Løsningsforslag – Eksamen S2, høsten 2016

Laget av Tommy O. – Sist oppdatert: 27. januar 2018

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^3 - 5x$, og vi kommer til å få bruk for reglene $(ax^n)' = anx^{n-1}$ og $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g(x)$. Når vi deriverer får vi $f'(x) = \underline{\underline{3x^2 - 5}}$.

b) Vi skal derivere $g(x) = 5(x^2+1)^7$. Her må vi bruke kjerneregelen, og vi setter $u = x^2 + 1$ som kjerne. Da er $u' = 2x$, og vi får $f(u) = 5u^7$ slik at $f'(u) = 35u^6u' = 35\left(x^2+1\right)^6(2x) = \underline{\underline{70x\left(x^2+1\right)^6}}$.

c) Vi skal derivere $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1} = e^x\left(e^x+1\right)^{-1}$. Legg merke til at vi skriver om brøken til faktorer slik at vi kan bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$, ettersom produktregelen er enklere å huske enn brøkregelen. Da får vi følgende utregning:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= (e^x)'\left(e^x+1\right)^{-1} + e^x\left(\left(e^x+1\right)^{-1}\right)' \\
&= e^x\left(e^x+1\right)^{-1} + e^x(-1)\left(e^x+1\right)^{-2}e^x \\
&= \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{(e^x)^2}{\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)} \\
&= \frac{e^x\left(e^x+1\right) - (e^x)^2}{\left(e^x+1\right)^2} \\
&= \underline{\underline{\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Oppgaven går ut på å løse følgende likning for x:

$$\frac{3x}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4}$$

Vi begynner med å finne fellesnevner. Gang venstre side med $(x+2)$ og bruk at $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ til å skrive likningen som :

$$\frac{3x(x+2)}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4}$$

Gang så begge sider med (x^2-4) for å bli kvitt nevneren. Vi løser likningen $3x(x+2) = x^2$ slik

$$3x(x+2) = x^2 \Rightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(x+3) = 0$$

Løsningen er $\underline{\underline{x = 0 \lor x = -3}}$.

b) Vi skal løse likningen:

$$\ln\left(x^2 + 2x - 14\right) = 0$$

Vi må huske at $\ln(y) = 0 \Rightarrow y = 1$. Med andre ord må vi løse følgende:

$$\ln\left(x^2 + 2x - 14\right) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 14 = 1$$

Bruker ABC-formelen[1] og får løsningene $\underline{\underline{x = -5 \lor x = 3}}$.

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi se på følgende funksjon:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

a) Divisjonen $f(x) : (x+2)$ går opp dersom $\frac{f(x)}{(x+2)} = p(x)$, der $p(x)$ er et polynom. Da må vi ha $\frac{f(x)}{(x+2)} = p(x) \Rightarrow f(x) = (x+2)p(x)$. Siden høyre side er lik null når $x = -2$ må det også gjelde for venstre side, altså må $\underline{\underline{f(-2) = 0}}$. Dette kan vi sjekke at stemmer slik:

$$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 32 = -8 - 24 + 32 = 0$$

b) Utfør polynomdivisjonen $f(x) : (x+2) = p(x) = x^2 - 8x + 16$. Vi kan faktorisere $p(x)$ ved hjelp av ABC-formelen slik at $p(x) = x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$. Med andre ord er $f(x) = (x+2)(x-4)^2$ og nullpunktene har $x = 4$ og $x = -2$. Nullpunktene er da $(4, f(4)) = \underline{\underline{(4, 0)}}$ og $(4, f(-2)) = \underline{\underline{(-2, 0)}}$.

c) For å finne topp- og bunnpunkter deriverer vi $f(x)$ og får $f'(x) = 3x^2 - 12x$. Dersom $f'(x^*) = 0$ i et punkt x^* er punktet $(x^*, f(x^*))$ enten et toppunkt, bunnpunkt eller terrassepunkt(også kalt sadelpunkt). Vi løser $f'(x) = 3x^2 - 12x = 0$ og får $x_1 = 0$ og $x_2 = 2$. For å karakterisere punktene kan vi se på den dobbelderiverte $f''(x) = 6x - 12$.

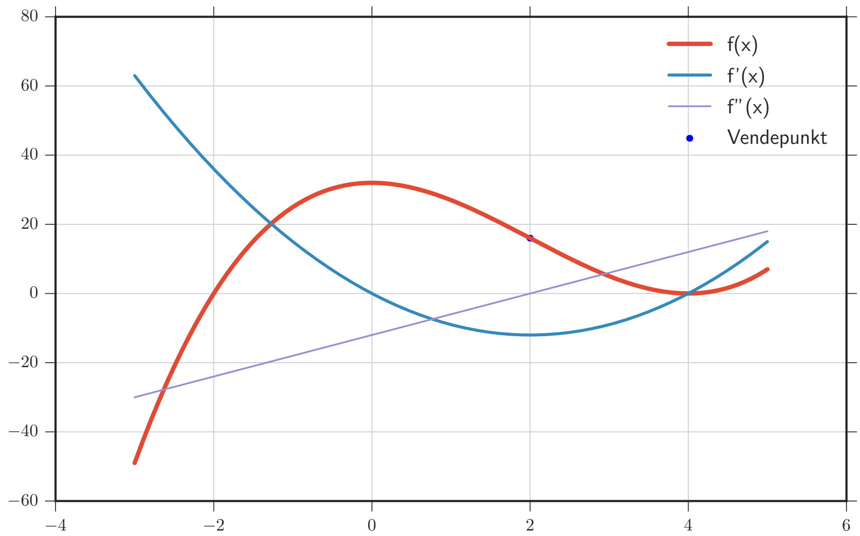
1) I punktet $x_1 = 0$ har vi at $f(x_1) = 32$. Ettersom $f''(0) < 0$ er dette et toppunkt. $\underline{\underline{\text{Punktet } (0, 32) \text{ er et toppunkt}}}$.

2) I punktet $x_2 = 4$ har vi at $f(x_2) = 0$. Ettersom $f''(4) > 0$ er dette et bunnpunkt. $\underline{\underline{\text{Punktet } (4, 0) \text{ er et bunnpunkt}}}$.

d) Generelt oppstår et vendepunkt når den dobbelderiverte skrifter fortegn. Vi ser når $f''(x) = 6x - 12$ skifter fortegn. Dette skjer når $x = 2$. Punktet $(2, f(2)) = \underline{\underline{(2, 16)}}$ er altså et vendepunkt.

[1] For mer om ABC-formelen, se http://www.purplemath.com/modules/quadform.htm

e) Funksjonen er skissert i figur (1). Den deriverte og dobbelderiverte er også tegnet inn. Med informasjon om nullpunkter, topp- og bunnpunkter samt vendepunkt er det mulig å lage en god skisse uten digitale hjelpemidler.



Figur 1: Skisse av $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ til oppgave 3e.

Oppgave 4

a) Likningssystemet kommer fra følgende observasjoner

$$\begin{aligned}
\text{Likning 1: } K(10) = 3000 \Rightarrow &\quad 100a + 10b + c = 3000 \\
\text{Likning 2: } K(20) = 8000 \Rightarrow &\quad 400a + 20b + c = 8000 \\
\text{Likning 3: } K'(10) = 350 \Rightarrow &\quad 20a + b = 350
\end{aligned}$$

Husk at "grensekostnadene" betyr bare "derivert av kostnadsfunksjonen."

b) Ta likning 2 minus likning 1. Vi får $300a + 10b = 5000$. Sammen med likning 3 er dette et likningssystem med 2 likninger og 2 ukjente. Løs systemet og finn at $\underline{\underline{a = 15}}$ og $\underline{\underline{b = 50}}$. Finn så $\underline{\underline{c = 1000}}$ ved innsetting i likning 1 eller 2.

Oppgave 5

a) Summeformelen som det refereres til her er:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \tag{1}$$

I vårt tilfelle er $a_1 = 1$ og $a_n = n$, vi setter dette inn i likning (1) ovenfor og får følgende:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \underline{\underline{\frac{(1+n)\,n}{2}}}$$

b) På figuren ser vi at arealet er lik er lik $2 \times (1+2+3+\cdots+n)$. Samtidig ser vi at arealet er lik bredde ganget med høyde, som blir $(n+1)n$. Vi har altså følgende likninger:

$$\begin{aligned}\text{areal} &= 2 \times (1+2+3+\cdots+n)\\ \text{areal} &= (n+1)n\end{aligned}$$

Dersom vi nå setter areal = areal får vi følgende:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{(1+n)\,n}{2}$$

Som er samme svar som forrige deloppgave. Det kan være lurt å sette inn $n = 1, 2, 3$ og sjekke at det stemmer for enkle tilfeller.

Oppgave 6

a) Vi vet at $\underline{\underline{\text{summen av sannsynlighetene må være lik 1}}}$. Skrevet litt mer matematisk:

$$\sum_{t \in X} P(X = t) = 1$$

Derfor får vi $0,1 + 0,3 + 0,2 + p = 1$, og da må vi ha $p = 0,4$.

b) Definisjonen av $\mathrm{E}(X)$ er $\mathrm{E}(X) = \sum_{t \in X} P(X = t)t$, og vi får

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{t \in X} P(X = t)t = 0,1(r) + 0,3(-1) + 0,2(0) + 0,4(2) = 1$$

Fra likningen ovenfor ser vi at $\underline{\underline{r = 5}}$.

c) Dersom $r = -5$ kan vi bruke samme tankegang som i forrige deloppgave til å regne ut at $\underline{\underline{\mathrm{E}(X) = 0}}$. Generelt er likningen for varians gitt ved:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{t \in X} P(X = t)(t - \mathrm{E}(X))^2$$

Ettersom $\mathrm{E}(X) = 0$ får vi en rimelig enkel utregning:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{t \in X} P(X = t)t^2 = 0,1(-5)^2 + 0,3(-1)^2 + 0,2(0)^2 + 0,4(2)^2 = \underline{\underline{4,4}}$$

Oppgave 7

a) Vi har overskudd dersom inntekten er større enn kostnaden(utgiften). Da må vi ha at $I(x) - K(x) > 0$. Dette skjer når den røde linjen er større enn den blå, altså når $\underline{\underline{x \in \langle 100, 400 \rangle}}$. En alternativ skrivemåte for dette intervallet er $100 < x < 400$.

b) Grensekostnaden $K'(x)$ er den deriverte av kostnaden $K(x)$. Funksjonen h er tangenten til $K(x)$ i punktet $x = 100$. En tangent i et punkt matcher funksjonsverdien og den deriverte, så vi vet at tangenten derivert er lik funksjonen derivert i punktet. Vi leser at $g(x) = 62,5x + 3850$, så da er $g'(x) = K'(x) = \underline{\underline{62,5}}$.

c) Overskuddet $O(x) = I(x) - K(x)$ er størst i punktet B. Da er $\underline{\underline{x = 250}}$. Bedriften må altså produsere og selge 250 enheter for størst overskudd.

Oppgave 8

Her holder det å se på forventningsverdien $\mu = \mathrm{E}(X)$ og standardavviket $\sigma = \mathrm{SD}(X)$ i begge tilfellene.

- På flervalgsprøven er $\mu = 32\frac{1}{3} \approx 10,66$. Den eneste figuren som har normalfordeling med forventningsverdi i nærheten av 10 er $\underline{\underline{\textbf{figur D}}}$.
- I frø-scenarioet er $\mu = 100\frac{8}{10} = 80$. Det er 2 figurer som har forventningsverdi i nærheten av 80: **figur A** og **B**. Vi ser på standardavviket, og regner ut at $\mathrm{SD}(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000,8(1-0,8)} = \sqrt{16} = 4$. Dersom X er normalfordelt vet vi at $\sim 68\%$ ligger innenfor $\pm\sigma$ (ett standardavvik). Mer enn halvparten av arealet skal altså ligge i området 80 ± 4, og da må $\underline{\underline{\textbf{figur A}}}$ være riktig svar.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) La h være høyden. Ettersom volumet skal være 800 liter $= 0,8\ \mathrm{m}^3$ får vi likningen:

$$x \times x \times h = 0,8 \Rightarrow h = \frac{0,8}{x^2}$$

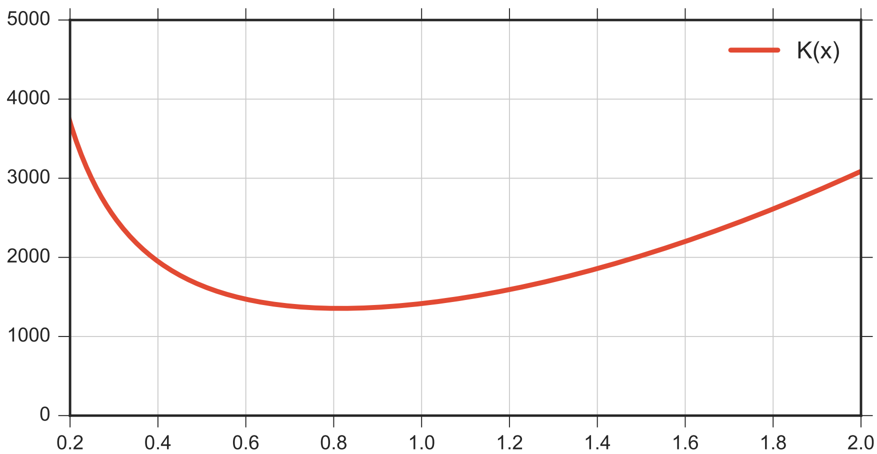
Kostnaden er kostnader per flate ganget med flateområde. For de forskjellige flatene får vi derfor følgende kostnader:

$$\begin{aligned} \text{Bunn: } & x^2 \times 450 \\ \text{Topp: } & x^2 \times 230 \\ \text{Side: } & xh \times 230 \end{aligned}$$

Vi legger dette sammen for å finne den totalt kostnaden. Husk at det er 4 sider.

$$\begin{aligned}K(x) &= \text{bunn} + \text{topp} + 4 \times \text{side} \\ &= x^2 \times 450 + x^2 \times 230 + 4 \times xh \times 230 \\ &= x^2 \times 450 + x^2 \times 230 + 4 \times x \left(\frac{0,8}{x^2}\right) \times 230 \\ &= 450x^2 + 230x^2 + \frac{736}{x} = \underline{\underline{680x^2 + \frac{736}{x}}}\end{aligned}$$

b) Tegning av grafen finnes i figur (2).



Figur 2: Skisse av $K(x) = 680x + \frac{736}{x}$ til oppgave 1b, del 2.

c) Definer funksjonen som `K(x) = 680*x*x + 736/x` i Geogebra og skriv inn: `Min[K, 0, 2]`
La oss kalle x-verdien som minimerer $K(x)$ for x^*, slik at $K(x^*) = \text{minimum}$. Svaret vi får fra Geogebra er $\underline{\underline{x^* \approx 0,815}}$. Dersom vi ønsker flere desimaler kan vi gå på "Innstillinger" $\rightarrow$ "Avrunding" i hovedmenyen i Geogebra.

Oppgave 2

Dette er et scenario styrt av binomisk fordeling.

a) Binomisk med $n = 10$ og $p = 0,52$. Åpne sannsynlighetskalkulatoren til Geogebra ved å trykke "Vis" $\rightarrow$ "Sannsynlighetskalkulator." Les av $\underline{\underline{P(7 \leq X) \approx 0,2067}}$.

b) Her har vi 2 muligheter:

1) Bruk binomisk (som i forrige oppgave) med $n = 100$ og $p = 0,52$. Da får vi $P(70 \leq X) = 0,0001900128 = \underline{\underline{0,0002}}$ i Geogebra.

2) Vi kan approksimere (tilnærme) den binomiske fordelingen med normalfordeling dersom np og $n(1-p)$ begge er minst lik 5.[2] Bruk normalfordeling med

$$\mu = np = 100(0,52) = 52$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100(0,52)(0,48)} \approx 4,996$$

Vi setter dette inn i Geogebras sannsynlighetskalkulator under normalfordeling og får $P(69,5 \leq X) = 0.0002301956 \approx \underline{\underline{0.0002}}$. Legg merke til heltallskorreksjonen. Å se på $P(X \geq 70)$ i en diskret fordeling må tilnærmes til $P(X \geq 69,5)$ i en kontinuerlig fordeling.

c) Vi har følgende hypoteser:

$$H_0 : p = 0,52$$
$$H_1 : p > 0,52$$

La k være antall personer av $n = 100$ som består teoriprøven. Den observerte verdien av k er $k_{\text{obs}} = 60$. P-verdien er sannsynligheten for å få $k \geq k_{\text{obs}}$ gitt at H_0 er er sann. Med andre ord er P-verdien sannsynligheten for at 60 personer eller flere består når $p = 0,52$. Vi bruker binomisk sannsynlighetskalkulator i Geogebra til å regne ut følgende:

$$P\text{-verdi} = P(k \geq 60 | p = 0,52) = 0.0662296331 \approx 0.066$$

Ettersom P-verdien er større enn 0.05 kan vi $\underline{\underline{\text{ikke forkaste } H_0}}$.

Oppgave 3

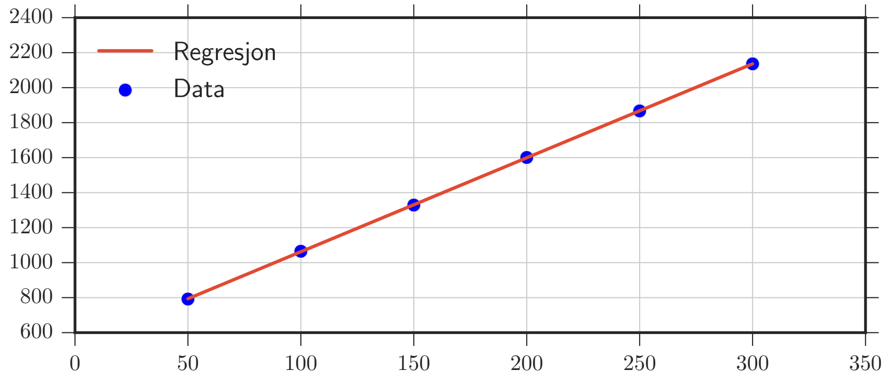
a) Inntekten $I(p)$ er etterspørsel $x = E(p)$ ganget med prisen p.

$$I(p) = E(p) \times p = \left(341 - p^2\right) p = \underline{\underline{-p^3 + 341p}}$$

b) Vi må finne maksimum til $I(p) = -p^3 + 341p$. Dette er enkelt å gjøre for hånd, men vi kan bruke CAS slik som dette:
`I(p) := -p^3 + 341p, p > 0`
Skriv deretter:
`NLøs[{I'(p) = 0}, {p}]`
Prisen som gir høyest inntekt er $\underline{\underline{p = 10.66}}$.

c) Vi vet at overskuddet er inntekt minus kostnad. Vi har en funksjon for inntekt, så vi trenger en funksjon for kostnad. Fra figur (3) ser vi at datasettet passer godt til lineær regresjon på formen $y = ax + b$. Vi kan lage regresjonslinje med kommandoen `RegPoly[ <Liste med punkt>, <Polynomgrad> ]` i Geogebra for polynomer av forskjellige grader. Vi regner ut overskuddet slik:

[2] Dette er en tommelfingerregel.

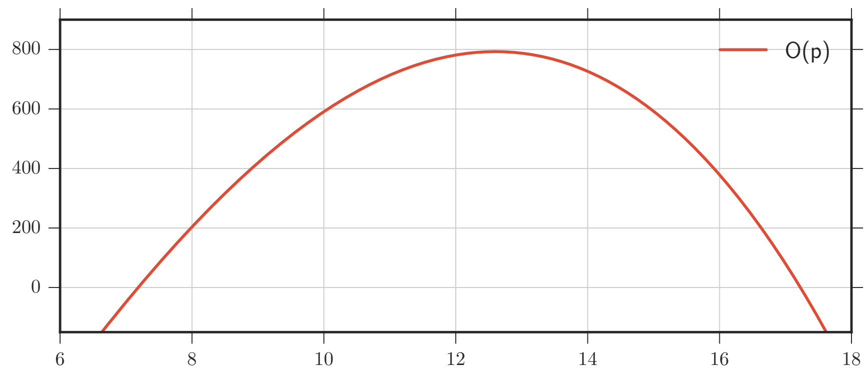


Figur 3: Regresjonslinje $y = 5,37x + 525,2$ for data i oppgave 3c, del 2.

$$
\begin{aligned}
O(p) &= I(p) - K(x) \\
&= \left(-p^3 + 341p\right) - (5,37x + 525,2) \\
&= \left(-p^3 + 341p\right) - \left(5,37\left(341 - p^2\right) + 525,2\right) \\
&= -p^3 + 341p - 1831,17 + 5,37p^2 - 525,2 \\
&= -p^3 + 5,37p^2 + 341p - 2356,37 \\
&\approx \underline{\underline{-p^3 + 5,37p^2 + 341p - 2356}}
\end{aligned}
$$

d) Definer funksjonen i Geogebra som `O(p)` (se figur (4)) og skriv følgende:
`Maks[O, 8, 16]`
La p^* være verdien som maksimerer $O(p)$. Svaret vi får er at overskuddet er størst i $p^* \approx 12,6$, og $O(p^*) \approx 792,77$. Oppgaven spør hvor mange enheter $x = E(p)$ som bedriften må produsere. Dette kan vi nå regne ut slik:

$$x^* = E(p^*) = 341 - (12,6)^2 = 182,24 \approx \underline{\underline{182}}$$



Figur 4: Plot av $O(p)$ til oppgave 3d, del 2.

Oppgave 4

a) Denne oppgaven kan selvsagt løses på flere måter, men la oss utvikle litt generell teori. La L være lånebeløpet, r være rentefaktoren, t være terminbeløpet og a være totalt antall år. I et annuitetslån er terminbeløpet konstant. Tabellen viser hvor mye en person skylder etter forskjellige år:

År	**Skyldig beløp**	**Pent uttrykk for skyldig beløp**
1	$L \times r - t$	$L \times r - t$
2	$(L \times r - t) \times r - t$	$L^2 - tr - r$
3	$((L \times r - t) \times r - t) \times r - t$	$Lr^3 - tr^2 - tr - t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	$\dots$	$Lr^a - t\sum_{i=0}^{a-1} r^i$

I tabellen kan vi bruke litt algebra for å lage et pent uttrykk for skyldig beløp. Vi innser at dette pene uttrykket inneholder en geometrisk sum. Etter a år skal det skyldige beløpet være lik null. Vi får altså likningen:

$$Lr^a - t\sum_{i=0}^{a-1} r^i = 0$$

Vi løser denne likningen for t og bruker formelen for sum av geometrisk rekke til å skrive $\sum_{i=0}^{a-1} r^i$ som $\frac{r^a-1}{r-1}$, vi får da denne formelen for t:

$$t = \frac{Lr^a(r-1)}{r^a - 1} \tag{2}$$

La oss sette inn $L = 100000$, $r = 1,024$ og $a = 25$ og løse:

$$t = \frac{Lr^a(r-1)}{r^a - 1} = \frac{100000\,(1,024)^{25}\,(1,024-1)}{(1,024)^{25} - 1} \approx \underline{\underline{53657}}$$

b) Vi setter $t = 60000$ og løser likning (2) for r. Dette kan vi gjøre ved å definere følgende i CAS i Geogebra:

```
a := 25
L := 1000000
t := 60000
Nløs[t = (L*r^a*(r-1))/(r^a-1), r]
→ r = 1.033973455474
```

Svaret blir $\underline{\underline{r \approx 1,034}}$. Det kan være lurt å dobbelsjekke ved å sette $r = 1,034$ inn i likning (2). Vi får da at $t = 60017$, noe som er veldig nært 60000.

c) Skriv følgende i CAS i Geogebra:

```
L := 1000000
r := 1.024
t := 60000
Nløs[t = (L*r^a*(r-1))/(r^a-1), a]
```

$\rightarrow$ `a = 21.53880422748`

Svaret blir $\underline{\underline{a \approx 21.54}}$. Dette betyr at dersom terminbeløpet økes til 60000 kan Remine betale tilbake annuitetslånet på omtrent 21,5 terminer.