Løsningsforslag – Eksamen S1, våren 2018

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 1. september 2018 Antall sider: 12

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi flytter alt over på én side av likningen, slik at vi får en andregradslikning som vi kan faktorisere med ABC-formelen (eller en annen metode).

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x + 1 &= x - 3 \\
2x^2 - 6x + 4 &= 0 \qquad \text{(flytter over)} \\
2\left(x^2 - 3x + 2\right) &= 0 \qquad \text{(trekker ut 2)} \\
2(x-1)(x-2) &= 0 \qquad \text{(faktoriserer)} \\
\underline{\underline{x = 1 \text{ eller } x = 2}}
\end{aligned}$$

b) Her flytter vi over slik at vi får logaritmen på en side alene, og deretter tar vi 10 opphøyd i begge sider av likningen for å bli kvitt logaritmen.

$$\begin{aligned}
2\lg(x+7) &= 4 \\
\lg(x+7) &= 2 \qquad \text{(deler på 2)} \\
10^{\lg(x+7)} &= 10^2 \qquad \text{(opphøyer i 10)} \\
x + 7 &= 100 \qquad \text{(bruker at } 10^{\lg a} = a\text{)} \\
\underline{\underline{x = 93}}
\end{aligned}$$

c) Vi samler først sammen så mye som mulig med samme grunntall, og så bruker vi egenskapen at dersom $a^x = a^y$, så må $x = y$.

$$\begin{aligned}
3 \cdot 2^{3x+2} &= 12 \cdot 2^6 \\
3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^6 \qquad \text{(faktoriserer 12)} \\
3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2^8 \qquad \text{(bruker } a^n \cdot a^m = a^{n+m}\text{)} \\
2^{3x+2} &= 2^8 \qquad \text{(deler på 3)} \\
3x + 2 &= 8 \qquad \text{(bruker } 2^x = 2^y \Leftrightarrow x = y\text{)} \\
\underline{\underline{x = 2}}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet

$$\begin{aligned} &(1) \quad x^2 + 3y = 7 \\ &(2) \quad 3x - y = 1. \end{aligned}$$

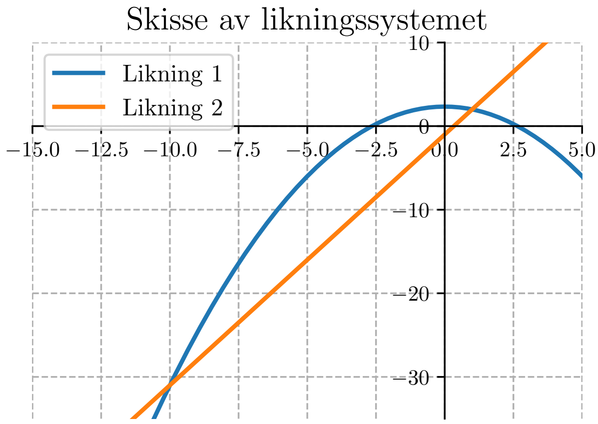
Det er mange fremgangsmåter som vil fungere, og dersom man gjør det riktig så skal man få samme svar uansett. Vi velger her å først løse likning (2) for y, og får da $y = 3x - 1$. Dette setter vi inn i likning (1):

$$\begin{aligned} x^2 + 3\left(3x - 1\right) &= 7 \\ x^2 + 9x - 3 &= 7 \\ x^2 + 9x - 10 &= 0 \\ (x + 10)(x - 1) &= 0 \\ x = -10 \text{ eller } x &= 1. \end{aligned}$$

Vi bruker x-verdiene til å finne y-verdier, ved å bruke likningen $y = 3x - 1$. Vi får:

$$\begin{aligned} x &= -10 \quad &\Rightarrow \quad y &= 3(-10) - 1 = -31 \\ x &= 1 \quad &\Rightarrow \quad y &= 3(1) - 1 = 2 \end{aligned}$$

Løsningene er altså $\underline{\underline{(x, y) = (-10, -31)}}$ og $\underline{\underline{(x, y) = (1, 2)}}$. Som en kommentar nevnes det at dersom man plotter likningene som kurver i et koordinatsystem, vil løsningene være skjæringspunktene mellom kurvene. Figuren nedenfor viser dette.



Oppgave 3

a) Her ganger vi bare ut og kansellerer. Det kan være lurt å bruke andre kvadratsetning $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ på den første parentesen.

$$\begin{gathered} \left(2x - 3\right)^2 - 2x\left(2x - 6\right) = \\ 4x^2 - 12x + 9 - \left[4x^2 - 12x\right] = \\ 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x = \underline{9} \end{gathered}$$

b) Her må vi huske logaritmesetningene, altså at $\lg(a^x) = x\lg(a)$ og at $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$. Vi viser to metoder, som begge gir samme svar.

Alternativ 1

$$\lg(2a) + \lg(4a) + \lg(8a) - \lg(16a) =$$
$$\lg\left(\frac{2a \cdot 4a \cdot 8a}{16a}\right) = \lg\left(4a^2\right) = \lg(4) + \lg\left(a^2\right) = \underline{\underline{2\lg(2) + 2\lg(a)}}$$

Alternativ 2

$$\lg(2a) + \lg(4a) + \lg(8a) - \lg(16a) =$$
$$\lg(2) + \lg(a) + \lg(4) + \lg(a) + \lg(8) + \lg(a) - [\lg(16) + \lg(a)] =$$
$$\lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - [4\lg(2) + \lg(a)] =$$
$$\lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - 4\lg(2) - \lg(a) =$$
$$\underline{\underline{2\lg(2) + 2\lg(a)}}$$

c) Vi må finne fellesnevner for å legge sammen brøkene. Fellesnevneren er ab, så vi ganger den første bøken med b og den andre med a, både i teller og nevner.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b + a - (a-b)}{ab} = \frac{2b}{ab} = \frac{2}{\underline{\underline{a}}}$$

Oppgave 4

Vi bruker ABC-formelen eller en annen metode for å faktorisere andregradspolynomet, og får $(x-1)(x-2) \geq 0$. Polynomet bytter fortegn i $x = 1$ og i $x = 2$, fra negativt til positivt eller motsatt. Vi kan finne ut når polynomet er positivt og negativ på tre ulike måter: (1) vi kan sjekke et punkt som $x = 1.5$, (2) lage en fortegnslinje eller (3) argumentere med at fortegnet i andregradsleddet x^2 er positivt—da vokser funksjonen når x blir stor eller liten, og polynomet er bare negativt når $1 < x < 2$.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2}}.$$

Oppgave 5

a) I Pascals trekant er hvert tall summen av de to tallene ovenfor. De første åtte radene ser slik ut.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
\mathbf{1} \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad \mathbf{4} \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad \mathbf{35} \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

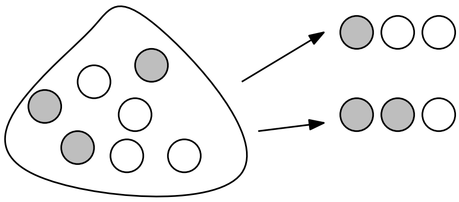
Dersom man teller radene og kolonnene med å starte fra null, finner vi binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$ i rad n, kolonne k. De tallene som vi trenger i neste deloppgave er merket med fet skrift.

b) Det er 3 røde kuler og 4 blå. Sannsynligheten for å trekke 3 blå er antall mulige måter å trekke 3 blå og 0 røde, delt på antall mulige måter å trekke 3 kuler totalt. Vi henter binomialkoeffisientene fra Pascals trekant i forrige oppgave.

$$P(3 \text{ blå}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{35} = \underline{\underline{\frac{4}{35}}}$$

c) Vi presenterer to ulike måter å løse oppgaven på. Begge gir samme svar.

Alternativ 1



Dersom vi skal trekke 3 kuler, og vi må minst ha én av hver farge, er det to måter å gjøre dette på: enten ved å trekke 1 rød og 2 blå, eller ved å trekke 2 røde og 1 blå. Se figuren ovenfor[1]. Vi kan legge sammen sannsynlighetene slik:

$$P(1 \text{ rød}, 2 \text{ blå}) + P(2 \text{ røde}, 1 \text{ blå}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

Alternativ 2

Her er en annen fremgangsmåte. La R være antall røde, og B være antall blå. For å finne sannsynligheten for at det er minst én blå ($B \geq 1$) og minst én rød

[1]Figuren er i sort/hvitt. De røde kulene er illustrert som gråe, og de blå som hvite.

$(R \geq 1)$ kan vi dele opp hendelsesrommet som vist i figuren nedenfor, og regne ut alle sannsynlighetene. Summen av disse sannsynlighetene må være 1, og sannsynligheten som er ukjent er vist med et spørsmålstegn.

	$R = 0$	$R \geq 1$
$B = 0$	0	1/35
$B \geq 1$	4/35	?

Vi ser at

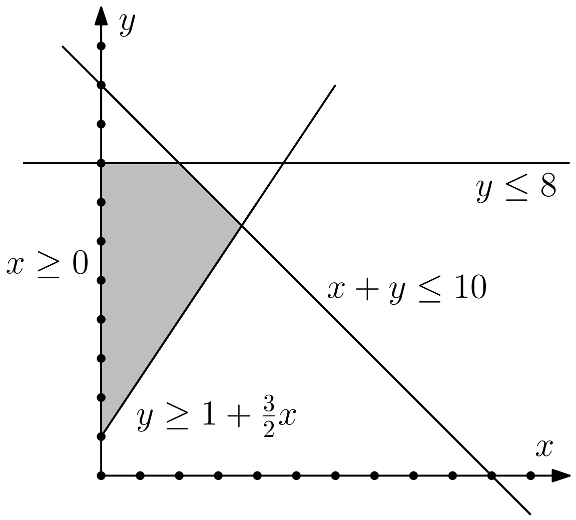
$$
\begin{aligned}
P(R = 0 \cap B = 0) &= 0 \quad \text{(umulig, fordi vi må trekke 3 kuler)} \\
P(R \geq 1 \cap B = 0) &= \frac{1}{35} \quad \text{(kun én måte å velge ingen blå på)} \\
P(R = 0 \cap B \geq 1) &= \frac{4}{35} \quad \text{(dette er svaret på forrige deloppgave)}
\end{aligned}
$$

og ettersom summen av alle sannsynligheten må være 1, kan vi regne ut at

$$P(R \geq 1 \cap B \geq 1) = 1 - \left(0 + \frac{1}{35} + \frac{4}{35}\right) = \frac{30}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

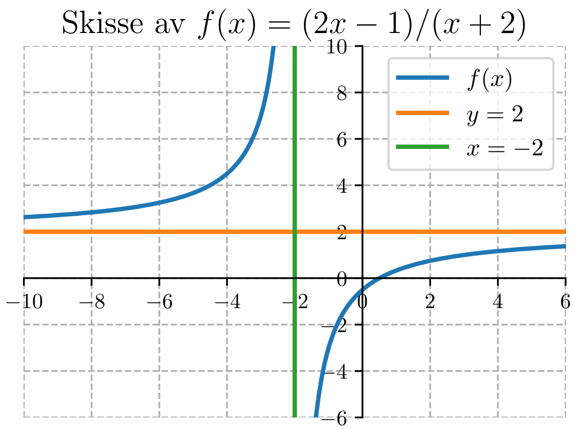
Oppgave 6

Ulikhetene $x \geq 0$ og $y \leq 8$ burde være enkle å skissere. Ulikheten $x + y \leq 10$ sier at summen må være mindre enn eller lik 10, og burde også være rimelig enkel. Den siste ulikheten kan vi skrive om til $y \geq 1 + \frac{3}{2}x$, og da er det muligens lettere tegne linja. I figuren nedenfor er det grå området avgrenset av alle ulikhetene.



Oppgave 7

a) Vi ser av funksjonsuttrykket at $x = -2$ er en vertikal asymptote, og at $y = 2$ er en horisontal asymptote. En verikal asymptote oppstår når vi deler på null, mens en vertikal asymptote oppstår når funksjonen går mot et endelig tall når x går mot positivt eller negativt evig. Når vi har funnet asymptotene kan vi gjøre noen stikkprøver, av f.eks. $f(0)$ og $f(-4)$, og dette gir oss nok informasjon til å skissere grafen. Se figuren nedenfor.



b) Vi setter $f(x)$ lik $x-2$ og løser slik:

$$\frac{2x-1}{x+2} = x-2 \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = (x-2)(x+2) \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = x^2 - 2^2$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -1 \text{ eller } x = 3}}$$

Oppgave 8

a) Her må vi bruke derivasjonsregelen $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$. Vi får løsningen

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^{3-2} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 = \underline{\underline{6x^2 + 6x - 12}}.$$

b) Dersom vi har toppunkt eller bunnpunkt, må $g'(x) = 0$ i disse punktene. Vi setter $g'(x) = 0$ og løser likningen for x. Vi får da

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1) = 0.$$

Fra dette ser vi at $g'(x) = 0$ når $x = -2$ og når $x = 1$. Vi må finne ut om dette er toppunkt eller bunnpunkt. Dette kan vi gjøre med en fortegnslinje.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
6	——	——	——	——	——	——	——	——	——	——	——
$(x+2)$	- - -	- - -	0	——	——	——	——	——	——	——	——
$(x-1)$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	——	——	——	——	——
$g'(x)$	——	——	0	- - -	- - -	0	——	——	——	——	——

Ettersom funksjonen stiger før $x = -2$ og synker etterpå, må $x = -2$ være assosiert med et toppunkt. Tilsvarende logikk sier oss at $x = 1$ er et bunnpunkt.

$$\begin{aligned} x = -2 \quad &\Rightarrow \quad y = g(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20 \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad y = g(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7 \end{aligned}$$

Altså er $\underline{\underline{(-2, 20) \text{ et toppunkt}}}$ og $\underline{\underline{(1, -7) \text{ et bunnpunkt}}}$.

c) Den gjennomsnittlige vekstfarten er endring i y delt på endring i x, altså

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = \underline{\underline{2}}.$$

d) Den momentane vekstfarten er verdien til den deriverte. At den momentane vekstfaren er 24, betyr at vi må løse $g'(x) = 24$. Vi løser denne likningen slik:

$$\begin{aligned} g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 &= 24 \\ 6(x^2 + x - 6) &= 0 \\ 6(x + 3)(x - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at x-verdiene er 2 og -3. Vi renger ut y-verdiene:

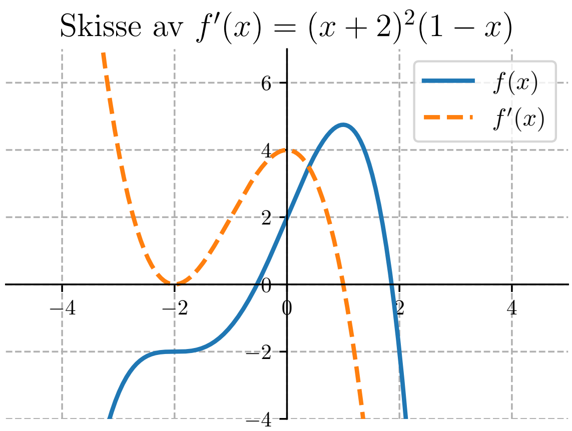
$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\Rightarrow \quad y = g(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) = 16 + 12 - 24 = 4 \\ x = -3 \quad &\Rightarrow \quad y = g(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) = -54 + 27 + 36 = 9 \end{aligned}$$

Den momentane vekstfaren er 24 i punktene $\underline{\underline{(2, 4)}}$ og $\underline{\underline{(-3, 9)}}$.

Oppgave 9

a) Grafen stiger når $f'(x) > 0$, og synker når $f'(x) < 0$. Vi ser fra fortegnslinjen at $\underline{\underline{f(x) \text{ stiger når } x < -2 \text{ og } -2 < x < 1, \text{ og at } f(x) \text{ synker når } x > 1}}$.

b) Her må vi skissere en funksjon som stiger, stopper å stige, stiger videre og deretter synker. Den skal ha et terrassepunkt, og et toppunkt. Basert på fortegnslinjen kan vi anta at den deriverte er $f'(x) = (x + 2)^2(1 - x)$. Både en skisse av en funksjon $f'(x)$ og dens deriverte er inkludert i figuren nedenfor.



Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

Torsk har kilopris t Sei har kilopris s

Vi lar t være prisen per kilo torsk, og s være prisen per kilo sei. Basert på oppgaveteksten setter vi opp følgende likninger

$$\begin{aligned} 110t + 200s &= 6795 \\ 150t + 230s &= 8390. \end{aligned}$$

Det er ofte en god sjekk at enhetene i likningen stemmer. I dette tilfellet er enhetene

$$\frac{\text{pris}}{\text{kilo}} \times \text{kilo} + \frac{\text{pris}}{\text{kilo}} \times \text{kilo} = \text{pris},$$

og kansellerer man kilo på venstre siden er enhetene like. I praksis løser vi slike oppgave i CAS i Geogebra ved å skrive

```
Løs[{110 * t + 200 * s = 6795, 150 * t + 230 * s = 8390}, {t, s}]
```

og vi finner at $\underline{\underline{t = 24.5 \text{ og } s = 20.5}}$.

Oppgave 2

a) For å bruke en binomisk sannsynlighetsmodell må følgende forutsetninger være oppfylt[2]:

1) Uavhengige delforsøk – Om én enkeltperson møter opp eller ikke, påvirker ikke de andre personene.

2) Binært utfall – Det er kun to muligheter: enten møter man opp med sannsynlighet p, eller ikke med sannsynlighet $1 - p$.

3) Samme sannsynlighet – Alle har lik sannsynlighet p for å møte opp.

b) Dette er binomisk forsøk med $n = 122$ og sannsynlighet $p = 0.94$, som er sannsynligheten for at en tilfeldig person møter opp. La X være antall personer som møter opp totalt. Dersom flere enn 116 personer møter, får ikke alle plass. Dersom $X \leq 116$ får derimot alle plass. Fra sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra finner vi at

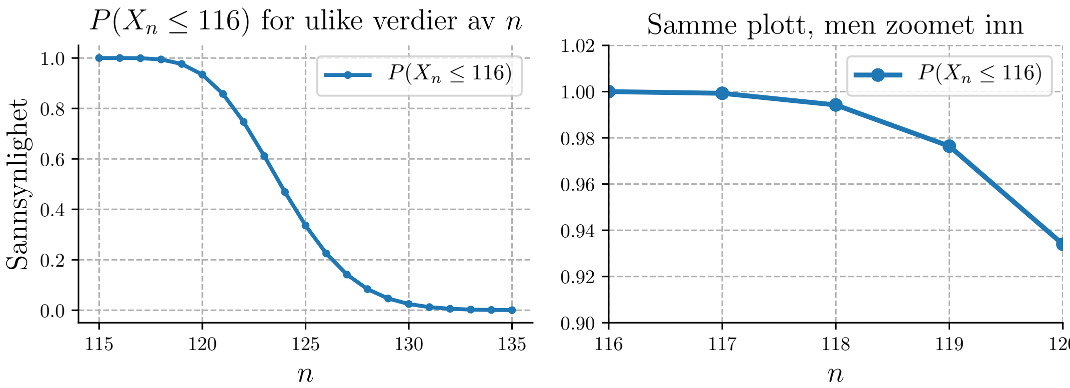
$$P(X \leq 116) = 0.7466 \approx \underline{\underline{74.7\%}}.$$

[2] Forutsetningen om uavhengighet er nok brutt i virkeligheten, eksempelvis med familier som reiser sammen. Om foreldrene ikke møter opp, møter neppe barna heller.

c) La X_n være antall personer som møter opp totalt, når n billetter er solgt. Vi ønsker å finne den største n slik at $P(X_n \leq 116) \geq 0.95$, med andre ord største antall personer vi kan selge til, slik at sannsynligheten for at alle får plass er minst 95 %. Vi prøver oss frem med forskjellige n-verdier i Geogebra, og får

$$\begin{aligned}
P(X_{116} \leq 116) &= 1 \\
P(X_{117} \leq 116) &= 0.9993 \\
P(X_{118} \leq 116) &= 0.9942 \\
P(X_{119} \leq 116) &= 0.9764 \\
P(X_{120} \leq 116) &= 0.934
\end{aligned}$$

Fra dette ser vi at største antall billetter som kan selges er $\underline{\underline{n = 119}}$. Hele sammenhengen mellom antall billetter solgt, og sannsynligheten for at alle får plass, er vist i plottet nedenfor. Dette er ikke en del av svaret, det er kun inkludert som en bonus.



Oppgave 3

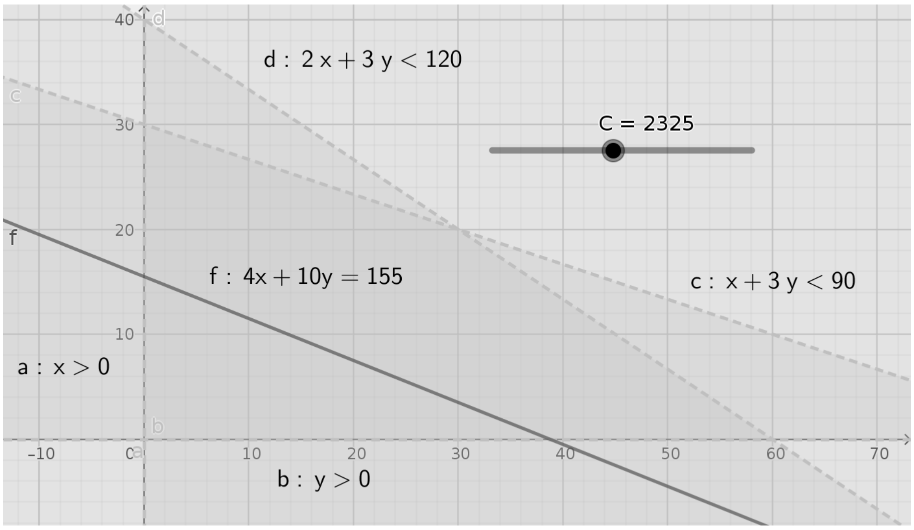
a) Vi bruker setningene fra oppgaven til å sette opp ulikheter. Dersom Frode bruker 10 minutter på en kasse av type A, og det blir produsert x av disse, bruker han totalt $10x$ minutter på kasser av denne typen. På samme måte, dersom han bruker 30 minutter på en kasse av type B, og det blir produsert y av disse, bruker han totalt $30y$ minutter på kasser av denne typen. Ettersom han har totalt $15 \cdot 60 = 900$ minutter å bruke på én uke, får vi ulikheten

$$10x + 30y \leq 900.$$

Samme logikk gjelder for Per, og vi ender opp med følgende ulikheter:

$$\begin{aligned}
x \geq 0,\ y \geq 0 &\quad \rightarrow \quad \text{Antall kasser er ikke negativt} \\
x + 3y \leq 90 &\quad \rightarrow \quad \text{Begrensning på Frodes arbeidstid} \\
2x + 3y \leq 120 &\quad \rightarrow \quad \text{Begrensning på Pers arbeidstid}
\end{aligned}$$

b) Området er skravert i figuren nedenfor. Linja f brukes i neste deloppgave.

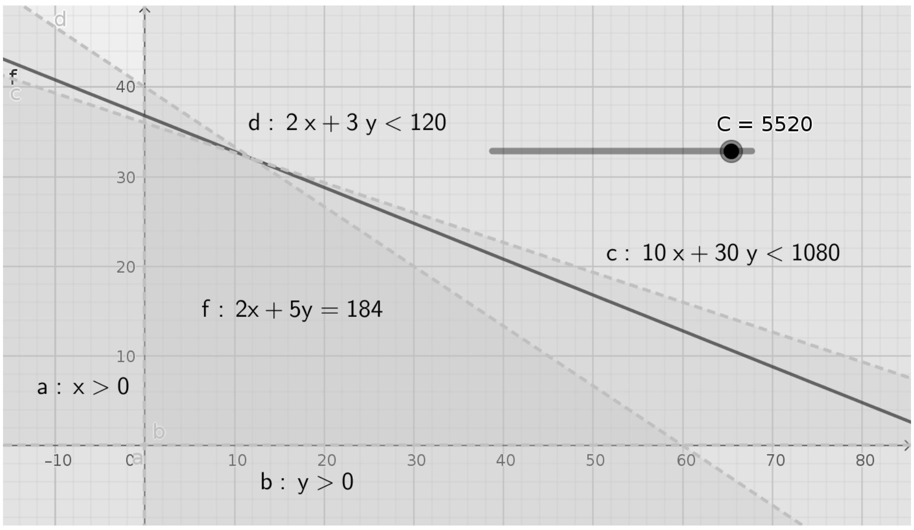


c) Vi lager en glider med navn C i Geogebra, og lager deretter linja $60x+150y = C$. Dette er den totale fortjenesten, som vi ønsker å maksimere. Ved å endre på C ser vi at maksimal fortjeneste skjer i $(x, y) = (30, 20)$. De bør produsere 30 kasser av type A, og 20 kasser av type B for maksimal fortjeneste.

d) Dersom Frode kan jobbe 3 timer ekstra erstatter vi ulikheten som begrenser Frodes arbeidstid. Vi legger på 3 timer ekstra:

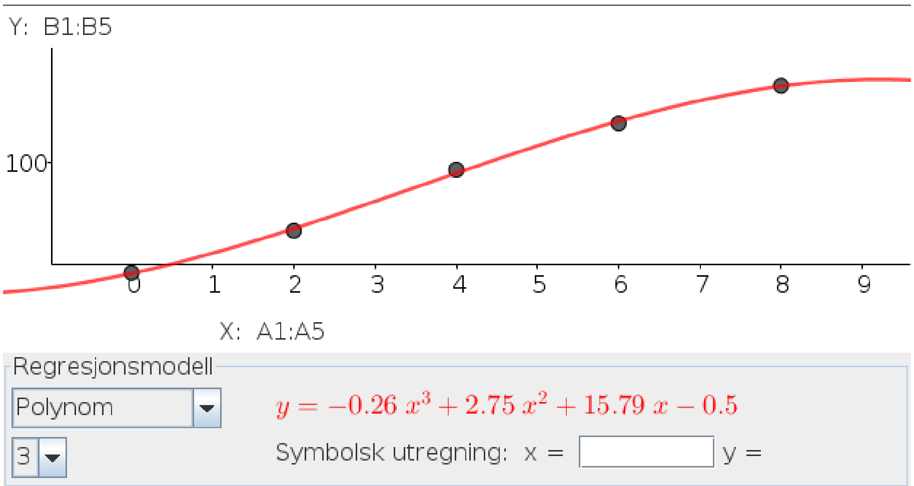
$$10x + 30y \leq 60 \cdot 15 \quad \rightarrow \quad 10x + 30y \leq 60 \cdot (15 + 3)$$

Deretter løser vi det nye systemet på samme måte som i forrige deloppgave. Ved å endre på C ser vi at maksimal fortjeneste skjer i $(x, y) = (12, 32)$. De bør produsere 12 kasser av type A, og 32 kasser av type B for maksimal fortjeneste. Dette er vist på figuren nedenfor.

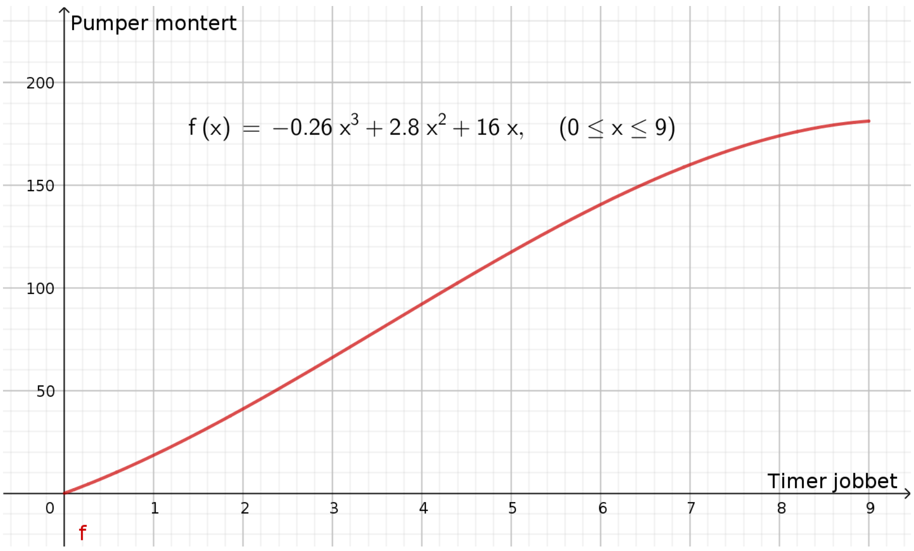


Oppgave 4

a) Vi legger observasjonene inn i regnearket i Geogebra, markerer cellene og velger "Regresjonsanalyse." Tredjegradspolynomet vi får er vist i figuren nedenfor.



b) Vi bruker `Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)`–kommandoen for å begrensen funksjonen til $0 \leq x \leq 9$, setter navn på funksjonen i grafikkfeltet og gir navn til aksene.



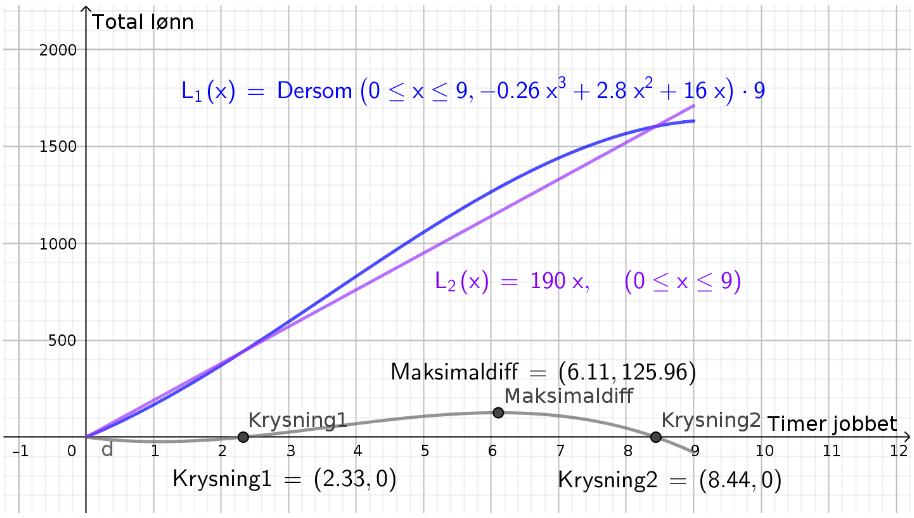
c) La L_1 være total lønn når Arne får lønn per pumpe. Den totale lønnen blir

$$L_1(x) = \text{antall pumper} \times \frac{\text{lønn}}{\text{pumpe}} = f(x) \times 9.$$

La så L_2 være total lønn når han får lønn per time. Den totalt lønnen blir da

$$L_2(x) = \text{antall timer} \times \frac{\text{lønn}}{\text{time}} = x \times 190.$$

Nedenfor er $L_1(x)$ og $L_2(x)$ plottet i Geogebra. Det lønner seg å velge betaling per monterte pumpe når $L_1(x) > L_2(x)$. Vi kan enten finne krysningspunkter, eller finne nullpunktene til differansen $d(x) = L_1(x) - L_2(x)$.



Dersom han jobber hele timer må han jobbe $\underline{\underline{\text{mellom 3 og 8 timer}}}$. Mer presist må han jobbe mellom

$$2.33 \text{ timer} = 2 \text{ timer} + 60 \cdot 0.33 \text{ min} = 2 \text{ timer og } 20 \text{ min}$$
$$8.44 \text{ timer} = 8 \text{ timer} + 60 \cdot 0.44 \text{ min} = 8 \text{ timer og } 26 \text{ min}$$

d) Vi bruker `Ekstremalpunkt`–kommandoen på differansen $d(x)$. Dette punktet er vist som “Maksimaldiff” ovenfor. Den største forskjellen oppstår etter

$$6.11 \text{ timer} = 6 \text{ timer} + 60 \cdot 0.11 \text{ min} = \underline{\underline{6 \text{ timer og } 7 \text{ min}}}.$$