Løsningsforslag – Eksamen R1, høsten 2017

Laget av Anita G. Sist oppdatert: 2. januar 2019 Antall sider: 3

Finner du matematiske feil, skrivefeil, eller andre typer feil? Dette dokumentet er open-source, alle kan bidra på `https://github.com/matematikk/vgs_eksamener`.

Del 1 - uten hjelpemidler

Oppgave 1

a) Vi skal derivere $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, og gjør dette ved hjelp av regelen $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$. $\underline{\underline{f'(x) = 6x - 2}}$.

b) Her ser vi at funksjonen er sammensatt av to funksjoner: x^2 og e^x. Vi bruker derfor produktregelen. $g'(x) = 2xe^x + x^2e^x = \underline{\underline{xe^x(2+x)}}$.

c) Her får vi bruk for kjerneregelen, der vi setter $u = x^3 - 1$ som kjernen. $h'(x) = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{x^3-1} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3-1}}}$.

Oppgave 2

a) Her må vi ta i bruk logaritmesetningene. Disse er: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ og $\ln(a^x) = x\ln(a)$.

$$\begin{aligned}
&2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \\
&= 2\ln b - (\ln 1 - \ln b) - (\ln a + \ln b^2) + (\ln a - \ln b^2) \\
&= 2\ln b - 0 + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b \\
&= -\ln b
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a) $\vec{a} - 2\vec{b} = [3,1] - 2\cdot[4,2] = [3,1] - [8,4] = \underline{\underline{[-5,-3]}}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = [3,1]\cdot[4,2] = 3\cdot 4 + 1\cdot 2 = 12 + 2 = \underline{\underline{14}}$.

c) Hvis de to vektorene $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er parallelle, finnes det et tall k slik at $\vec{b} = k \cdot \vec{c}$.

$[4,2] = k\cdot[t+1,3]$

Dette gir oss to likninger

$$
\begin{aligned}
4 &= k \cdot (t+1) \\
2 &= 3k
\end{aligned}
$$

Fra likning 2 ser vi at $k = \frac{2}{3}$, og dette setter vi inn i likning 1 for å finne t.

$$
\begin{aligned}
4 &= \frac{2}{3} \cdot (t+1) \\
\frac{3}{2} \cdot 4 &= t+1 \\
\frac{12}{2} - 1 &= t \\
6 - 1 &= t \\
t &= 5
\end{aligned}
$$

De to vektorene er parallelle dersom $\underline{\underline{t = 5}}$.

d) $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$|\vec{c}| = \sqrt{(t+1)^2 + 3^2}$

Her kan vi enten se ut fra utrykkene hva t må være, eller vi kan regne ut t ved å sette uttrykkene lik hverandre.

Den første metoden kan vi bruke fordi vi ser at begge utrykkene under rottegnene inneholder leddet 3^2. For at hele uttrykket da skal være likt, må også de to andre leddene være like. Altså må $(t+1)^2 = 1^2$, og dette er tilfellet når $t = 0$ eller $t = -2$.

Slike ting er ikke alltid like lett å se, men i dette tilfellet kan vi heldigvis også finne de aktuelle t-verdiene ved regning. De to uttrykkene under rotegnene må fremdeles være like, og dermed får vi likningen

$$
\begin{aligned}
(t+1)^2 + 3^2 &= 10 \\
t^2 + 2t + 1 + 9 - 10 &= 0 \\
t^2 + 2t &= 0 \\
t(t+2) &= 0
\end{aligned}
$$

Denne likningen er oppfylt dersom $\underline{\underline{t = 0 \text{ eller } t = -2}}$.

Oppgave 4

a) Arealet av en trekant er gitt ved formelen $A = \frac{\text{grunnlinje}\cdot\text{høyde}}{2}$. I vår trekant ser vi at grunnlinjen er $g = x$ og høyden er $h = f(x)$. Da blir arealet av trekanten

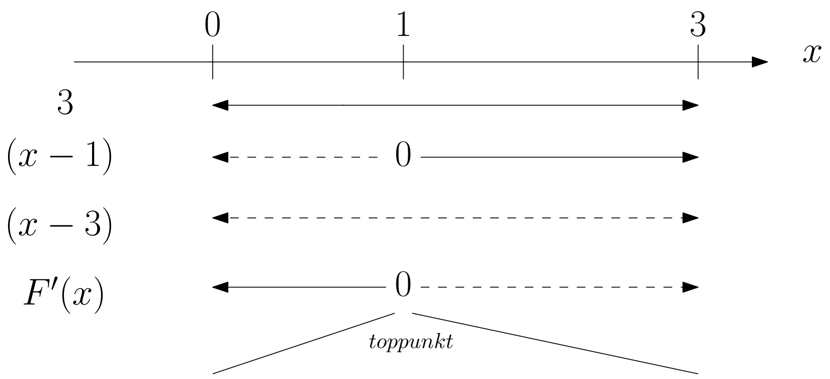
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x \cdot f(x)}{2} \\ &= \frac{x \cdot 2(x-3)^2}{2} \\ &= x(x-3)^2 \\ &= x(x^2 - 6x + 9) \\ &= x^3 - 6x^2 + 9x \end{aligned}$$

b) For å finne den x-verdien som gir størst areal må vi derivere funksjonen for arealet og finne toppunktet til denne.

$F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Vi faktoriserer den deriverte ved hjelp av nullpunktene. Disse kan finnes ved hjelp av abc-formelen. $\rightarrow F'(x) = 3(x-1)(x-3)$

Deretter tegner vi fortegnslinje. Her er det lurt å være obs på definisjonsmengden til funksjonen ($0 < x < 3$).



Ut i fra definisjonsmengden ser vi at det er kun $x = 1$ som gir mulighet for et toppunkt, og ut i fra fortegnslinjen ser vi at dette punktet faktisk er et toppunkt. Det vil si at arealet er størst når $x = 1$.