Da rekker kroppen å halvere to ganger—med andre ord reduseres mengden med stoffet med 1/4 hver 12. time. Vi setter opp en tabell og leter etter et mønster.

Time	Milligram
0	60
12	$60/4 + 60$
24	$60/4^2 + 60/4 + 60$
36	$60/4^3 + 60/4^2 + 60/4 + 60$
$\vdots$	$\vdots$

Vi bruker formelen $1 + k + k^2 + \cdots = 1/(1-k)$ til å regne ut summen S av den evige geometriske rekken slik:

$$\begin{aligned} S &= 60 + \frac{60}{4} + \frac{60}{4^2} + \frac{60}{4^3} + \ldots \\ &= 60\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) \\ &= 60\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 60\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = 60\left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{80}} \end{aligned}$$

Du kan også skrive `Sum(60/4^i, i, 0, ∞)` inn i CAS. Du får samme svar. På eksamen er det lurt å gjøre så mye som mulig i Geogebra, men jeg prøver å vise at det er mulig å løse uten Geogebra også.