

Løsningsforslag – Eksamen S2, våren 2014

Laget av Tommy O.

Sist oppdatert: 27. april 2018

Antall sider: 10

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på https://github.com/matematikk/vgs_eksamener.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Vi skal derivere $f(x) = 3/x^2$. Vi skriver om til $f(x) = 3x^{-2}$ og deriverer slik

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^{-2})' \\ &= 3(-2)x^{-3} \\ &= -\frac{6}{x^3}. \end{aligned}$$

- b) Vi skal derivere $g(x) = xe^{-4x}$, og må her bruke produkregelen $(uv)' = u'v + uv'$ slik

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x)'e^{-4x} + x(e^{-4x})' \\ &= 1e^{-4x} + x(-4)e^{-4x} \\ &= e^{-4x} - 4xe^{-4x} \\ &= \underline{\underline{e^{-4x}(1 - 4x)}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi ser på funksjonen

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4, \quad D_P = \mathbb{R}$$

- a) Vi setter inn $x = 2$ i $P(x)$ og får $P(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = \underline{\underline{0}}$.
- b) Ettersom $P(2) = 0$, vet vi at $(x - 2)$ må være en faktor i $P(x)$. Vi utfører divisjonen og får

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + 4) : (x - 2) = x^2 - x - 2 \\ \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\ -x^2 \\ \underline{-(x^2 - 2x)} \\ -2x + 4 \\ \underline{-(2x - 4)} \\ 0 \end{array}$$

Nå vet vi at $P(x) = (x - 2)(x^2 - x - 2)$, og ved hjelp av ABC formelen finner vi ut at $(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x + 1)$, altså kan vi faktorisere $P(x)$ som

$$\underline{\underline{P(x) = (x - 2)^2(x + 1).}}$$

En enkel metode for å sjekke om dette svaret er riktig er å gange sammen disse faktorene og se at du får $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ tilbake.

Oppgave 3

- a) Dette er en aritmetisk rekke med $a_1 = 3$, differanse $d = 3$ og siste ledd $a_n = 300$. For å finne ut antall ledd n kan vi bruke formelen $a_n = a_1 + d(n - 1)$, vi får da

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n - 1) \\ 300 &= 3 + 3(n - 1) \\ 99 &= n - 1 \\ n &= 100. \end{aligned} \tag{1}$$

Nå har vi alt vi trenger for å bruke summeformelen for en aritmetisk rekke, vi løser slik

$$S = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n = \left(\frac{3 + 300}{2} \right) 100 = 303(50) = \frac{30300}{2} = \underline{\underline{15150}}.$$

- b) Dersom $a_1 = 4$ kan vi bruke formelen og finne ut at $a_3 = a_1 + 8 = 4 + 8 = 12$. Vi setter så dette inn i formel (1) brukt i forrige oppgave, og får at

$$a_3 = a_1 + d(3 - 1) \Leftrightarrow 12 = 4 + d2 \Leftrightarrow d = 4,$$

og da må $a_2 = a_1 + d = 4 + 4 = \underline{\underline{8}}$.

Oppgave 4

Vi bruker følgende variabler: v er antall voksne, b er antall barn og p er antall pensjonister som møtte på konserten. Hver setning gir oss én likning:

- “Det ble solgt 80 billetter.” $\Rightarrow v + b + p = 80$ (A)
- “Billettinntektene var 5000 kroner.” $\Rightarrow 100v + 50b + 60p = 5000$ (B)
- “Like mange til barn som til voksne og pensjonister til sammen.”
 $\Rightarrow -v + b - p = 0$ (C)

Vi legger sammen likning (A) og likning (C), og får at $2b = 80$, altså er $\underline{\underline{b = 40}}$. Deretter setter vi $b = 40$ inn i likning (A) og (B), og får

$$\begin{aligned} v + p &= 40 \quad (\text{D}) \\ 100v + 60p &= 3000 \quad (\text{E}) \end{aligned}$$

Vi regner ut $100 \times (D) - (E)$, og får at $40p = 1000$. Da er $p = 25$, setter vi inn dette i likning (D) finner vi også ut at $v = 15$.

Oppgave 5

- a) Generelt så har $f'(x)$ topp- og bunnpunkt når $f'(x) = 0$. Her er $f'(x) = 0$ når $x = -2$ og når $x = 6$. Vi ser at $x = -2$ er et toppunkt og $x = 6$ er et bunnpunkt. Grafen vokser når $f'(x) > 0$, og minker når $f'(x) < 0$. Vi ser også at funksjonen vokser når $x < -2$ og når $x > 6$, og minker når $-2 < x < 6$.

- b) Likningen for tangenten til $f(x)$ i et punkt x_0 er gitt ved

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vi får oppgitt punktet $(x_0, f(x_0)) = (4, 3)$, og fra grafen til $f'(x)$ ser vi at $f'(x_0) = f'(4) = -3$. Vi får altså følgende tangentlinje:

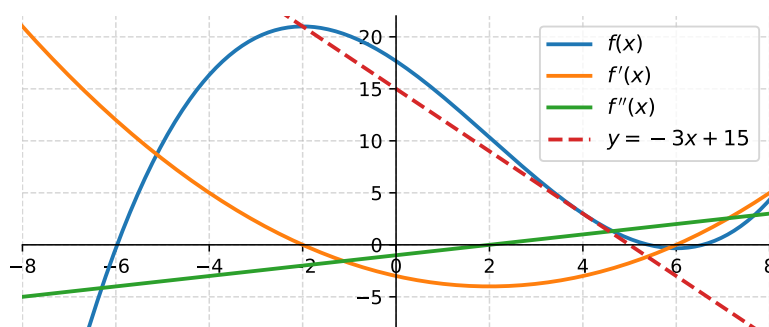
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(4) + f'(4)(x - 4)$$

$$y = 3 + -3(x - 4)$$

$$\underline{\underline{y = -3x + 15}}$$

- c) Funksjonen $f''(x)$ er positiv når $f'(x)$ stiger, og negativ når $f'(x)$ synker. Med andre ord er $f''(x) < 0$ når $x < 2$, og $f''(x) > 0$ når $x > 2$. Vendepunktet oppstår når $f''(x)$ endrer fortegn, altså når $x = 2$.
- d) Basert på den deriverte, samt kjennskap til bunnpunkt og toppunkt, burde du klare å lage en skisse som ligner på $f'(x)$ vist i Figur 1.



Figur 1: Funksjonene fra oppgave 5, del 1.

Oppgave 6

- a) Her må vi bruke forventningsverdier og utfallsrom. Både X_2 og X_4 har $n > 10$, så disse må samsvare med figurene (1) og (3), ettersom disse har positive sannsynligheter for $X > 10$. Ettersom $E(X_2) = np = 100(0.06) = 6$ og $E(X_4) = 5$, så velger vi $\underline{\underline{X_2 = (3)}}$ og $\underline{\underline{X_4 = (1)}}$, ettersom dette samsvarer best med høyeste stolpe på figurene. Basert på forventningsverdiene til X_1 og X_3 så velger vi $\underline{\underline{X_1 = (2)}}$ og $\underline{\underline{X_3 = (4)}}$.
- b) Det må være $\underline{\underline{X_2}}$ (figur (3)), fordi alle andre arealer er for små. Ettersom det er satt tall på aksene er det mulig å gjøre en grov utregning av arealet ved å lese av søylene, og da ser man at de andre er for små.
- c) Variabelen med størst standardavvik er den som har størst varians, ettersom $SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$, og $a > b$ impliserer at $\sqrt{a} > \sqrt{b}$. Når X er binomisk fordelt er $\text{Var}(X) = np(1-p)$, vi regner ut alle variansene (det er Del 1, så vi trenger ikke å regne nøye):

$$\text{Var}(X_1) = np(1-p) = 10(0.6)0.4 = 2.4$$

$$\text{Var}(X_2) = np(1-p) = 100(0.06)0.94 \approx 6$$

$$\text{Var}(X_3) = np(1-p) = 10(0.4)0.6 = 2.4$$

$$\text{Var}(X_4) = np(1-p) = 50(0.1)0.9 = 4.5$$

Vi ser at $\underline{\underline{X_2}}$ har størst varians, og derfor også størst standardavvik.

Del 2 - med hjelpemidler

Oppgave 1

- a) Omkretsen til en sirkel er $O = 2\pi r$, så halve omkretsen bli πr . Vi ser at

$$O_1 = \frac{(2r)}{2}\pi = r\pi$$

$$O_2 = \frac{(r)}{2}\pi = r\pi/2$$

$$O_3 = \frac{(r/2)}{2}\pi = r\pi/2^2$$

$$\vdots = \vdots$$

$$O_n = \frac{(r/2^{n-2})}{2}\pi = r\pi/2^{n-1},$$

og summer blir en uendelig geometrisk rekke fordi

$$S = O_1 + O_2 + \dots = r\pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \quad (2)$$

- b) Vi vet at $1+k+k^2+k^3+\dots = 1/(1-k)$, dette er summeformelen for en uendelig geometrisk rekke, og den konvergerer (går ikke mot evig) når $-1 < k < 1$. I denne oppgaven er $k = 1/2$, vi setter formelen inn i likning (2) og får

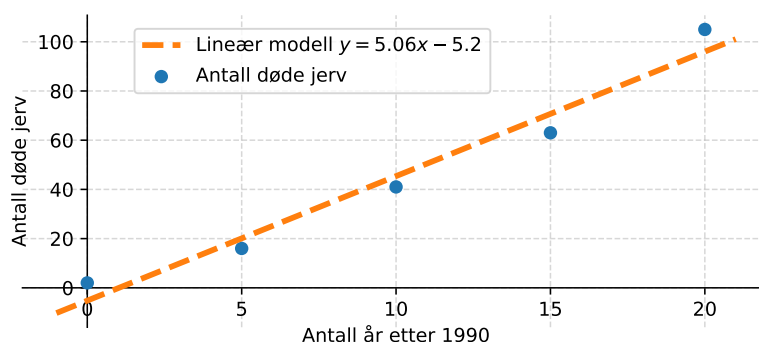
$$S = r\pi \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = r\pi \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = r\pi \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \underline{\underline{2\pi r}}.$$

I Geogebra kan du skrive $S := r * (\pi) * \text{Sum}(1/2^i, i, 0, \infty)$.

Oppgave 2

Årstall	1990	1995	2000	2005	2010
Antall døde jerv	2	16	41	63	105

- a) Her virker en lineær modell best, basert på hvordan linjen passer til datene, se Figur 2.
- b) Evaluer funksjonen $y(x) = 5.06x - 5.2$ i punktet $x = 24$. Vi får $y(24) = 5.06(24) - 5.2 = 116.24$. Ifølge modellen kan vi forvente 116 døde jerv registrert i 2014.



Figur 2:

- c) Vi kan løse på 2 forskjellige måter

$$1) f(x) := 5.06 \cdot x - 5.2 \quad \text{Sum}(f(x), x, 0, 24) \text{ gir } 1388$$

Oppgave 3

- a) Vi legger dataene inn i regnearket i Geogebra, og velger en lineære regresjonsmodell. Vi får $p(x) = -0.224x + 2219.17$. Inntekten er prisen ganget med antall varger solgt, vi får

$$\underline{\underline{I(x) = p(x) \times x = -0.224x^2 + 2219.17x.}}$$

- b) Definer $I(x)$ og $K(x)$ i CAS ved å skrive inn
 $I(x) := -0.22421189 * x^2 + 2219.1684 * x$ (se notat¹) og
 $K(x) := 0.03 * x^2 + 15 * x + 605000$. Bruker deretter CAS til å regne ut:

$$I'(3000) = 873.9$$

$$K'(3000) = 195$$

Ettersom overskuddet $O(x) = I(x) - K(x)$, vil overskuddet øke dersom $I'(x) > K'(x)$ og vi produserer mer. Vi bør øke produksjonen.

- c) Skriv inn `Løs[I'(x) > K'(x), x]` i CAS, svaret blir $x < 4335.3$. Vi bør produsere mer dersom vi produserer mindre enn 4335 varer.
- d) Overskuddet $O(x)$ er størst når $O'(x) = 0$. Da er $I'(x) = K'(x)$, så vi skriver `Løs[I'(x) = K'(x), x]` og får $x = 4335.3$ som svar. Bedriften må produsere og selge 4335 enheter for at overskuddet skal være størst².

Oppgave 4

- a) Vi bruker formelen for volum, og løser for h slik:

$$\text{Volum} = (\text{Høyde}) \times (\text{Bredde}) \times (\text{Lengde})$$

$$10 = h \times x \times 2x$$

$$h = \frac{5}{x^2}$$

- b) Den totale kostnaden er summen av kostnad per kvadratmeter, ganget med areal i kvadratmeter, for alle sidene. Her er en detaljert forklaring.

$$\text{Total kostnad} = \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Sider}} + \underbrace{\frac{\text{Kostnad}}{m^2} \times m^2}_{\text{Bunn}}$$

$$\text{Total kostnad} = \underbrace{60 \times (2(2x \times h + x \times h))}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}$$

$$K(x) = 60 \times \underbrace{\left(2 \left(2x \times \frac{5}{x^2} + x \times \frac{5}{x^2} \right) \right)}_{\text{Sider}} + \underbrace{100 \times (2x \times x)}_{\text{Bunn}}$$

$$K(x) = 120 \times \left(\frac{10}{x} + \frac{5}{x} \right) + 200x^2$$

$$K(x) = \frac{1800}{x} + 200x^2$$

¹Her er det viktig å ta med rikelig med desimaler. Tar du med for få desimaler vil svarene i de neste oppgavene ikke bli like nøyaktige.

²Det er ingen garanti for at å runde av 4335.3 til 4335 gir beste overskudd. Du kan sammenligne $O(4334)$, $O(4335)$ og $O(4336)$ og velge den største for å være sikker på at du har rett svar.

- c) Definer funksjon med $K(x) := 200x^2 + 1800/x$ i CAS i Geogebra. Bruk deretter **Ekstremalpunkt**(K, 0.1, 10) til å finne den minimale prisen. Vi finner at $x = \text{bredde} = 1.64\text{m}$, $2x = \text{lengde} = 3.3\text{m}$ og $h = 5/x^2 = \text{høyde} = 1.83\text{m}$. Den minste kostnaden ved å produsere containeren er 1635 kr. Se Figur 3 for et skjembilde av CAS-utregning.

CAS	
1	$K(x) := 200x^2 + 1800/x$
•	$\rightarrow K(x) := 200x^2 + \frac{1800}{x}$
2	$A := \text{Ekstremalpunkt}(K, 0.1, 10)$
•	$\rightarrow A := (1.65, 1635.41)$

Figur 3: Skjembilde av CAS for oppgave 4, del 2.

Oppgave 5

- a) La X være antallet som blir trukket ut av $n = 3$ personer. Da er X binomisk fordelt med $n = 3$ og $p = 0.1$, og $P(X = 3)$ er gitt ved

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{3}{3} 0.1^3 (1-0.1)^{3-3} = 0.1^3 = \underline{\underline{0.001 = 0.1\%}}.$$

Det er enda enklere å tenke at tre personer må trekkes på rad, og at sannsynligheten for at én blir trukket er $p = 0.1$, så da er sannsynligheten for at tre blir trukket på rad lik $p^3 = 0.1^3 = 0.001 = 0.1\%$.

- b) Den stokastiske variabelen X er binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0.1$. Vi bruker formlene for forventning og standardavvik for binomisk fordeling.

$$E(X) = np = 1000(0.1) = \underline{\underline{100}}$$

$$SD(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \underline{\underline{\sqrt{90} \approx 9.49}}$$

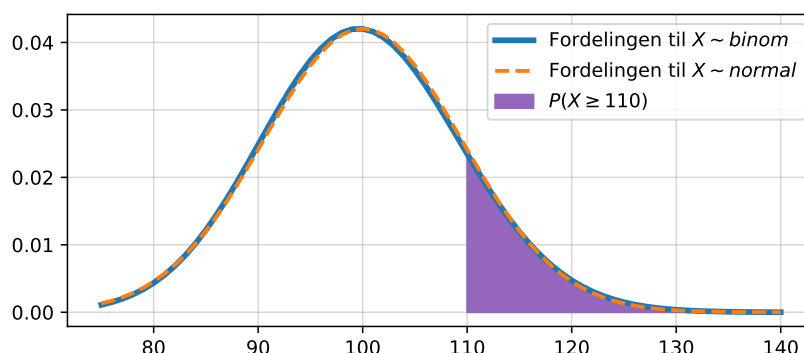
Fordelingen til X er vist i Figur 4.

- c) Vi setter opp hypotesene

$$H_0 : p = 0.1$$

$$H_1 : p > 0.1$$

og bruker signifikansnivå 5%. Vi forkaster nullhypotesen dersom sannsynligheten for å få x_{obs} er mindre enn 5%, gitt at $p = 0.1$. I vårt tilfelle er $x_{\text{obs}} = 110$. Vi må finne sannsynligheten for at $X \geq x_{\text{obs}}$, gitt at $p = 0.1$. Med andre ord må vi finne $P(X \geq 110 | p = 0.1)$.



Figur 4: Fordelingen til $X \sim \text{Binom}(n = 1000, p = 0.1)$, normalapproximasjonen $X \sim \text{Normal}(\mu = np, \sigma^2 = np(1 - p))$ og arealet under grafen når $X \geq 110$.

- 1) Det enkleste er å se på X som binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0.1$, da gir sannsynlighetskalkulatoren i Geogebra oss at $P(X \geq 110) = 0.1583 = 15.5\%$. Vi kan med andre ord ikke forkaste H_0 .
- 2) Her er også både np og $n(p - 1)$ større enn 5, så vi kan alternativt bruke normalapproximasjon med $\mu = np = 100$ og $\sigma = \sqrt{1000(0.1)(0.9)} = \sqrt{90}$. Normalapproximasjonen er plottet i Figur 4, og som du ser stemmer den veldig godt overens med den binomiske fordelingen. På eksamen ville jeg svart med binomisk fordeling, men jeg viser normalapproximasjonen her.

Vi regner ut $P(X \geq 110) \cong P(X_{\text{norm}} \geq 109.5) = 0.1583 = 15.5\%$ i Geogebra. Legg merke til “halvkorreksjon”, som brukes når vi går fra en diskret fordeling med søyler til en glatt, kontinuerlig fordeling. De første 4 desimalene er helt like, og konklusjonen er selvsagt den samme—vi forkaster H_0 .

Oppgave 6

- a) Vi beregner nåverdi for begge alternativene og setter de lik hverandre.

Måned	Innbetaling	Nåverdi av innbetaling
1	x	$\frac{x}{1.016}$
2	x	$\frac{x}{1.016^2}$
3	x	$\frac{x}{1.016^3}$
\vdots	\vdots	
36	x	$\frac{x}{1.016^{36}}$

Vi setter nåverdiene av innbetalingene lik dagens betaling, for får likning som vist i oppgaven.

$$7995 + 30 = \frac{x}{1.016} + \frac{x}{1.016^2} + \cdots + \frac{x}{1.016^{36}}$$

For å løse likningen på papir kan vi gange begge sider med 1.016^{36} og bruke summeformelen for en geometrisk rekke. På eksamen er det nok enklere å bruke CAS, skriv `NLøs({8025 = Sum(x/1.016^i, i, 1, 36)}, {x})`, da får du at $x = 294.98$ kr.

- b) Dette er samme problem som i forrige oppgaven, men nå er terminbeløpet kjent og renten er ukjent. Vi må løse

$$7995 = \frac{289}{r} + \frac{289}{r^2} + \cdots + \frac{289}{r^{36}},$$

der r er den månedlige renten. Vi bruker CAS i Geogebra også her, og taster inn `NLøs({7995 = Sum(289/r^i, i, 1, 36)}, {r})` og finner at $r = 1.015$, slik at den månedlige renten er 1.5 %.

- c) Dette er også en geometrisk rekke. Vi setter opp en tabell, der r er den ukjente, månedlige renten. Hver måned får man rente på den eksisterende verdien, og nye 650 kr blir satt inn. Dersom V_n er verdien i år n , er $V_n = V_{n-1}r + 650$.

Innbetaling	Verdi
1	650
2	$650r + 650$
3	$(650r + 650)r + 650 = 650r^2 + 650r + 650$
\vdots	\vdots
12	$650r^{11} + 650r^{10} + \cdots + 650r^2 + 650r + 650$

Like etter den 12. månedlige innbetalingen har hun 8107 kr, da får vi likningen

$$8107 = 650r^{11} + 650r^{10} + \cdots + 650r^2 + 650r + 650.$$

Det er også mulig å løse denne med summeformelen for en geometrisk rekke, men det er enklere å skrive `NLøs({8107 = Sum(650*r^i, i, 0, 11)}, {r})` inn i CAS. Da finner vi ut at den månedlige renten er 0.7 %.

Oppgave 7

Halveringstiden er 6 timer, men pasienten får én tablett hver 12. time. Da rekker kroppen å halvere to ganger—med andre ord reduseres mengden med stoffet med $1/4$ hver 12. time.

Time	Milligram
0	60
12	$60/4 + 60$
24	$60/4^2 + 60/4 + 60$
36	$60/4^3 + 60/4^2 + 60/4 + 60$
\vdots	\vdots

Vi bruker formelen $1 + k + k^2 + \dots = 1/(1 - k)$ til å regne ut summen S av den evige geometriske rekken slik:

$$\begin{aligned} S &= 60 + \frac{60}{4} + \frac{60}{4^2} + \frac{60}{4^3} + \dots \\ &= 60 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\ &= 60 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = 60 \left(\frac{1}{\frac{3}{4}} \right) = 60 \left(\frac{4}{3} \right) = \underline{\underline{80}} \end{aligned}$$

Du kan også skrive `Sum(60/4^i, i, 0, ∞)` inn i CAS. Du får samme svar. På eksamen er det lurt å gjøre så mye som mulig i Geogebra, men jeg prøver å vise at det er mulig å løse uten Geogebra også.