

Eksamen S2, våren 2017

Laget av Tommy O. – Sist oppdatert: 27. januar 2018

Kommentar: Dette er en innskriving av S2 eksamen, basert på scan av dokumentet lastet opp av matematikk.net-bruker Viks. Det er en viktig læringsprosess å kunne regne gjennom tidligere eksamener. Dersom du selv er elev/privatist, delta på diskusjon på matematikk.net om eksamener og last gjerne opp nyttig materiale på forumet.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = x^2 - 2/x$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $h(x) = x^2 e^x$

Oppgave 2 (2 poeng)

Løs likningssystemet

$$\begin{aligned}x + y - z &= 0 \\2x + y - z &= 2 \\4x + y - 2z &= 1\end{aligned}$$

Oppgave 3 (6 poeng)

I en aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ er $a_1 = 3$ og $a_6 = 18$.

a) Bestem differansen d , og bestem en formel for a_n uttrykt ved n .

b) Vis at summen av de n første leddene kan skrives som

$$S_n = \frac{3}{2}n(n+1)$$

c) Hvor mange ledd må vi ha med for at summen skal bli 84?

Oppgave 4 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

- a) Vi ser at $f(1) = 0$. Bruk blant annet polynomdivisjon til å vise at

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

- b) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$

- c) Forkort brøken mest mulig

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x^2 - 2}$$

- d) Bruk blant annet det du viste i oppgave a), til å løse likningen

$$e^{3x} + 4e^{2x} + e^x - 6 = 0$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Totalkostnaden i kroner ved produksjon av en vare er gitt ved

$$K(x) = 0.1x^2 + 70x + 4000 \quad , \quad 0 < x < 2000$$

Her er x antall produserte enheter per uke.

Inntekten i kroner ved denne produksjonen er gitt ved

$$I(x) = -0.05x^2 + 280x \quad , \quad 0 < x < 2000$$

- a) Bestem $K'(500)$ og $I'(500)$. Bruk svarene til å vurdere om bedriften bør produsere flere enn 500 enheter.
- b) Bestem den vinningsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir størst overskudd.
- c) Bestem den kostnadsoptimale produksjonsmengden, det vil si den produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet.

Oppgave 6 (10 poeng)

La X være antall unger som overlever i en tilfeldig valgt fuglekasse med kjøttmeis. Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt i tabellen nedenfor.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

- a) Bestem $P(X \geq 2)$.
- b) Bestem forventningsverdien $E(X)$, og vis at standardavviket er $SD(X) = \sqrt{1.6}$. Hva forteller $E(X)$ oss?

Et år har biologilærer Peder overvåket 100 fuglekasser med kjøttmeis. Kassene er nummerert fra 1 til 100. La X_i være antall kjøttmeisunger som overlever i kasse nummer i . Vi antar at X_i -ene er uavhengige. Det totale antallet kjøttmeisunger som overlever i de 100 kassene, er gitt ved den stokastiske variabelen

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$$

- c) Begrunn at S er tilnærmet normalfordelt.
- d) Bestem $E(S)$ og $\text{Var}(S)$.

I resten av oppgaven går vi ut i fra at $E(S) = 200$ og $SD(S) = 13$. Du vil få bruk for standard normalfordelingstabellen i vedlegg 1.

- e) Bestem sannsynligheten for at 226 eller flere kjøttmeisunger overlever i kassene til Peder dette året.
- f) Bestem $P(187 \leq S \leq 213)$.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

En bedrift produserer en vare. Bedriften selger alt den produserer. Overskuddet O ved salg av x enheter per uke er gitt ved

$$O(x) = ax^2 + bx + c$$

- Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.
 - Overskuddet er størst når bedriften selger 474 enheter.
 - Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.
- a) Vis at disse opplysningene gir likningssystemet

$$40000a + 200b + c = 0$$

$$950a + b = 0$$

$$1200a + b = -5$$

- b) Bruk CAS til å bestemme a , b og c .
- c) Hva er det største overskuddet bedriften kan få per uke?

Oppgave 2 (6 poeng)

Ingrid inngår en pensjonsavtale der hun skal spare 20 000 kroner i året. Den første innbetalingen skjer 1. januar 2018. Den siste innbetalingen skjer 1. januar 2052. Hun får en fast rente på 3.00 % per år.

- a) Bruk CAS til å vise at Ingrid vil ha 1 209 242 kroner på konto rett etter siste innbetaling.

Ingrid planlegger å ta ut et fast beløp hvert år. Det første uttaket vil hun gjøre 1. januar 2053 og det siste uttaket 1. januar 2067. Da skal kontoen være tom. Hun regner med en rente på 3.00 % per år.

- b) Hvor mye kan hun ta ut per år?

Ingrid synes det er tilstrekkelig å ta ut 80 000 kroner i året fra og med 1. januar 2053.

- c) Bruk CAS til å bestemme når kontoen vil være tom i dette tilfellet.

Oppgave 3 (4 poeng)

En bedrift produserer batterier til hodelykter. Bedriften påstår at levetiden for batteriene er 30 timer når hodelykten brukes med full lysstyrke.

Vi antar at levetiden for batteriene er normalfordelt med $\mu = 30$ timer og $\sigma = 3$ timer.

- a) Bestem sannsynligheten for at et tilfeldig valgt batteri har en levetid på mindre enn 27 timer.

Forbrukerrådet har mistanke om at forventet levetid er mindre enn 30 timer. Derfor blir ni tilfeldig valgte batterier testet. Levetida til batteriene viser seg å være 29, 31, 32, 27, 29, 25, 23, 30 og 26 timer.

Vi antar at levetiden til batteriene er normalfordelt med $\sigma = 3$ timer.

- b) Sett opp en hypotesetest, og bruk den til å avgjøre om det er grunnlag for å hevde at den forventede levetiden er mindre enn 30 timer. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Oppgave 4 (8 poeng)

I et område er det brutt ut en smittsom sykdom. Antall personer som blir smittet per uke, kan modelleres med en logistisk funksjon g der

$$g(t) = \frac{N}{1 + ae^{-kt}}$$

Her er N , a og k reelle tall, og $g(t)$ er antall personer som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

Tabellen nedenfor viser $g(t)$ for noen verdier av t .

t	0	5	12
$g(t)$	200	2000	9000

- a) Bruk regresjon til å bestemme N , a og k i uttrykket $g(t)$.

Nærmere undersøkelser viser at

$$f(t) = \frac{10000}{1 + 50e^{-0.5t}}$$

er en god modell for antallet som blir smittet per uke, t uker etter at sykdommen brøt ut.

- b) Bruk graftegner til å tegne grafen til f . Bruk grafen til å bestemme når antall smittede personer per uke er 7000.
- c) Bruk CAS til å bestemme $\int_0^{12} f(t) dt$. Hva forteller dette svaret oss?
- d) Hvor mange uker vil det gå før det totale antallet personer som er smittet, overstiger 15 000?