

Løsningsforslag – Eksamen S1, våren 2018

Laget av Tommy O.

Sist oppdatert: 7. juli 2018

Antall sider: 12

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi flytter alt over på én side av likningen, slik at vi får en andregradslikning som vi kan faktorisere med ABC-formelen (eller en annen metode).

$$\begin{aligned}2x^2 - 5x + 1 &= x - 3 \\2x^2 - 6x + 4 &= 0 && \text{(flytter over)} \\2(x^2 - 3x + 2) &= 0 && \text{(trekker ut 2)} \\2(x - 1)(x - 2) &= 0 && \text{(faktorerer)} \\ \underline{\underline{x = 1 \text{ eller } x = 2}}\end{aligned}$$

- b) Her flytter vi over slik at vi får logaritmen på en side alene, og deretter tar vi 10 opphøyd i begge sider av likningen for å bli kvitt logaritmen.

$$\begin{aligned}2\lg(x + 7) &= 4 \\ \lg(x + 7) &= 2 && \text{(deler på 2)} \\ 10^{\lg(x+7)} &= 10^2 && \text{(opphøyer i 10)} \\ x + 7 &= 100 && \text{(bruker at } 10^{\lg a} = a \text{)} \\ \underline{\underline{x = 93}}\end{aligned}$$

- c) Vi samler først sammen så mye som mulig med samme grunntall, og så bruker vi egenskapen at dersom $a^x = a^y$, så må $x = y$.

$$\begin{aligned}3 \cdot 2^{3x+2} &= 12 \cdot 2^6 \\ 3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^6 && \text{(faktorerer 12)} \\ 3 \cdot 2^{3x+2} &= 3 \cdot 2^8 && \text{(bruker } a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{)} \\ 2^{3x+2} &= 2^8 && \text{(deler på 3)} \\ 3x + 2 &= 8 && \text{(bruker } 2^x = 2^y \Leftrightarrow x = y \text{)} \\ \underline{\underline{x = 2}}\end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet

$$(1) \quad x^2 + 3y = 7$$

$$(2) \quad 3x - y = 1.$$

Det er mange fremgangsmåter som vil fungere, og dersom man gjør det riktig så skal man få samme svar uansett. Vi velger her å først løse likning (2) for y , og får da $y = 3x - 1$. Dette setter vi inn i likning (1):

$$x^2 + 3(3x - 1) = 7$$

$$x^2 + 9x - 3 = 7$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x + 10)(x - 1) = 0$$

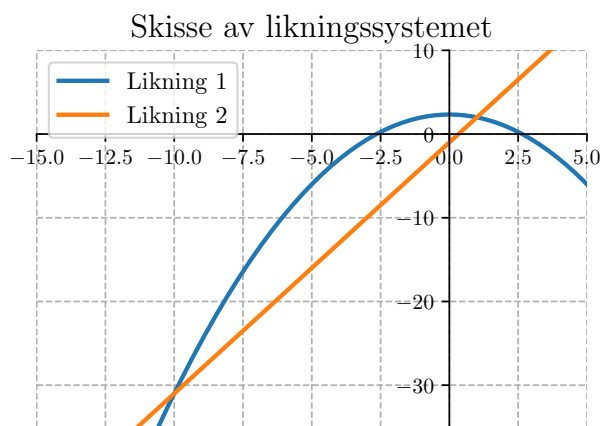
$$x = -10 \text{ eller } x = 1.$$

Vi bruker x -verdiene til å finne y -verdier, ved å bruke likningen $y = 3x - 1$. Vi får:

$$x = -10 \quad \Rightarrow \quad y = 3(-10) - 1 = -31$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 3(1) - 1 = 2$$

Løsningene er altså $(x, y) = (-10, -31)$ og $(x, y) = (1, 2)$. Som en kommentar nevnes det at dersom man plottes likningene som kurver i et koordinatsystem, vil løsningene være skjæringspunktene mellom kurvene. Figuren nedenfor viser dette.



Oppgave 3

- a) Her ganger vi bare ut og kansellerer. Det kan være lurt å bruke andre kvadratsetning $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ på den første parentes.

$$\begin{aligned} (2x - 3)^2 - 2x(2x - 6) &= \\ 4x^2 - 12x + 9 - [4x^2 - 12x] &= \\ 4x^2 - 12x + 9 - 4x^2 + 12x &= \underline{\underline{9}} \end{aligned}$$

- b) Her må vi huske logaritmesetningene, altså at $\lg(a^x) = x \lg(a)$ og at $\lg(a \cdot b) = \lg(a) + \lg(b)$. Vi viser to metoder, som begge gir samme svar.

Alternativ 1

$$\begin{aligned} \lg(2a) + \lg(4a) + \lg(8a) - \lg(16a) &= \\ \lg\left(\frac{2a \cdot 4a \cdot 8a}{16a}\right) &= \lg(4a^2) = \lg(4) + \lg(a^2) = \underline{\underline{2\lg(2) + 2\lg(a)}} \end{aligned}$$

Alternativ 2

$$\begin{aligned} \lg(2a) + \lg(4a) + \lg(8a) - \lg(16a) &= \\ \lg(2) + \lg(a) + \lg(4) + \lg(a) + \lg(8) + \lg(a) - [\lg(16) + \lg(a)] &= \\ \lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - [4\lg(2) + \lg(a)] &= \\ \lg(2) + \lg(a) + 2\lg(2) + \lg(a) + 3\lg(2) + \lg(a) - 4\lg(2) - \lg(a) &= \\ \underline{\underline{2\lg(2) + 2\lg(a)}} \end{aligned}$$

- c) Vi må finne fellesnevner for å legge sammen brøkene. Fellesnevneren er ab , så vi ganger den første brøken med b og den andre med a , både i teller og nevner.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{b+a-(a-b)}{ab} = \frac{2b}{ab} = \underline{\underline{\frac{2}{a}}}$$

Oppgave 4

Vi bruker ABC-formelen eller en annen metode for å faktorisere andregradspolynom, og får $(x-1)(x-2) \geq 0$. Polynomet bytter fortegn i $x=1$ og i $x=2$, fra negativt til positivt eller motsatt. Vi kan finne ut når polynomet er positivt og negativt på tre ulike måter: (1) vi kan sjekke et punkt som $x=1.5$, (2) lage en fortegnslinje eller (3) argumentere med at fortegnet i andregradsleddet x^2 er positivt—da vokser funksjonen når x blir stor eller liten, og polynomet er bare negativt når $1 < x < 2$.

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2.}}$$

Oppgave 5

- a) I Pascals trekant er hvert tall summen av de to tallene ovenfor. De første åtte radene ser slik ut.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 1 & & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
 \end{array}$$

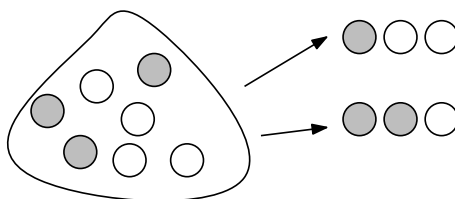
Dersom man teller radene og kolonnene med å starte fra null, finner vi binomialkoeffisienten $\binom{n}{k}$ i rad n , kolonne k . De tallene som vi trenger i neste deloppgave er merket med fet skrift.

- b) Det er 3 røde kuler og 4 blå. Sannsynligheten for å trekke 3 blå er antall mulige måter å trekke 3 blå og 0 røde, delt på antall mulige måter å trekke 3 kuler totalt. Vi henter binomialkoeffisientene fra Pascals trekant i forrige oppgave.

$$P(3 \text{ blå}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{35} = \frac{4}{\underline{\underline{35}}}$$

- c) Vi presenterer to ulike måter å løse oppgaven på. Begge gir samme svar.

Alternativ 1



Dersom vi skal trekke 3 kuler, og vi må minst ha én av hver farge, er det to måter å gjøre dette på: enten ved å trekke 1 rød og 2 blå, eller ved å trekke 2 røde og 1 blå. Se figuren ovenfor¹. Vi kan legge sammen sannsynlighetene slik:

$$P(1 \text{ rød}, 2 \text{ blå}) + P(2 \text{ røde}, 1 \text{ blå}) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{35} = \frac{6}{\underline{\underline{7}}}$$

Alternativ 2

Her er en annen fremgangsmåte. La R være antall røde, og B være antall blå. For å finne sannsynligheten for at det er minst én blå ($B \geq 1$) og minst én rød

¹Figuren er i sort/hvitt. De røde kulene er illustrert som gråe, og de blå som hvite.

($R \geq 1$) kan vi dele opp hendelsesrommet som vist i figuren nedenfor, og regne ut alle sannsynlighetene. Summen av disse sannsynlighetene må være 1, og sannsynligheten som er ukjent er vist med et spørsmålstegn.

	$R = 0$	$R \geq 1$
$B = 0$	0	$1/35$
$B \geq 1$	$4/35$?

Vi ser at

$$P(R = 0 \cap B = 0) = 0 \quad (\text{umulig, fordi vi må trekke 3 kuler})$$

$$P(R \geq 1 \cap B = 0) = \frac{1}{35} \quad (\text{kun én måte å velge ingen blå på})$$

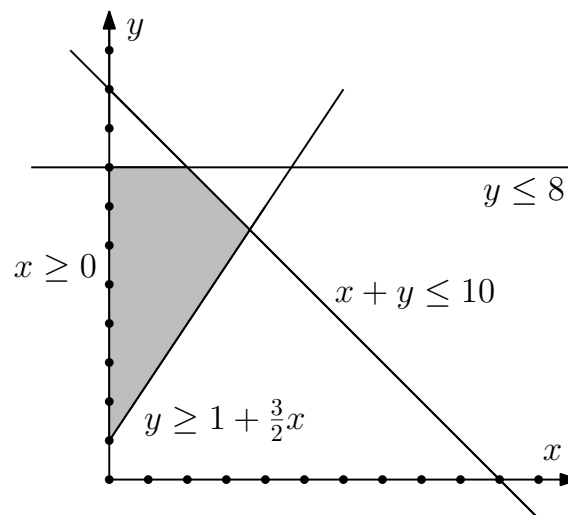
$$P(R = 0 \cap B \geq 1) = \frac{4}{35} \quad (\text{dette er svaret på forrige deloppgave})$$

og ettersom summen av alle sannsynlighetene må være 1, kan vi regne ut at

$$P(R \geq 1 \cap B \geq 1) = 1 - \left(0 + \frac{1}{35} + \frac{4}{35}\right) = \frac{30}{35} = \underline{\underline{\frac{6}{7}}}$$

Oppgave 6

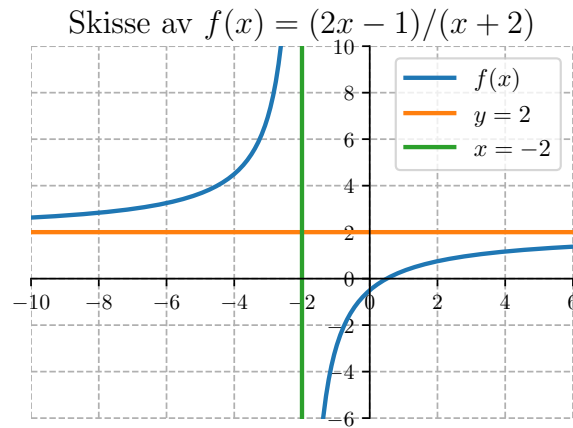
Ulikhetene $x \geq 0$ og $y \leq 8$ burde være enkle å skissere. Ulikheten $x + y \leq 10$ sier at summen må være mindre enn eller lik 10, og burde også være rimelig enkel. Den siste ulikheten kan vi skrive om til $y \geq 1 + \frac{3}{2}x$, og da er det muligens lettere tegne linja. I figuren nedenfor er det grå området avgrenset av alle ulikhetene.



Oppgave 7

- a) Vi ser av funksjonsuttrykket at $x = -2$ er en vertikal asymptote, og at $y = 2$ er en horisontal asymptote. En vertikal asymptote oppstår når vi deler på null,

mens en vertikal asymptote oppstår når funksjonen går mot et endelig tall når x går mot positivt eller negativt evig. Når vi har funnet asymptotene kan vi gjøre noen stikkprøver, av f.eks. $f(0)$ og $f(-4)$, og dette gir oss nok informasjon til å skissere grafen. Se figuren nedenfor.



b) Vi setter $f(x)$ lik $x - 2$ og løser slik:

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x + 2} = x - 2 &\Rightarrow 2x - 1 = (x - 2)(x + 2) \Rightarrow 2x - 1 = x^2 - 2^2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 &\Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = -1 \text{ eller } x = 3}} \end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Her må vi bruke derivasjonsregelen $(x^k)' = kx^{k-1}$. Vi får løsningen

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^{3-2} + 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 = \underline{\underline{6x^2 + 6x - 12}}.$$

b) Dersom vi har toppunkt eller bunnpunkt, må $g'(x) = 0$ i disse punktene. Vi setter $g'(x) = 0$ og løser likningen for x . Vi får da

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x + 2)(x - 1) = 0.$$

Fra dette ser vi at $g'(x) = 0$ når $x = -2$ og når $x = 1$. Vi må finne ut om dette er toppunkt eller bunnpunkt. Dette kan vi gjøre med en fortegnslinje.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
6	_____										
$(x + 2)$	-	-	-	-	-	0	-	-	-	-	-
$(x - 1)$	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-	-
$g'(x)$	-	-	-	0	-	-	-	-	0	-	-

Ettersom funksjonen stiger før $x = -2$ og synker etterpå, må $x = -2$ være assosiert med et toppunkt. Tilsvarende logikk sier oss at $x = 1$ er et bunnpunkt.

$$x = -2 \Rightarrow y = g(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$$

$$x = 1 \Rightarrow y = g(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) = 2 + 3 - 12 = -7$$

Altså er $(-2, 20)$ et toppunkt og $(1, -7)$ et bunnpunkt.

- c) Den gjennomsnittlige vekstfarten er endring i y delt på endring i x , altså

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{4 - 0}{2} = \underline{\underline{2}}.$$

- d) Den momentane vekstfarten er verdien til den deriverte. At den momentane vekstfaren er 24, betyr at vi må løse $g'(x) = 24$. Vi løser denne likningen slik:

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 24$$

$$6(x^2 + x - 6) = 0$$

$$6(x + 3)(x - 2) = 0.$$

Vi ser at x -verdiene er 2 og -3 . Vi rengjør ut y -verdiene:

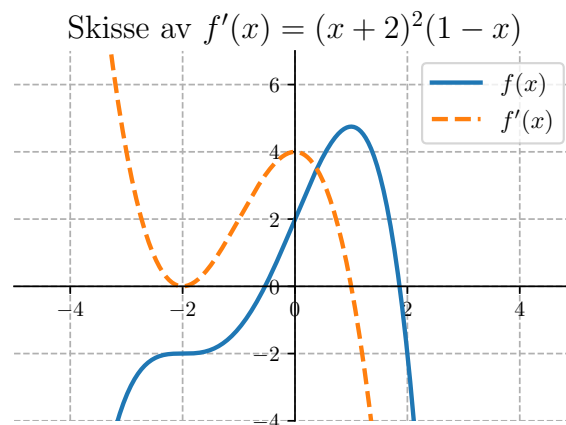
$$x = 2 \Rightarrow y = g(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 12(2) = 16 + 12 - 24 = 4$$

$$x = -3 \Rightarrow y = g(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 12(-3) = -54 + 27 + 36 = 9$$

Den momentane vekstfaren er 24 i punktene $(2, 4)$ og $(-3, 9)$.

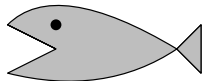
Oppgave 9

- a) Grafen stiger når $f'(x) > 0$, og synker når $f'(x) < 0$. Vi ser fra fortegnslinjen at $f(x)$ stiger når $x < -2$ og $-2 < x < 1$, og at $f(x)$ synker når $x > 1$.
- b) Her må vi skissere en funksjon som stiger, stopper å stige, stiger videre og deretter synker. Den skal ha et terrassepunkt, og et toppunkt. Basert på fortegnslinjen kan vi anta at den deriverte er $f'(x) = (x + 2)^2(1 - x)$. Både en skisse av en funksjon $f(x)$ og dens deriverte er inkludert i figuren nedenfor.



Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1



Torsk har kilopris t



Sei har kilopris s

Vi lar t være prisen per kilo torsk, og s være prisen per kilo sei. Basert på oppgaveteksten setter vi opp følgende likninger

$$110t + 200s = 6795$$

$$150t + 230s = 8390.$$

Det er ofte en god sjekk at enhetene i likningen stemmer. I dette tilfellet er enhetene

$$\frac{\text{pris}}{\text{kilo}} \times \text{kilo} + \frac{\text{pris}}{\text{kilo}} \times \text{kilo} = \text{pris},$$

og kansellerer man kilo på venstre siden er enhetene like. I praksis løser vi slike oppgave i CAS i Geogebra ved å skrive

`Løs[{110 * t + 200 * s = 6795, 150 * t + 230 * s = 8390}, {t, s}]`

og vi finner at $t = 24.5$ og $s = 20.5$.

Oppgave 2

- a) For å bruke en binomisk sannsynlighetsmodell må følgende forutsetninger være oppfylt²:
- 1) Uavhengige delforsøk – Om én enkeltperson møter opp eller ikke, påvirker ikke de andre personene.
 - 2) Binært utfall – Det er kun to muligheter: enten møter man opp med sannsynlighet p , eller ikke med sannsynlighet $1 - p$.
 - 3) Samme sannsynlighet – Alle har lik sannsynlighet p for å møte opp.
- b) Dette er binomisk forsøk med $n = 122$ og sannsynlighet $p = 0.94$, som er sannsynligheten for at en tilfeldig person møter opp. La X være antall personer som møter opp totalt. Dersom flere enn 116 personer møter, får ikke alle plass. Dersom $X \leq 116$ får derimot alle plass. Fra sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra finner vi at

$$P(X \leq 116) = 0.7466 \approx \underline{\underline{74.5\%}}.$$

²Forutsetningen om uavhengighet er nok brutt i virkeligheten, eksempelvis med familier som reiser sammen. Om foreldrene ikke møter opp, møter neppe barna heller.

- c) La X_n være antall personer som møter opp totalt, når n billetter er solgt. Vi ønsker å finne den største n slik at $P(X_n \leq 116) \geq 0.95$, med andre ord største antall personer vi kan selge til, slik at sannsynligheten for at alle får plass er minst 95 %. Vi prøver oss frem med forskjellige n -verdier i Geogebra, og får

$$P(X_{116} \leq 116) = 1$$

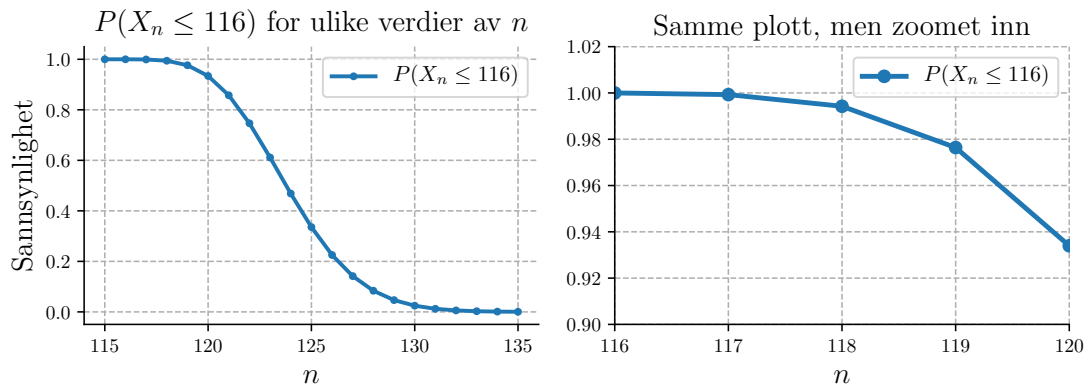
$$P(X_{117} \leq 116) = 0.9993$$

$$P(X_{118} \leq 116) = 0.9942$$

$$P(X_{119} \leq 116) = 0.9764$$

$$P(X_{120} \leq 116) = 0.934$$

Fra dette ser vi at største antall billetter som kan selges er $n = 119$. Hele sammenhengen mellom antall billetter solgt, og sannsynligheten for at alle får plass, er vist i plottet nedenfor. Dette er ikke en del av svaret, det er kun inkludert som en bonus.



Oppgave 3

- a) Vi bruker setningene fra oppgaven til å sette opp ulikheter. Dersom Frode bruker 10 minutter på en kasse av type A, og det blir produsert x av disse, bruker han totalt $10x$ minutter på kasser av denne typen. På samme måte, dersom han bruker 30 minutter på en kasse av type B, og det blir produsert y av disse, bruker han totalt $30y$ minutter på kasser av denne typen. Ettersom han har totalt $15 \cdot 60 = 900$ minutter å bruke på én uke, får vi ulikheten

$$10x + 30y \leq 900.$$

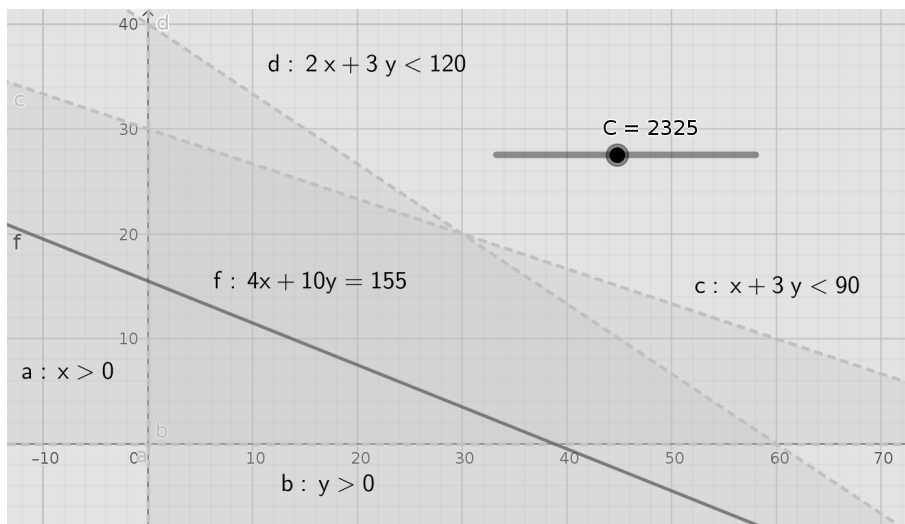
Samme logikk gjelder for Per, og vi ender opp med følgende ulikheter:

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{Antall kasser er ikke negativt}$$

$$x + 3y \leq 90 \quad \rightarrow \quad \text{Begrensning på Frodes arbeidstid}$$

$$2x + 3y \leq 120 \quad \rightarrow \quad \text{Begrensning på Pers arbeidstid}$$

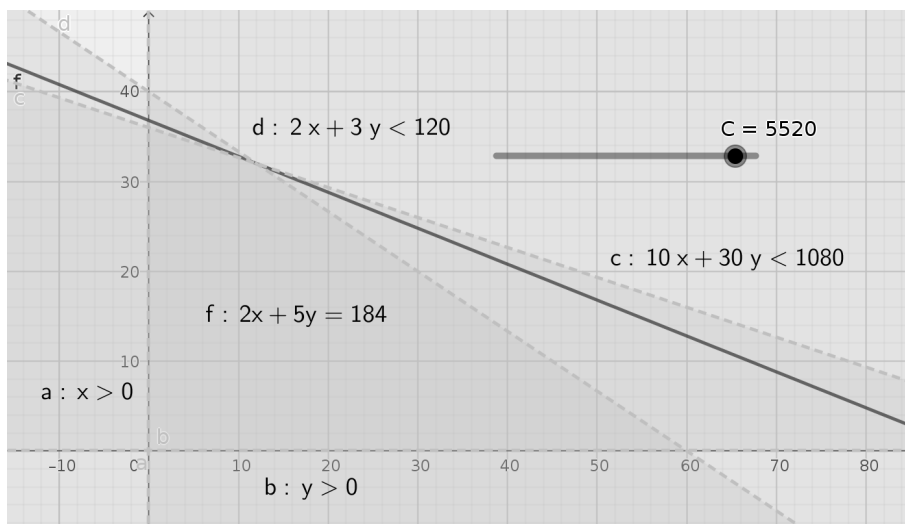
- b) Området er skravert i figuren nedenfor. Linja f brukes i neste deloppgave.



- c) Vi lager en glider med navn C i Geogebra, og lager deretter linja $60x + 150y = C$. Dette er den totale fortjenesten, som vi ønsker å maksimere. Ved å endre på C ser vi at maksimal fortjeneste skjer i $(x, y) = (30, 20)$. De bør produsere 30 kasser av type A, og 20 kasser av type B for maksimal fortjeneste.
- d) Dersom Frode kan jobbe 3 timer ekstra erstatter vi ulikheten som begrenser Froles arbeidstid. Vi legger på 3 timer ekstra:

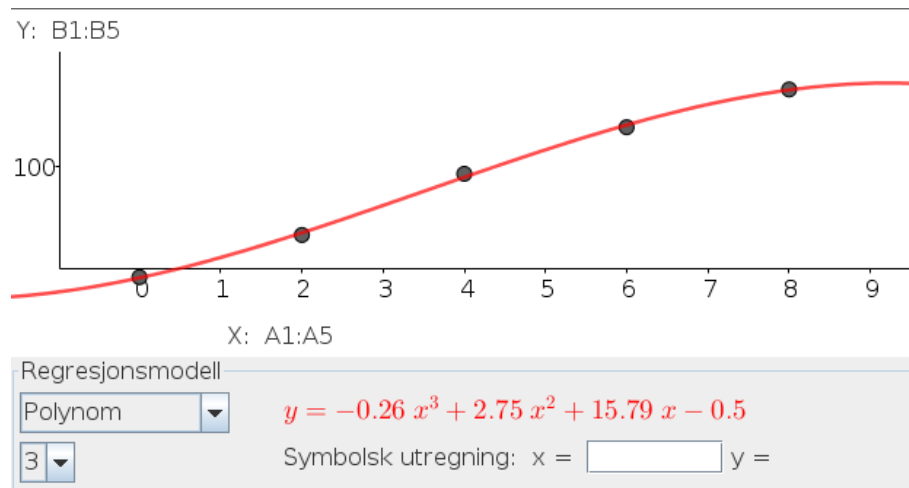
$$10x + 30y \leq 60 \cdot 15 \rightarrow 10x + 30y \leq 60 \cdot (15 + 3)$$

Deretter løser vi det nye systemet på samme måte som i forrige deloppgave. Ved å endre på C ser vi at maksimal fortjeneste skjer i $(x, y) = (12, 32)$. De bør produsere 12 kasser av type A, og 32 kasser av type B for maksimal fortjeneste. Dette er vist på figuren nedenfor.

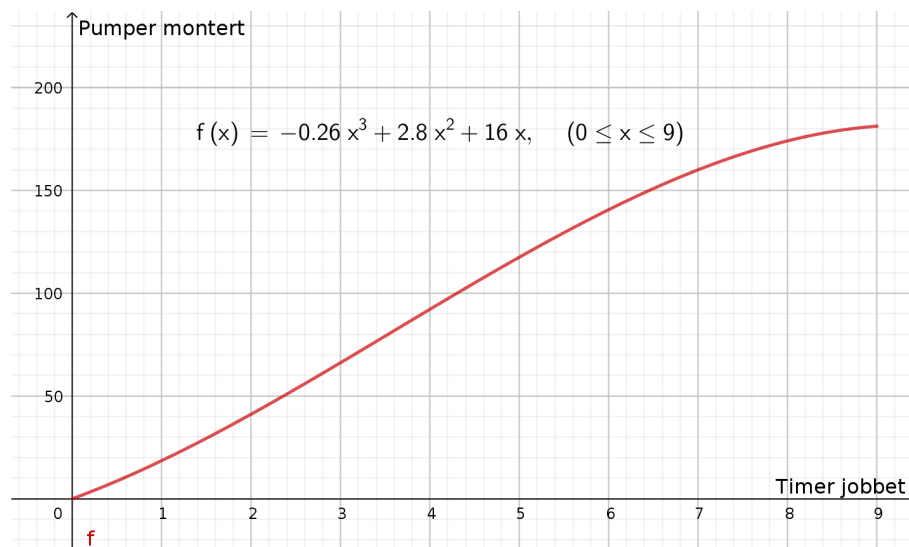


Oppgave 4

- a) Vi legger observasjonene inn i regnearket i Geogebra, markerer cellene og velger “Regresjonsanalyse.” Tredjegradspolynomet vi får er vist i figuren nedenfor.



- b) Vi bruker `Funksjon(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)`-kommandoen for å begrense funksjonen til $0 \leq x \leq 9$, setter navn på funksjonen i grafikkfeltet og gir navn til aksene.



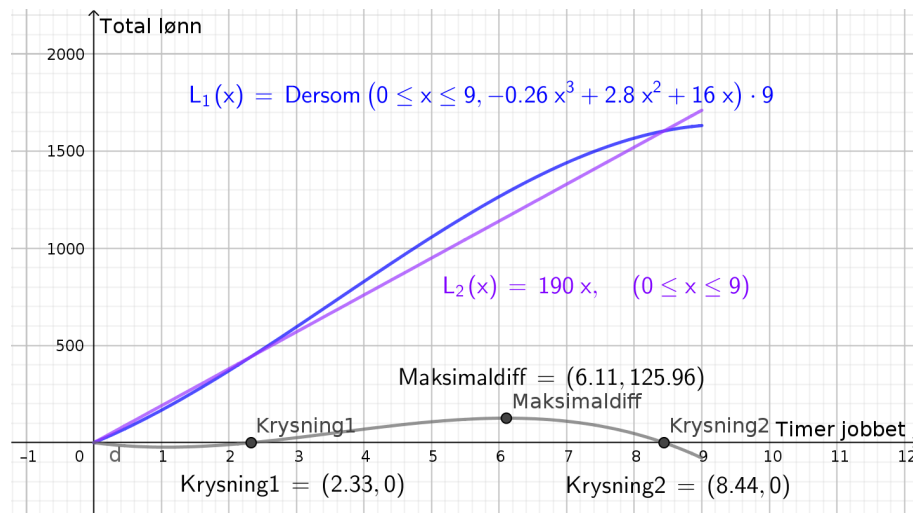
- c) La L_1 være total lønn når Arne får lønn per pumpe. Den totale lønnen blir

$$L_1(x) = \text{antall pumper} \times \frac{\text{lønn}}{\text{pumpe}} = f(x) \times 9.$$

La så L_2 være total lønn når han får lønn per time. Den totalt lønnen blir da

$$L_2(x) = \text{antall timer} \times \frac{\text{lønn}}{\text{time}} = x \times 190.$$

Nedenfor er $L_1(x)$ og $L_2(x)$ plottet i Geogebra. Det lønner seg å velge betaling per monterte pumpe når $L_1(x) > L_2(x)$. Vi kan enten finne krysningspunkter, eller finne nullpunktene til differansen $d(x) = L_1(x) - L_2(x)$.



Dersom han jobber hele timer må han jobbe mellom 3 og 8 timer. Mer presist må han jobbe mellom

$$2.33 \text{ timer} = 2 \text{ timer} + 60 \cdot 0.33 \text{ min} = 2 \text{ timer og } 20 \text{ min}$$

$$8.44 \text{ timer} = 8 \text{ timer} + 60 \cdot 0.44 \text{ min} = 8 \text{ timer og } 26 \text{ min}$$

- d) Vi bruker **Ekstremalpunkt**-kommandoen på differansen $d(x)$. Dette punktet er vist som “Maksimaldiff” ovenfor. Den største forskjellen oppstår etter

$$6.11 \text{ timer} = 6 \text{ timer} + 60 \cdot 0.11 \text{ min} = \underline{\underline{6 \text{ timer og } 7 \text{ min.}}}$$