

Løsningsforslag – Eksamen S1, våren 2018

Laget av Tommy O.

Sist oppdatert: 6. juli 2018

Antall sider: 8

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi flytter over på én side av likningen, slik at vi får en andregradslikning som vi kan faktorisere med ABC-formelen (eller en annen metode).

$$\begin{aligned}2x^2 - 5x + 1 &= x - 3 \\2x^2 - 6x + 4 &= 0 && \text{(flytter over)} \\2(x^2 - 3x + 2) &= 0 && \text{(trekker ut 2)} \\2(x - 1)(x - 2) &= 0 && \text{(faktorerer)} \\ \underline{\underline{x = 1 \text{ eller } x = 2}}\end{aligned}$$

- b) Her flytter vi over slik at vi får logaritmen på alene, og deretter tar vi 10 opphøyd i begge sider av likningen for å bli kvitt logaritmen, fordi $10^{\lg a} = a$.

$$\begin{aligned}2 \lg(x + 7) &= 4 \\ \lg(x + 7) &= 2 && \text{(deler på 2)} \\ 10^{\lg(x+7)} &= 10^2 && \text{(opphøyer i 10)} \\ x + 7 &= 100 && \text{(bruker at } 10^{\lg a} = a \text{)} \\ \underline{\underline{x = 93}}\end{aligned}$$

- c) Vi samler sammen så mye som mulig med samme grunntall, også bruker vi at dersom $2^x = 2^y$, så må $x = y$.

$$\begin{aligned}3 \cdot 2^{3x+2} &= 12 \cdot 2^6 \\ 3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^6 && \text{(faktorerer 12)} \\ 3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2^8 \\ 2^{3x+2} &= 2^8 \\ 3x + 2 &= 8 && \text{(bruker } 2^x = 2^y \Leftrightarrow x = y \text{)} \\ \underline{\underline{x = 3}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet

$$(1) \quad x^2 + 3y = 7$$

$$(2) \quad 3x - y = 1.$$

Vi løser først likning (2) for y og får $y = 3x - 1$. Dette setter vi inn i likning (1):

$$x^2 + 3(3x - 1) = 7$$

$$x^2 + 9x - 3 = 7$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x + 10)(x - 1) = 0$$

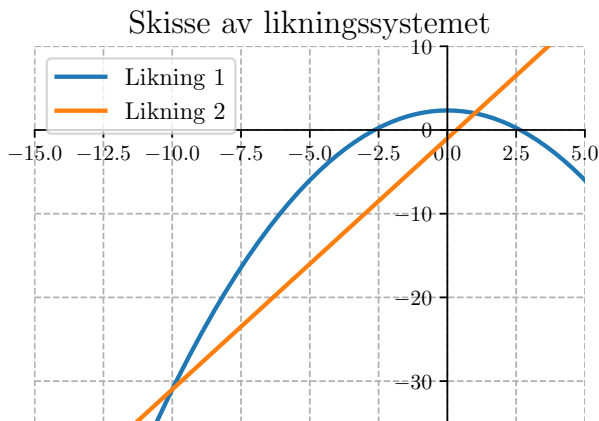
$$x = -10 \text{ eller } x = 1.$$

Vi bruker x -verdiene til å finne y -verdier, ved å bruke likningen $y = 3x - 1$. Vi får

$$x = -10 \Rightarrow y = 3(-10) - 1 = -31$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3(1) - 1 = 2$$

Løsningene er altså $(x, y) = (-10, -31)$ og $(x, y) = (1, 2)$. Som en kommentar nevner jeg at dersom man plotter likningene som kurver i et koordinatsystem, vil løsningene være skjæringspunktene mellom kurvene. Se figuren nedenfor.



Oppgave 3

a) Her ganger vi bare ut og kansellerer

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 - 2x(2x - 6) &= \\ 4x^2 - 12x + 9 - [4x^2 - 12x] &= \\ 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x &= \underline{\underline{9}} \end{aligned}$$

- b) Her må vi huske logaritmesetningene, altså at $\lg(a^x) = x \lg(a)$ og at $\lg(ab) = \lg(a) + \lg(b)$.

$$\begin{aligned} & \lg(2a) + \lg(4a) + \lg(8a) - \lg(16a) = \\ & \lg(2) + \lg(a) + \lg(4) + \lg(a) + \lg(8) + \lg(a) - [\lg(16) + \lg(a)] = \\ & \lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - [4\lg(2) + \lg(a)] = \\ & \lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - 4\lg(2) - \lg(a) = \\ & \quad \underline{\underline{3\lg(a) + 2\lg(2)}} \end{aligned}$$

- c) Vi må finne fellesnevner for å legge sammen brøkene. Fellesnevneren er ab , så vi ganger den første brøken med b og den andre med a både i teller og nevner.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b+a-(a-b)}{ab} = \frac{2b}{ab} = \underline{\underline{\frac{2}{a}}}$$

Oppgave 4

Vi bruker ABC-formelen eller en annen metode for å faktorisere andregradspolynom. Et andregradspolynom har maksimalt to nullpunkter, og når leddet x^2 er positivt vokser funksjonen når x blir veldig stor eller veldig liten—derfor vet vi at funksjonen er størst i halen.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2}}$$

Oppgave 5

- a) I Pascals trekant er hvert tall summen av de to tallene ovenfor. De første åtte radene ser slik ut.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\ 1 & 7 & 21 & \mathbf{35} & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$$

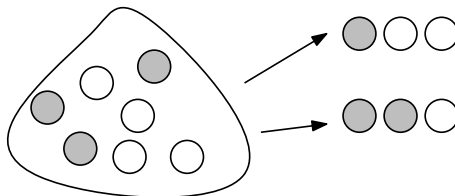
De tallene vi trenger i neste deloppgave er markert med fet skrift.

- b) Det er 3 røde kuler og 4 blå. Sannsynligheten for å trekke 3 blå er antall mulige måter å trekke 3 blå og 0 røde, delt på antall mulige måter å trekke 3 kuler

totalt.

$$P(3 \text{ blå}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{35} = \underline{\underline{\frac{4}{35}}}$$

c) **Alternativ 1**



Dersom vi skal trekke 3 kuler, og vi må minst ha én av hver farge, er det to måter å gjøre dette på. Enten ved å trekke 1 rød og 2 blå, eller ved å trekke 2 røde og 1 blå. Vi kan legge sammen sannsynlighetene slik:

$$P(1 \text{ rød, } 2 \text{ blå}) + P(2 \text{ røde, } 1 \text{ blå}) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

Alternativ 2

La R være antall røde, og B være antall blå. En annen måte å tenke på for å finne sannsynligheten for at det er minst én blå ($B \geq 1$) og minst én rød ($R \geq 1$) er å dele opp hendelsesrommet som vist i figuren nedenfor, og regne ut alle sannsynlighetene. Summen av disse sannsynlighetene må være 1.

	$R = 0$	$R \geq 1$
$B = 0$	0	1/35
$B \geq 1$	4/35	?

Vi ser at

$$P(R = 0 \cap B = 0) = 0 \quad (\text{umulig, fordi vi må trekke 3})$$

$$P(R \geq 1 \cap B = 0) = \frac{1}{35} \quad (\text{kun én måte å velge ingen blå på})$$

$$P(R = 0 \cap B \geq 1) = \frac{4}{35} \quad (\text{dette er svaret på forrige deloppgave})$$

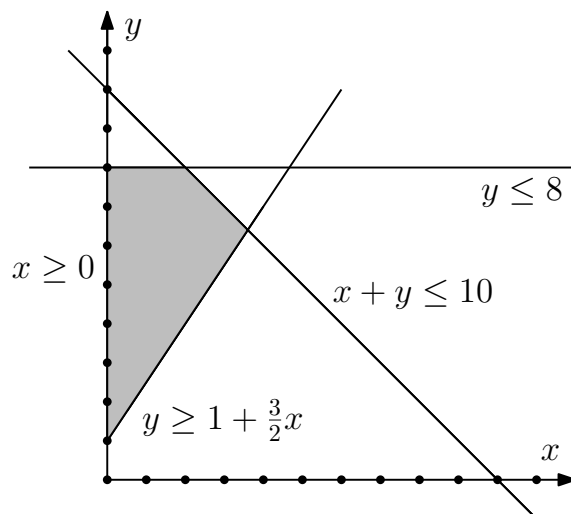
og ettersom summen av alle sannsynlighetene må være 1, kan vi regne ut at

$$P(R \geq 1 \cap B \geq 1) = 1 - \left(0 + \frac{1}{35} + \frac{4}{35}\right) = \frac{30}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

Oppgave 6

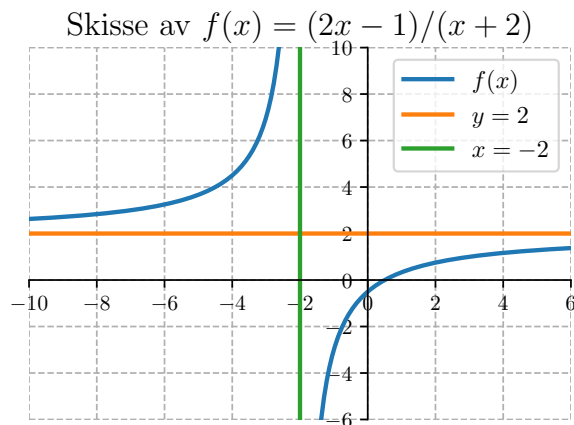
Ulikhetene $x \geq 0$ og $y \leq 8$ burde være greie. Ulikheten $x + y \leq 10$ sier at summen må være mindre enn eller lik 10, og burde også være rimelig enkel. Den siste ulikheten

kan vi skrive om til $y \geq 1 + \frac{3}{2}x$, og da er det nok enklere å tegne linja. I figuren nedenfor er det grå området avgrenset av alle ulikhetene.



Oppgave 7

- a) Vi ser av funksjonsuttrykket at $x = -2$ er en vertikal asymptote, og at $y = 2$ er en horisontal asymptote. Deretter kan vi gjøre noen stikkprøver av f.eks. $f(0)$ og $f(-4)$, og dette gir oss nok informasjon til å skissere grafen.



- b) Vi setter $f(x)$ lik $x - 2$ og løser slik

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x + 2} = x - 2 &\Rightarrow 2x - 1 = (x - 2)(x + 2) \Rightarrow 2x - 1 = x^2 - 2^2 \\ x^2 - 2x - 3 &\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = -1 \text{ eller } x = 3}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

- a) Her må vi bruke derivasjonsregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$, vi får at

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^{3-2} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 = \underline{\underline{6x^2 + 6x - 12.}}$$

- b) Dersom vi har toppunkt eller bunnpunkt, må $g'(x) = 0$ i disse punktene. Vi setter $g'(x) = 0$, og får

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1) = 0.$$

Fra dette ser vi at $f'(x) = 0$ når $x = -3$ og når $x = 2$. Vi må finne ut om dette er toppunkt eller bunnpunkt. Dette kan vi gjøre med en fortegnslinje.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
6	—————										
$(x + 2)$	-	-	-	-	-	0	—	—	—	—	—
$(x - 1)$	-	-	-	-	-	-	-	0	—	—	—
$g'(x)$	—	—	—	0	-	-	-	-	0	—	—

Ettersom funksjonen stiger før $x = -2$ og synker etterpå, må $x = -2$ være assosiert med ett toppunkt. Tilsvarende logikk sier oss at $x = 1$ er et bunnpunkt.

$$\begin{aligned} x = -2 &\Rightarrow y = g(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20 \\ x = 1 &\Rightarrow y = g(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7 \end{aligned}$$

Altså er $(-2, 20)$ et toppunkt og $(1, -7)$ er et bunnpunkt.

- c) Den gjennomsnittlige vekstfarten er

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = \underline{\underline{2.}}$$

- d) Den momentane vekstfarten er verdien til den deriverte. Den den momentane vekstfaren er 24, er $g'(x) = 24$. Vi løser denne likningen slik

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6x^2 + 6x - 12 = 24 \\ 6(x^2 + x - 6) &= 0 \\ 6(x + 3)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

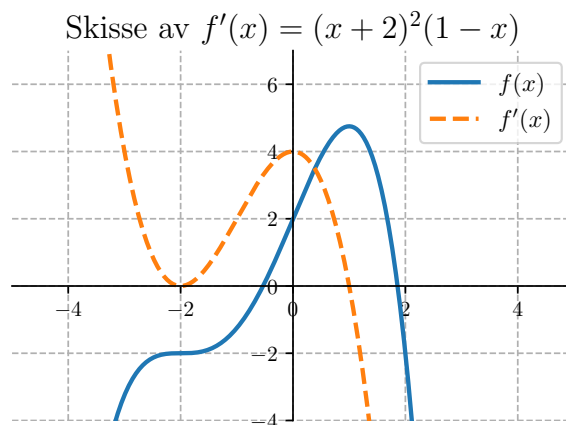
Vi ser at x -verdiene er -3 og 2 . Vi renger ut y -verdiene

$$\begin{aligned} x = 2 &\Rightarrow y = g(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) = 16 + 12 - 24 = 4 \\ x = -3 &\Rightarrow y = g(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) = -54 + 27 + 36 = 9 \end{aligned}$$

Den momentane vekstfaren er 24 i punktene $(2, 4)$ og $(-3, 9)$.

Oppgave 9

- a) Grafen stiger når $f'(x) > 0$, og synker når $f'(x) < 0$. Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ stiger når $x < -2$ og $-2 < x < 1$, og at $f(x)$ synker når $x > 1$.
- b) Her må vi skissere en funksjon som stiger, stopper å stige, stiger videre og deretter synker. Basert på fortegnslinjen kan vi anta at den deriverte er $f'(x) = (x+2)^2(1-x)$. Både en skisse av en funksjon $f(x)$ og dens deriverte er skissert.



Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

asdf

Oppgave 2

- a) sdf
- b) sdf
- c) sdf

Oppgave 3

- a) sdf
- b) sdf
- c) sdf

d) sdf

Oppgave 4

a) sdf

b) sdf

c) sdf

d) sdf