

Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2018

Laget av Tommy O.

Sist oppdatert: 28. mai 2018

Antall sider: 10

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi skal derivere $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$, og må bruke regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Vi får $f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 4x^{1-1} + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 4}}$ som svar.
- b) Vi skal derivere $g(x) = x/e^x$. Det er fullt mulig å bruke brøkregelen for derivasjon, men man kan også skrive om funksjonen til produktet $g(x) = xe^{-x}$ og bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$. Fordelen er at man slipper å huske brøkregelen. Utregningen blir

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)'e^{-x} + (e^{-x})'x \\ &= 1e^{-x} + (-1)e^{-x}x \\ &= e^{-x} + -1e^{-x}x \\ &= \underline{\underline{e^{-x}(1-x)}} \end{aligned}$$

- c) Vi skal derivere $h(x) = \ln(x^2 + 4x)$, og må bruke kjernereglen $h'(x) = h'(u) \times u'(x)$, der u er en kjerne. Vi velger $u = x^2 + 4x$, da er $h(u) = \ln(u)$ og $h'(u) = 1/u$, slik at vi får

$$\begin{aligned} h'(x) &= h'(u) \times u'(x) \\ &= \left(\frac{1}{u}\right) \times (2x + 4) \\ &= \frac{2x + 4}{u} = \underline{\underline{\frac{2x + 4}{x^2 + 4x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet nedenfor, og vi kan bruke to forskjellige metoder: innsetningsmetoden eller addisjonsmetoden. Vi velger addisjonsmetoden.

$$5x + y + 2z = 0 \quad (\text{A})$$

$$2x + 3y + z = 3 \quad (\text{B})$$

$$3x + 2y - z = -3 \quad (\text{C})$$

For å kvitte oss med variabelen z regner vi ut to nye likninger $(D) = (A) - 2 \times (B)$ og $(E) = (A) + 2 \times (C)$ som følger.

$$x - 5y = -6 \quad (D)$$

$$11x + 5y = -6 \quad (E)$$

Ved å legge disse sammen kvitter vi oss med y , får likningen $12x = -12$, og ser at $\underline{x = -1}$. For å løse for y setter vi $x = -1$ inn i likning (D) eller (E) og ser at $\underline{y = 1}$. Nå vet vi verdiene til x og y , og kan sette dette inn i (A), (B) eller (C) for å finne ut at $\underline{z = 2}$. På eksamen bør du sette en prøve å svaret—det går fort og du vet umiddelbart om du har regnet riktig.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

- a) Generelt er et polynom $P(x)$ delelig på $(x - a)$ dersom $P(a) = 0$. Her er $P(x)$ delelig på $(x - 1)$ ettersom

$$P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 1 - 3 - 13 + 15 = \underline{0}.$$

- b) For å løse $P(x) > 0$ må vi først faktorisere $P(x)$. Vi vet at $(x - 1)$ er en faktor, så vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 13x + 15) : (x - 1) = x^2 - 2x - 15 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ -2x^2 - 13x \\ \underline{2x^2 - 2x} \\ -15x + 15 \\ \underline{15x - 15} \\ 0 \end{array}$$

Vi kan bruke ABC-formelen eller en annen metode for å finne ut at $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$. Med andre ord er $P(x) = (x - 1)(x - 5)(x + 3)$, vi setter opp en fortegnslinje og kommer frem til at $\underline{P(x) > 0}$ når $\underline{-3 < x < 1}$ og når $\underline{x > 5}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$(x - 1)$	-	-	-	-	-	0	—	—	—	—	—
$(x - 5)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	—
$(x + 3)$	-	-	-	0	—	—	—	—	—	—	—
$f(x)$	-	-	-	0	—	—	0	-	-	-	0

Oppgave 4

- a) Vi bruker formelen $a_n = a_1 + d(n - 1)$ og informasjonen fra oppgaven.

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Rightarrow a_4 = a_1 + d(3) \Rightarrow 14 = 2 + d(3) \Rightarrow d = 4$$

Nå vet vi at differansen $d = 4$ i den aritmetiske rekken, vi setter inn og får

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Rightarrow a_n = 2 + 4(n - 1) \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 4n - 2.}}$$

- b) Vi bruker summeformelen for en aritmetisk rekke til å regne ut summen for en generell n , og løser deretter når $n = 100$. For en generell n har vi at

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n = \left(\frac{2 + 4n - 2}{2} \right) n = (2n) n = 2n^2.$$

Når $n = 100$, blir $S_n = S_{100} = 2(100)^2 = \underline{\underline{20000.}}$

Oppgave 5

- a) En geometrisk rekke $a_1(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$ konvergerer dersom $-1 < k < 1$. Her er $a_1 = 3$, $a_2 = 3/4$ og $a_3 = 3/16$, og $k = 1/4$ fordi hvert ledd er lik $1/4$ ganget med det foregående leddet. Rekken konvergerer fordi $k = 1/4$. Summen av den uendelige geometriske rekken regner vi ut som

$$S_\infty = a_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right) = 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 3 \left(\frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = 3 \left(\frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{4}}$$

- b) Desimaltallet $0.242424\dots$ kan skrives som $\frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \dots$ fordi desimalene 24 gjentar seg, og å dele på 100 flytter desimalene to plasser til høyre. Første ledd blir 0.42, andre ledd blir 0.0042, tredje ledd blir 0.000042 og så videre—da blir summen $0.424242\dots$. For å skrive $0.242424\dots$ som en brøk bruker vi formelen for sum av en uendelig geometrisk rekke. Vi vet at

$$a_1(1 + k + k^2 + \dots) = a_1 \left(\frac{1}{1 - k} \right),$$

og ved å trekke fra a_1 på begge sider ser vi at

$$a_1(k + k^2 + \dots) = a_1 \left(\frac{1}{1 - k} - 1 \right).$$

Venstresiden likner nå på summen. Vi setter inn $a_1 = 24$ og $k = 1/100$ og får

$$a_1 \left(\frac{1}{1 - k} - 1 \right) = 24 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 \right) = 24 \left(\frac{1}{\frac{99}{100}} - 1 \right) = 24 \left(\frac{100}{99} - \frac{99}{99} \right) = \underline{\underline{\frac{24}{99}}}$$

Oppgave 6

I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x) = \frac{6}{1 + e^{-x}} = 6(1 + e^{-x})^{-1}.$$

- a) Grafen til $f(x)$ er alltid stigende dersom den deriverte er positiv for alle verdier av x . Vi deriverer funksjonen ved hjelp av kjerneregelen. Vi velger $u = 1 + e^{-x}$ som kjerne, da er $f(u) = 6u^{-1}$, og vi får at

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(u) \times u'(x) \\ &= 6(-1)u^{-2} \times ((-1)e^{-x}) \\ &= \frac{6e^{-x}}{u^2} = \frac{6e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

La os nå undersøke $f'(x)$. Telleren er alltid positiv fordi e^{-x} alltid er positiv, nevneren er alltid positiv fordi $(1 + e^{-x})$ alltid er større enn 1, og å ta et tall som er større enn 1 i andre gir alltid i et positivt resultat. Både telleren og nevneren er positive for alle x , og da må $f'(x)$ alltid være positiv, og da stiger $f(x)$ alltid.

- b) Vi ser på nevneren $(1 + e^{-x})$. Funksjonen e^{-x} er alltid positiv, så da vet vi at

$$1 < 1 + e^{-x} < \infty.$$

Når $1 + e^{-x}$ blir stor, går $f(x)$ mot 0. Når $1 + e^{-x}$ går mot 1, går $f(x)$ mot 6. Da vet vi at $0 < f(x) < 6$ for alle verdien av x .

- c) En funksjon har ventepunkt når den dobbellderiverte skifter fortegn. Vi regner ut den dobbellderiverte fra $f'(x) = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 6e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2}$ ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen slik

$$\begin{aligned} f''(x) &= [6e^{-x}]' (1 + e^{-x})^{-2} + 6e^{-x} [(1 + e^{-x})^{-2}]' \\ &= -6e^{-x} (1 + e^{-x})^{-2} + 6e^{-x} (-2) (1 + e^{-x})^{-3} (-1)e^{-x} \\ &= \frac{-6e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} + \frac{12(e^{-x})^2}{(1 + e^{-x})^3} = \frac{-6e^{-x}(1 + e^{-x})}{(1 + e^{-x})^3} + \frac{12(e^{-x})^2}{(1 + e^{-x})^3} \\ &= \frac{-6e^{-x}(1 + e^{-x}) + 12(e^{-x})^2}{(1 + e^{-x})^3} \end{aligned}$$

Nevneren er alltid positiv, så vi undersøker når telleren er lik null. Vi ser at $-6e^{-x}(1 + e^{-x}) + 12(e^{-x})^2 = -6e^{-x} - 6(e^{-x})^2 + 12(e^{-x})^2 = e^{-x}(-6 + 6e^{-x})$.

Med andre ord er $f''(x) = 0$ når $(-6 + 6e^{-x}) = 0$, og dette skjer når $x = 0$, da bytter også $f''(x)$ fortegn og vi har et vendepunkt. For å finne y -verdien regner vi ut at $y = f(3) = 6/(1 + e^{-0}) = 3$, da er $(0, 3)$ et vendepunkt.

- d) TODO: SKISSE HER.

Oppgave 7

- a) Den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med $p = \text{gunstige/mulige} = 6/10 = 0.6$ og $n = 10$ fordi å trekke kuler med tilbakelegging er en serie uavhengige deleksperimenter med konstant sannsynlighet p .
- b) Gitt $p = 6/10 = 0.6$ og $n = 10$ regner vi slik

$$E(X) = np = 10 \left(\frac{6}{10} \right) = \underline{\underline{6}}$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 10 \left(\frac{6}{10} \right) \frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \underline{\underline{2.4}}$$

Oppgave 8

- a) La X være vekten til et rugbrød. Da er X normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 1.00$ og standardavvik $\sigma = 0.05$. For å regne ut $P(0.9 < X < 1.1)$ må vi først gjøre om slik at vi får to “mindre enn” sannsynligheter (fordi det er dette som finnes i tabellen), og deretter standardisere ved formelen $Z = (X - \mu)/\sigma$. Vi regner slik

$$\begin{aligned} P(0.9 < X < 1.1) &= P(X < 1.1) - P(X < 0.90) \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{1.1 - 1}{0.05}\right) - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{0.9 - 1}{0.05}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{0.1}{0.05}\right) - P\left(Z < \frac{-0.1}{0.05}\right) \\ &= P(Z < 2) - P(Z < -2) \\ &= 0.9772 - 0.0228 \quad (\text{fra tabell}) \\ &= \underline{\underline{0.9544}} = \underline{\underline{95.4\%}} \end{aligned}$$

- b) La $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ være summen av 100 rugbrød. Når alle X 'ene er normalfordelte vil summen være normalfordelt. Selv om X 'ene ikke hadde vært normalfordelte, ville summen vært tilnærmet normalfordelt på grunn av sentralgrenseteoremet. For en sum av stokastiske variabler regner vi forventningen μ_S og standardavviket σ_S til summen S slik

$$E(S) = \mu_S = n\mu = 100(1) = 100$$

$$\text{SD}(S) = \sigma_S = \sqrt{n}\sigma = \sqrt{100}(0.05) = 5$$

Når regner vi ut på samme måte som i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned}
 P(99.5 < S < 100.5) &= P(X < 100.5) - P(X < 99.5) \\
 &= P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} < \frac{100.5 - 100}{0.5}\right) - P\left(\frac{S - \mu}{\sigma} < \frac{99.5 - 100}{0.5}\right) \\
 &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\
 &= 0.8413 - 0.1587 \quad (\text{fra tabell}) \\
 &= \underline{\underline{0.6826}} = 68.3\%
 \end{aligned}$$

Oppgave 9

La oss først se på noen generelle egenskaper til funksjonen $g(x) = af(x) + b$ før vi setter inn $a = -5$ og $b = 3$ og løser oppgaven. Den deriverte til $g(x)$ er gitt ved

$$g'(x) = [af(x) + b]' = af'(x),$$

og da er $g'(x) = 0$ når $f'(x) = 0$, og motsatt. Med andre ord har bunn- og toppunktene til $g(x)$ og $f(x)$ de samme x -verdiene. Dette gir mening, fordi å plusse på b flytter grafen opp langs y -aksen, mens å gange med a skalerer grafen—ingen av regneoperasjonene flytter grafen langs x -aksen.¹ Vi må derimot passe oss for $a < 0$; dersom a er negativ snur grafen seg om x -aksen slik at toppunkter blir til bunnpunkter og motsatt.

La oss gå bort fra generell teori og løse oppgaven.

I toppunktet $(2, 3)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et bunnpunkt når $x = 2$. Legg merke til at multiplikasjon med -5 gjør toppunkt til bunnpunkt og motsatt. I punktet $x = 2$ er $y = g(2) = -5f(2) + 3 = -5(3) + 3 = -12$. Da vet vi at $(2, -12)$ er et bunnpunkt til $g(x)$.

I bunnpunktet $(3, -4)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et toppunkt når $x = 3$. Videre er $y = g(3) = -5f(3) + 3 = -5(-4) + 3 = 23$. Da har vi at $(3, 23)$ er et toppunkt til $g(x)$.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

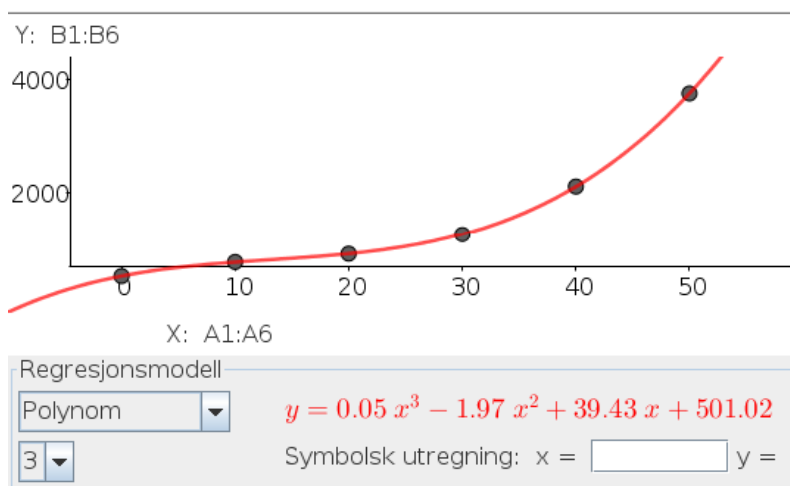
- a) Vi legger punktene for $K(x)$ inn i Geogebra, velger “Regresjonsanalyse” og undersøker et tredjegradspolynom, som vist i Figur 1. Vi får forslaget $K(x) = 0.05x^3 - 1.97x^2 + 39.42x + 501.02$. Inntekten er $I(x) = 80x$ fra oppgaveteksten,

¹Transformasjonen som flytter en funksjon er $g(x) = f(x - a)$, som flytter f med a mot høyre.

da blir overskuddet

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= 80x - [0.05x^3 - 1.97x^2 + 39.42x + 501.02] \\ &= -0.05x^3 + 1.97x^2 + 40.58x - 501.02 \end{aligned}$$

Dette stemmer godt overens med $O(x)$ som gitt i oppgaveteksten.

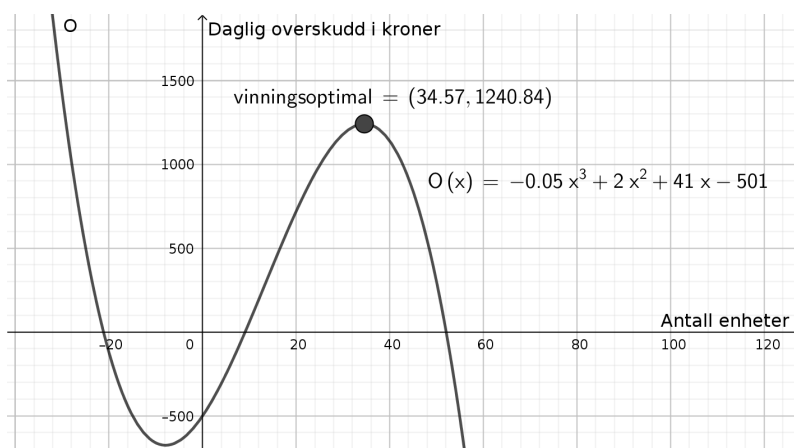


Figur 1: Løsning på oppgave 1 a, del 2. Koeffisientene passer godt med $O(x)$.

- b) Se Figur 2 for et plott av $O(x)$.
- c) Ettersom $O(x) = I(x) - K(x)$, er $I'(x) = K'(x)$ når $O'(x) = 0$. Da har vi et ekstremalpunkt, vi finner dette med Geogebra-kommandoen **Ekstremalpunkt(0, 0, 60)**. Punktet er (34.57, 1240.84). Verdien av x som maksimerer $O(x)$ er den vinningsoptimale produksjonsmengden, det vil si produksjonsmengden som gir størst overskudd. Ettersom $O(34) = 1239.8$ og $O(35) = 1240.25$, er den vinningsoptimale produksjonsmengden lik $x = 35$.
- d) La inntekten være $I(x) = px$, der p er en ukjent pris. Vi må finne minste $O(x) = I(x) - K(x) = px - K(x)$ slik at $O(x)$ er større enn eller lik null, for minst én x -verdi. Vi får en overskuddsfunksjon som blir

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= px - [0.05x^3 - 2x^2 + px + 501] \\ &= -0.05x^3 + 2x^2 + (80 - p)x - 501 \end{aligned}$$

Ved å lage en glider for p i Geogebra, ser vi at $O(x) \geq 0$ når $p \leq 79$. Høyeste pris blir $p = 79$, og da må bedriften produsere $x = 27$ varer per dag.



Figur 2: Løsning på oppgave 1 a og b, del 2.

Oppgave 2

- a) La oss oppsummere oppgaven i en tabell. Vi lar $b = 40000$ være det årlige beløpet, og $r = 1.05$ være rentefaktoren. La P_n være pengene etter n år, da er $P_n = P_{n-1}r + b$ fordi vi får renter på forrige års sum, og deretter setter vi inn et nytt beløp. En tabell som viser 15 år med sparing er vist nedenfor.

Innskudd	Dato	Penger
1	1. juli 2018	b
2	1. juli 2019	$br + b$
3	1. juli 2020	$br^2 + br + b$
\vdots	\vdots	\vdots
15	1. juli 2032	$br^{14} + br^{13} + \dots + br + b$
	1. juli 2033	$(br^{14} + br^{13} + \dots + br + b)r$

Ett år etter siste innbetaling får Eirik renter på forrige beløp, da ender han opp med

$$(br^{14} + \dots + br + b)r = b \left(\frac{1 - r^{15}}{1 - r} \right) r = 40000 \left(\frac{1 - 1.05^{15}}{1 - 1.05} \right) 1.05 = \underline{\underline{906299.67}}$$

For å gjøre utregningen i CAS taster vi inn

`Sum(b * r^i, i, 0, 14) * r`

etter å ha definert b og r i CAS. Vi får samme svar som ovenfor.

- b) La $T = 906299.67$ være løsningen på forrige deloppgave, og la u være det ukjente årlige uttaket. Da har Eirik $T - u$ kroner 1. juli 2033, $Tr - ur - u$ kroner 1. juli 2034, og så videre. Vi setter opp tabell.

Uttak	Dato	Penger
0	1. juli 2033	$T - u$
1	1. juli 2034	$Tr - ur - u$
2	1. juli 2035	$Tr^2 - ur^2 - ur - u$
\vdots	\vdots	\vdots
14	1. juli 2047	$Tr^{14} - u(r^{14} + \dots + r + 1)$

Den 1. juli 2047 skal han ha 0 kroner igjen. Vi får da likningen

$$Tr^{14} - u(r^{14} + \dots + r + 1) = 0$$

som vi løser i CAS med

`NLøs({T * r^14 - u * Sum(r^i, i, 0, 14) = 0}, {u})`

og får 83157.13 kroner som svar.

- c) For at fondet skal kunne betale ut i all fremtid, må utbetalingen og rentene kansellere hverandre. Vi ønsker at han har det samme på konto før utbetaling hvert år. Den 1. juli 2033 har Eirik T kroner før utbetaling. Så kommer en utbetaling, og han har $T - u$ kroner. Neste år får han renter og har $(T - u)r$ kroner før utbetaling. Vi ønsker at han skal ha like mye før utbetaling hvert år, da får vi likningen $(T - u)r = T$, som vi kan løse for den ukjente u slik

$$(T - u)r = T \Rightarrow u = \frac{T(r - 1)}{r} = \frac{906299.67(1.05 - 1)}{1.05} = \underline{\underline{43157.13}}$$

- d) Vi setter uttaket til $u = 30000$ og lar $k = 1.1$ være vekstfaktoren til uttaksbeløpet. Eirik tar ut u kroner i 2033, uk i 2034, uk^2 i 2035, og så videre. Vi setter opp en tabell med penger på kontoen rett etter uttak.

Uttak	Dato	Penger
0	1. juli 2033	$T - u$
1	1. juli 2034	$(T - u)r - uk = Tr - u(r + k)$
2	1. juli 2035	$((T - u)r - uk)r - uk^2 = Tr^2 - u(r^2 + rk + k^2)$
\vdots	\vdots	\vdots
14	1. juli 2047	$Tr^n - u \sum_{i=0}^n r^{n-i} k^i$

Vi løser med følgende Geogebra kommando i CAS

`NLøs({T * r^n - u * Sum(r^(n - i) * k^i, i, 0, n) = 0}, {n})`

og får $n = 18.16$. Når $n = 18$ er det omtrent 27.7 tusen kroner på konto etter uttak, mens når $n = 19$ er det -154.3 tusen kroner på konto etter uttak. Med andre ord går kontoen tom når $n = 19$, altså 1. juli 2052, da tar vi ut 27.7 tusen og tømmer kontoen.

TODO: Vis hvordan man kan bruke nårverdi til å løse denne.

Oppgave 3

- a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf