Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2017

Laget av Tommy O. Sist oppdatert: 27. januar 2018 Antall sider: 12

Dette dokumentet er open-source; alle kan bidra til å gjøre det bedre. Dersom du finner skrivefeil, matematiske feil, eller ser at forklaringene kan være bedre: ikke nøl med å bidra. Du kan finne siste versjon, og bidra, på GitHub, se: `https://github.com/tommyod/matte_eksamener_VGS`

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = x^2 - 2/x = x^2 - 2x^{-1}$. Den eneste regelen vi trenger her er $(kx^n)' = knx^{n-1}$, vi får følgende utregning:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2\right)' - \left(2x^{-1}\right)' \\ &= 2x - 2(-1)x^{-2} \\ &= 2x + 2x^{-2} \\ &= \underline{\underline{2\left(x + \frac{1}{x^2}\right)}} \end{aligned}$$

b) Vi skal derivere $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Her må vi bruke kjerneregelen, og vi må vite at $(\ln(u))' = u'/u$. Vår kjerne er $u = x^2 + 1$, og $u' = 2x$. Vi får:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\ln(u))' = \frac{1}{u}u' \\ &= \frac{1}{x^2+1}2x \\ &= \underline{\underline{\frac{2x}{x^2+1}}} \end{aligned}$$

c) Vi skal derivere $h(x) = x^2e^x$. Vi må bruke produktregelen $(uv)' = u'v + uv'$ her. Velg $u = x^2$ og $v = e^x$, vi får følgende utregning:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x^2e^x\right)' \\ &= \left(x^2\right)' e^x + x^2 \left(e^x\right)' \\ &= 2xe^x + x^2e^x \\ &= \underline{\underline{xe^x\left(x+2\right)}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi se på følgende likningssystem.

$$x + y - z = 0 \tag{1}$$
$$2x + y - z = 2 \tag{2}$$
$$4x + y - 2z = 1 \tag{3}$$

Det er lurt å bruke litt tid på å kikke på likningssystemet. Det er mange mulige måte å løse et slikt system på, men på eksamen er oppgavene ofte konstruert på en måte slik at enkelte strategier er mye raskere enn andre. Vi tar likning (2) og trekker fra likning (1). Da får vi at $\underline{\underline{x = 2}}$. Deretter setter vi $x = 2$ inn i likning (2) og likning (3), slik at vi får følgende 2 likninger:

$$y - z = -2 \tag{4}$$
$$y - 2z = -7 \tag{5}$$

Vi tar likning (4) minus likning (5) og finner at $\underline{\underline{z = 5}}$. Nå kan vi sette inn x og z i hvilken som helst likning for å finne at $\underline{\underline{y = 3}}$. På eksamen bør du sette prøve på svaret for å sjekke at det stemmer.

Oppgave 3

a) Generelt så har vi at $a_n = a_1 + d(n-1)$ i en aritmetisk rekke. Vi setter inn $a_1 = 3$ og $a_6 = 18$ og får følgende likning:

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad \Rightarrow \quad 18 = 3 + d(6-1).$$

Da finner vi ut at $\underline{\underline{d = 3}}$. Vi setter dette inn i likningen ovenfor, og får følgende likning for a_n:

$$\underline{\underline{a_n = 3 + 3(n-1) = 3n}}$$

b) Generelt er summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke gitt ved:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

Vi setter inn $a_1 = 3$, $a_n = 3$ og får:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} = \frac{(3 + 3n)\, n}{2} = \frac{3\,(1+n)\, n}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2} n\,(n+1)}}$$

Dette stemmer overens med det oppgaven ba oss om å vise.

c) Dersom summen skal være 84 får vi følgende likning basert på forrige deloppgave:

$$84 = \frac{3}{2} n\,(n+1) \Leftrightarrow n^2 + n - 56 = 0$$

Vi kan løse $n^2 + n - 56 = 0$ ved å gjette, eller ved å bruke ABC-formelen. Dersom vi bruker ABC formelen får vi at

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-56)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2} = \underline{\underline{7}}$$

Legg merke til at vi ser bort i fra det negative svaret her; det gir ikke mening i forhold til denne oppgaven.

Oppgave 4

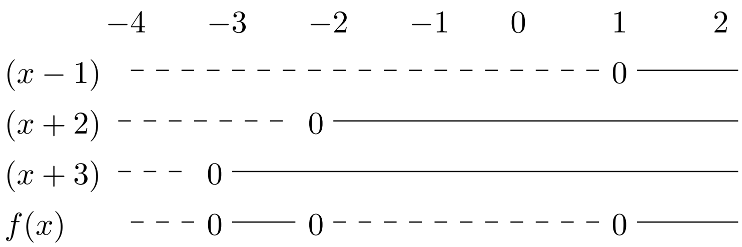
I denne oppgaven skal vi se på tredjegradspolynomet $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

a) Dersom $f(1) = 0$ så er $x = 1$ et nullpunkt. Da er $(x - 1)$ en faktor. Vi utfører polynomdivisjonen $f(x) : (x - 1) = (x^3 + 4x^2 + x - 6) : (x - 1)$ og får $x^2 + 5x + 6$ som svar. Vi faktoriserer $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$ ved hjelp av ABC-formelen, eller ved hjelp av en annen metode. Uansett fremgangsmåte finner vi ut at faktoriseringen blir:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = \underline{\underline{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}}$$

Dersom svaret ikke allerede var gitt i oppgaveteksten ville det nok ha vært lurt å sjekke at faktoriseringen stemmer ved å gange sammen faktorene og se at du får $x^3 + 4x^2 + x - 6$. Det går rimelig fort og gir en ekstra sikkerhet på eksamen.

b) For å løse $f(x) \leq 0$ setter vi opp en fortegnslinje som vist på figur 1 nedenfor.



Figur 1: Fortegnslinje til oppgave 4b, del 1.

Fra figuren ser vi at $\underline{\underline{f(x) \leq 0 \text{ når } x \leq -3 \text{ eller når } -2 \leq x \leq 1}}$.

c) Vi bruker faktoriseringen $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ fra den første deloppgaven, og at $2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x + 1)(x - 1)$. Vi får:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2x^2 - 2} = \frac{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}{2(x + 1)(x - 1)} = \underline{\underline{\frac{(x + 2)(x + 3)}{2(x + 1)}}}$$

d) Tidligere viste vi at $y^3+4y^2+y-6=(y-1)(y+2)(y+3)$. Med andre ord har likningen $(y-1)(y+2)(y+3)=0$ løsningene $y=1$, $y=-2$ og $y=-3$. Vi skriver e^x om til y slik som dette:

$$\begin{aligned} e^{3x}+4e^{2x}+e^x-6&=0\\ (e^x)^3+4\left(e^x\right)^2+(e^x)-6&=0\\ y^3+4y^2+y-6&=0 \end{aligned}$$

De mulige løsningene er $y=e^x=1$, $y=e^x=-2$ og $y=e^x=-3$. Ettersom eksponentialfunksjonen alltid er positiv[1] er $e^x=1$ den eneste mulige løsningen, som vi derfor beholder. Da er $\underline{\underline{x=0}}$ vårt endelige svar.

Oppgave 5

a) Vi deriverer og setter inn $x=500$:

$$\begin{aligned} K'(x)&=0.2x+70 \qquad & K'(500)&=100+70=170\\ I'(x)&=-0.1x+280 \qquad & I'(500)&=-50+280=230 \end{aligned}$$

En liten positive endring i x mot mer produserte enheter øker altså kostnaden med 170 og inntekten med 230. Vi $\underline{\underline{\text{bør produsere flere enn 500 enheter}}}$, fordi økningen inntekt per enheten overskrider økningen i kostnad per enhet når $x=500$.

b) Vi deriverer overskuddet og setter lik null:

$$\begin{gathered} O(x)=I(x)-K(x)\Rightarrow O'(x)=I'(x)-K'(x)\\ O'(x)=0\Leftrightarrow I'(x)=K'(x). \end{gathered}$$

Å finne x som maksimerer $O(x)$ er det samme som å løse $I'(x)=K'(x)$. Vi løser $I'(x)=K'(x)$ slik som dette:

$$\begin{aligned} -0.1x+280&=0.2x+70\\ 0.3x&=210\\ x&=700 \end{aligned}$$

Den vinningsoptimale produksjonsmengden er $\underline{\underline{x=700}}$.

c) Kostnad per enhet blir

$$G(x)=\frac{K(x)}{x}=\frac{0.1x^2+70x+4000}{x}=0.1x+70+\frac{4000}{x}$$

Vi må løse $G'(x)=0$.[2] Den deriverte blir $G'(x)=0.1-4000/x^2$. Vi løser

$$0.1-4000/x^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=200$$

Den kostnadsoptimale produksjonsmengden er $\underline{\underline{x=200}}$.

[1] At eksponentialfunksjonen alltid er positiv er grunnen til at vi ikke kan ta logaritmen av et negativt tall.

[2] Vi kan også vise at $G'(x)=0$ når $K'(x)=G(x)$, og bruke dette for å løse oppgaven.

Oppgave 6

a) $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.3 + 0.3 + 0.1 = \underline{\underline{0.7}}$

b) Generelt så er forventningsverdien gitt ved følgende formel:

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{x_i \in X} x_i P(X = x_i)$$

I dette tilfellet får vi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= (0)0.2 + (1)0.1 + (2)0.3 + (3)0.3 + (4)0.1 \\ &= 0.1 + 0.6 + 0.9 + 0.4 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Generelt er standardavviket gitt ved:

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{x_i \in X} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i)}, \qquad \text{der } \mu = \mathrm{E}(X)$$

I denne oppgaven får vi:

$$\begin{aligned} \mathrm{SD}(X) &= \sqrt{(0-2)^2 0.2 + (1-2)^2 0.1 + (2-2)^2 0.3 + (3-2)^2 0.3 + (4-2)^2 0.1} \\ &= \sqrt{(4)0.2 + (1)0.1 + (0)0.3 + (1)0.3 + (4)0.1} \\ &= \sqrt{0.8 + 0.1 + 0.3 + 0.4} = \underline{\underline{\sqrt{1.6}}} \end{aligned}$$

Forventningsverdien forteller oss hvor mange kjøttmeisunger som vi kan forvente at overlever i en tilfeldig valgt fuglekasse.

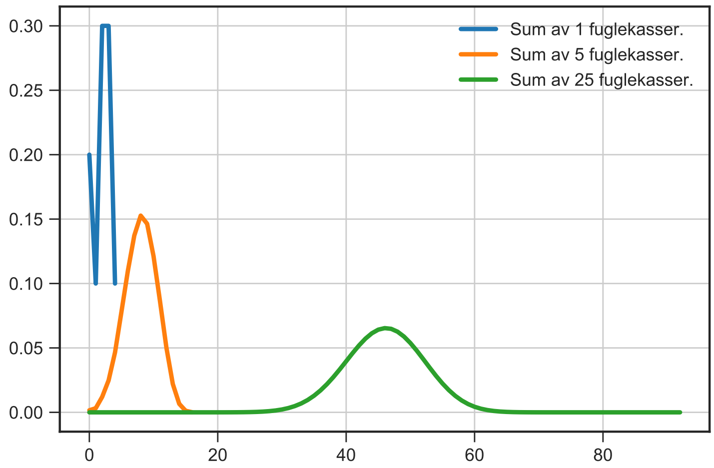
c) En sum $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, eller et gjennomsnitt $G_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$, blir alltid[3] normalfordelt når $n \to \infty$. På figur 2 ser vi hvordan $S_1 = X_1$, S_5 og S_{25} ser ut. Allerede etter å ha undersøkt summen av 5 fuglekasser ser vi normalfordelingen ta form.

d) Vi kan gjøre utregningene som dette:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(S) &= \mathrm{E}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \cdots + \mathrm{E}(X_n) = n\,\mathrm{E}(X) = n\mu = 100(2) = \underline{\underline{200}} \\ \mathrm{Var}(S) &= \mathrm{Var}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right) \\ &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\,\mathrm{Var}(X) \\ &= n\sqrt{1.6}^2 = 100(1.6) = \underline{\underline{160}} \end{aligned}$$

Eller vi kan bruke formlene $\mu_S = n\mu_X$ og $\sigma_S^2 = n\sigma_X^2$ direkte. Vi får samme svar uansett.

[3]Dette er faktisk ikke helt sant. Det finnes noen sannsynlighetsfordelinger som ikke blir normalfordelte, f.eks. punktfordelingen $P(X = a) = 1$, $P(X \neq a) = 0$.



Figur 2: Summen av stokastiske variabler blir normalfordelt, oppgave 6c, del 1.

e) Her må vi bruke $Z = (S - \mu)/\sigma$ for å transformere vår normalfordelte S til en standardnormalfordelt Z med $\mu_Z = 0$ og $\sigma_Z = 1$. Vi regner slik:

$$
\begin{aligned}
P(S \geq 226) &= 1 - P(S < 226) \qquad \text{(snu fordi tabellen gir } P(Z \leq z)) \\
&= 1 - P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} < \frac{226-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - P\left(Z < \frac{226-200}{13}\right) \\
&= 1 - P\left(Z < 2\right) \\
&= 1 - 0.9772 \qquad \text{(fra tabell)} \\
&= 0.0228 \approx 2.3\%
\end{aligned}
$$

Det er altså en $\underline{\underline{2.3\ \%}}$ sannsynlighet for at 226, eller flere, kjøttmeisunger overlever.[4]

f) Vi kan regne som dette:

$$
\begin{aligned}
P(187 \leq S \leq 213) &= P(S \leq 213) - P(S \leq 187) \\
&= P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq \frac{213-\mu}{\sigma}\right) - P\left(\frac{S-\mu}{\sigma} \leq \frac{187-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{213-200}{13}\right) - P\left(Z \leq \frac{187-200}{13}\right) \\
&= P\left(Z \leq 1\right) - P\left(Z \leq -1\right) \\
&= 0.8413 - 0.1587 = 0.6827 \approx \underline{\underline{68.3\%}}
\end{aligned}
$$

[4]For å få helt riktig svar må vi korrigere for heltallene. Vi bruker en kontinuerlig fordeling til å approksimere en diskret funksjon. Det blir nok enda mer nøyaktig å regne $P(S \geq 226)^{(\text{diskret})} \cong P(S \geq 225.5)^{(\text{kontinuerlig})} = 0.02490812 \approx 2.5\%$. Dette er bare en kommentar. På del 1 handler det også om å få greie verdier som man kan slå opp i tabellen.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

a) Hver setning gir oss én likning:

- "**Når bedriften produserer 200 enheter per uke, blir overskuddet lik 0.**"

$$O(200) = 0 \quad \Rightarrow \quad O(200) = a(200)^2 + b(200) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad 40000a + 200b + c = 0$$

- "**Overskuddet er størst når bedriften selger 475 enheter.**"
  Da er $O'(475) = 0$. Vi har at $O'(x) = 2ax + b$, og får:

$$O'(475) = 0 \quad \Rightarrow \quad O'(475) = 2a(475) + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 950a + b = 0$$

- "**Når bedriften selger 600 enheter per uke, er grensekostnaden 5 kroner større enn grenseinntekten.**"
  Fra setningen ovenfor får vi vite at $K'(600) = I'(600) + 5$. Definisjonen av overskudd sier at $O'(600) = I'(600) - K'(600)$. Når vi setter inn det vi får vite i definisjonen, får vi $O'(600) = I'(600) - (I'(600) + 5) = -5$.

$$O'(600) = -5 \quad \Rightarrow \quad O'(600) = 2a(600) + b = -5 \quad \Rightarrow \quad 1200a + b = -5$$

Vi får altså likningsystemet:

$$\begin{aligned} 40000a + 200b + c &= 0 \\ 950a + b &= 0 \\ 1200a + b &= -5 \end{aligned} \tag{6}$$

Som var det oppgaven ba oss om å vise.

- Vi skriver likningssystem (6) inn i CAS slik:
  `NLøs[{40000a + 200b + c = 0, 950a + b = 0, 1200a + b = -5}, {a, b, c}]`
  Og vi får vite at $\underline{\underline{a = -0.02,\ b = 19 \text{ og } c = -3000}}$.

- Vi plotter funksjonen ved hjelp av
  `O(x) = -0.02*x*x + 19x -3000`
  i Geogebra. For å finne maksimumspunktet skriver vi inn
  `Maks[O, 0, 800]`
  Vi får vite at maksimumspunktet er $(475, 1512.6)$. Det største overskuddet bedriften kan få per uke er altså $\underline{\underline{1512.6}}$.

Oppgave 2

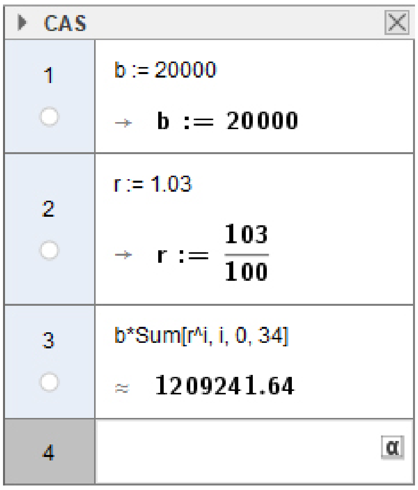
a) Her kan det være lurt å lage en tabell og lete etter et mønster. Vi kaller bankinnskuddet for b, slik at $b = 20000$ i denne oppgaven. Videre kaller vi renten for r, altså er $r = 1.03$ i denne oppgaven.

År	**Antall år etter start** (n)	**Penger på konto** (P_n)
2018	0	b
2019	1	$br + b$
2020	2	$b(r^2 + r + 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2052	34	$b\left(r^{34} + r^{33} + \cdots + r^2 + r + 1\right)$

Dersom P_n er penger etter n år, så er den rekursive regelen at $P_n = P_{n-1}r + b$, altså "pengene i år er pengene fra forrige år, ganget med renten, pluss et nytt bankinnskudd." Generelt får vi at $P_n = b\left(r^n + r^{n-1} + \cdots + r^2 + r + 1\right)$. Når vi setter inn $n = 34$, $b = 20000$ og $r = 1.03$ får vi

$$P_{34} = 20000\left(1.03^{34} + 1.03^{33} + \cdots + 1.03^2 + 1.03 + 1\right) = b\sum_{i=0}^{34} r^i$$

I Geogebra gjør vi som vist i figur 3. Svaret blir $\underline{\underline{1209242}}$.



Figur 3: Skjermbilde fra CAS for oppgave 2a, del 2.

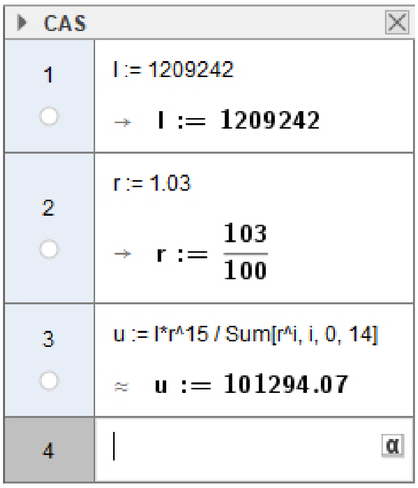
b) Igjen kan det være nyttig å sette opp en tabell. Vi lar $I = 1209242$ være innskuddet som Ingrid har spart opp i 2052. Vi antar at Ingrid har pengene på samme konto fra 2052 til 2053, og lar $r = 1.03$ være renten og u være det ukjente uttaket.

År	**År etter første uttak** (n)	**Penger på konto** (P_n)
2052	-1	I
2053	0	$Ir - u$
2054	1	$Ir^2 - u(r+1)$
2055	2	$Ir^3 - u(r^2+r+1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2067	14	$Ir^{15} - u(r^{14} + r^{13} + \cdots + r^2 + r + 1)$

Den rekursive regelen er lik den forrige, men nå tar vi ut u hvert år. Regelen er $P_n = P_{n-1}r - u$. Kontoen skal være tom etter 14 år, så vi løser

$$P_{14} = Ir^{15} - u(r^{14} + r^{13} + \cdots + r^2 + r + 1) = Ir^{15} - u\sum_{i=0}^{14} r^i = 0$$

I Geogebra løser vi som vist på figur 4. Svaret blir $\underline{\underline{101294}}$.



Figur 4: Skjermbilde fra CAS for oppgave 2b, del 2.

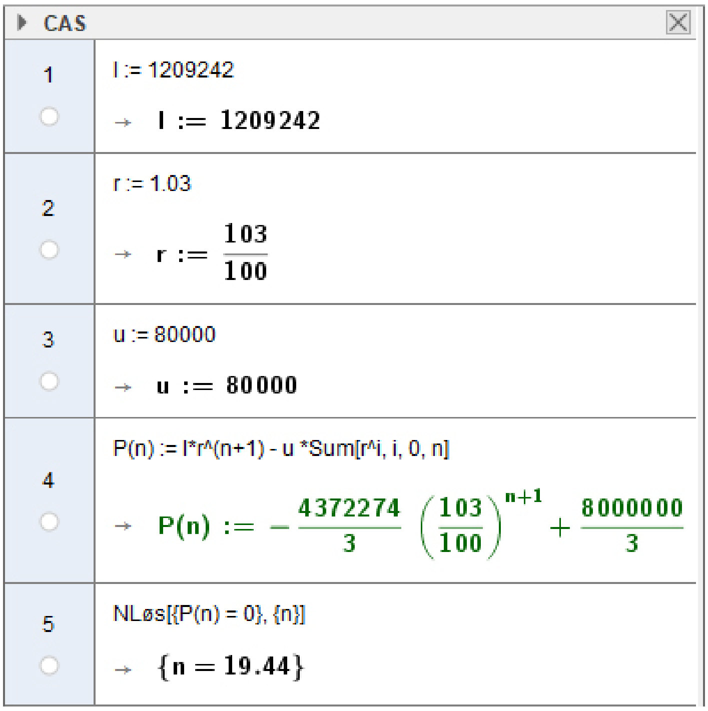
c) Fra forrige oppgave vet vi at

$$P_n = Ir^{n+1} - u(r^n + r^{n-1} + \cdots + r^2 + r + 1) = Ir^{n+1} - u\sum_{i=0}^{n} r^i$$

der n er antall år etter 2053. Vi løser $P_n = 0$ som vist i figur 5. Kontoen er tom 19.44 år etter 2053, altså i år 2072.44. Oppgaven spør når kontoen vil være tom: man vil kunne ta ut et fullt uttak i 2072, men i 2073 vil man ta ut et ufullstendig uttak som vill tømme konto. Kontoen vil tømmes i $\underline{\underline{2073}}$.

Oppgave 3

a) La $X = \mathcal{N}(\mu = 30, \sigma = 3)$ være levetiden til et tilfeldig valg batteri. Vi kan bruke sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra, som er raskt og enkelt. Her viser



Figur 5: Skjermbilde fra CAS for oppgave 2c, del 2.

jeg hvordan oppgaven kan regnes ut ved hjelp av standardnormalfordelingstabellen:

$$
\begin{aligned}
P(X < 27) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{27-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z < \frac{27-30}{3}\right) \\
&= P\left(Z < -1\right) \\
&= \underline{\underline{0.1587}}
\end{aligned}
$$

b) La Y være forventet levetid for batteriene, altså gjennomsnittlig levetid for batteriene. Levetiden til et batteri er en stokastisk variabel $X = \mathcal{N}(\mu = 30, \sigma = 3)$, og levetiden til gjennomsnittet er da gitt ved $Y = \mathcal{N}(\mu_Y = 30, \sigma_Y = \sigma/\sqrt{n})$. Vi setter opp hypotesene slik:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \quad Y = 30 \\
H_1 &: \quad Y < 30
\end{aligned}
$$

Den observerte verdien for Y, her kalt Y_{obs}, blir er:

$$
Y_{\text{obs}} = \frac{29+31+32+27+29+25+23+30+26}{9} = 28
$$

La oss bruke p-verdien til å trekke en konklusjon. p-verdien er sannsynligheten for noe like ekstremt, eller mer ekstremt, som den observerte Y_{obs}, gitt at H_0

er sann. Dersom H_0 er sann er Y normalfordelt med forventing $\mu_Y = 30$ og $\sigma_Y = \sigma/\sqrt{n} = 3/\sqrt{9} = 1$.

$$\begin{aligned} p\text{-verdi} &= P(Y < Y_{\text{obs}} | H_0 \text{ er sann}) = P(Y < 28) \\ &= P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} < \frac{28 - 30}{1}\right) \\ &= P(Z < -2) \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

Gitt at H_0 er sann er det altså 2.28% sannsynlig å trekke ut batterier slik at $Y < Y_{\text{obs}}$. Ettersom p-verdien er lavere enn $\alpha = 0.05$ så $\underline{\underline{\text{forkaster vi } H_0}}$.

Oppgave 4

a) Vi legger dataene inn i regnearket i Geogebra, deretter markerer vi og trykker "Regresjonsanalyse" oppe til venstre. Vi velger "logistisk regresjon". Se figur 6 for et skjermbilde. Svaret blir $\underline{\underline{N = 10095,\ a = 49.5 \text{ og } k = 0.50}}$.

b) Vi skriver inn funksjonen $f(x) = 10000/(1 + 50e^{-0.5x})$ i Geogebra med kommandoen
`f(x) = 10000 / (1 + 50e^(-0.5*x))`
Deretter laget vi en linje `y = 7000` og velger "Punkt → Skjæring mellom to objekt" for å få punktet $(9.518, 7000)$. Antall smittede personer per uke er 7000 etter $\underline{\underline{\text{9.5 uker}}}$, altså passerer vi 7000 smittede i uke 9 etter at sykdommen brøt ut.

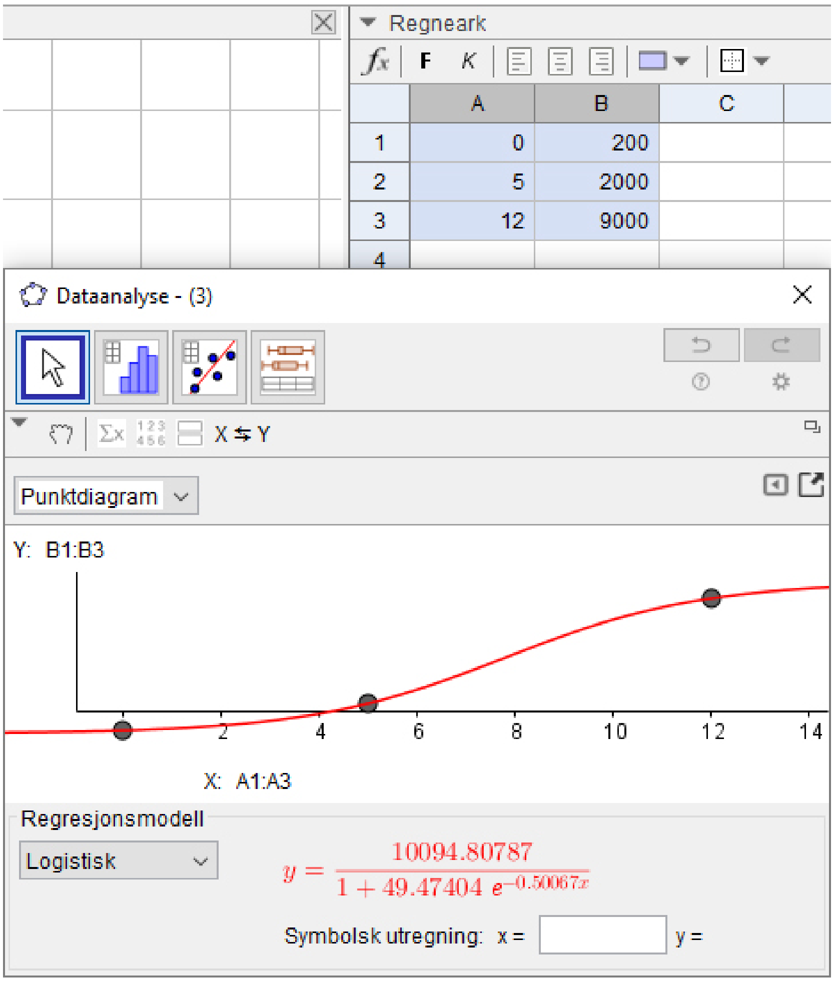
c) Bruk kommandoen `I = Integral[f, 0, 12]`. Integralet blir 43700.25. Integralet av en funksjon er "summen av funksjonen." Tolkningen her er at integralet er summen av antall smittede per uke, summert fra uke 0 til uke 12, altså totalt antall smittete i perioden.

$$\int_0^{12} \underbrace{f(t)}_{\text{smittede / uke}} \underbrace{dt}_{\text{uke}} = \text{totalt antall smittede fra uke 0 til uke 12} = \underline{\underline{43700}}$$

d) Vi løser likningen

$$\int_0^T f(t)\ dt = 15000$$

for den ukjente T ved `NLøs[{Integral[f, 0, T] = 15000}, {T}]` i CAS, og vi får $T = 8.12$ som svar. Det tar rett $\underline{\underline{\text{over 8 uker}}}$ før 15000 personer er smittet totalt.



Figur 6: Skjermbilde fra CAS for oppgave 4a, del 2.