Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2018

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 28. mai 2018 Antall sider: 6

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$, og må bruke regelen $(x^n)' = nx^{n-1}$. Vi får $f'(x) = 2(3)x^{3-1} - 4x^{1-1} + 0 = \underline{\underline{6x^2 - 4}}$ som svar.

b) Vi skal derivere $g(x) = x/e^x$. Det er fullt mulig å bruke brøkregelen for derivasjon, men man kan også skrive om funksjonen til produktet $g(x) = xe^{-x}$ og bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$. Fordelen er at man slipper å huske brøkregelen. Utregningen blir

$$\begin{aligned} g'(x) =& (x)' \, e^{-x} + \left(e^{-x}\right)' x \\ =& 1e^{-x} + (-1)e^{-x}x \\ =& e^{-x} + -1e^{-x}x \\ =& \underline{\underline{e^{-x}(1-x)}} \end{aligned}$$

c) Vi skal derivere $h(x) = \ln(x^2 + 4x)$, og må bruke kjerneregleen $h'(x) = h'(u) \times u'(x)$, der u er en kjerne. Vi velger $u = x^2 + 4x$, da er $h(u) = \ln(u)$ og $h'(u) = 1/u$, slik at vi får

$$\begin{aligned} h'(x) =& h'(u) \times u'(x) \\ =& \left(\frac{1}{u}\right) \times (2x+4) \\ =& \frac{2x+4}{u} = \underline{\underline{\frac{2x+4}{x^2+4x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi skal løse likningssystemet nedenfor, og vi kan bruke to forskjellige metoder: innsetningsmetoden eller addisjonsmetoden. Vi velger addisjonsmetoden.

$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 0 \quad \text{(A)} \\ 2x + 3y + z &= 3 \quad \text{(B)} \\ 3x + 2y - z &= -3 \quad \text{(C)} \end{aligned}$$

For å kvitte oss med variabelen z regner vi ut to nye likninger (D) = (A) − 2 × (B) og (E) = (A) + 2 × (C) som følger.

$$\begin{aligned} x - 5y &= -6 \quad \text{(D)} \\ 11x + 5y &= -6 \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

Ved å legge disse sammen kvitter vi oss med y, får likningen $12x = -12$, og ser at $\underline{\underline{x = -1}}$. For å løse for y setter vi $x = -1$ inn i likning (D) eller (E) og ser at $\underline{\underline{y = 1}}$. Nå vet vi verdiene til x og y, og kan sette dette inn i (A), (B) eller (C) for å finne ut at $\underline{\underline{z = 2}}$. På eksamen bør du sette en prøve å svaret—det går fort og du vet umiddelbart om du har regnet riktig.

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$$

a) Generelt er et polynom $P(x)$ delelig på $(x - a)$ dersom $P(a) = 0$. Her er $P(x)$ delelig på $(x - 1)$ ettersom

$$P(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 13(1) + 15 = 1 - 3 - 13 + 15 = \underline{\underline{0}}.$$

b) For å løse $P(x) > 0$ må vi først faktorisere $P(x)$. Vi vet at $(x-1)$ er en faktor, så vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l} \big(\; x^3 - 3x^2 - 13x + 15\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 2x - 15 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \quad\; -2x^2 - 13x \\ \quad\;\; \underline{2x^2 - 2x} \\ \qquad\quad -15x + 15 \\ \qquad\quad\;\; \underline{15x - 15} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Vi kan bruke ABC-formelen eller en annen metode for å finne ut at $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$. Med andre ord er $P(x) = (x-1)(x-5)(x+3)$, vi setter opp en fortegnslinje og kommer frem til at $\underline{\underline{P(X) > 0 \text{ når } -3 < x < 1 \text{ og når } x > 5}}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$(x-1)$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———	———	———	———	———
$(x-5)$	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -	0	———
$(x+3)$	- - -	0	———	———	———	———	———	———	———	———	———
$f(x)$	- - -	0	———	———	———	0	- - -	- - -	- - -	0	———

Oppgave 4

a) Vi bruker formelen $a_n = a_1 + d(n-1)$ og informasjonen fra oppgaven.

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + d(3) \quad \Rightarrow \quad 14 = 2 + d(3) \quad \Rightarrow \quad d = 4$$

Nå vet vi at differansen $d = 4$ i den artimetiske rekken, vi setter inn og får

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad a_n = 2 + 4(n-1) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a_n = 4n - 2}}.$$

b) Vi bruker summeformelen for en aritmetisk rekke til å regne ut summen for en generell n, og løser deretter når $n = 100$. For en generell n har vi at

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \left(\frac{2 + 4n - 2}{2}\right) n = (2n)\, n = 2n^2.$$

Når $n = 100$, blir $S_n = S_{100} = 2(100)^2 = \underline{\underline{20000}}$.

Oppgave 5

a) En geometrisk rekke $a_1(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$ konvergerer dersom $-1 < k < 1$. Her er $a_1 = 3$, $a_2 = 3/4$ og $a_3 = 3/16$, og $k = 1/4$ fordi hvert ledd er lik $1/4$ ganget med det foregående leddet. Rekken konvergerer fordi $k = 1/4$. Summen av den uendelige geometriske rekken regner vi ut som

$$S_\infty = a_1 \left(\frac{1}{1-k}\right) = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 3\left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right) = \underline{\underline{4}}$$

b) Desimaltallet $0.242424\dots$ kan skrives som $\frac{24}{100} + \frac{24}{100^2} + \frac{24}{100^3} + \dots$ fordi desimalene 24 gjentar seg, og å dele på 100 flytter desimalene to plasser til høyre. Første ledd blir 0.42, andre ledd blir 0.0042, tredje ledd blir 0.000042 og så videre—da blir summen $0.424242\dots$. For å skrive $0.242424\dots$ som en brøk bruker vi formelen for sum av en uendelig geometrisk rekke. Vi vet at

$$a_1(1 + k + k^2 + \dots) = a_1\left(\frac{1}{1-k}\right),$$

og ved å trekke fra a_1 på begge sider ser vi at

$$a_1(k + k^2 + \dots) = a_1\left(\frac{1}{1-k} - 1\right).$$

Venstresiden likner nå på summen. Vi setter inn $a_1 = 24$ og $k = 1/100$ og får

$$a_1\left(\frac{1}{1-k} - 1\right) = 24\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}} - 1\right) = 24\left(\frac{1}{\frac{99}{100}} - 1\right) = 24\left(\frac{100}{99} - \frac{99}{99}\right) = \underline{\underline{\frac{24}{99}}}$$

Oppgave 6

I denne oppgaven ser vi på funksjonen

$$f(x) = \frac{6}{1+e^{-x}} = 6\left(1+e^{-x}\right)^{-1}.$$

a) Grafen til $f(x)$ er alltid stigende dersom den deriverte er positiv for alle verdier av x. Vi deriverer funksjonen ved hjelp av kjerneregelen. Vi velger $u = 1+e^{-x}$ som kjerne, da er $f(u) = 6u^{-1}$, og vi får at

$$\begin{aligned} f'(x) =& f'(u) \times u'(x) \\ =& 6(-1)u^{-2} \times \left((-1)e^{-x}\right) \\ =& \frac{6e^{-x}}{u^2} = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \end{aligned}$$

La os nå undersøke $f'(x)$. Telleren er alltid positiv fordi e^{-x} alltid er positiv, nevneren er alltid positiv fordi $(1+e^{-1})$ alltid er større enn 1, og å ta et tall som er større enn 1 i andre gir alltid i et positivt resultat. Både telleren og nevneren er positive for alle x, og da må $f'(x)$ alltid være positiv, og da stiger $f(x)$ alltid.

b) Vi ser på nevneren $(1+e^{-x})$. Funksjonen e^{-x} er alltid positiv, så da vet vi at

$$1 < 1+e^{-x} < \infty.$$

Når $1+e^{-x}$ blir stor, går $f(x)$ mot 0. Når $1+e^{-x}$ går mot 1, går $f(x)$ mot 6. Da vet vi at $\underline{\underline{0 < f(x) < 6}}$ for alle verdien av x.

c) En funksjon har ventepunkt når den dobbelderiverte skifter fortegn. Vi regner ut den dobbelderiverte fra $f'(x) = \frac{6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = 6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2}$ ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen slik

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[6e^{-x}\right]'\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}\left[\left(1+e^{-x}\right)^{-2}\right]' \\ &= -6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{-2} + 6e^{-x}(-2)\left(1+e^{-x}\right)^{-3}(-1)e^{-x} \\ &= \frac{-6e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} = \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)}{(1+e^{-x})^3} + \frac{12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} \\ &= \frac{-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right) + 12\left(e^{-x}\right)^2}{(1+e^{-x})^3} \end{aligned}$$

Nevnerer er alltid positiv, så vi undersøker når telleren er lik null. Vi ser at

$$-6e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)+12\left(e^{-x}\right)^2 = -6e^{-x}-6\left(e^{-x}\right)^2+12\left(e^{-x}\right)^2 = e^{-x}\left(-6+6e^{-x}\right).$$

Med andre ord er $f''(x) = 0$ når $(-6+6e^{-x}) = 0$, og dette skjer når $x = 0$, da bytter også $f''(x)$ fortegn og vi har et vendepunkt. For å finne y-verdien regner vi ut at $y = f(3) = 6/(1+e^{-0}) = 3$, da er $\underline{\underline{(0,3) \text{ et vendepunkt}}}$.

d) SKISSE HER.

Oppgave 7

a) asdf

b) asdf

Oppgave 8

a) asdf

b) asdf

Oppgave 9

sdf

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf

Oppgave 2

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf

Oppgave 3

a) asdf

b) asdf

c) asdf

d) asdf