Løsningsforslag – Eksamen R1, høsten 2018

Laget av Sindre S.H. og Tommy O. Sist oppdatert: 3. desember 2018 Antall sider: 11

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a)

$$f'(x) = 2x + 2 + e^x$$

b) Vi bruker produktregelen ved derivasjon og får at:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^2\right)' \ln x + x^2 (\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln x + x \\ &= x(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

c) *Alternativ 1:*
Vi omskriver $h(x)$ ved hjelp av potensregler:

$$h(x) = (x-1)e^{-(2x+1)}$$

Videre merker vi oss at av kjerneregelen er:

$$\left(e^{-(2x+1)}\right)' = -2e^{-(2x+1)}$$

Av produktregelen får vi da at:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x-1)'e^{-(2x+1)} + (x-1)\left(e^{-(2x+1)}\right)' \\ &= 1 \cdot e^{-(2x+1)} - 2(x-1)e^{-(2x+1)} \\ &= (1 - 2(x-1))e^{-(2x+1)} \\ &= (3 - 2x)e^{-(2x+1)} \end{aligned}$$

Alternativ 2
Vi har at:

$$\begin{aligned} &(x-1)' = 1 \\ &\left(e^{2x+1}\right)' = 2e^{2x+1} && \text{(kjerneregelen)} \end{aligned}$$

Av kvotientregelen ved derivasjon har vi da at:

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{(x-1)'e^{2x+1} - (x-1)\left(e^{2x+1}\right)'}{\left(e^{2x+1}\right)^2} \\
&= \frac{1 \cdot e^{2x+1} - (x-1)2e^{2x+1}}{e^{2(2x+1)}} \\
&= \frac{e^{2x+1}(1-(x-2))}{e^{2(2x+1)}} \\
&= \frac{3-2x}{e^{2x+1}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Vi merker oss at:

$$e^{2x} + 7e^x - 8 = \left(e^x\right)^2 + 7e^x - 8 = 0$$

Dette betyr at vi kan løse en andregradsligning mhp. e^x. Vi viser her to måter å løse ligningen på:

Alternativ 1
Ved abc-formelen har vi at:

$$
\begin{aligned}
e^x &= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2} \\
&= \frac{-7 \pm 9}{2}
\end{aligned}
$$

Alternativ 2
Siden $8(-1) = -8$ og $8 - 1 = 7$, har vi at:

$$(e^x + 8)(e^x - 1) = 0$$

Både *Alternativ 1* og *Alternativ 2* gir at:

$$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = -8$$

Siden $e^x > 0$, står vi bare igjen med løsningen $e^x = 1$:

$$
\begin{aligned}
\ln e^x &= \ln 1 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

b) Ved hjelp av logaritmeregler omskriver vi ligningen til:

$$\ln\left(\frac{x^2 - 5x - 1}{3 - 2x}\right) = 0$$

Videre får vi da at:

$$
\begin{aligned}
e^{\ln\left(\frac{x^2-5x-1}{3-2x}\right)} &= e^0 \\
\frac{x^2-5x-1}{3-2x} &= 1 \\
x^2-5x-1 &= 3-2x \\
x^2-3x-4 &=
\end{aligned}
$$

Fordi $(-4)1 = -4$ og $-4+1=-3$ har vi at:

$$x^2-3x-4 = (x-4)(x+1) = 0$$

Siden $x = 4$ gir negativ ln-verdi i originaluttrykket til ligningen, står vi bare igjen med $x = -1$ som gyldig løsning.

Oppgave 3

a)

$$
\begin{aligned}
2\vec{b} - 3\vec{a} &= 2[-5,3] - 3[2,3] \\
&= [-10,6] - [6,9] \\
&= [-16,-3]
\end{aligned}
$$

b) En stump vinkel har negativ cosinusverdi, en rett vinkel har cosinusverdien 0 og en spiss vinkel har positiv cosinusverdi. Vi har at:

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{2^2+3^2} \\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}
$$

Sidan $\sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$ er $|\vec{a}|$ mindre enn 4.

c) Vi har at:

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

og videre at:

$$|\vec{a}|, \vec{b} > 0 \quad , \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2(-5) + 3\cdot 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \angle(\vec{a},\vec{b}) < 0$$

Ergo er $\angle(\vec{a},\vec{b})$ en stump vinkel.

Oppgave 4

a)
$$
\begin{array}{l}
\big(x^3 + 6x^2 - x - 30\big) : \big(x - 2\big) = x^2 + 8x + 15 \\
\underline{-\,x^3 + 2x^2} \\
\quad 8x^2 - x \\
\quad \underline{-\,8x^2 + 16x} \\
\qquad 15x - 30 \\
\qquad \underline{-\,15x + 30} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

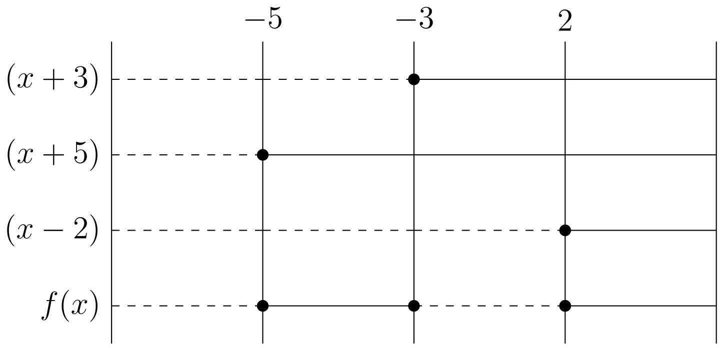
b) Siden $3 \cdot 5 = 15$ og $3 + 5 = 8$, har vi at:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$$

Dermed er:

$$x^3 + 6x^2 - x - 30 = (x + 3)(x + 5)(x - 2)$$

c) At $-2f(x) \geq 0$ er ekvivalent med at $f(x) \leq 0$. Vi setter opp et fortegnsskjema for å løse denne ulikheten: Av figuren under ser vi at $f(x) \leq 0$ når:



$$x \leq -5 \quad \vee \quad -3 \leq x \leq 2$$

Oppgave 5

Vi definerer følgende:

$$A = \text{Mann} \qquad \bar{A} = \text{Kvinne}$$
$$B = \text{Kjøper edelgran} \qquad \bar{B} = \text{Kjøper Gran}$$

Da har vi at:

$$P(A) = 70\% \qquad \bar{P}(\bar{A}) = 30\%$$
$$P(B|A) = 60\% \qquad P(B|\bar{A}) = 40\%$$

a) Av formelen for total sannsynlighet har vi at:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) \\ &= 0.7 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.4 \\ &= 0.54 \end{aligned}$$

Det er altså 54% sannsynlighet for at første solgte tre er en edelgran.

b) Spørsmålet i oppgaven er det samme som å spørre hva sannsynligheten er for at kjøperen av et tre er en kvinne, gitt at treet er en edelgran. Av Bayes' setning har vi at:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}|B) &= \frac{P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})}{P(B)} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.54} \\ &= \frac{12}{54} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Sannsynligheten er altså $\frac{2}{9}$ for at lotterivinneren er en kvinne.

Oppgave 6

Skal $f(x)$ være kontinuerlig, må:

$$\lim_{x^{\pm} \to a} f(x) = f(a)$$

I vårt tilfelle er det tilstrekkelig å sørge for at $f(a)$ får samme verdi ved begge tilfeller av funksjonsuttrykkene for $f(x)$:

$$\begin{aligned} 2a^2 - 3a - 2 &= a^2 + a + 3 \\ a^2 - 4a - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Siden $(-5)1 = -5$ og $-5+1=-4$, har vi at:

$$(a-5)(a+1) = 0$$

Dette gir at $f(x)$ er kontinuerlig når:

$$a = 5 \quad \lor \quad a = -1$$

Oppgave 7

a) Vi bruker kjerneregelen og får at:

$$\begin{aligned}\big(\ln(x^2+3)\big)' &= 2x\frac{1}{x^2+3}\\ &= \frac{2x}{x^2+3}\end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 1 - 2\cdot\frac{2x}{x^2+3}\\ &= \frac{x^2+3-4x}{x^2+3}\\ &= \frac{x^2-4x+3}{x^2+3}\end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.

b) For x-verdien til toppunkt og bunnpunkt er $g'(x) = 0$. Fordi $(-1)(-3) = 3$ og $-1+(-3) = -4$ kan vi omskrive $g'(x)$, og får da at:

$$\begin{aligned}g'(x) &= 0\\ \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+3} &= 0\\ (x-1)(x-3) &= 0\end{aligned}$$

Ved å sette opp et fortegnsskjema (ikke vist her, se opg. 4c) finner vi at $x = 1$ er et maksimalpunkt, mens $x = 3$ er et minimumspunkt.

c) I et vendepunkt må $g''(x) = 0$. $g''(x)$ finner vi ved å derivere $g'(x)$ ved hjelp av kvotientregelen:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{(x^2-4x+3)'\,(x^2+3) - (x^2-4x+3)\,(x^2+3)'}{\left(x^2+3\right)^2}\\ \left(x^2+3\right)^2 g''(x) &= (2x-4)(x^2+3) - 2x(x^2-4x+3)\\ &= 2x^3+6x-4x^2-12-2x^3+8x^2-6x\\ &= 4x^2-12\end{aligned}$$

Skal $g''(x) = 0$ må vi kreve at høyresiden i ligningen over blir 0:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 &= 3 \end{aligned}$$

Altså har $g(x)$ infleksjonspunkter der hvor:

$$x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}$$

Oppgave 8

a) sdf

b) sdf

c) sdf

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

La X være antall gule blomster. Da er X binomisk fordelt, fordi fargen til hver blomst er uavhengig av de andre, sannsynligheten for gul er alltid $p = 0.4$, og det er kun to utfall per blomst—enten gul eller rød.

a) Vi lar X være antall gule blomster, da er X binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 0.4$. Sannsynligheten for at $X = 5$ blir da

$$P(X = 5) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{10}{5} 0.4^5 0.6^5 \approx 0.2007 = \underline{\underline{20.1\,\%}},$$

der vi henter svaret fra Geogebras sannsynlighetskalkulator i praksis.

b) Dette er $P(X > 5)$, og fra sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra får vi

$$P(X > 5) \approx 0.1662 = \underline{\underline{16.6\,\%}}.$$

c) Her kan det være nyttig å snu litt på problemstillingen. Vi har 10 plasser $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ totalt, og vi må trekke ut fire plasser til de gule blomstene. Da er plasseringen til de andre blomstene også bestemt. Rekkefølgen har ikke noe å si, fordi $\{P_3, P_5, P_6, P_9\}$ eksempelvis er det samme som $\{P_6, P_5, P_3, P_9\}$. Spørsmålet er med andre ord "På hvor mange måter kan vi velge 4 plasser for de gule blomstene, nå rekkefølgen er uviktig?". Dette er antall kombinasjoner, og svaret blir $\binom{10}{4} = \underline{\underline{210}}$. I Geogebra skriver man `nCr(10, 4)` i CAS.

Legg også merke til at dette spørsmålet er det samme som å spørre "På hvor mange måter kan vi velge 6 plasser for de røde blomstene, nå rekkefølgen er uviktig?", og at svaret da blir $\binom{10}{6} = \underline{\underline{210}}$.

Oppgave 2

a) Siden $CB || AE$ og $\angle BCD$ og $\angle AED$ er på motsatt side av AE, er $\angle BCD = \angle AED$

b)

- Vi har forklart i oppgave a) at $\angle BCD = \angle AED$
- Siden $\angle ADE$ og $\angle BDC$ er på motsatt side av AE, og begge vinklene deler linja AB, er $\angle BCD = \angle AED$
- Fordi trekantene har to samsvarende vinkler, er $\triangle DBC \sim \triangle AED$ (formlike).

c) $\triangle AEC$ består blant annet av vinklene ACD og AED. Siden $\angle AED = \angle BCD = \alpha = ACD$, har $\triangle AEC$ to like vinkler og er derfor likebeint.

d) Siden $\triangle DBC \sim \triangle AED$ er forholdet mellom to samsvarande sider i trekantene likt. $\angle AED$ og $\angle BCD$ utspenner respektivt linjene AD og DB, mens $\angle ADE$ og $\angle CDB$ utspenner respektivt linjene AE og a. Da har vi at:

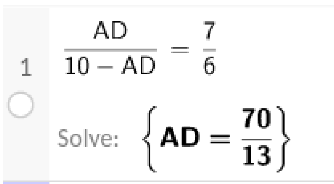
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{a}$$

Siden $\triangle ACE$ er likebeint er $AE = b$:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

Som var det vi skulle vise.

e) Siden $c = 10$, har vi at $DB = 10 - AD$. Dermed kan vi bruke forholdet fra opg. d) til å løse en ligning mhp. AD. Lignigen er løst i CAS:



Figur 1: Ligning for AD løst i CAS

Oppgave 3

a) Linjen ℓ er gitt av

$$\ell(k) = A + \vec{AB}k = (3,0) + [(5,5) - (3,0)]\,k = (2k+3, 5k).$$

b) Se figur 2 for en tegning av grafen, utført med kommandoen
Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>), samt linjen $\ell(k)$.

c) Linja fra A til B er gitt av $\vec{AB} = (2,5)$. Tangenten er gitt av $T(t) = r'(t) = (1, 2t)$. Disse to vektorene er parallelle dersom der finnes en z slik at

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Dette er et likningssett med 2 ukjente og 2 likninger, og løsningen er $z = 1/2$ og $t = 5/4$. Setter vi $t = 5/4$ inn i $r(t)$ får vi punktet

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 9/4 \\ 57/6 \end{pmatrix}}},$$

og dette er punktet på $r(t)$ som er nærmest ℓ.

Figur 2: Løsning på oppgave 3, del 2.

Oppgave 4

a) Se figur 3.

Figur 3: Løsning på oppgave 4a, del 2.

b) Der bruker vi `Mangekant(A, B, C) / Mangekant(A, B, D)` og får $2.5981 \approx \underline{\underline{2.6}}$ som svar.

c)

- I celle 1 finner vi nullpunktene til $g(x)$. Siden $r > 0$, er $x = -r$ nullpunktet lengst til venstre.
- I celle 5-7 finner og definerer vi punktet G.
- I celle 8 finner vi ekstremalpunktene til $g(x)$. Siden $\left|\frac{\sqrt{3}}{3}r\right| < r$, ser vi av uttrykket til $g(x)$ at $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}r$ er maksimusverdien til $g(x)$. Denne kaller vi xm i celle 9.
- I celle 10 finner vi koordinatene til H.
- Vi velger EF som grunnlinje for begge trekanter, som da får høydene $t(-r)$ og $g(xm)$. Siden grunnlinjen er den samme, er forholdet mellom arealene til trekantene det samme som forholdet mellom høydene. I celle 11 ser vi at dette forholdet er uavhengig av r, som var det vi skulle vise.

1	$g(x) := x\,(x^2 - r^2)$
	$\to\ \mathbf{g(x) := -r^2\,x + x^3}$
2	$g(x) = 0$
	Løs: $\{x = r, x = -r, x = 0\}$
3	$E := (-r, 0)$
	$\to\ \mathbf{E := (-r, 0)}$
4	$F := (0, 0)$
	$\to\ \mathbf{F := (0, 0)}$
5	Vendepunkt(g)
	$\to\ \{(0, 0)\}$
6	$t(x) :=$ Tangent(F, g)
	$\to\ \mathbf{t(x) := -r^2\,x}$
7	$G := (-r, t(-r))$
	$\to\ \mathbf{G := (-r, r^3)}$
8	Løs($g'(x) = 0$)
	$\to\ \left\{x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,r, x = \frac{\sqrt{3}}{3}\,r\right\}$
9	$xm := -\frac{\sqrt{3}}{3}\,r$
	$\to\ \mathbf{xm := -\frac{1}{3}\sqrt{3}\,r}$
10	$H := (xm, g(xm))$
	$\to\ \mathbf{H := \left(-r\,\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\,r^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9}\right)}$
11	$\frac{t(-r)}{g(xm)}$
	$\to\ \frac{3}{2}\sqrt{3}$