

# Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2014

Laget av Tommy O.

Sist oppdatert: 28. april 2018

Antall sider: 10

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på [https://github.com/matematikk/vgs\\_eksamener](https://github.com/matematikk/vgs_eksamener).

## Del 1 - uten hjelpemidler

### Oppgave 1

- a) Vi skal derivere  $f(x) = 3/x^2$ . Vi skriver om til  $f(x) = 3x^{-2}$  og deriverer slik

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^{-2})' \\ &= 3(-2)x^{-3} \\ &= -\frac{6}{x^3}. \end{aligned}$$

- b) Vi skal derivere  $g(x) = xe^{-4x}$ , og bruker produktregelen  $(uv)' = u'v + uv'$  slik

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)'e^{-4x} + x(e^{-4x})' \\ &= 1e^{-4x} + x(-4)e^{-4x} \\ &= e^{-4x} - 4xe^{-4x} \\ &= \underline{\underline{e^{-4x}(1 - 4x)}}. \end{aligned}$$

### Oppgave 2

Vi ser på funksjonen

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4, \quad D_P = \mathbb{R}$$

- a) Vi får  $P(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = \underline{\underline{0}}$ .
- b) Ettersom  $P(2) = 0$ , vet vi at  $(x - 2)$  må være en faktor i  $P(x)$ . Vi utfører polynomdivisjon og får

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2) = x^2 - x - 2 \\ \underline{-(x^3 + 2x^2)} \phantom{+ 4} \\ -x^2 \phantom{+ 4} \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \phantom{+ 4} \\ -2x + 4 \\ \underline{-(2x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

Nå vet vi at  $P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$ , og ved hjelp av ABC formelen finner vi ut at  $(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x + 1)$ , altså kan vi faktorisere  $P(x)$  som

$$\underline{\underline{P(x) = (x - 2)^2(x + 1).}}$$

En enkel metode for å sjekke om dette svaret er riktig er å gange sammen disse faktorene og se at du får  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$  tilbake.

### Oppgave 3

- a) Dette er en aritmetisk rekke med  $a_1 = 3$ , differanse  $d = 3$  og siste ledd  $a_n = 300$ . For å finne ut antall ledd  $n$  kan vi bruke formelen  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ , vi får da

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n - 1) & (1) \\ 300 &= 3 + 3(n - 1) \\ 99 &= n - 1 \\ n &= 100. \end{aligned}$$

Vi bruker deretter summeformelen for en aritmetisk rekke, og får

$$S = \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) n = \left( \frac{3 + 300}{2} \right) 100 = 303(50) = \frac{30300}{2} = \underline{\underline{15150}}.$$

- b) Vi bruker  $a_1 = 4$  og formelen fra oppgaven til å finne ut at  $a_3 = a_1 + 8 = 4 + 8 = 12$ . Vi setter så dette inn i formel (1) fra forrige oppgave, og får at

$$a_3 = a_1 + d(3 - 1) \Rightarrow 12 = 4 + d2 \Rightarrow d = 4,$$

og da må vi ha at  $a_2 = a_1 + d(2 - 1) = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$ .

### Oppgave 4

Vi bruker følgende variabler:  $v$  er antall voksne,  $b$  er antall barn og  $p$  er antall pensjonister som møtte på konserten. Hver setning gir oss én likning:

- “Det ble solgt 80 billetter.”  
 $\Rightarrow v + b + p = 80 \quad (A)$
- “Billettinntektene var 5000 kroner.”  
 $\Rightarrow 100v + 50b + 60p = 5000 \quad (B)$
- “Like mange til barn som til voksne og pensjonister til sammen.”  
 $\Rightarrow -v + b - p = 0 \quad (C)$

Både innsetningsmetoden og addisjonsmetoden kan brukes, vi bruker her addisjonsmetoden. Først legger vi sammen likning (A) og likning (C), og får at  $2b = 80$ , altså er  $b = 40$ . Deretter setter vi  $b = 40$  inn i likning (A) og (B), og får

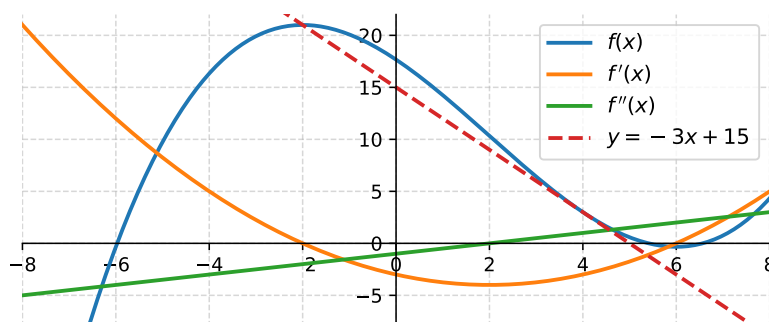
$$v + p = 40 \quad (\text{D})$$

$$100v + 60p = 3000 \quad (\text{E})$$

Vi regner ut  $100 \times (\text{D}) - (\text{E})$ , og finner ut at  $40p = 1000$ . Da er  $p = 25$ , og setter vi inn dette i likning (D) finner vi også ut at  $v = 15$ .

## Oppgave 5

- a) Generelt så har  $f'(x)$  topp- og bunnpunkt når  $f'(x) = 0$ . Her er  $f'(x) = 0$  når  $x = -2$  og når  $x = 6$ . Vi ser at  $x = -2$  er et toppunkt og  $x = 6$  er et bunnpunkt. Grafen vokser når  $f'(x) > 0$ , og minker når  $f'(x) < 0$ . Vi ser også at funksjonen vokser når  $x < -2$  og når  $x > 6$ , og minker når  $-2 < x < 6$ .



Figur 1: Funksjonene fra oppgave 5, del 1.

- b) Likningen for tangenten til  $f(x)$  i et punkt  $x_0$  er gitt ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vi får oppgitt punktet  $(x_0, f(x_0)) = (4, 3)$ , og fra grafen til  $f'(x)$  ser vi at  $f'(x_0) = f'(4) = -3$ . Vi får altså følgende tangentlinje:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(4) + f'(4)(x - 4)$$

$$y = 3 + -3(x - 4)$$

$$\underline{\underline{y = -3x + 15}}$$

- c) Funksjonen  $f''(x)$  er positiv når  $f'(x)$  stiger, og negativ når  $f'(x)$  synker. Med andre ord er  $f''(x) < 0$  når  $x < 2$ , og  $f''(x) > 0$  når  $x > 2$ . Vendepunktet oppstår når  $f''(x)$  endrer fortegn, altså når  $x = 2$ .

- d) Basert på den deriverte, samt kjennskap til bunnpunkt og toppunkt, burde du klare å lage en skisse som ligner på  $f'(x)$  vist i Figur 1.

## Oppgave 6

- a) Her må vi bruke forventningsverdier og utfallsrom. Både  $X_2$  og  $X_4$  har  $n > 10$ , så disse må samsvare med figurene (1) og (3), ettersom disse har positive sannsynligheter når  $X > 10$ . Ettersom  $E(X_2) = np = 100(0.06) = 6$  og  $E(X_4) = 5$ , så velger vi  $\underline{X_2 = (3)}$  og  $\underline{X_4 = (1)}$ , fordi dette samsvarer best med høyeste stolpe på figurene. Basert på forventningsverdiene til  $X_1$  og  $X_3$  så velger vi  $\underline{X_1 = (2)}$  og  $\underline{X_3 = (4)}$ .
- b) Det må være  $\underline{X_2}$  (figur (3)), fordi alle andre arealer er for små. Ettersom det er satt tall på aksene er det mulig å gjøre en grov utregning av arealet ved å lese av søylene, og da ser man at de andre er for små.
- c) Variabelen med størst standardavvik er den som har størst varians, ettersom  $SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ , og  $a > b$  impliserer at  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ . Når  $X$  er binomisk fordelt er  $\text{Var}(X) = np(1-p)$ , vi regner ut alle variansene (det er Del 1, så vi trenger ikke å regne nøye—vi har ikke kalkulator tilgjengelig):

$$\text{Var}(X_1) = np(1-p) = 10(0.6)0.4 = 2.4$$

$$\text{Var}(X_2) = np(1-p) = 100(0.06)0.94 \approx 6$$

$$\text{Var}(X_3) = np(1-p) = 10(0.4)0.6 = 2.4$$

$$\text{Var}(X_4) = np(1-p) = 50(0.1)0.9 = 4.5$$

Vi ser at  $\underline{X_2}$  har størst varians, og derfor også størst standardavvik.

## Del 2 - med hjelpemidler

### Oppgave 1

- a) Omkretsen til en sirkel er  $O = 2\pi r$ , så halve omkretsen bli  $\pi r$ . Vi ser at

$$O_1 = \frac{(2r)}{2}\pi = r\pi$$

$$O_2 = \frac{(r)}{2}\pi = r\pi/2$$

$$O_3 = \frac{(r/2)}{2}\pi = r\pi/2^2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$O_n = \frac{(r/2^{n-2})}{2}\pi = r\pi/2^{n-1},$$

og dette blir en uendelig geometrisk rekke fordi

$$S = O_1 + O_2 + \dots = r\pi \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \quad (2)$$

- b) Vi vet at  $1 + k + k^2 + k^3 + \dots = 1/(1-k)$ , dette er summeformelen for en uendelig geometrisk rekke, og den konvergerer (går ikke mot evig) når  $-1 < k < 1$ . I denne oppgaven er  $k = 1/2$ , vi setter formelen inn i likning (2) og får

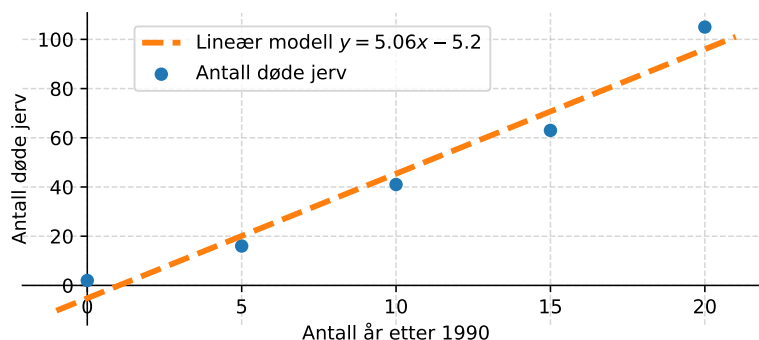
$$S = r\pi \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = r\pi \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = r\pi \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

I Geogebra kan vi skrive  $S := r * (\pi) * \text{Sum}(1/2^i, i, 0, \infty)$ .

## Oppgave 2

Årstall	1990	1995	2000	2005	2010
Antall døde jerv	2	16	41	63	105

- a) Basert på plottet i Figur 2 velger vi en lineær modell.<sup>1</sup>
- b) Evaluer funksjonen  $y(x) = 5.06x - 5.2$  i punktet  $x = 24$ . Vi får  $y(24) = 5.06(24) - 5.2 = 116.24$ . Ifølge modellen kan vi forvente 116 døde jerv registrert i 2014.



Figur 2:

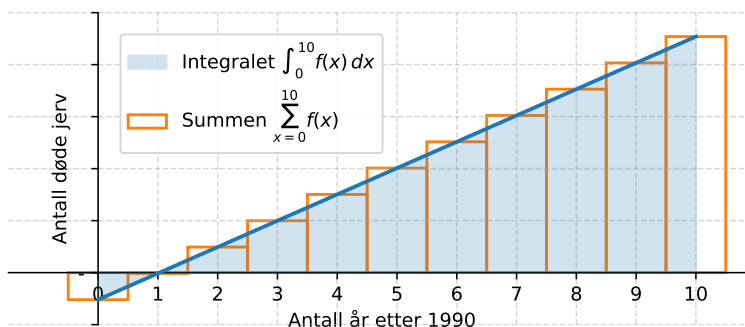
- c) Vi kan løse på 2 forskjellige måter.

- 1) Vi kan finne summen ved å regne den ut som en sum. Da skriver vi først  $f(x) := 5.06 \cdot x - 5.2$  i CAS, og regner deretter summen med

<sup>1</sup>Et annet løsningsforslag bruker et andregradspolynom  $y = ax^2 + bx + c$  istedet for en lineær modell  $y = ax + b$ . I pensum er fokuset på lineære, eksponentielle og logistiske modeller. Jeg er ikke villig til å anta et andregradspolynom basert på bare 5 datapunkter—det enkleste er det beste, dette er *Ockhams barberkniv*. Et 4. gradspolynom vil passe perfekt til dataene, men er ikke riktig.

$\text{Sum}(f(x), x, 0, 24)$ , som gir 1388. Det er uheldig at  $f(0)$  er negativ, ettersom det ikke gir mening å ha negativt antall døde jerv.

- 2) Vi kan finne summen ved å approksimere den som et integral. For å korrigere for at vi går fra en sum til et integral, bør vi legge til  $1/2$  på hver ende, se Figur 3 for en grafisk forklaring. Vi skriver  $\text{Integral}(f(x), x, -0.5, 24.5)$  inn i Geogebra, som gir 1388 som svar.



Figur 3: En illustrasjon av at vi må utvide endepunktene når vi approksimerer en sum ved hjelp av et integral. For et mindre antall stolper viser vi  $x = 0$  til  $x = 10$ .

### Oppgave 3

- a) Vi legger dataene inn i regnearket i Geogebra, og velger en lineær regresjonsmodell. Vi får  $p(x) = -0.224x + 2219.17$ . Inntekten er prisen ganget med antall varger solgt, så vi får

$$\underline{\underline{I(x) = p(x) \times x = -0.224x^2 + 2219.17x.}}$$

- b) Vi definerer  $I(x)$  og  $K(x)$  i CAS ved å skrive inn  
 $I(x) := -0.22421189 * x^2 + 2219.1684 * x$  (mange desimaler<sup>2</sup>) og  
 $K(x) := 0.03 * x^2 + 15 * x + 605000$ . Bruker deretter CAS til å regne ut:

$$\begin{aligned} I'(3000) &= 873.9 \\ K'(3000) &= 195 \end{aligned}$$

Ettersom overskuddet  $O(x) = I(x) - K(x)$ , vil overskuddet øke dersom  $I'(x) > K'(x)$  og vi produserer da mer. Vi bør øke produksjonen.

- c) Skriv inn  $\text{Løs}[I'(x) > K'(x), x]$  i CAS, svaret blir  $x < 4335.3$ . Vi bør produsere mer dersom vi produserer mindre enn 4335 varer.

<sup>2</sup>Her er det viktig å ta med rikelig med desimaler. Tar du med for få desimaler vil svarene i de neste oppgavene ikke bli like nøyaktige. Generelt bør vi ta med mange desimaler i mellomregninger.

- d) Overskuddet  $O(x)$  er størst når  $O'(x) = 0$ . Da er  $I'(x) = K'(x)$ , så vi skriver  $L\ddot{o}s[I'(x) = K'(x), x]$  og får  $x = 4335.3$  som svar. Bedriften må produsere og selge 4335 enheter for at overskuddet skal være størst<sup>3</sup>.

## Oppgave 4

- a) Vi bruker formelen for volum, og løser for  $h$  slik:

$$\text{Volum} = (\text{Høyde}) \times (\text{Bredde}) \times (\text{Lengde})$$

$$10 = h \times x \times 2x$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

- b) Den totale kostnaden er summen av kostnad per kvadratmeter, ganget med areal i kvadratmeter, for alle sidene. Her er en detaljert utledning.

$$\text{Total kostnad} = \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Sider}} + \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Bunn}}$$

$$\text{Total kostnad} = \underbrace{60 \times (2(2x \times h + x \times h))}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}$$

$$K(x) = \underbrace{60 \times \left( 2 \left( 2x \times \frac{5}{x^2} + x \times \frac{5}{x^2} \right) \right)}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}$$

$$K(x) = 120 \times \left( \frac{10}{x} + \frac{5}{x} \right) + 200x^2$$

$$K(x) = \frac{1800}{x} + 200x^2$$

- c) Definer funksjon med  $K(x) := 200 * x^2 + 1800/x$  i CAS i Geogebra. Bruk deretter **Ekstremalpunkt**( $K$ , 0.1, 10) til å finne den minimale prisen. Vi finner at  $x = \text{bredde} = 1.64 \text{ m}$ ,  $2x = \text{lengde} = 3.3 \text{ m}$  og  $h = 5/x^2 = \text{høyde} = 1.83 \text{ m}$ . Den minste kostnaden ved å produsere containeren er 1635 kr. Se Figur 4 for et skjembilde av CAS-utregningen.

## Oppgave 5

- a) La  $X$  være antallet som blir trukket ut av  $n = 3$  personer. Da er  $X$  binomisk fordelt med  $n = 3$  og  $p = 0.1$ , og  $P(X = 3)$  er gitt ved

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} = \binom{3}{3} 0.1^3 (1 - 0.1)^{3-3} = 0.1^3 = \underline{\underline{0.001 = 0.1\%}}.$$

<sup>3</sup>Det er ingen garanti for at å runde av 4335.3 til 4335 gir beste overskudd. Du kan sammenligne  $O(4334)$ ,  $O(4335)$  og  $O(4336)$  og velge den største for å være sikker på at du har rett svar.

CAS	
1	$K(x) := 200x^2 + 1800/x$
•	$\rightarrow K(x) := 200x^2 + \frac{1800}{x}$
2	$A := \text{Ekstremalpunkt}(K, 0.1, 10)$
•	$\rightarrow A := (1.65, 1635.41)$

Figur 4: Skjembilde av CAS for oppgave 4, del 2.

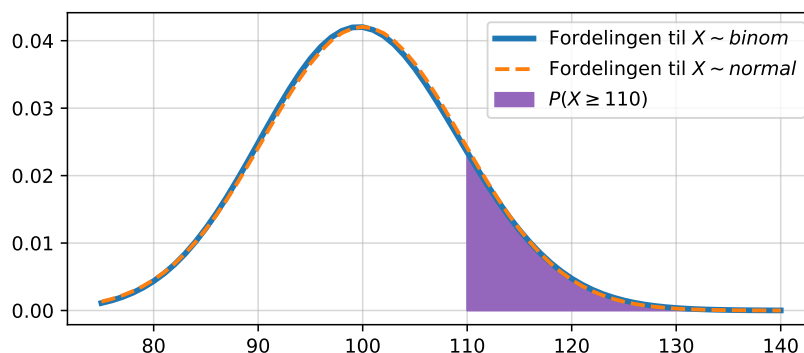
Det er kanskje enklere å tenke at tre personer må trekkes på rad, og at sannsynligheten for at én blir trukket er  $p = 0.1$ , så da er sannsynligheten for at tre blir trukket på rad lik  $p^3 = 0.1^3 = 0.001 = 0.1\%$ .

- b) Den stokastiske variabelen  $X$  er binomisk fordelt med  $n = 1000$  og  $p = 0.1$ . Vi bruker formlene for forventning og standardavvik for binomisk fordeling.

$$E(X) = np = 1000(0.1) = \underline{100}$$

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \underline{\underline{\sqrt{90} \approx 9.49}}$$

Fordelingen til  $X$  er vist i Figur 5.



Figur 5: Fordelingen til  $X \sim \text{Binom}(n = 1000, p = 0.1)$ , normalapproximasjonen  $X \sim \text{Normal}(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$  og arealet under grafen når  $X \geq 110$ .

- c) Vi setter opp hypotesene

$$H_0 : p = 0.1$$

$$H_1 : p > 0.1$$

og bruker signifikansnivå 5 %. Vi forkaster nullhypotesen dersom sannsynligheten for å få  $x_{\text{obs}}$  er mindre enn 5 %, gitt at  $p = 0.1$ . I vårt tilfelle er  $x_{\text{obs}} = 110$ . Vi må finne sannsynligheten for at  $X \geq x_{\text{obs}}$ , gitt at  $p = 0.1$ . Med andre ord må vi finne  $P(X \geq 110 | p = 0.1)$ . Vi kan gjøre det på to måter.



- 1) Det enkleste er å se på  $X$  som binomisk fordelt med  $n = 1000$  og  $p = 0.1$ , da gir sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra oss at  $P(X \geq 110) = 0.1583 = 15.5\%$ . Vi kan med andre ord ikke forkaste  $H_0$ .
  - 2) Her er også både  $np$  og  $n(p - 1)$  større enn 5, så vi kan alternativt bruke normalapproximasjon med  $\mu = np = 100$  og  $\sigma = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \sqrt{90}$ . Normalapproximasjonen er plottet i Figur 5, og som du ser stemmer den veldig godt overens med den binomiske fordelingen. På eksamen ville jeg svart med binomisk fordeling, men jeg viser normalapproximasjonen her.
- Vi regner ut  $P(X \geq 110) \cong P(X_{\text{norm}} \geq 109.5) = 0.1583 = 15.5\%$  i Geogebra. Legg merke til “halvkorreksjon”, som brukes når vi går fra en diskret fordeling med søyler til en glatt, kontinuerlig fordeling. De første 4 desimalene er helt like, og konklusjonen er den samme—vi forkaster  $H_0$ .

## Oppgave 6

- a) Vi beregner nåverdi for begge alternativene og setter de lik hverandre.

Måned	Innbetaling	Nåverdi av innbetalingen
1	$x$	$\frac{x}{1.016}$
2	$x$	$\frac{x}{1.016^2}$
3	$x$	$\frac{x}{1.016^3}$
$\vdots$	$\vdots$	
36	$x$	$\frac{x}{1.016^{36}}$

Vi setter nåverdiene av innbetalingene lik dagens betaling, og får likningen

$$7995 + 30 = \frac{x}{1.016} + \frac{x}{1.016^2} + \cdots + \frac{x}{1.016^{36}}.$$

For å løse likningen på papir kan vi gange begge sider med  $1.016^{36}$  og bruke summeformelen for en geometrisk rekke. På eksamen er det nok enklere å bruke CAS, skriv `NLøs({8025 = Sum(x/1.016^i, i, 1, 36)}, {x})`, da får du at  $x = 294.98$  kr.

- b) Dette er samme problem som i forrige oppgave, men nå er terminbeløpet kjent og renten er ukjent. Vi må løse

$$7995 = \frac{289}{r} + \frac{289}{r^2} + \cdots + \frac{289}{r^{36}},$$

der  $r$  er den månedlige renten. Vi bruker CAS i Geogebra også her, og taster inn `NLøs({7995 = Sum(289/r^i, i, 1, 36)}, {r})` og finner at  $r = 1.015$ , slik at den månedlige renten er 1.5 %.

- c) Dette er også en geometrisk rekke. Vi setter opp en tabell, der  $r$  er den ukjente, månedlige renten. Hver måned får man rente på den eksisterende verdien, og nye 650 kr blir satt inn. Dersom  $V_n$  er verdien i år  $n$ , er  $V_n = V_{n-1}r + 650$ .

Innbetaling	Verdi
1	650
2	$650r + 650$
3	$(650r + 650)r + 650 = 650r^2 + 650r + 650$
$\vdots$	$\vdots$
12	$650r^{11} + 650r^{10} + \dots + 650r^2 + 650r + 650$

Like etter den 12. månedlige innbetalingen har hun 8107 kr, da får vi likningen

$$8107 = 650r^{11} + 650r^{10} + \dots + 650r^2 + 650r + 650.$$

Det er også mulig å løse denne med summeformelen for en geometrisk rekke, men det er enklere å skrive `NLøs({8107 = Sum(650*r^i, i, 0, 11)}, {r})` inn i CAS. Da finner vi ut at den månedlige renten er 0.7 %.

## Oppgave 7

Halveringstiden er 6 timer, men pasienten får én tablett hver 12. time. Da rekker kroppen å halvere to ganger—med andre ord reduseres mengden med stoffet med  $1/4$  hver 12. time. Vi setter opp en tabell og leter etter et mønster.

Time	Milligram
0	60
12	$60/4 + 60$
24	$60/4^2 + 60/4 + 60$
36	$60/4^3 + 60/4^2 + 60/4 + 60$
$\vdots$	$\vdots$

Vi bruker formelen  $1 + k + k^2 + \dots = 1/(1 - k)$  til å regne ut summen  $S$  av den evige geometriske rekken slik:

$$\begin{aligned}
 S &= 60 + \frac{60}{4} + \frac{60}{4^2} + \frac{60}{4^3} + \dots \\
 &= 60 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\
 &= 60 \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 60 \left( \frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = 60 \left( \frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{80}}
 \end{aligned}$$

Du kan også skrive `Sum(60/4^i, i, 0, ∞)` inn i CAS. Du får samme svar. På eksamen er det lurt å gjøre så mye som mulig i Geogebra, men jeg prøver å vise at det er mulig å løse uten Geogebra også.