metis PRIVATISTSKOLE
AKADEMIET

Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2018

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 14. juni 2018 Antall sider: 11

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$, og må bruke regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Vi får $f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 4x^{1-1} + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 4}}$ som svar.

b) Vi skal derivere $g(x) = x/e^x$. Det er fullt mulig å bruke brøkregelen for derivasjon, men man kan også skrive om funksjonen til produktet $g(x) = xe^{-x}$ og bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$. Fordelen er at man slipper å huske brøkregelen. Utregningen blir

$$\begin{aligned} g'(x) =& (x)' e^{-x} + \left(e^{-x}\right)' x \\ =& 1e^{-x} + (-1)e^{-x}x \\ =& e^{-x} - e^{-x}x \\ =& \underline{\underline{e^{-x}(1-x)}} \end{aligned}$$

c) Vi skal derivere $h(x) = \ln\left(x^2 + 4x\right)$, og må bruke kjerneregelen $h'(x) = h'(u) \times u'(x)$, der u er en kjerne. Vi velger $u = x^2 + 4x$, da er $h(u) = \ln(u)$ og $h'(u) = 1/u$, slik at vi får

$$\begin{aligned} h'(x) =& h'(u) \times u'(x) \\ =& \left(\frac{1}{u}\right) \times (2x + 4) \\ =& \frac{2x+4}{u} = \underline{\underline{\frac{2x+4}{x^2+4x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet nedenfor, og vi kan bruke to forskjellige metoder: innsetningsmetoden eller addisjonsmetoden. Vi velger addisjonsmetoden.

$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 0 \quad \text{(A)} \\ 2x + 3y + z &= 3 \quad \text{(B)} \\ 3x + 2y - z &= -3 \quad \text{(C)} \end{aligned}$$

For å kvitte oss med variabelen z regner vi ut to nye likninger (D) = (A) $-$ 2 $\times$ (B) og (E) = (A) + 2 $\times$ (C) som følger.

$$\begin{aligned} x - 5y &= -6 \quad \text{(D)} \\ 11x + 5y &= -6 \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

Ved å legge disse sammen kvitter vi oss med y, får likningen $12x = -12$, og ser at $\underline{\underline{x = -1}}$. For å løse for y setter vi $x = -1$ inn i likning (D) eller (E) og ser at $\underline{\underline{y = 1}}$. Nå vet vi verdiene til x og y, og kan sette dette inn i (A), (B) eller (C) for å finne ut at $\underline{\underline{z = 2}}$. På eksamen bør du sette en prøve på svaret—det går fort og du vet umiddelbart om du har regnet riktig.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

a) Generelt er et polynom $P(x)$ delelig på $(x - a)$ dersom $P(a) = 0$. Her er $P(x)$ delelig på $(x - 1)$ ettersom

$$P(1) = (1)^3 - 3 \cdot (1)^2 - 13 \cdot (1) + 15 = 1 - 3 - 13 + 15 = \underline{\underline{0}}.$$

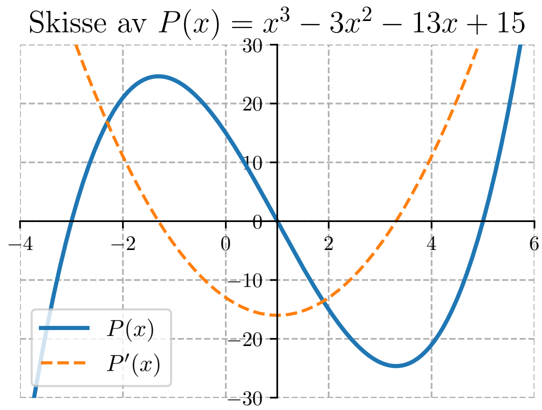
b) For å løse $P(x) > 0$ må vi først faktorisere $P(x)$. Vi vet at $(x-1)$ er en faktor, så vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l} \big(\ x^3 - 3x^2 - 13x + 15\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 2x - 15 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \quad -2x^2 - 13x \\ \quad \underline{2x^2 - 2x} \\ \qquad -15x + 15 \\ \qquad \underline{15x - 15} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Vi kan bruke ABC-formelen eller en annen metode for å finne ut at $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$. Med andre ord er $P(x) = (x-1)(x-5)(x+3)$, vi setter opp en fortegnslinje og kommer frem til at $\underline{\underline{P(X) > 0 \text{ når } -3 < x < 1 \text{ og når } x > 5}}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$(x-1)$	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	0	———	———	———	———	———
$(x-5)$	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	– – –	0	———
$(x+3)$	– – –	0	———	———	———	———	———	———	———	———	———
$f(x)$	– – –	0	———	———	———	0	– – –	– – –	– – –	0	———

Et plott av funksjonen og den deriverte er vist nedenfor.



Oppgave 4

a) Vi bruker formelen $a_n = a_1 + d(n-1)$ og informasjonen fra oppgaven.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + 3d \quad \Rightarrow \quad 14 = 2 + 3d \quad \Rightarrow \quad d = 4$$

Nå vet vi at differansen $d = 4$ i den artimetiske rekken, vi setter inn og får

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_n = 2 + 4(n-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = 4n - 2}}.$$

b) Vi bruker summeformelen for en aritmetisk rekke til å regne ut summen for en generell n, og løser deretter når $n = 100$. For en generell n har vi at

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \left(\frac{2 + 4n - 2}{2}\right) n = (2n)\, n = 2n^2.$$

Når $n = 100$, blir $S_n = S_{100} = 2 \cdot (100)^2 = \underline{\underline{20000}}$.

Oppgave 5

a) En geometrisk rekke $a_1(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$ konvergerer dersom $-1 < k < 1$. Her er $a_1 = 3$, $a_2 = 3/4$ og $a_3 = 3/16$, og $k = 1/4$ fordi hvert ledd er lik $1/4$ ganget med det foregående leddet. $\underline{\underline{\text{Rekken konvergerer fordi } k = 1/4.}}$ Summen av den uendelige geometriske rekken regner vi ut som

$$S_\infty = a_1 \left(\frac{1}{1-k}\right) = 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 3 \left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = 3 \left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{4}}$$

b) Desimaltallet $0.242424\dots$ kan skrives som $\frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \dots$ fordi desimalene 24 gjentar seg, og å dele på 100 flytter desimalene to plasser til høyre.

Første ledd blir 0.42, andre ledd blir 0.0042, tredje ledd blir 0.000042 og så videre—da blir summen $0.424242\ldots$. For å skrive $0.242424\ldots$ som en brøk bruker vi formelen for sum av en uendelig geometrisk rekke. Vi vet at

$$a_1(1 + k + k^2 + \ldots) = a_1 \left(\frac{1}{1-k} \right),$$

og når vi setter inn $a_1 = 0.24 = 24/100$ og $k = 1/100$ får vi

$$\frac{24}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100} \right)^2 + \ldots \right) = \frac{24}{100} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \right) = \frac{24}{100} \cdot \frac{100}{99} = \underline{\underline{\frac{24}{99}}}.$$

Oppgave 6

I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x) = \frac{6}{1 + e^{-x}} = 6 \left(1 + e^{-x} \right)^{-1}.$$

a) Grafen til $f(x)$ er alltid stigende dersom den deriverte er positiv for alle verdier av x. Vi deriverer funksjonen ved hjelp av kjerneregelen. Vi velger $u = 1 + e^{-x}$ som kjerne, da er $f(u) = 6u^{-1}$, og vi får at

$$\begin{aligned} f'(x) =& f'(u) \times u'(x) \\ =& 6(-1)u^{-2} \times \left((-1)e^{-x} \right) \\ =& \frac{6e^{-x}}{u^2} = \frac{6e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

La oss nå undersøke $f'(x)$. Telleren er alltid positiv fordi e^{-x} alltid er positiv, nevneren er alltid positiv fordi $(1 + e^{-1})$ alltid er større enn 1, og å ta et tall som er større enn 1 i andre gir alltid i et positivt resultat. Både telleren og nevneren er positive for alle x, og da må $f'(x)$ alltid være positiv, og da stiger $f(x)$ alltid.

b) Vi ser på nevneren $(1 + e^{-x})$. Funksjonen e^{-x} er alltid positiv, så da vet vi at

$$1 < 1 + e^{-x} < \infty.$$

Når $1 + e^{-x}$ blir stor, går $f(x)$ mot 0. Når $1 + e^{-x}$ går mot 1, går $f(x)$ mot 6. Da vet vi at $\underline{\underline{0 < f(x) < 6}}$ for alle verdien av x.

c) En funksjon har ventepunkt når den dobbelderiverte skifter fortegn. Vi regner ut den dobbelderiverte fra $f'(x) = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 6e^{-x} \left(1 + e^{-x} \right)^{-2}$ ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen slik

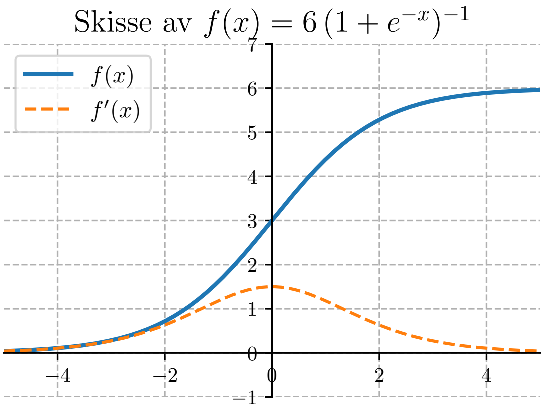
$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[6e^{-x}\right]'\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\right]' \\
&= -6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}(-2)\left(1+e^{-x}\right)^{-3}(-1)e^{-x} \\
&= \frac{-6e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^{2}} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^{2}}{\left(1+e^{-x}\right)^{3}} = \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)^{3}} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^{2}}{\left(1+e^{-x}\right)^{3}} \\
&= \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)+12\left(e^{-x}\right)^{2}}{\left(1+e^{-x}\right)^{3}}
\end{aligned}$$

Nevnerer er alltid positiv, så vi undersøker når telleren er lik null. Vi ser at

$$-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)+12\left(e^{-x}\right)^{2} = -6e^{-x}-6\left(e^{-x}\right)^{2}+12\left(e^{-x}\right)^{2} = e^{-x}\left(-6+6e^{-x}\right).$$

Med andre ord er $f''(x)=0$ når $(-6+6e^{-x})=0$, og dette skjer når $x=0$, da bytter også $f''(x)$ fortegn og vi har et vendepunkt. For å finne y-verdien regner vi ut at $y=f(0)=6/(1+e^{-0})=3$, da er $\underline{\underline{(0,3)\text{ et vendepunkt}}}$.

d) En skisse av funksjonen $f(x)=6\left(1+e^{-x}\right)^{-1}$ er inkludert nedenfor. På del 1 har vi ikke hjelpemidler, men basert på det vi vet om funksjonen skal det være mulig å lage en skisse som ligner på figuren for hånd.



Oppgave 7

a) Den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med $p=\text{gunstige}/\text{mulige}=6/10=0.6$ og $n=10$ fordi å trekke kuler med tilbakelegging er en serie uavhengige deleksperimenter med konstant sannsynlighet p.

b) Gitt $p=6/10=0.6$ og $n=10$ regner vi slik

$$\mathrm{E}(X) = np = 10\left(\frac{6}{10}\right) = \underline{\underline{6}}$$

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 10\left(\frac{6}{10}\right)\frac{4}{10} = \frac{24}{10} = \underline{\underline{2.4}}$$

Oppgave 8

a) La X være vekten til et rugbrød. Da er X normalfordelt med forventningsverdi $\mu = 1.00$ og standardavvik $\sigma = 0.05$. For å regne ut $P(0.9 < X < 1.1)$ må vi først gjøre om slik at vi får to "mindre enn" sannsynligheter (fordi det er dette som finnes i tabellen), og deretter standardisere ved formelen $Z = (X - \mu)/\sigma$. Vi regner slik

$$\begin{aligned} P(0.9 < X < 1.1) &= P(X < 1.1) - P(X < 0.90) \\ &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.1-1}{0.05}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{0.9-1}{0.05}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{0.1}{0.05}\right) - P\left(Z < \frac{-0.1}{0.05}\right) \\ &= P\left(Z < 2\right) - P\left(Z < -2\right) \\ &= 0.9772 - 0.0228 \qquad \text{(fra tabell)} \\ &= \underline{\underline{0.9544 = 95.4\%}} \end{aligned}$$

b) La $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$ være summen av 100 rugbrød. Når alle X'ene er normalfordelte vil summen være normalfordelt. Selv om X'ene ikke hadde vært normalfordelte, ville summen vært tilnærmet normalfordelt på grunn av sentralgrenseteoremet. For en sum av stokastiske variabler regner vi forventningen μ_S og standardavviket σ_S til summen S slik

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= \mu_S = n\mu = 100 \cdot 1 = 100 \\ \mathrm{SD}(S) &= \sigma_S = \sqrt{n}\sigma = \sqrt{100} \cdot 0.05 = 0.5 \end{aligned}$$

Når regner vi ut på samme måte som i forrige deloppgave.

$$\begin{aligned} P(99.5 < S < 100.5) &= P(X < 100.5) - P(X < 99.5) \\ &= P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < \frac{100.5-100}{0.5}\right) - P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < \frac{99.5-100}{0.5}\right) \\ &= P\left(Z < 1\right) - P\left(Z < -1\right) \\ &= 0.8413 - 0.1587 \qquad \text{(fra tabell)} \\ &= \underline{\underline{0.6826 = 68.3\%}} \end{aligned}$$

Oppgave 9

La oss først se på noen generelle egenskaper til funksjonen $g(x) = af(x) + b$ før vi setter inn $a = -5$ og $b = 3$ og løser oppgaven. Den deriverte til $g(x)$ er gitt ved

$$g'(x) = [af(x) + b]' = af'(x),$$

og da er $g'(x) = 0$ når $f'(x) = 0$, og motsatt. Med andre ord har bunn- og toppunktene til $g(x)$ og $f(x)$ de samme x-verdiene. Dette gir mening, fordi å plusse på b flytter grafen opp langs y-aksen, mens å gange med a skalerer grafen—ingen av regneoperasjonene flytter grafen langs x-aksen.[1] Vi må derimot passe oss for $a < 0$; dersom a er negativ snur grafen seg om x-aksen slik at toppunkter blir til bunnpunkter og motsatt.

La oss gå bort fra generell teori og løse oppgaven.
I toppunktet $(2, 3)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et bunnpunkt når $x = 2$. Legg merke til at multiplikasjon med -5 gjør toppunkt til bunnpunkt og motsatt. I punktet $x = 2$ er $y = g(2) = -5f(2)+3 = -5\cdot3+3 = -12$. Da vet vi at $\underline{\underline{(2, -12) \text{ er et bunnpunkt}}}$ til $g(x)$.

I bunnpunktet $(3, -4)$ er $f'(x) = 0$, da er $g'(x) = -5f'(x) = -5 \times 0 = 0$, så $g(x)$ har et toppunkt når $x = 3$. Videre er $y = g(3) = -5f(3) + 3 = -5 \cdot (-4) + 3 = 23$. Da har vi at $\underline{\underline{(3, 23) \text{ er et toppunkt}}}$ til $g(x)$.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi legger punktene for $K(x)$ inn i Geogebra, velger "Regresjonsanalyse" og undersøker et tredjegradspolynom, som vist i Figur 1. Vi får forslaget $K(x) = 0.05x^3 - 1.97x^2 + 39.42x + 501.02$. Inntekten er $I(x) = 80x$ fra oppgaveteksten, da blir overskuddet

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= 80x - \left[0.05x^3 - 1.97x^2 + 39.42x + 501.02\right] \\ &= -0.05x^3 + 1.97x^2 + 40.58x - 501.02 \end{aligned}$$

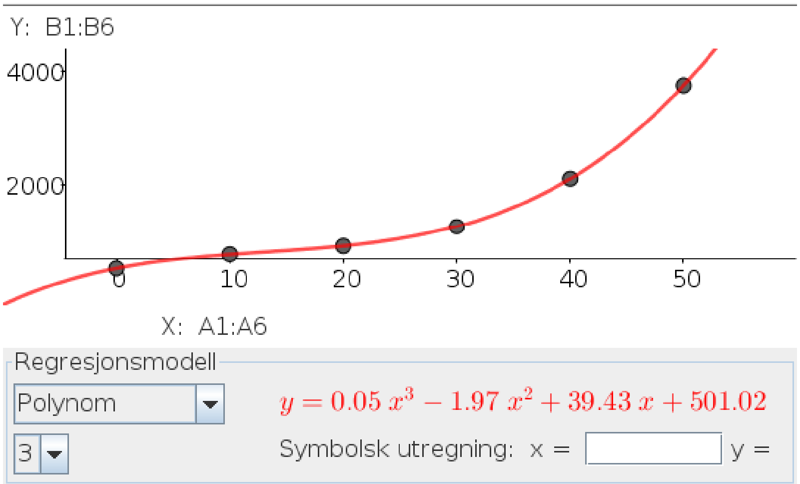
Dette stemmer godt overens med $O(x)$ som gitt i oppgaveteksten.

b) Se Figur 2 for et plott av $O(x)$.

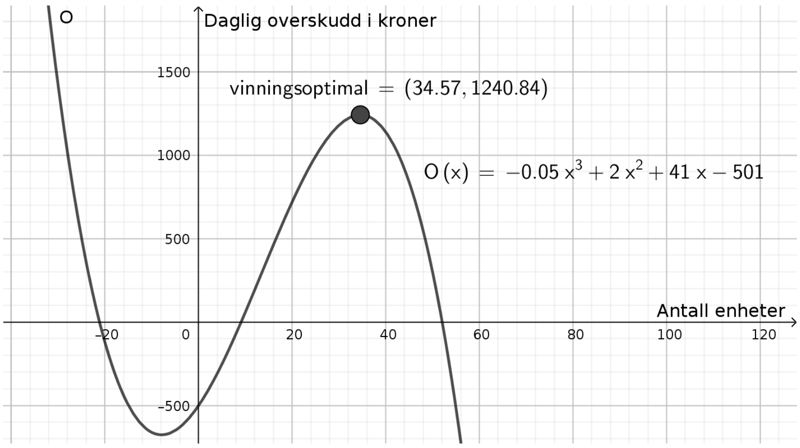
c) Ettersom $O(x) = I(x) - K(x)$, er $I'(x) = K'(x)$ når $O'(x) = 0$. Da har vi et ekstremalpunkt, vi finner dette med Geogebra-kommandoen
`Ekstremalpunkt(O, 0, 60)`.
Punktet er $(34.57, 1240.84)$. Verdien av x som maksimerer $O(x)$ er den vinningsoptimale produksjonsmengden, det vil si produksjonsmengden som gir størst overskudd. Ettersom $O(34) = 1239.8$ og $O(35) = 1240.25$, er den $\underline{\underline{\text{vinningsoptimale produksjonsmengden lik } x = 35}}$.

d) La inntekten være $I(x) = px$, der p er en ukjent pris. Vi må finne minste $O(x) = I(x) - K(x) = px - K(x)$ slik at $O(x)$ er større enn eller lik null, for

[1] Transformasjonen som flytter en funksjon er $g(x) = f(x - a)$, som flytter f med a mot høyre.



Figur 1: Løsning på oppgave 1 a, del 2. Koeffisientene passer godt med $O(x)$.



Figur 2: Løsning på oppgave 1 a og b, del 2.

minst én x-verdi. Vi får en overskuddsfunksjon som blir

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= px - \left[0.05x^3 - 2x^2 + 39x + 501\right] \\ &= -0.05x^3 + 2x^2 + (p - 39)x - 501 \end{aligned}$$

Ved å lage en glider[2] for p i Geogebra, ser vi at $O(x) \geq 0$ når $p \geq 40$. Laveste pris blir $\underline{\underline{p = 40}}$, og da må bedriften produsere $\underline{\underline{x = 27}}$ varer per dag.

Oppgave 2

a) La oss oppsummere oppgaven i en tabell. Vi lar $b = 40000$ være det årlige beløpet, og $r = 1.05$ være rentefaktoren. La P_n være pengene etter n år, da er $P_n = P_{n-1}r + b$ fordi vi får renter på forrige års sum, og deretter setter vi inn et nytt beløp. En tabell som viser 15 år med sparing er vist nedenfor.

[2] Vi lager glider ved å trykke på knappen nest til høyre på toppen av vinduet.

Innskudd	**Dato**	**Penger**
1	1. juli 2018	b
2	1. juli 2019	$br + b$
3	1. juli 2020	$br^2 + br + b$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	1. juli 2032	$br^{14} + br^{13} + \cdots + br + b$
	1. juli 2033	$(br^{14} + br^{13} + \cdots + br + b)\, r$

Ett år etter siste innbetaling får Eirik renter på forrige beløp, da ender han opp med

$$\left(br^{14} + \cdots + br + b\right) r = b\left(\frac{1 - r^{15}}{1 - r}\right) r = 40000\left(\frac{1 - 1.05^{15}}{1 - 1.05}\right) 1.05 = \underline{\underline{906299.67}}$$

For å gjøre utregningen i CAS taster vi inn
`Sum(b * r^i, i, 0, 14) * r`
etter å ha definert `b` og `r` i CAS. Vi får samme svar som ovenfor.

b) La $T = 906299.67$ være løsningen på forrige deloppgave, og la u være det ukjente årlige uttaket. Da har Eirik $T - u$ kroner 1. juli 2033, $Tr - ur - u$ kroner 1. juli 2034, og så videre. Vi setter opp tabell.

Uttak	**Dato**	**Penger**
0	1. juli 2033	$T - u$
1	1. juli 2034	$Tr - ur - u$
2	1. juli 2035	$Tr^2 - ur^2 - ur - u$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	1. juli 2047	$Tr^{14} - u\,(r^{14} + \cdots + r + 1)$

Den 1. juli 2047 skal han ha 0 kroner igjen. Vi får da likningen

$$Tr^{14} - u\left(r^{14} + \cdots + r + 1\right) = 0$$

som vi løser i CAS med
`NLøs({T * r^14 - u * Sum(r^i, i, 0, 14) = 0}, {u})`
og får $\underline{\underline{\text{83157.13 kroner}}}$ som svar.

c) For at fondet skal kunne betale ut i all fremtid, må utbetalingen og rentene kansellere hverandre. Vi ønsker at Eirik har det samme på konto før utbetaling hvert år. Den 1. juli 2033 har han T kroner før utbetaling. Så kommer en utbetaling, og han har $T - u$ kroner. Neste år får han renter og har $(T - u)r$ kroner før utbetaling. Vi ønsker at han skal ha like mye før utbetaling hvert år, da får vi likningen $(T - u)r = T$, som vi kan løse for den ukjente u slik

$$(T - u)r = T \quad \Rightarrow \quad u = \frac{T(r-1)}{r} = \frac{906299.67(1.05 - 1)}{1.05} = \underline{\underline{43157.13}}$$

d) Vi setter uttaket til $u = 30000$ og lar $k = 1.1$ være vekstfaktoren til uttaksbeløpet. Eirik tar ut u kroner i 2033, uk i 2034, uk^2 i 2035, og så videre. Vi setter opp en tabell med penger på kontoen rett etter uttak.

Uttak	Dato	Penger
0	1. juli 2033	$T - u$
1	1. juli 2034	$(T-u)r - uk = Tr - u(r+k)$
2	1. juli 2035	$((T-u)r - uk)r - uk^2 = Tr^2 - u(r^2 + rk + k^2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
14	1. juli 2047	$Tr^n - u\sum_{i=0}^{n} r^{n-i}k^i$

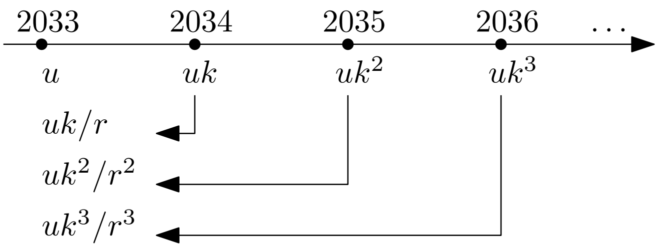
Vi løser med følgende Geogebra kommando i CAS

```
NLøs({T * r^n - u * Sum(r^(n - i) * k^i, i, 0, n) = 0}, {n})
```

og får $n = 18.16$. Når $n = 18$ er det omtrent 27.7 tusen kroner på konto etter uttak, mens når $n = 19$ er det -154.3 tusen kroner på konto etter uttak. Med andre ord går kontoen tom når $n = 19$, altså 1. juli 2052, da tar vi ut 27.7 tusen og tømmer kontoen.

Alternativ løsningsmetode med nåverdi

Det er mange måter å løse en slik oppgave på. En annen metode er å bruke nåverdi. Vi sammenligner $T = 906299.67$ med nåverdien til alle uttakene. Kontoen er tom når summen av alle uttakene $u, uk, uk^2, \ldots$ er lik T. Men uttakene er spredt i tid, så vi må finne nåverdien til hvert uttak og sammenligne alt på samme tidspunkt. Vi velger å sammenligne i år 2033. Tabellen nedenfor viser at vi flytter uttakene tilbake i tid ved å dele på r for hvert år vi går tilbake i tid.



Vi får likningen

$$T = u + u\left(\frac{k}{r}\right) + u\left(\frac{k}{r}\right)^2 + u\left(\frac{k}{r}\right)^3 + \cdots = u\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{k}{r}\right)^i,$$

som løses ved følgende Geogebra kommando i CAS

```
NLøs({u * Sum((k / r)^i, i, 0, n) = T}, {u})
```

og vi får $n = 18.16$ som svar—samme som ovenfor.

Oppgave 3

a) La X være vekten på en flaske, da er X normalfordelt med $\mu = 250$ og $\sigma = 3$. Sannsynligheten for at en flaske veier for lite er $P(X < 245)$. Dette regner vi enkelt ut i sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra, og får

$$P(X < 245) = 0.0478 \approx 4.8\%$$

b) La Y være antall flasker som veier for lite, da er Y binomisk fordelt med $n = 15$ og $p = 0.0478$. Sannsynligheten for at én eller flere flasker veier for lite er $P(Y \geq 1)$, vi kan regne dette ut på følgende måte

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{15}{0} p^0 (1-p)^{15} = 1 - (1-p)^{15} = 0.5203 = \underline{\underline{52.0\%}}$$

Det er nok enda enklere å bruke sannsynlighetskalkulatoren. Vi får samme svar uansett, men denne formelen er grei å ha til neste oppgave.

c) Sannsynligheten for at en flaske veier for lite er $P(Y \geq 1) = 1 - (1-p)^{15}$, vi ønsker å finne p slik at $P(Y \geq 1) < 0.1$, da får vi ulikheten

$$\begin{aligned} 1 - (1-p)^{15} &< 0.1 \\ 0.9 &< (1-p)^{15} \\ p &< 1 - 0.9^{1/15} \approx \underline{\underline{0.007}} \end{aligned}$$

Vi ser at sannsynligheten for at én flaske veier for lite kan maksimalt være 0.7% dersom sannsynligheten for at en eske inneholder flasker som veier for lite maksimalt skal være høyst 10%.

d) Vi må finne μ slik at $P(X \leq 245) = 0.007$. Vi standardiserer og sammenligner med z slik at $P(Z < z) = 0.007$, enten via tabell eller via sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra.

$$\begin{aligned} P(X \leq 245) &= 0.007 \\ P\left(Z \leq \frac{245 - \mu}{3}\right) &= 0.007 \\ P\left(Z \leq -2.457\right) &= 0.007 \end{aligned}$$

Dette gir oss likningen $(245 - \mu)/3 = -2.457$, som vi løser for $\underline{\underline{\mu = 252.37}}$. Dette svaret kan vi dobbelsjekke ved å lage en fordeling med $\mu = 252.37$ og $\sigma = 3$ i sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra, og verifisere at $P(X < 245) = 0.007$.